UM MÉTODO EXATO PARA PROBLEMAS BILEVEL LINEARES COM MÚLTIPLAS FUNÇÕES OBJETIVO NO NÍVEL INFERIOR

Maria João Alves [1,3]
(mjalves@fe.uc.pt)

Carlos Henggeler Antunes [2,3]
(ch@deec.uc.pt)

1 CeBER e Faculdade de Economia, Univ. de Coimbra
2 Dep. Eng. Eletrotécnica e de Computadores, Univ. de Coimbra
3 INESC Coimbra

io2021 ANALYTICS FOR A BETTER WORLD

PROBLEMA — (BLMO)

$$\max_{x,y} \; F(x,y) = c^1 x + d^1 y$$

s.a:

$$A^1 x \le b^1$$
$$x \ge 0$$

$$\left.\begin{array}{l} \max_{y} f_i(y) = d_i^2 y \quad i = 1,\cdots,p \\ \text{s.a:} \\ \quad A^2 x + B^2 y \le b^2 \\ \quad y \ge 0 \end{array}\right\} MOLL(x)$$

Líder: controla $x \in R^{n_1}$
Seguidor: controla $y \in R^{n_2}$

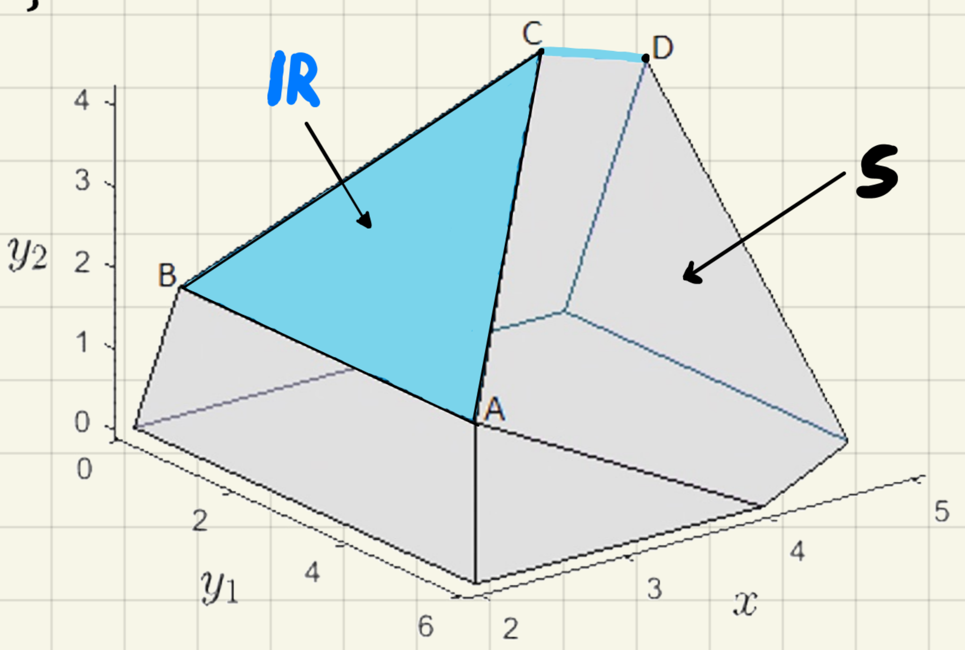
Solução **ótima otimista**: otimiza $F(x,y)$ na **região induzida:** $IR = \{(x,y) \in S:\; y \in \Psi_{ef}(x)\}$

$S = \{(x,y): A^1 x \le b^1, A^1 x + B^2 y \le b^2, x, y \ge 0\}$ → região das restrições

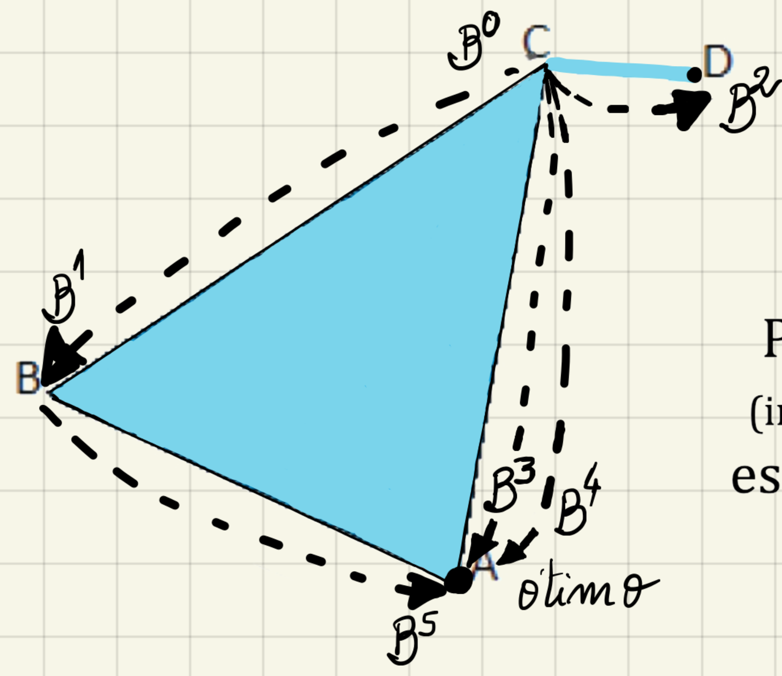
$\Psi_{ef}(x)$→ todas as soluções eficientes de $MOLL(x)$, problema **multiobjetivo** do seguidor para um dado x.

Sabe-se que:

- IR é composta pela união de faces de S
- Uma/a solução ótima de BLMO está num vértice de IR



VE ⚔ K-th BEST

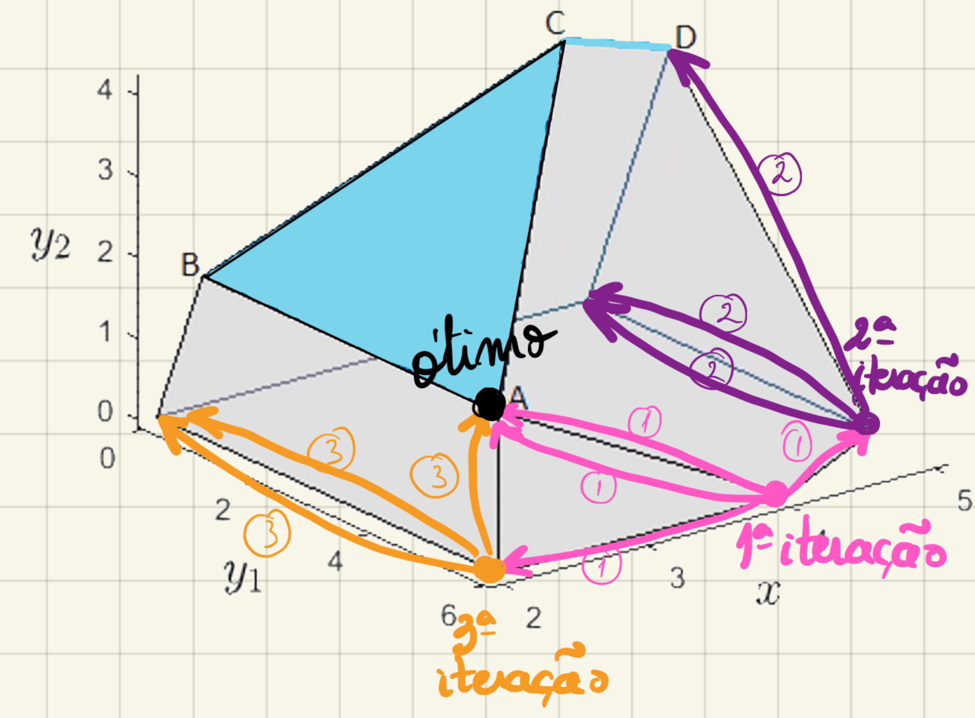


Algoritmo VE

Pesquisa **6** bases em IR (incluindo bases degeneradas) e escolhe a melhor: ponto A

Algoritmo *k-th best*

Pesquisa **11** bases em S (incluindo bases degeneradas) até chegar a IR: ponto A



Alguns resultados computacionais:

Problema	F^*	VE #bases	VE tempo (s)	VE F obtido	k-th best #bases	k-th best tempo (s)	k-th best F obtido
n_1=5, n_2=10, n_1=10							
a_5_10_10	616.76	**282**	**0.26**	*ótimo*	340	0.36	*ótimo*
b_5_10_10	1016.68	335	0.33	*ótimo*	**29**	**0.02**	*ótimo*
c_5_10_10	366.19	**143**	**0.12**	*ótimo*	269	0.23	*ótimo*
d_5_10_10	488.91	399	**0.39**	*ótimo*	**389**	0.40	*ótimo*
n_1=10, n_2=20, n_1=20							
a_10_20_20	2598.90	>50000	762.2	2518.44	97826	**541.9**	*ótimo*
b_10_20_20		>50000	710.3	**1730.10**	>100000	575.7	*Não adm.*
c_10_20_20		>50000	405.4	**2932.42**	>100000	576.2	*Não adm.*
d_10_20_20	3692.22	>50000	502.2	*ótimo*	**29186**	**65.5**	*ótimo*
n_1=5, n_2=50, n_1=50							
a_5_50_50		>50000	535.9	**3614.24**	>100000	450.9	*Não adm.*
b_5_50_50		>50000	564.8	**5949.92**	>100000	707.0	*Não adm.*
c_5_50_50		>50000	516.6	**8500.70**	>100000	504.6	*Não adm.*
d_5_50_50		>50000	516.65	**2342.99**	>100000	522.6	*Não adm.*

RESULTADO TEÓRICO

Problema multiobjetivo *substituto* (com $p + n_1$+1 funções objetivo):

$$\left.\begin{array}{lll} max & f_j(y) = d_j^2 y & j = 1,\cdots,p \\ max & x_i & i = 1,\cdots,n_1 \\ max & \sum_{i=1}^{n_1}(-x_i) & \\ s.a: & (x,y) \in S & \end{array}\right\} (PMOS)$$

Proposição: (x', y') é admissível de BLMO (i.e., pertence a IR) *sse* é uma solução eficiente do problema PMOS.

Corolário: existe pelo menos uma solução extrema (vértice) eficiente de PMOS que é ótima de BLMO.

ALGORITMO PROPOSTO VE

Baseado no corolário, pesquisa todos os **vértices eficientes** de PMOS e seleciona o ponto com maior $F(x,y)$:

i) Calcula uma 1ª base eficiente de PMOS, $\mathcal{B}^0$ (otimizando uma soma pesada) e insere $\mathcal{B}^0$ na lista $\mathcal{L}_\mathcal{B}$

ii) Determina todas as bases $\mathcal{B}$ **eficientes** adjacentes a $\mathcal{B}^0$. Se $\mathcal{B} \notin \mathcal{L}_\mathcal{B}$, então $\mathcal{L}_\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{L}_\mathcal{B} \cup \{\mathcal{B}\}$.

iii) Repete *ii)* para cada $\mathcal{B} \in \mathcal{L}_\mathcal{B}$

ALGORITMO: K-th BEST [1]

i) Otimiza $F(x,y)$ em S → *sol.candidata*

ii) Verifica se a *sol. candidata* é eficiente de $MOLL(x')$ resolvendo um problema PL auxiliar

- Se for, termina: ótimo de BLMO
- Senão, calcula todas as soluções básicas de S adjacentes à anterior; insere-as na lista Q

iii) Escolhe a solução de Q com maior $F(x,y)$ para *sol. candidata* → *ii)*

CONCLUSÕES

- **Principal desvantagem de VE:** o esforço computacional cresce muito com n_1.
- **Principal vantagem de VE:** ao contrário do *k-th best*, pode ser usado parcialmente para encontrar uma aproximação da solução ótima de BLMO porque devolve sempre uma solução admissível.
- O algoritmo VE pode ser usado para **calcular todas as soluções extremas eficientes** de um qualquer problema de PL multiobjetivo.

[1] Calvete, H. and Galé, C. (2011) 'On linear bilevel problems with multiple objectives at the lower level', Omega, 39(1), pp. 33–40.