

Minimização da Energia Potencial de Sistemas Estruturais Não-Lineares: uma comparação de algoritmos numéricos de programação não-linear

Saete Souza de Oliveira Buffoni [†]

Aline Michelly Silva Moreira [‡]

Milena de Andrade Sacramento [‡]

[†] Universidade Federal Fluminense – UFF
Brasil

saete@vm.uff.br

<http://www.professores.uff.br/saete>

milenasacramento@vm.uff.br

aline_michelly@vm.uff.br

Abstract

The main aim of the present work is to develop a formulation and some strategies for implementation and comparison of methods in nonlinear programming without restriction applied to the calculation of displacements in structural elements, presenting as example the analysis and calculation of the displacements in a truss element through the formulation of the minimum potential energy. The displacements had been calculated through the following methods: Univariate, Gradient Descent Method, Powell Conjugated Directions Method, Fletcher-Reeves Method, Standard Newton Raphson Method, Modified Newton Raphson Method, Rank One Correction Method, Rank Two Correction Method and BFGS Method. The algorithms had been implemented in Fortran language. After the solution of the problem it carries through comparisons between the methods.

Resumo

O presente trabalho trata do estudo e implementação de métodos em programação não-linear sem restrição utilizando os métodos Univariante, Máximo Declive, Powell, Fletcher-Reeves, Newton Raphson Padrão, Newton Raphson Modificado, Rank One Correction, Rank Two Correction e BFGS. O algoritmo é implementado em linguagem fortran. Em seguida a implementação dos métodos executa-se um exemplo para o cálculo dos deslocamentos em uma treliça através da formulação da energia potencial mínima, no qual a função-objetivo é uma função não-linear das variáveis de decisão. Em seguida a solução do problema realiza-se uma comparação entre os métodos.

Keywords: Mathematical programming, optimization without restrictions, Truss Elements, Algorithms.

Title: Potential Energy Minimization of Nonlinear Structural Systems: a comparison of numerical algorithms for nonlinear programming.

1 Introdução

Otimizar é melhorar o que já existe, projetar o novo com mais eficiência e menor custo. A otimização visa determinar a melhor configuração de projeto sem ter que testar todas as possibilidades envolvidas. Problemas de otimização são caracterizados por situações em que se deseja maximizar ou minimizar uma função numérica de várias variáveis, num contexto em que podem existir restrições. Tanto as funções acima mencionadas como as restrições dependem dos valores assumidos pelas variáveis de projeto ao longo do procedimento de otimização.

Pode-se aplicar otimização em várias áreas, como por exemplo, no projeto de sistemas ou componentes, planejamento e análise de operações, problemas de otimização de estruturas, otimização de forma, controle de sistemas dinâmicos. A otimização tem como vantagens diminuir o tempo dedicado ao projeto, possibilitar o tratamento simultâneo de uma grande quantidade de variáveis e restrições de difícil visualização gráfica e/ou tabular, possibilitar a obtenção de algo melhor, obtenção de soluções não tradicionais, menor custo. Como limitações se tem o aumento do tempo computacional quando aumenta-se o número de variáveis de projeto, pode surgir funções descontínuas que apresentam lenta convergência, funções com presença de muitos mínimos locais onde o mínimo global raramente é obtido.

De acordo com vários autores dentre os quais se citam Gill, P. E, Murray, W. & Wright M. (1981), Filho (2004) e Friedlander (1994) uma das subáreas da Pesquisa Operacional é a Programação Matemática, que é dividida em Programação Linear e Programação Não-Linear com ou sem restrições. Quando se otimiza um problema, trabalha-se com um modelo que é uma representação simplificada do real, o qual abrange apenas as variáveis mais relevantes e que exercem maior impacto sobre a solução, porém, a maioria dos problemas possui não-linearidades que é uma melhor representação da realidade.

O presente trabalho apresenta o cálculo dos deslocamentos em uma treliça através da formulação da energia potencial mínima, nesse problema a função-objetivo é uma função não-linear das variáveis de decisão.

2 Métodos de Programação Não-Linear sem Restrições

Os métodos de programação não-linear sem restrição se dividem em três métodos. Os métodos de ordem zero que são utilizados quando o valor da função é obtido com precisão pobre. Pode ser uma função não diferenciável ou altamente não-linear e, portanto, os valores das derivadas (ou gradientes) não são confiáveis e não devem ser utilizados, pois é difícil obter as derivadas de forma precisa. Dessa forma, somente o valor da função-objetivo é utilizado. Entre os mais importantes métodos de ordem zero, há o método univariante e o método das direções conjugadas de Powell. Os métodos de primeira ordem utilizam os valores da função-objetivo e de suas derivadas (gradientes) em relação às variáveis de projeto. Exemplos clássicos destes métodos são o “Steepest Descent”, ou máximo declive, método dos gradientes conjugados e método de Fletcher e Reeves e por fim os métodos de segunda ordem que utilizam os valores da função-objetivo, de suas derivadas e também da matriz hessiana. Os exemplos mais importantes são os métodos de Newton Raphson Padrão e Quase-Newton.

Os métodos existentes para resolver problemas de Programação Não-Linear sem restrições procuram, inicialmente, encontrar uma direção d a seguir que reduza a função-objetivo, às vezes chamada de direção de busca. Uma vez obtida essa direção, decidem o quanto “andar” nessa direção, t . Através desse procedimento, a cada passo, um problema de encontrar n variáveis x é reduzido a um problema de encontrar uma variável t , como está descrito na equação a seguir:

$$x = x_o + t_o d_o \Rightarrow f(x) = f(x_o + t_o d_o) = f(t) \quad (1)$$

onde x_0 é o ponto inicial. O problema de encontrar t pode ser resolvido fazendo uso de técnicas de minimização de uma função de uma variável que são de fácil implementação. Essa etapa é denominada busca unidimensional, e, quando a direção d coincide com a direção de um dos eixos coordenados é denominada busca univariada. O algoritmo seguido pelos métodos de otimização sem restrições é apresentado a seguir:

- Encontrar x_0 e do que reduzam a função-objetivo;
- Encontrar t na direção d_0 que minimize f (busca unidimensional) e obter $x = x_0 + t_0 d_0$;
- Verificar a convergência, e, se satisfeita, pare ($x = x^*$);
- Caso contrário, $x_{i+1} = x$, $i = i+1$ (controle do número de iterações) e voltar à etapa inicial.

Detalhes sobre este assunto podem ser encontrados em Friedlander (1994)

3 Métodos Implementados

3.1 Método Univariante

Por ser um método para resolução de problemas de otimização sem restrições, deve-se trabalhar com uma direção de busca d , que minimize a função-objetivo f , um incremento t (o quanto andar) e um ponto inicial x_0 .

- Algoritmo:

- 1- Determinar se t é positivo ou negativo, sendo que seu valor deve ser bem pequeno;
- 2- Partindo de um ponto inicial x_0 escolhido e conhecendo-se t , encontrar o valor de x_{k+1} para uma dada direção e_k na qual se caminha. Verificar se $f(x_{k+1})$ decresce no sentido positivo ou negativo para este e_k , calculando-se $f(x_{k+1}) = f(x_k \pm t e_k)$;
- 3- Se $f(x_{k+1}) < f(x_k)$, continuar nesta direção, “avançando” mais um incremento, ou seja, dobrar t e testar novamente, voltando ao passo 2. Enquanto f estiver sendo minimizada, a direção e_k é mantida. Caso contrário, parar no último valor x_i bem sucedido na direção e_k e escolher uma nova direção e_{k+1} para continuar a “caminhada”, voltando portanto, ao passo 1, com t original;
- 4- Parar quando o valor da função f ficar constante, ou seja, quando nenhuma direção e_k melhorar f .

3.2 Método do Máximo Declive

Apesar de ser um método semelhante ao método univariante, sua particularidade é o fato de que a “caminhada” em busca do ponto ótimo ocorre sempre na direção do gradiente da função-objetivo, direção de busca d_k . Além disso, o tamanho do passo com o qual se caminha, t_k , é determinado a cada iteração através de uma busca linear na direção d_k .

- Algoritmo:

- 1- Determinar x_0 , ponto a partir do qual se inicia a busca pelo ponto ótimo;
- 2- Sendo $\nabla f(x_k)$, o gradiente da função-objetivo $f(x)$ no k -ésimo ponto x_k , a direção de busca na qual se caminha partindo de x_k é o versor de um vetor de sentido oposto ao gradiente de $f(x)$, sendo esta dada por:

$$d_k = - \frac{\nabla f(x_k)}{|\nabla f(x_k)|} \quad (2)$$

- 3- Em cada iteração obtém-se um ponto seguinte x_{k+1} dado por:

$$x_{k+1} = x_k + t_k d_k \quad (3)$$

Sendo t_k determinado por busca linear na direção d_k e $t_k > 0$;

- 4- Dessa forma há a geração de sucessivos pontos nos quais o valor da função-objetivo $f(x)$ se torna cada vez menor:

$$f(\mathbf{x}_{k+1}) = f(\mathbf{x}_k + t_k \mathbf{d}_k) \quad (4)$$

5- O algoritmo termina quando os valores assumidos pela função-objetivo nos sucessivos pontos gerados forem muito próximos, devido à proximidade destes pontos, $\mathbf{x}_k$ e $\mathbf{x}_{k+1}$. Ou seja:

$$\mathbf{x}_{k+1} \approx \mathbf{x}_k \quad (5)$$

$$f(\mathbf{x}_{k+1}) \approx f(\mathbf{x}_k) \quad (6)$$

Assim $|\nabla f(\mathbf{x}_k)| \approx 0$

3.3 Método das Direções Conjugadas de Powell

Uma maneira de acelerar o método Univariante é utilizar o chamado “movimento padrão” (*pattern move*) e esta foi a metodologia implementada por Powell.

Algoritmo:

1- Minimizar a função $f(\mathbf{x})$ com busca linear ao longo das direções $\mathbf{g}_k$,

$$\mathbf{g}_k = - \frac{\nabla f(\mathbf{x}_k)}{|\nabla f(\mathbf{x}_k)|} \quad (7)$$

partindo do ponto inicial $\mathbf{x}_{k0}$ de forma a gerar os pontos $\mathbf{x}_{k1}, \dots, \mathbf{x}_{kn}$;

2- Após encerrar a busca linear, encontrar o índice m , normalmente $m=n$, correspondente à direção em que a função-objetivo apresenta maior decréscimo, indo de $\mathbf{x}_{km-1}$ para $\mathbf{x}_{km}$;

3- Calcular a direção “padrão” $\mathbf{d}_k = \mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k-m}$ e determinar o tamanho do passo t_k que minimize $f(\mathbf{x})$, tal que

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_{k0} + t_k \mathbf{d}_k \quad (8)$$

Minimizar $f(\mathbf{x})$ com busca linear nesta direção “padrão” $\mathbf{d}_k$ e com o passo t_k ;

4- Descartar uma das direções, substituí-la por $\mathbf{d}_k$ na próxima etapa de minimizações e repetir as etapas (2) e (3).

3.4 Método de Fletcher-Reeves

O método de Fletcher-Reeves é um método do gradiente conjugado para funções não-quadráticas, que não necessita da avaliação da matriz hessiana $H(\mathbf{x})$, sendo esta substituída por uma busca linear (“*Linear Search*”).

- Algoritmo:

1. Determinar o ponto inicial $\mathbf{x}_0$ e calcular a direção de busca $\mathbf{d}_k$, dada por:

$$\mathbf{d}_k = \mathbf{d}_0 = -\mathbf{g}_0 \quad (9)$$

Onde,

$$\mathbf{g}_0 = \nabla f(\mathbf{x}_0) \quad (10)$$

2. Para $k = 0, 1, \dots, n-1$ faz-se:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + t_k \mathbf{d}_k \quad (11)$$

Onde t_k é o tamanho do passo, sendo este determinado por busca linear;

3. Ao obter-se o ponto $\mathbf{x}_{k+1}$, calcula-se o gradiente da função-objetivo $\mathbf{f}$ no ponto $\mathbf{x}_{k+1}$, dado por:

$$\mathbf{g}_{k+1} = \nabla f(\mathbf{x}_{k+1}) \quad (12)$$

4. Para determinar a nova direção de busca, $\mathbf{d}_{k+1}$, faz-se:

$$\mathbf{d}_{k+1} = -\mathbf{g}_{k+1} + \beta_k \mathbf{d}_k \quad (13)$$

Onde,

$$\beta_k = \frac{\mathbf{g}_{k+1}^t \mathbf{g}_{k+1}}{\mathbf{g}_k^t \mathbf{g}_k} \quad (14)$$

Enquanto $k \neq n-1$;

5. Ao obter-se $\mathbf{x}_n$, substituir $\mathbf{x}_0$ por $\mathbf{x}_n$ e retornar ao passo 1.

3.5 Método de Newton Raphson Padrão

O princípio deste método é minimizar uma função f através de uma aproximação local por uma função quadrática. As aproximações quadráticas ganham importância à medida que se aproximam do ponto ótimo do problema, sendo melhores do que as lineares. Esse método trabalha com $\lambda_k = 1$, sem “linear search”(busca linear).

Para minimizar quadrática $q(x_{k+1})$ devemos ter $\frac{\partial q}{\partial x_{k+1}} = 0$, logo :

$$\nabla_k + H_k (x_{k+1} - x_k) = 0 \quad (15)$$

ou

$$x_{k+1} = x_k - H_k^{-1} \nabla_k \quad (16)$$

Esta equação é a forma pura do método de Newton. O valor de H_k^{-1} é interpretado como uma correção na direção oposta ao gradiente da função, de forma a acelerar o processo iterativo. Concluindo que a direção de busca será:

$$d_k = -H_k^{-1} \nabla_k \quad (17)$$

3.6 Método de Newton Raphson Modificado

Esse método consiste na mesma formulação que o Newton Raphson Padrão, porém evita a atualização da matriz hessiana H_k em cada passo:

$$d_k = -H_0^{-1} \nabla_k \quad (18)$$

Uma modificação do método de Newton-Raphson é que ele pode ser implementado com “line search” ao invés de $t_k = 1$

3.7 Método Correção de Posto Um (Rank One Correction)

Primeiramente, examina-se a fórmula de recorrência.

$$S_{k+1} = S_k + a_k Z_k Z_k^t \quad (19)$$

Que preserva simetria. Para $i = k$, a expressão (19) seria:

$$\delta_k = S_{k+1} q_k = S_k q_k + a_k Z_k Z_k^t q_k \quad (20)$$

ou

$$Z_k = \frac{\delta_k - S_k q_k}{a_k Z_k^t q_k} \quad (21)$$

O produto interno por q_k^t em (20) fornece:

$$q_k^t \delta_k - q_k^t S_k q_k = a_k (Z_k^t q_k)^2 \quad (22)$$

Substituindo (21) em (19) tem-se:

$$S_{k+1} = S_k + \frac{(\delta_k - S_k q_k)(\delta_k - S_k q_k)^t}{q_k^t (\delta_k - S_k q_k)} \quad (23)$$

3.8 Método Rank Two Correction

O algoritmo DFP segue as mesmas idéias do algoritmo de “Rank One Correction”, mas nele a inversa da Hessiana é atualizada pela soma de duas matrizes simétricas de posto 1 e é denominada de rank two.

O algoritmo se inicia com uma aproximação de $H^{-1} \rightarrow S_0$ no ponto x_0 . Seguem-se os mesmos passos do rank one, mas a atualização de S_{k+1} é feita desse modo:

$$S_{k+1} = S_k + \frac{\delta_k \delta_k^t}{\delta_k^t q_k} - \frac{S_k q_k q_k^t S_k}{q_k^t S_k q_k} \quad (24)$$

3.9 Método BFGS

Método de Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno (BFGS) para problemas de minimização irrestrita. Esse método possui o algoritmo mais bem sucedido para atualização da inversa. Ele garante as seguintes propriedades:

S_k simétrica $\rightarrow S_{k+1}$ simétrica
 S_k positiva definida $\rightarrow S_{k+1}$ positiva definida

A fórmula de recorrência é a seguinte:

$$S_{k+1} = \left[I - \frac{\delta_k q_k^t}{\delta_k^t q_k} \right] S_k \left[I - \frac{q_k \delta_k^t}{\delta_k^t q_k} \right] + \frac{\delta_k \delta_k^t}{\delta_k^t q_k} \quad (25)$$

O método BFGS é denominado muitas vezes na literatura como método DFP complementar. Um processo de busca linear para determinação de a_k e parte integrante do algoritmo.

4 Resolução de Um Elemento de Treliça

Deseja-se determinar os deslocamentos (u_1 e u_2) da treliça não-linear mostrada na Figura 1 através da formulação da energia potencial mínima, onde L é o comprimento da barra na direção 1, A é a área da seção transversal, E_1 é o módulo de elasticidade na direção 1, E_2 é o módulo de elasticidade na direção 2 e P é a carga aplicada no ponto B. Os valores das variáveis citadas são dados de entrada no programa implementado e são definidos por:

$$L = 400 \text{ cm}; A = 4 \text{ cm}^2; E_1 = 2 \times 10^6 \text{ kN/cm}^2; E_2 = -2.5 \times 10^8 \text{ kN/cm}^2, P = 8000 \text{ Kn} \quad (26)$$

A relação tensão-deformação não-linear é dada por:

$$\sigma = E_1 \varepsilon + E_2 \varepsilon^2 \quad (27)$$

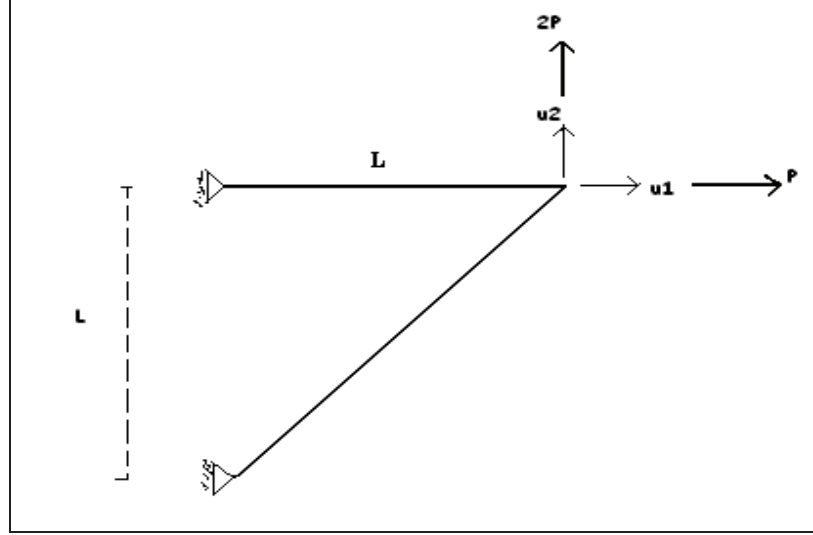


Figura 1: Treliça Não-Linear (Sacramento & Buffoni (2006))

A energia potencial total de um sistema é obtida através do somatório das energias de deformação, U , (Timoshenko & Gere, [4]). As energias são expressas por unidade de volume do material. Considerando-se um elemento sujeito à tensão e deformação, tem-se:

$$u = \int_0^{\varepsilon} \sigma d\varepsilon \quad (28)$$

$$U = \int u dV \quad (29)$$

Utilizando-se as equações de compatibilidade chegam-se as seguintes expressões:

$$\varepsilon_1 = \frac{\Delta L_1}{L_1} = \frac{u_1}{L} \quad (30)$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\Delta L_2}{L_2} = \frac{(\cos 45^\circ u_1 + \cos 45^\circ u_2)}{L_2} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} u_1 + \frac{\sqrt{2}}{2} u_2 \right) \frac{1}{L\sqrt{2}} \quad (31)$$

$$\varepsilon_2 = (u_1 + u_2) \frac{1}{2L} \quad (32)$$

Fazendo uso das expressões (29), (31) e (32), chega-se às seguintes expressões para os deslocamentos:

$$U_{1,2} = AL \left(\frac{1}{2} \frac{E_1 u_1^2}{L^2} + \frac{1}{3} \frac{E_2 u_1^3}{L^3} \right) + AL\sqrt{2} \left(\frac{E_1 (u_1 + u_2)^2}{8} + \frac{E_2 (u_1 + u_2)^3}{24} \right) \quad (33)$$

Dessa forma, a energia potencial é dada pela seguinte expressão:

$$\Pi = AL \left(\frac{1}{2} \frac{E_1 u_1^2}{L^2} + \frac{1}{3} \frac{E_2 u_1^3}{L^3} \right) + AL\sqrt{2} \left(\frac{E_1 (u_1 + u_2)^2}{8} + \frac{E_2 (u_1 + u_2)^3}{24} \right) - 2Pu_1 - Pu_2 \quad (34)$$

onde L é o comprimento da barra na direção 1, A é a área da seção transversal, E_1 é o módulo de elasticidade na direção 1, E_2 é o módulo de elasticidade na direção 2 e P é a carga aplicada. A Figura 2 apresenta as curvas de nível para a energia potencial da expressão (34) e verifica-se que esta é mínima próxima aos pontos $u_1 = 0.5$ e $u_2 = 1$.

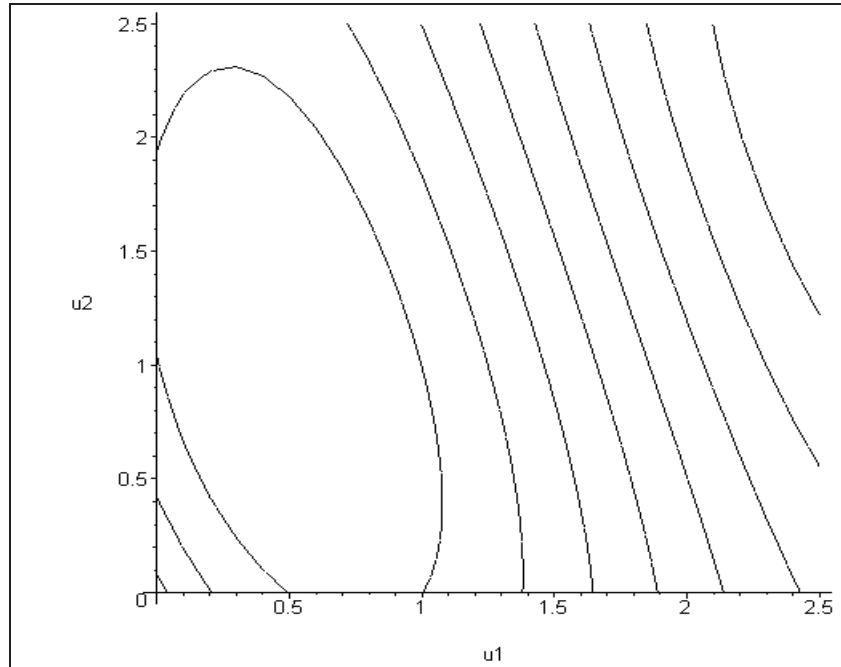


Figura 2: Curvas de nível da energia potencial expressa em (34).

4.1 Resolução de Um Elemento de Treliça Utilizando os Métodos Estudados

O objetivo é verificar a convergência dos métodos estudados para os valores de deslocamentos da treliça nas direções 1 e 2 que tornam a energia potencial mínima, onde os valores exatos apresentam-se na Figura 2. Dessa forma, realizaram-se testes para o ponto de partida $\mathbf{x}_0 = (0,0)$, ou seja, $u_1 = 0$ e $u_2 = 0$.

4.1.1 Método Univariante

Com um passo $t = 0.000001$, o método apresentou os resultados da Tabela 1.

Tabela 1: Método Univariante – Ponto de partida (1,3).

ITERAÇÃO	u_1	u_2	Energia Potencial Mínima (Π)
1	0	0	-0.01599999
2	1E-006	0	-0.01599999
3	3E-006	0	-0.04799988
4	7E-006	0	-0.1119993

ITERAÇÃO	u_1	u_2	Energia Potencial Mínima (Π)
5	1.5E-005	0	-0.239997
6	3.1E-005	0	-0.495987
7	6.3E-005	0	-1.007946
8	0.000127	0	-2.031782
9	0.000255	0	-4.07912
10	0.000511	0	-8.172466
11	0.001023	0	-16.35384
12	0.002047	0	-32.6953
13	0.004095	0	-65.29319
14	0.008191	0	-130.1492
15	0.016383	0	-258.5058
16	0.032767	0	-509.8255
17	0.065535	0	-991.1171
18	0.131071	0	-1870.121
19	0.262143	0	-3308.304
20	0.524287	0	-5021.3
21	0.524287	1E-006	-5021.305
22	0.524287	3E-006	-5021.314
23	0.524287	7E-006	-5021.333
24	0.524287	1.5E-005	-5021.369
25	0.524287	3.1E-005	-5021.443
26	0.524287	6.3E-005	-5021.59
27	0.524287	0.000127	-5021.884
28	0.524287	0.000255	-5022.472
29	0.524287	0.000511	-5023.648
30	0.524287	0.001023	-5025.999
31	0.524287	0.002047	-5030.697
32	0.524287	0.004095	-5040.073
33	0.524287	0.008191	-5058.752
34	0.524287	0.016383	-5095.812
35	0.524287	0.032767	-5168.75
36	0.524287	0.065535	-5309.934
37	0.524287	0.131071	-5573.801
38	0.524287	0.262143	-6029.705
39	0.524287	0.524287	-6671.613
40	0.524287	1.048575	-7015.154
41	0.524286	1.048575	-7015.155
42	0.524284	1.048575	-7015.157
43	0.52428	1.048575	-7015.162
44	0.524272	1.048575	-7015.171
45	0.524256	1.048575	-7015.189
46	0.524224	1.048575	-7015.226
47	0.52416	1.048575	-7015.3

ITERAÇÃO	u_1	u_2	Energia Potencial Mínima (Π)
48	0.524032	1.048575	-7015.448
49	0.523776	1.048575	-7015.742
50	0.523264	1.048575	-7016.328
51	0.52224	1.048575	-7017.485
52	0.520192	1.048575	-7019.746
53	0.516096	1.048575	-7024.052
54	0.507904	1.048575	-7031.799
55	0.49152	1.048575	-7043.806
56	0.458752	1.048575	-7053.644
57	0.458752	1.048574	-7053.644
58	0.458752	1.048572	-7053.645
59	0.458752	1.048568	-7053.645
60	0.458752	1.04856	-7053.647
61	0.458752	1.048544	-7053.649
62	0.458752	1.048512	-7053.654
63	0.458752	1.048448	-7053.663
64	0.458752	1.04832	-7053.682
65	0.458752	1.048064	-7053.72
66	0.458752	1.047552	-7053.794
67	0.458752	1.046528	-7053.94
68	0.458752	1.04448	-7054.22
69	0.458752	1.040384	-7054.732
70	0.458752	1.032192	-7055.568
71	0.458752	1.015808	-7056.478
72	0.458752	1.015807	-7056.478
73	0.458752	1.015805	-7056.478
74	0.458752	1.015801	-7056.478
75	0.458752	1.015793	-7056.478
76	0.458752	1.015777	-7056.478
77	0.458752	1.015745	-7056.479
78	0.458752	1.015681	-7056.481
79	0.458752	1.015553	-7056.484
80	0.458752	1.015297	-7056.49
81	0.458752	1.014785	-7056.501
82	0.458752	1.013761	-7056.52
83	0.458752	1.011713	-7056.546
84	0.458752	1.007617	-7056.549
85	0.458752	1.007618	-7056.549
86	0.458752	1.00762	-7056.549
87	0.458752	1.007624	-7056.549
88	0.458752	1.007632	-7056.549
89	0.458752	1.007648	-7056.55
90	0.458752	1.00768	-7056.55

ITERAÇÃO	u_1	u_2	Energia Potencial Mínima (Π)
91	0.458752	1.007744	-7056.55
92	0.458752	1.007872	-7056.551
93	0.458752	1.008128	-7056.552
94	0.458752	1.00864	-7056.554
95	0.458752	1.009664	-7056.555
96	0.458752	1.009663	-7056.555
97	0.458752	1.009661	-7056.555
98	0.458752	1.009657	-7056.555
99	0.458752	1.009649	-7056.556
100	0.458752	1.009633	-7056.556
101	0.458752	1.009601	-7056.556
102	0.458752	1.009537	-7056.556
103	0.458752	1.009409	-7056.556
104	0.458752	1.00941	-7056.556
105	0.458752	1.009412	-7056.556
106	0.458752	1.009416	-7056.556
107	0.458752	1.009424	-7056.556
108	0.458752	1.009423	-7056.556
109	0.458752	1.009421	-7056.556
110	0.458752	1.00942	-7056.556

A Figura 3 mostra o caminho descrito pelo método Univariante.

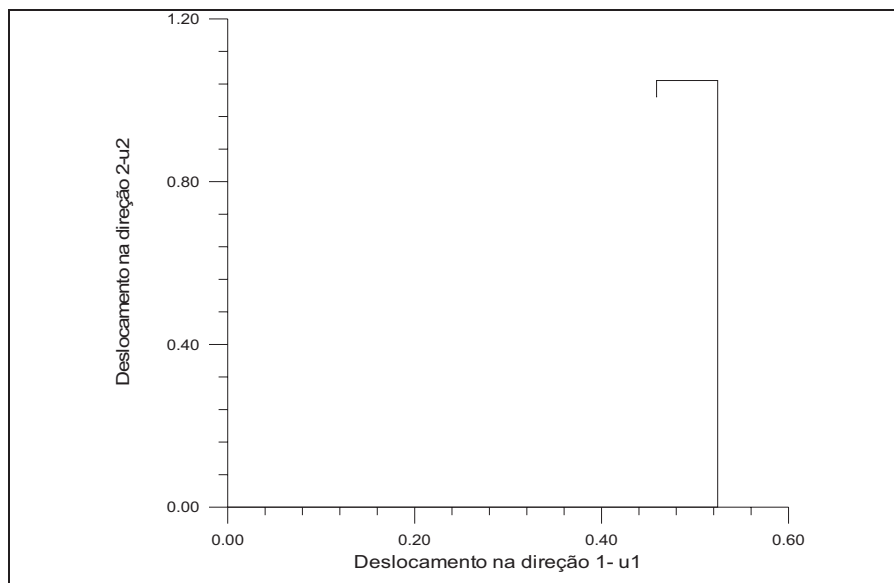


Figura 3: Convergência do método Univariante para o ponto onde a energia potencial é mínima. Ponto de partida (0,0).

4.1.2 Método do Máximo Declive

Com um passo $t = 0.000001$, o método apresentou os resultados da Tabela 2.

Tabela 2: Método do Máximo Declive – Ponto de partida (0,0).

ITERAÇÃO	u_1	u_2	Energia Potencial Mínima (Π)
1	0	0	0
2	0.4689374	0.2344687	-5773.422
3	0.6541881	0.4199456	-6507.465
4	0.4453029	0.9008249	-7024.204
5	0.5016987	0.9342088	-7047.586
6	0.4709735	0.9455975	-7052.063
7	0.4814727	0.9581753	-7054.520
8	0.4637894	0.9857623	-7056.416
9	0.4710845	0.9894892	-7057.094
10	0.4695538	0.9975370	-7057.239
11	0.4686248	0.9979678	-7057.243
12	0.4689887	0.9983280	-7057.245
13	0.4684940	0.9992246	-7057.247
14	0.4687252	0.9993346	-7057.247
15	0.4686671	0.9993617	-7057.248
16	0.4686701	0.9994896	-7057.248
17	0.4686383	0.9994926	-7057.248
18	0.4686443	0.9995240	-7057.248
19	0.4686284	0.9995253	-7057.248
20	0.4686344	0.9995305	-7057.248

A Figura 4 apresenta o caminho descrito pelo método do máximo declive.

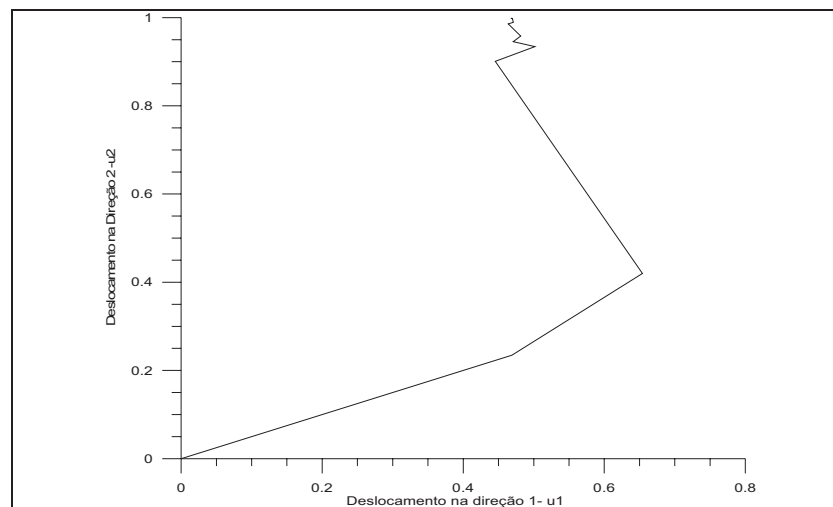


Figura 4: Convergência do método do Máximo Declive para o ponto onde a energia potencial é mínima. Ponto de partida (0,0).

4.1.3 Método de Powell

Com um passo $t = 0.000001$, o método apresentou os resultados da Tabela 3.

Tabela 3: Método de Powell – Ponto de partida (0,0).

ITERAÇÃO	u_1	u_2	Energia Potencial Mínima (Π)
1	0	0	-
2	0.626612	0.402244	-6488.465
3	0.514226	0.903053	-7037.739
4	0.497187	0.934596	-7048.978
5	0.481182	0.960045	-7054.741
6	0.470234	0.989313	-7057.087
7	0.469695	0.993630	-7057.195
8	0.469463	0.997154	-7057.238
9	0.469067	0.998240	-7057.245
10	0.468873	0.998791	-7057.247
11	0.468873	0.999233	-7057.247
12	0.468657	0.999377	-7057.248
13	0.468646	0.999447	-7057.248
14	0.468642	0.999503	-7057.248
15	0.468637	0.999518	-7057.248
16	0.468634	0.999533	-7057.248
17	0.468632	0.999538	-7057.248
18	0.468632	0.999538	-7057.248
19	0.468631	0.999541	-7057.248
20	0.468631	0.999541	-7057.248
21	0.468631	0.999541	-7057.248
22	0.468630	0.999543	-7057.248
23	0.468630	0.999543	-7057.248
24	0.468630	0.999543	-7057.248
25	0.468630	0.999543	-7057.248
26	0.468630	0.999543	-7057.248
27	0.468630	0.999543	-7057.248
28	0.468630	0.999543	-7057.248
29	0.468630	0.999543	-7057.248
30	0.468630	0.999543	-7057.248

A Figura 5 mostra o caminho descrito pelo método de Powell.

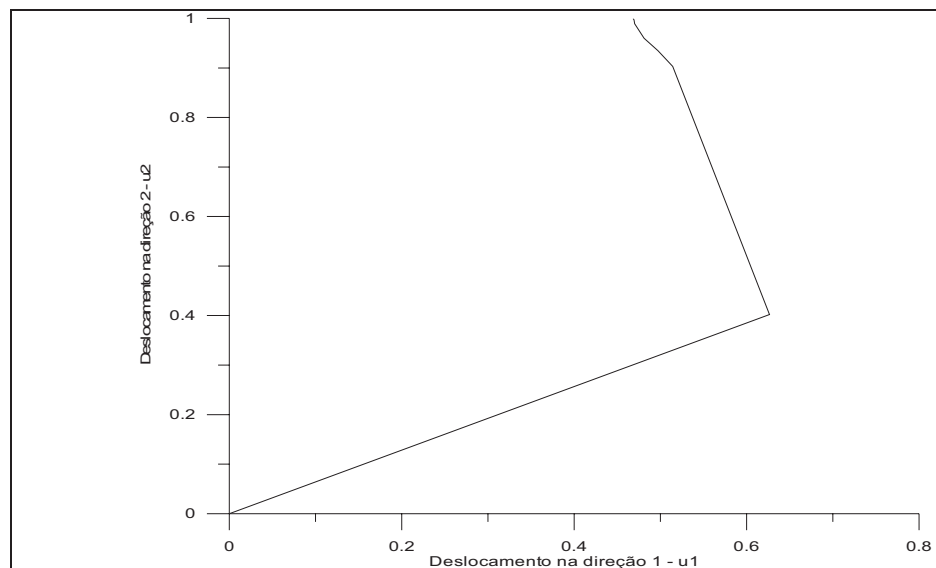


Figura 5: Convergência do método de Powell para o ponto onde a energia potencial é mínima. Ponto de partida (0,0).

4.1.4 Método de Fletcher-Reeves

Com um passo $t = 0.000001$, o método apresentou os seguintes resultados:

Tabela 4: Método de Fletcher-Reeves – Ponto de partida (0,0).

ITERAÇÃO	u_1	u_2	Energia Potencial Mínima (Π)
1	0	0	0
2	0.7502999	0.3751500	0
3	0.5788475	0.4959164	-6303.224
4	0.6029188	0.7042455	-6655.573
5	0.5116172	0.7558123	-6883.635
6	0.5385898	0.8571415	-6964.260
7	0.4902307	0.8773943	-7013.171
8	0.5022644	0.9284234	-7034.250
9	0.4783418	0.9391426	-7046.619
10	0.485991	0.964216	-7051.618
11	0.473804	0.969040	-7054.507
12	0.477007	0.981750	-7055.825
13	0.471011	0.984394	-7056.582
14	0.472972	0.990647	-7056.895
15	0.469928	0.999288	-7057.075
16	0.470723	0.995037	-7057.158
17	0.469231	0.995714	-7057.205
18	0.469718	0.997278	-7057.225
19	0.468961	0.997591	-7057.237

ITERAÇÃO	u_1	u_2	Energia Potencial Mínima (Π)
20	0.469154	0.998387	-7057.242
21	0.4687856	0.998564	-7057.245
22	0.4689022	0.998957	-7057.246
23	0.4687154	0.999041	-7057.247
24	0.4687619	0.999241	-7057.247
25	0.4686714	0.991858	-7057.247
26	0.4686976	0.999387	-7057.247
27	0.4686523	0.999411	-7057.248
28	0.4686630	0.999461	-7057.248
29	0.4686412	0.999475	-7057.248
30	0.4686464	0.999500	-7057.248
31	0.4686358	0.999507	-7057.248
32	0.4686398	0.999532	-7057.248
33	0.4686334	0.999532	-7057.248

A Figura 6 mostra o caminho descrito pelo método de Fletcher Reeves.

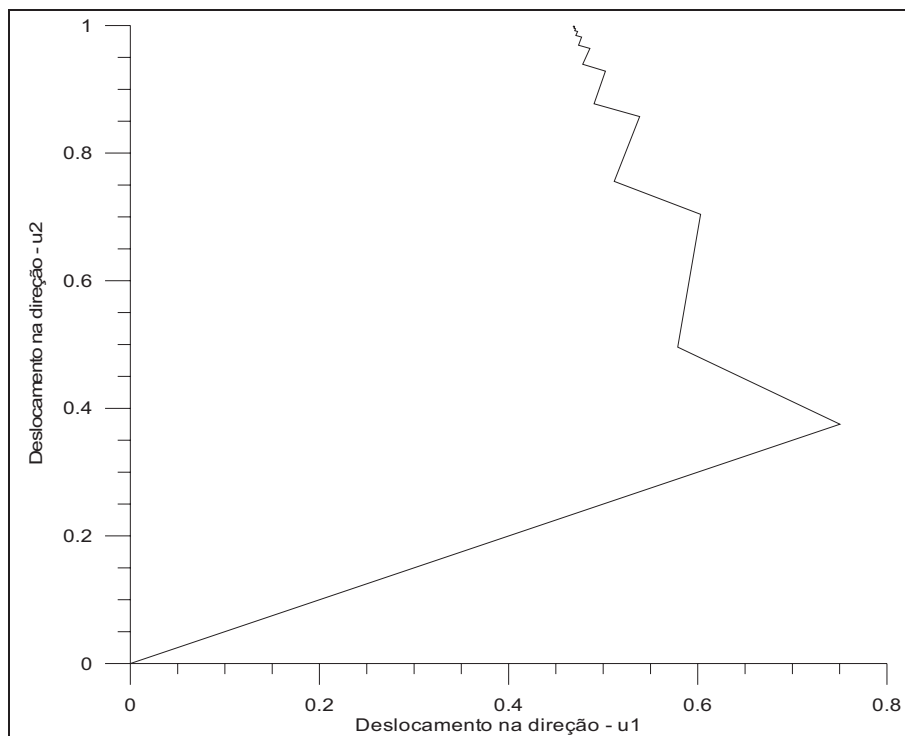


Figura 6: Convergência do método de Fletcher-Reeves para o ponto onde a energia potencial é mínima. Ponto de partida (0,0).

4.1.5 Método de Newton Raphson Padrão

A Tabela 5 apresenta os resultados para um passo $t = 1$.

Tabela 5: Método de Newton Raphson Padrão – Ponto de partida (0,0).

Iteração	u_1	u_2	Energia Potencial Mínima (Π)
1	0	0	0
2	0.4	0.7313709	-6792.15
3	0.4666667	0.9740878	-7055.774
4	0.4686275	0.9993314	-7057.247
5	0.4686292	0.9995434	-7057.248

A Figura 7 mostra o caminho descrito pelo método de Newton Raphson Padrão.

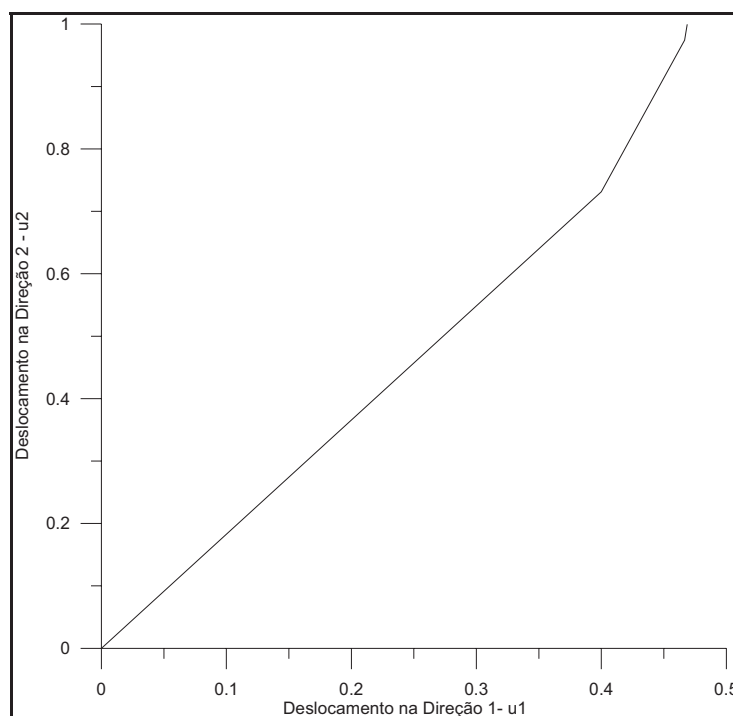


Figura 7: Convergência do método de Newton Raphson Padrão para o ponto onde a energia potencial é mínima. Ponto de partida (0,0).

4.1.6 Método Newton Raphson Modificado

A Tabela 6 apresenta os resultados para um passo $t = 1$.

Tabela 6: Método de Newton Raphson Modificado – Ponto de partida (0,0).

ITERAÇÃO	u_1	u_2	Energia Potencial Mínima (Π)
1	0	0	0
2	0.4	0.7313709	-6792.15
3	0.45	0.8813709	-7018.028
4	0.4632813	0.9450503	-7050.114
5	0.4670717	0.974205	-7055.839

ITERAÇÃO	u_1	u_2	Energia Potencial Mínima (Π)
6	0.4681737	0.9877719	-7056.959
7	0.4684958	0.9940903	-7057.188
8	0.4685901	0.9970242	-7057.235
9	0.4686177	0.9983821	-7057.245
10	0.4686258	0.9990089	-7057.247
11	0.4686282	0.9992976	-7057.247
12	0.4686289	0.9994305	-7057.248
13	0.4686291	0.9994915	-7057.248
14	0.4686291	0.9995196	-7057.248
15	0.4686291	0.9995324	-7057.248

A Figura 8 mostra o caminho descrito pelo método de Newton Raphson Modificado.

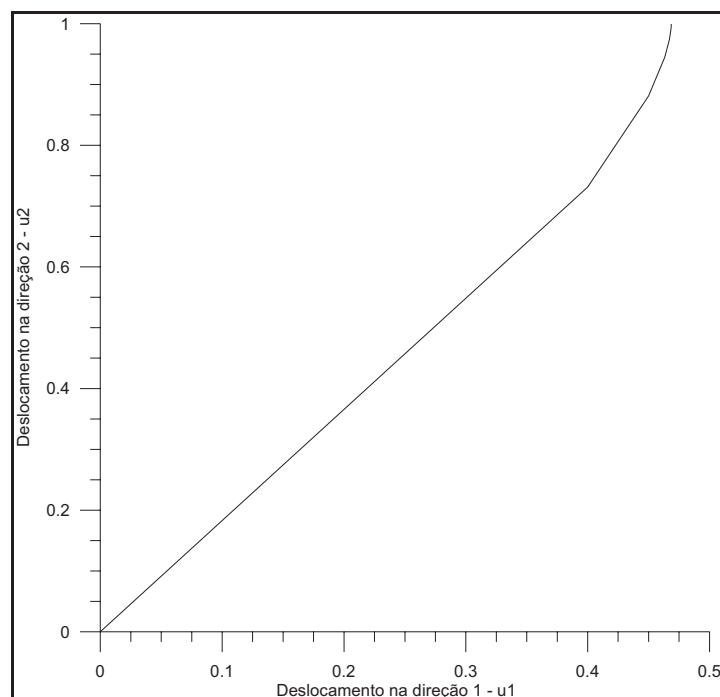


Figura 8: Convergência do método de Newton Raphson Modificado para o ponto onde a energia potencial é mínima. Ponto de partida (0,0).

4.1.7 Método Correção de Posto Um (Rank One Correction)

Com um passo $t = 0.000001$, o método apresentou os resultados da Tabela 7.

Tabela 7: Método Rank One Correction– Ponto de partida (0,0).

ITERAÇÃO	u_1	u_2	Energia Potencial Mínima (Π)
1	0	0	0
2	.5031503	.9199736	-7044.990
3	.5036367	.9208747	-7044.993
4	.4966970	.9165216	-7045.883
5	.5017961	.9101100	-7043.422

A Figura 9 mostra o caminho descrito pelo método Rank One Correction.

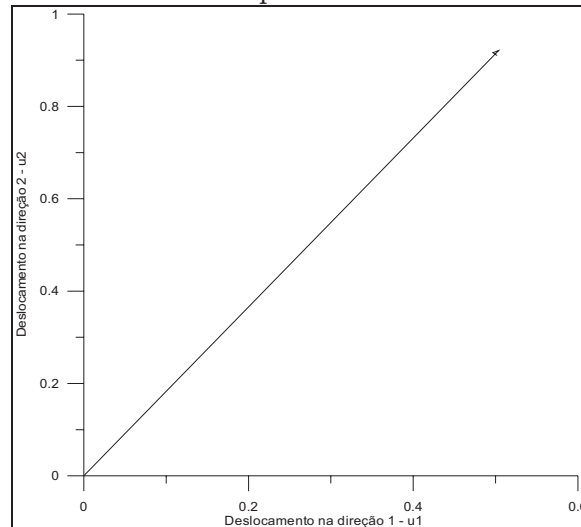


Figura 9: Convergência do método Rank One Correction para o ponto onde a energia potencial é mínima. Ponto de partida (0,0).

4.1.8 Método Correção de Posto Dois (Rank Two Correction)

Com um passo $t = 0.000001$, o método apresentou os seguintes resultados:

Tabela 8: Método Rank Two Correction – Ponto de partida (0,0).

ITERAÇÃO	u_1	u_2	Energia Potencial Mínima (Π)
1	0	0	0
2	.4689374	.2344687	-5773.422
3	.7016331	.3551842	-6350.297
4	.5859184	.4167470	-6511.552
5	0.4888443	0.5048179	-6584.202
6	0.5261520	1.027777	-7020.407
7	0.5106777	0.9640939	-7044.817
8	0.4925829	0.9367751	-7050.315
9	0.4780165	0.9442755	-7052.563
10	0.4640229	0.9739052	-7055.337
11	0.4677314	1.006463	-7057.172
12	0.4683698	0.9982956	-7057.243
13	0.4688688	0.9981811	-7057.245
14	0.4690156	0.9983908	-7057.245
15	0.4688557	0.9994022	-7057.247
16	0.4686606	0.9995679	-7057.247
17	0.4686338	0.9995854	-7057.247

A Figura 10 mostra o caminho descrito pelo método Rank Two Correction.

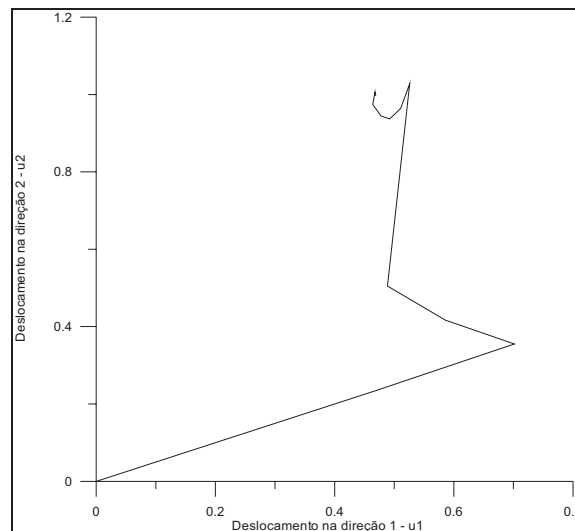


Figura 10: Convergência do método Rank One Correction para o ponto onde a energia potencial é mínima. Ponto de partida (0,0).

4.1.9 Método BFGS

Com um passo $t = 0.000001$, o método apresentou os resultados da Tabela 9.

Tabela 9: Método BFGS – Ponto de partida (0,0).

ITERAÇÃO	u_1	u_2	Energia Potencial Mínima (Π)
1	0	0	0
2	0.4689374	0.2344687	-5773.422
3	0.3274954	0.4551804	-5892.787
4	0.589635	0.4536538	-6583.731
5	0.4506282	0.6759072	-6816.933
6	0.3990856	0.9329341	-6985.949
7	0.4409088	0.8824784	-7010.541
8	0.4620554	0.8574471	-7013.439
9	0.4217083	0.9821547	-7033.454
10	0.4607974	0.9295524	-7045.051
11	0.4645898	0.9949785	-7056.99
12	0.4669828	0.9916543	-7057.054
13	0.4710787	0.9916351	-7057.148
14	0.4686867	0.9949601	-7057.208
15	0.4677857	0.9967992	-7057.218
16	0.468425	0.9959994	-7057.22
17	0.4691035	0.9979317	-7057.243
18	0.4684253	0.998699	-7057.245
19	0.4686766	0.9986504	-7057.246
20	0.4687946	0.9991486	-7057.247
21	0.4685989	-7057.247	0.9993136
22	0.4686617	0.9993017	-7057.247
23	0.4685958	0.9994114	-7057.247
24	0.4686512	0.9993793	-7057.247
25	0.4686287	0.9994021	-7057.247
26	0.4686349	0.999397	-7057.247

A Figura 11 mostra o caminho descrito pelo método BFGS.

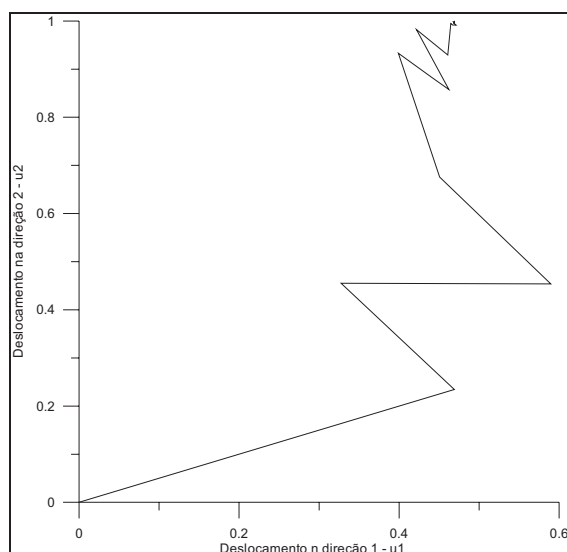


Figura 11 - Convergência do método BFGS. Ponto de partida (0,0).

5 Conclusões

Através dos resultados obtidos, concluiu-se que os deslocamentos u_1 e u_2 obtidos através de todos os métodos são compatíveis com a solução exata apresentada. Nota-se também que o método univariante, é um pouco “lento”, sendo necessárias muitas iterações para se chegar a uma solução ótima do problema. O método de Powell mostra-se mais eficiente que o univariante, pois a solução exata foi obtida com menos iterações. Já os métodos de Newton Raphson Padrão e Rank One Correction se mostraram mais eficientes do ponto de vista do número de iterações até se chegar a solução do problema. A Tabela 10 apresenta uma comparação entre os métodos.

Tabela 10: Comparação entre os métodos.

Método	Ponto de Partida	Número de Iterações	Deslocamentos		Energia Potencial Mínima (Π)
			u_1	u_2	
Univariante	(0,0)	110	0.458752	1.00942	-7056.556
Máximo Declive	(0,0)	20	0.4686344	0.9995305	-7057.248
Powell	(0,0)	30	0.4686304	0.9995436	-7057.248
Método de Fletcher – Reeves	(0,0)	33	0.4686334	0.999532	-7057.248
Newton Raphson Padrão	(0,0)	5	0.4686292	0.9995434	-7057,248
Newton Raphson Modificado	(0,0)	15	0.4686291	0.9995324	-7057.248
Correção de Posto Um (Rank One Correction)	(0,0)	5	0.5017961	0.9101100	-7043.422
Correção de Posto Dois (Rank Two Correction)	(0,0)	(0,0)	17	0.4686338	0.9995854
BFGS	(0,0)	26	0.4686349	0.999397	-7057.247

6 Agradecimentos

Sinceros agradecimentos à Fundação Carlos Chagas Filho de Amparo à Pesquisa do Estado do Rio de Janeiro – FAPERJ, pelo apoio financeiro.

7 Referências

- Filho, J. V. C. (2004) Pesquisa Operacional – Técnicas de Otimização Aplicadas a Sistemas Agroindustriais. 2ª. Edição. Editora Atlas. São Paulo.
- Friedlander, A. (1994) Elementos de Programação Não-Linear. Editora Unicamp. Campinas. São Paulo.
- Gill, P. E; Murray, W.; Wright, M. (1981) Practical optimization. Academic Press. Nova York.
- Timoshenko, S. P.; Gere, J. E. (1994) Mecânica dos Sólidos. LTC Editora. Rio de Janeiro.
- Sacramento, M.A., Buffoni, S.S.O. (2006) Programação Não-Linear Aplicada ao Cálculo de Deslocamentos em Elementos de Treliça. Profundão – 10º Encontro de Engenharia de Produção da UFRJ. Rio de Janeiro.