

Inferência Estatística dos Estimadores de Eficiência obtidos com a Técnica Fronteira Não Paramétrica de DEA. Uma Metodologia de *Bootstrap*

Rui Cunha Marques †
Duarte Silva ‡

† Centro de Sistemas Urbanos e Regionais
Instituto Superior Técnico
Universidade Técnica de Lisboa
rcmar@civil.ist.utl.pt

‡ Rave
dnsilva@rave.pt

Abstract

The efficiency measurement of decision making units is a key-task in contemporary societies. Despite the existence of several methodologies with this aim none of them is clearly superior. One of the most used is the non-parametric technique of data envelopment analysis (DEA). The DEA method has many advantages, therefore, being very popular and widely adopted. However, it doesn't allow for the results statistical inference, which can constrain its use. This document provides some insights for that debate, discussing and applying the DEA technique to 70 water services in Portugal. Later, a re-sampling (bootstrap) methodology is applied to the results attained by DEA, enabling its statistical inference. The quality of the values obtained by the bootstrap depends much on the average efficiency level and on its dispersion. That is, if the average inefficiency gap and its dispersion are considerable, the results will be far from the ones wished. Nevertheless, under the opposite circumstances, the results are interesting and satisfactory, surpassing the traditional drawbacks pointed at DEA.

Resumo

A medição de eficiência de unidades organizatórias ou unidades de decisão constitui uma tarefa-chave nas sociedades contemporâneas. Para a sua prossecução existem várias metodologias disponíveis embora nenhuma seja claramente superior. Um dos métodos mais conhecidos, e aqui analisado, consiste na técnica não paramétrica *data envelopment analysis* (DEA). Esta técnica possui diversas vantagens, sendo, portanto muito popular e largamente adoptada. Todavia, a DEA não permite a inferência estatística dos resultados obtidos, o que condiciona o seu uso empírico. Este documento fornece alguns contributos para esse debate, discutindo e aplicando a técnica DEA a 70 serviços de água em Portugal. Posteriormente, é empregue uma metodologia de *bootstrap* (reamostragem) aos estimadores de eficiência obtidos com a DEA, permitindo a sua

inferência estatística. A qualidade dos resultados alcançados com o *bootstrap* depende muito do nível de eficiência médio e da sua dispersão. Isto é, quando a ineficiência média é considerável, tal como a sua dispersão, os resultados estão longe do desejável. Porém, quando o valor da ineficiência é reduzido e a sua amplitude é baixa os resultados são satisfatórios e bem interessantes, ultrapassando alguns dos problemas tradicionais apontados à DEA.

Keywords: Efficiency, DEA, Statistical Inference, Bootstrap, Water Services

Title: Statistical Inference of Efficiency Estimators obtained with the DEA Nonparametric Frontier Technique. A Bootstrap Methodology

1 Introdução

A noção de eficiência corresponde à comparação entre os valores dos *inputs* e dos *outputs* observados associados à realização de uma certa actividade, e os seus valores óptimos. A sua obtenção pode ser efectuada numa perspectiva de minimização de *inputs*, isto é, do rácio entre a quantidade observada de *inputs* consumidos e a quantidade mínima de *inputs* para uma quantidade idêntica de *outputs* produzida ou, numa lógica complementar, de maximização de *outputs*, do rácio entre os *outputs* observados e os *outputs* máximos possíveis para uma quantidade fixa de *inputs* utilizados. Em ambas as situações é calculada a eficiência técnica (ET) que mede a intensidade dos desperdícios verificados no processo produtivo. Para uma unidade organizatória ou unidade de decisão (DMU) pode ainda determinar-se a eficiência alocativa de preços (EA) que reflecte, no modelo com orientação de *inputs*, qual a percentagem de custo que pode ser reduzida passando de uma posição da DMU tecnicamente eficiente para uma posição também sobre a fronteira mas que corresponda ao custo de produção mínimo, tendo em conta os preços actuais dos *inputs*. O produto da ET pela EA corresponde à eficiência económica ou global (Farrell, 1957).

Os métodos de cálculo da eficiência têm sido classificados em métodos paramétricos e em não paramétricos, consoante admitam, ou não, uma forma funcional, definida *a priori*, para a tecnologia de produção. Os métodos paramétricos possibilitam a medição do erro, mas introduzem a dificuldade adicional de conhecer a especificação associada ao comportamento admitido (Coelli *et al.*, 1998). Entre os métodos mais aplicados, a *data envelopment analysis* (DEA) e os números índices são considerados métodos não paramétricos, ao passo que as fronteiras estocásticas (SFA) e os modelos de regressão (e. g. OLS e COLS) são paramétricos. Na figura 1, onde o processo produtivo é caracterizado por um único *input* (x) e um único *output* (y), observa-se a diferença entre estas duas classes de métodos. A DEA é um método não paramétrico, ou seja, é empiricamente baseado, enquanto os restantes (OLS, COLS e SFA) requerem a especificação de uma função para a tecnologia de produção. Os métodos paramétricos ou não paramétricos podem ainda ser classificados em não fronteira ou em fronteira, em função de pressuporem, ou não, que as DMU sejam tecnicamente eficientes ou, de outra forma, dependendo se os *benchmarks* assentam nas aproximações médias ou nas *best practices* (Coelli *et al.*, 1998). A DEA e as SFA constituem métodos fronteira, ao passo que os números índices e os modelos de regressão (e. g. OLS), desde que não corrigidos (COLS), são não fronteira. Uma vez mais, a figura 1 permite clarificar esta classificação. A DEA, a SFA e a COLS são métodos fronteira, dado que se baseiam nas DMU com valores limite da amostra (*best practices*), enquanto a OLS é não fronteira, apoiando-se no seu ajustamento médio.

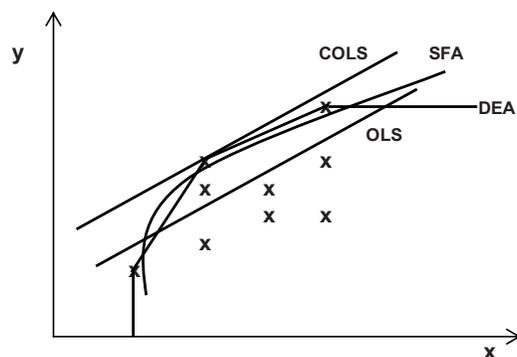


Figura 1: Tecnologias de produção obtidas por diferentes métodos

A superioridade dos métodos fronteira em relação aos não fronteira parece evidente e relativamente consensual. O mesmo não ocorre, porém, dentro dos métodos fronteira, em relação aos não paramétricos e aos paramétricos ou vice-versa, nomeadamente entre a DEA e SFA. Não obstante o argumento da maior aplicabilidade da técnica DEA possa sustentar a sua supremacia (Tavares, 2002), o facto de esta não permitir a inferência estatística minimiza o seu potencial de aplicação, sobretudo no domínio empírico. Por outro lado, a SFA é de cálculo complexo e requer fortes suposições sobre a distribuição estatística do erro sem justificação teórica. Os reguladores batem-se, comumente, com essa dificuldade, quando pretendem utilizar a técnica DEA de uma forma explícita, mas são confrontados com a oposição das entidades gestoras, em virtude de os resultados obtidos e dos modelos usados não estarem sujeitos a inferência estatística (*vide* Bosworth *et al.*, 1996; Burns *et al.*, 2000 e Sarafadis, 2002).

Este documento, assente num trabalho de investigação recente (Marques, 2005a), pretende providenciar contributos nesse sentido, analisando e aplicando a técnica de *bootstrap* aos estimadores da eficiência obtidos com a DEA, usando como caso de estudo os serviços de água portugueses. Os serviços de água, para além de prestarem um serviço de interesse económico geral, funcionam em regime de monopólio natural, exigem investimentos irre recuperáveis e apresentam economias de escala, de gama e de densidade relevantes. Em Portugal, a indústria da água envolve um valor de negócio anual superior a 1500 milhões de euros, acreditando-se que, pelas suas características e pelo seu histórico (mercado muito desregulado), apresenta níveis de ineficiência muito significativos (Marques, 2005b). O emprego de DEA neste sector é, por isso, da maior pertinência, embora o seu uso empírico (e. g. na regulação económica deste sector) requiera uma elevada robustez da análise. Para esse fim, existe a ferramenta de *bootstrap* que, sendo um instrumento de simulação estatística, possibilita atestar a qualidade dos modelos concebidos e dos resultados alcançados. O artigo, após esta introdução, expõe, numa primeira parte, sumariamente, a técnica de DEA. Seguidamente, esta ferramenta é aplicada a 70 serviços de água. Numa terceira parte, a metodologia de *bootstrap* é discutida e testada, usando os resultados alcançados anteriormente com a DEA.

2 Data Envelopment Analysis

2.1 Introdução

A DEA é um método assente em programação linear para avaliação da eficiência relativa de unidades mais ou menos homogêneas (DMU), tal como, *inter alia*, escolas, hospitais e

serviços de infra-estruturas, que transformam um conjunto de recursos ou factores de produção (*inputs*) num conjunto de produtos ou resultados desejados (*outputs*). A DEA não estabelece uma forma funcional para a fronteira eficiente e não emprega valores específicos para os pesos. A técnica de DEA é empiricamente baseada (a construção da fronteira), ao contrário das abordagens paramétricas concorrentes.

A aplicação da técnica de DEA possui várias vantagens, das quais se destacam: a) identificação para cada DMU ineficiente de um conjunto de DMU (*peers*) eficientes com combinação de *inputs* e *outputs* semelhante; b) facilidade em lidar com múltiplos *inputs* e *outputs*; c) adopção dos melhores resultados como elementos de comparação; d) não admissão de uma forma paramétrica para a fronteira ou para a ineficiência quando associada ao erro; e) natureza conservativa das avaliações; e f) decomposição da natureza da eficiência em várias componentes. Todavia, a técnica de DEA revela alguns inconvenientes, a saber, a sensibilidade elevada aos *outliers*, a exigência em termos de informação requerida e a dificuldade de medir o erro associado ou de testar estatisticamente os resultados e os modelos adoptados. Desta forma, também, na DEA, a análise dos factores explanatórios é complexa, dependendo da correlação existente.

2.2 Formulação Base da DEA

Tendo como base o trabalho de Farrell (Farrell, 1957), Charnes, Cooper e Rhodes desenvolveram o modelo CCR, caracterizado pela assunção de rendimentos constantes à escala (RCE) e da sobreutilização (congestão) das variáveis (Charnes *et al.*, 1978). Considere que uma DMU produz os *outputs* y_i , $i = 1, \dots, I$ a partir dos *inputs* x_j , $j = 1, \dots, J$, com os respectivos pesos a_i e b_j e que existem M DMU. O problema primal do modelo de DEA, também designado por modelo dos multiplicadores, corresponde à seguinte formulação para a orientação de minimização de *inputs*, no qual W_k diz respeito à eficiência da DMU k e ε é uma quantidade não Arquimediana (na ordem de 10^{-5} ou 10^{-6}):

$$\text{Max: } W_k = \sum_{i=1}^I a_i y_{im}$$

s.a.

$$\sum_{j=1}^J b_j x_{jm} \geq \sum_{i=1}^I a_i y_{im} \quad m = 1, \dots, k, \dots, M$$

$$\sum_{j=1}^J b_j x_{jk} = 1$$

$$a_i, b_j > \varepsilon \quad i = 1, \dots, I; j = 1, \dots, J \quad (1)$$

Na programação linear existe a formulação dual, denominada de problema da envolvente. O dual constrói uma aproximação à fronteira verdadeira, formada pela união das DMU eficientes que minimizam a quantidade *inputs* para um nível desejado de produção de *outputs*. No primal a escolha dos pesos reside sobre os *inputs* e os *outputs*, enquanto no dual a selecção dos “pesos” recai sobre as DMU. O problema dual consiste em:

$$\begin{aligned}
 & \text{Min: } h_k - \varepsilon \left(\sum_{i=1}^I s_i + \sum_{j=1}^J s_j \right) \\
 & \text{s.a.} \\
 & \sum_{m=1}^M \lambda_m x_{jm} = x_{jk} h_k - s_j \quad j = 1, \dots, J \\
 & \sum_{m=1}^M \lambda_m y_{im} = y_{ik} + s_i \quad i = 1, \dots, I \\
 & \lambda_m \geq 0 \quad m = 1, \dots, k, \dots, M \\
 & s_i, s_j \geq 0 \quad i = 1, \dots, I; j = 1, \dots, J
 \end{aligned} \tag{2}$$

onde λ_m são as ponderações das DMU de referência, S_i são as folgas dos *outputs* e S_j são as folgas dos *inputs*. Os λ_m representam a proporção de *inputs* e de *outputs* da DMU m utilizados para construir os *targets* da DMU k em avaliação. As folgas, introduzidas como variáveis do modelo, representam fontes adicionais de ineficiência, isto é, traduzem em que medida os *inputs* podem ser reduzidos após as contracções radiais terem sido efectuadas. A DMU k é eficiente se e só se h_k for igual à unidade e as folgas (*slacks*) forem iguais a zero. Neste caso, as DMU designam-se por eficientes e são exemplos das melhores práticas (*best practices*).

O problema dual é computacionalmente menos exigente do que o primal, visto que é munido de um número inferior de restrições ($I+J < M+1$). Todavia, um algoritmo de programação linear é resolvido para cada DMU da amostra, obtendo-se o valor de h_k respeitante à sua eficiência. Este valor é alcançado através da contracção radial do vector de *inputs*, tanto quanto possível, para uma dada quantidade de *outputs* que ainda pertence à tecnologia de produção, o que resulta na projecção da DMU na fronteira eficiente. A fronteira de produção é determinada pela isoquântica formada pelas DMU da amostra que conduzem ao menor consumo de *inputs* para a produção de *outputs* desejados. O *target* ou o ponto projectado corresponde a uma combinação linear das DMU que pertencem à fronteira e que constituem os seus pares.

2.3 Extensões ao Modelo Base de DEA

O modelo CCR foi estendido em 1984, procurando contabilizar a hipótese de RVE (Banker *et al.*, 1984). Nesta situação, a natureza da ET pode ser separada em eficiência técnica pura (ETP) e em eficiência de escala (EE), se se relacionarem os seus resultados com os dos modelos CCR. Este modelo ficou conhecido como modelo BCC. No modelo CCR a ET obtida poderia dever-se à ineficiência técnica propriamente dita ou à operação a uma escala não óptima, não se distinguindo esse efeito. O modelo BCC pode ser resolvido modificando ligeiramente as formulações 1 e 2, adicionando-lhes uma restrição que garanta que a DMU em análise seja comparada com uma combinação convexa das DMU da amostra. Esta abordagem, mais restritiva, forma um invólucro convexo em vez de cónico sobre as DMU, assegurando, assim, que as DMU só sejam comparadas com DMU de tamanho equivalente. A medida de eficiência, obtida por esta via (ETP), será sempre superior ou igual à alcançada com o modelo CCR. A resolução da formulação BCC

determina a ETP, a qual, conjugada com a ET auferida por 1 (ou 2), permite obter a EE. A EE mede a economia de recursos que se verificaria se a escala de operação fosse ótima.

Em meados dos anos 80, outros modelos foram introduzidos como os denominados modelos multiplicativos, os quais admitem uma forma particular para a envolvente, como a função log-linear ou a Cobb-Douglas, o modelo aditivo, baseado no conceito de ótimo de Pareto e o modelo BCC, abandonando o pressuposto da sobreutilização das variáveis. Os modelos CCR e BCC foram também adaptados para integrar variáveis que são não discricionárias, isto é, que não estão dependentes da acção dos decisores e permitem a presença de variáveis ordinais. Estes e outros modelos estão explanados em (*vide* Charnes *et al.*, 1994 e Cooper *et al.*, 2000), não se apresentando aqui os artigos originais por uma questão de espaço.

2.4 Especificação dos Modelos de DEA

O cálculo da eficiência através da DEA é efectuado sobre os dados de uma determinada amostra não deixando, por isso, de constituir uma estimação. Logo, não obstante a técnica de DEA ser considerada, vulgarmente, como determinística, desde muito cedo existiu a vontade de lhe instituir atributos estatísticos. Esta preocupação tornou-se mais visível com o número crescente de aplicações empíricas, que demonstraram que os resultados da DEA eram frágeis e que estavam muito dependentes da qualidade da amostra e da especificação dos modelos. Contudo, a DEA “estatística” está ainda na sua infância (Grosskopf, 1996; Simar e Wilson, 2000a e Marques, 2005a). Com efeito, nas situações de dimensionalidade elevada (Kittelsen, 1999), de correlação significativa entre variáveis (Pedraja-Chaparro *et al.*, 1999) e para as DMU com valores extremos (*input* mínimo ou *output* máximo no caso de RVE), e quando a amostra é reduzida, os resultados obtidos são enviesados (Banker, 1996 e Pedraja-Chaparro *et al.*, 1999). Ademais, a especificação do modelo pode não ser robusta, isto é, omitir variáveis importantes, incluir variáveis irrelevantes ou, ainda, escolher uma forma funcional inadequada. Por exemplo, a adição de uma nova variável aumenta o enviesamento médio nas estimativas da eficiência (Kittelsen, 1999).

Em 1987, Färe e Primont demonstraram que a desagregação de um *input* do modelo em dois *inputs* só pode piorar o resultado da função objectivo, isto é, melhorar a eficiência das DMU (Färe e Primont, 1987). Um resultado mais generalizado consiste no facto de a adição de uma variável ao modelo nunca poder piorar a eficiência das DMU. Este resultado tem consequências importantes, permitindo a realização de testes de hipóteses entre dois modelos, sobretudo quando existe desagregação ou quando um deles é alojado (*nested*) no outro, caso típico quando se acrescenta uma variável ao modelo e se quer estudar o seu impacto. Assim, testando se a mudança da especificação do modelo de A para B, onde B tem mais uma variável, altera os resultados significativamente, isto é, se se aceita a hipótese H_0 na qual a estimativa da eficiência de A (\hat{E}_A) é equivalente à estimativa da eficiência de B (\hat{E}_B), vem:

$$H_0: \hat{E}_{A,I} = \hat{E}_{B,i}; H_1: \hat{E}_{A,I} < \hat{E}_{B,i} \quad (3)$$

O mesmo teste pode ser efectuado, admitindo a mesma especificação das variáveis do modelo, mas a existência de tecnologias distintas, porque se sabe que (Grosskopf, 1986):

$$\hat{E}_{A,I} (\text{RCE}) \leq \hat{E}_{A,I} (\text{RVE}) \quad (4)$$

As questões que se colocam são se existem e quais os testes estatísticos a adoptar. Banker sugeriu dois testes assintóticos, assumindo duas especificações da ineficiência diferentes, designadamente, a meia normal (F^m) e a exponencial (F^e) (Banker, 1993 e 1996). Se a assunção da distribuição da ineficiência não for possível, Banker sugere o uso do teste não paramétrico de Kolmogorov-Smirnov (K-S) para verificar a igualdade das duas distribuições (Banker, 1993). Um outro teste sugerido, que evita o problema da especificação da distribuição das eficiências, consiste no teste T para comparação de médias (Kittelsen, 1998).

A metodologia baseada nos testes estatísticos dá origem à conhecida abordagem *stepwise* (ST) de Kittelsen da especificação do modelo. Esta técnica, cuja aplicação será efectuada de seguida, é sintetizada pelos seguintes passos (Kittelsen, 1998): a) definir um modelo base que contenha todas as variáveis consideradas essenciais por razões empíricas ou teóricas; b) obter a estimativa da eficiência para o modelo; c) calcular a estimativa da eficiência com uma variável candidata ou com as variáveis desagregadas; e d) determinar os 4 testes atrás referidos (F^m , F^e , K-S e T) e aceitar, ou não, o novo modelo. Caso existam mais variáveis a desagregar ou novas variáveis candidatas, voltar a b). Embora o modelo ST exija, do ponto de vista teórico, requisitos que, em geral, não se verificam, como a dimensão da amostra ou a independência (Simar e Wilson, 2002), Kittelsen demonstrou, através de simulação de Monte Carlo, que, no mundo empírico, as distorções ocorridas pelo seu incumprimento não têm os efeitos que, à partida, se poderiam esperar (Kittelsen, 1998).

3 Caso de Estudo

3.1 Dados

A aplicação envolveu 70 serviços de água, abrangendo cerca de 63 % da população portuguesa. As DMU incluídas compreendiam as várias formas de organização presentes em Portugal e uma gama muito diversa de população. A tabela 1 sistematiza as características da amostra. A informação usada é respeitante ao ano de 2001.

Tabela 1: Número de DMU por forma de organização e intervalo populacional

Forma organizatória	Número de DMU	Número de pessoas	Número de DMU
Serviço municipal	11	< 25 000	6
Serviço municipalizado	39	25 000 < P < 50 000	8
Empresa municipal	4	50 000 < P < 100 000	21
Empresa pública	1	100 000 < P < 150 000	21
Empresa privada	15	150 000 < P < 250 000	8
		P > 250 000	6

3.2 Modelos de Cálculo

A concepção dos modelos de DEA deve ter em conta as características das DMU e as suas especificidades, a recolha bibliográfica, a opinião dos especialistas, os dados disponíveis e os objectivos do estudo. Na DEA é desejável, que tanto quanto possível, contemplem os aspectos mais abrangentes que caracterizam a actividade produtiva, isto é, os recursos consumidos e os produtos obtidos. As variáveis devem ser quantificáveis e consistentes entre DMU. Pode também existir uma segunda fase de análise, para integrar o ambiente operacional, onde o processo produtivo se desenvolve. No presente caso a orientação dos

modelos deve ser a de minimização de *inputs*, dado que as DMU estão, não só obrigadas a satisfazer todas as necessidades dos seus clientes, como também estão sujeitas a políticas de gestão de procura (*demand side management*) que condicionam a sua expansão. A especificação das variáveis em quantidades ou unidades monetárias deve também ser atentamente ponderada, tendo em conta os prós e os contras de cada opção (Marques, 2005a). Na tabela 2 evidenciam-se as variáveis mais adoptadas nos estudos de DEA aplicados ao sector da água (Marques e Monteiro, 2004).

Tabela 2: Variáveis mais usadas nos estudos de DEA aplicados aos serviços de água

Inputs	Outputs	Factores explanatórios
Pessoal (n.º, €)	Volume facturado (m ³)	Origem de água / tratamento / custo de produção (% , €)
OPEX (€)	Número de clientes (n.º)	Volume facturado por natureza (% , m ³)
Energia (€, kwh)	Extensão de redes (km)	Densidade populacional / clientes (n.º km ⁻² , n.º km ⁻¹)
Extensão de redes (km)	Receitas (€)	Perdas (% , m ³)
Custo total (€)		Factor de ponta / capitação (-, l hab ⁻¹ dia ⁻¹)
CAPEX (€)		
Outros OPEX (€)		
Custos miscelânea (€)		

A discricionariedade da escolha de um modelo ou a adopção de vários modelos pode não ser prática, podendo mesmo fornecer resultados inconsistentes, não sendo, como tal, viável no mundo empírico. Assim, e tendo em atenção as variáveis presentes na tabela 2, o modelo é obtido estatisticamente pelo modelo ST com vista à selecção da tecnologia mais adequada, ou seja, mais representativa da realidade. Estipulou-se, como critério de paragem, o não cumprimento da hipótese h_0 em mais de 50 % dos testes (F^m , F^e , K-S e T) com um nível de significância superior a 1 %. O processo foi iniciado adoptando um modelo com um único *input* e um único *output*, respectivamente, o custo total e o volume de água facturado e a presença de RVE. Os valores limite para os níveis de significância de 1 %, 5 % e 10 % para os quatro testes considerados são evidenciados na tabela 3. A tabela 4 apresenta os resultados da primeira iteração. Nesta tabela verifica-se que a variável que conduz aos resultados dos testes estatísticos mais convincentes é a variável perdas de água, a qual permite rejeitar a hipótese h_0 de que as estimativas das duas eficiências são equivalentes a um nível de significância de 1 % para os quatro testes. Esta variável tem justificação plena em Portugal, visto que as perdas de água atingem um valor muito elevado, o que, conjugado com o custo muito significativo de produção de algumas DMU, acentua este fenómeno, constituindo a variável mais condicionante na estimativa da eficiência das DMU. Na segunda iteração, com a contemplação do *input* perdas de água no modelo base, outras variáveis foram candidatas potenciais à inclusão. Verificou-se que a inserção de qualquer variável, ou a sua desagregação, cumpria todos os testes com um grau de significância de 1 %. A inclusão da variável número de clientes como *output* e a desagregação do *input* custo total em OPEX e em extensão de redes permitem rejeitar três dos quatro testes estatísticos a um nível de significância de 5 %, sendo o quarto não cumprido com um grau de 10 %. Ambas as hipóteses h_0 são aceites à luz dos resultados obtidos e de acordo com o critério de paragem adoptado. Assim, em relação à adição ou à desagregação de variáveis, o processo iterativo termina aqui. Porém, falta atestar a validade acerca do tipo de rendimentos à escala. A tabela 5 testa a especificação do modelo admitindo RCE. Os resultados permitem rejeitar a hipótese h_0 , na qual não existe diferença entre as distribuições das eficiências de ambas as tecnologias. Logo, segundo a metodologia ST, a tecnologia adoptada para a amostra dos serviços de água portugueses é caracterizada por RVE e por dois *inputs*, o custo total e as perdas de água, e um *output*, o volume de água facturado.

Tabela 3: Valores críticos de significância para os testes estatísticos considerados

Nível de significância	F ^m	F ^e	D (K-S)	T
1 %	1.755	1.485	0.257	2.356
5 %	1.486	1.321	0.207	1.657
10 %	1.361	1.243	0.182	1.288
Graus de liberdade:	70; 70	140; 140	70	138

Tabela 4: Escolha da especificação do modelo (1ª iteração)

	ETP	DMU eficiente	F ^m	F ^e	(K-S)	T
Modelo base:						
Custo total (CT)						
Volume facturado	0.626	5				
Novas variáveis:						
	Variação					
Clientes	0.054	2	1.592**	1.264*	0.171	1.719**
Extensão da rede	0.038	2	1.690**	1.223	0.143	1.235
Densidade de clientes	0.061	5	1.203	1.217	0.186*	1.845**
Perdas de água	0.106	8	2.593***	1.636***	0.271***	3.388***
Capitação	0.040	5	1.186	1.152	0.114	1.248
Desagregação:						
	Variação					
CT sem CP/ CP	0.069	5	1.335	1.283*	0.243**	2.149**
OPEX/CAPEX	0.050	2	1.551**	1.259*	0.200*	1.617*
OPEX/Extensão	0.093	6	1.515**	1.436**	0.271***	2.916***
VD / VND	0.048	3	1.224	1.186	0.171	1.504*

* sig. a 10 %; ** sig. a 5 %; *** sig. a 1 %; CP – custo de produção; VD – volume doméstico; VND – volume não doméstico

Tabela 5: Escolha da especificação da tecnologia do modelo (tipo de rendimentos à escala)

	ETP	DMU eficiente	F ^m	F ^e	(K-S)	T
Modelo base:						
Custo total						
Perdas	0.731	13				
Volume						
RCE	0.645	3	1.691**	1.412**	0.257***	2.924***

* significante a 10 %; ** significante a 5 %; *** significante a 1 %

3.3 Resultados

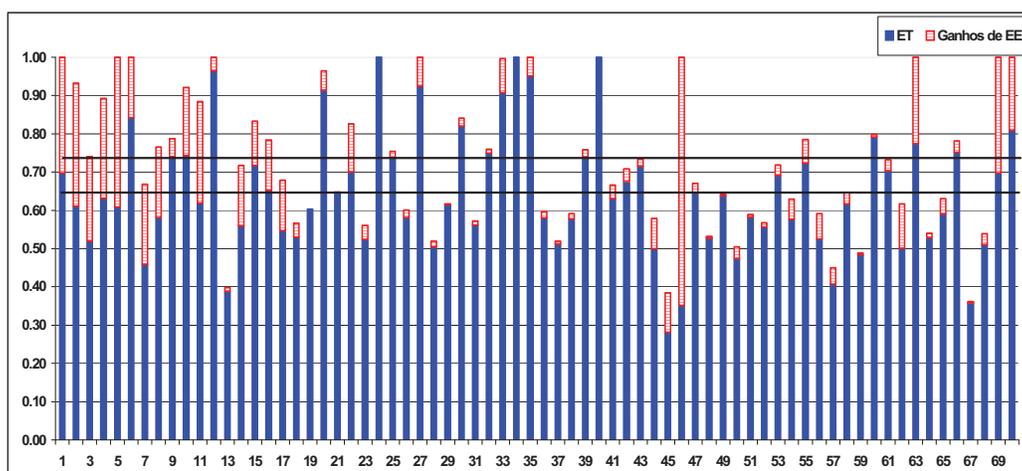
A figura 2 evidencia o valor da ET e a sua decomposição para o modelo ST por DMU. O valor de ET mais os ganhos de EE corresponde ao valor da ETP. A relação entre a ET e a ETP permite obter o valor da EE. Na figura estão ainda ilustrados os seus valores médios (ET e ETP). As DMU estão organizadas por ordem decrescente de população residente e por forma organizatória.

Na tabela 6 representam-se os valores médios e ponderados, quer pelo volume facturado, quer pela população servida, da ET e da sua decomposição, o número de DMU eficientes e os valores mínimos de eficiência. O cálculo foi efectuado por intermédio do *software* in2DEA desenvolvido pelos autores.

Tabela 6: Resumo estatístico dos resultados do modelo preferido, segundo a abordagem *stepwise*

	Média	Desvio padrão	Mínimo	Máximo	Média ponderada*	Média ponderada**	DMU eficiente
ET	0.645	0.161	0.282	1.000	0.623	0.654	3
ETP	0.731	0.184	0.362	1.000	0.804	0.769	13
EE	0.894	0.123	0.351	1.000	0.798	0.863	4
Slack do input custo (10 ⁴ €)	7.569	40.938	0.000	246.726	13.945	10.298	66
Slack do input perdas (10 ⁴ m ³)	15.876	41.169	0.000	255.271	9.123	8.044	46
Slack do output volume (m ³)	0	0	0	0	0	0	70

* ponderada pelo volume facturado; ** ponderada pela população servida

Figura 2: Resultados por DMU do modelo preferido, segundo a abordagem *stepwise*

3.4 Análise de Resultados

Os níveis de ineficiência das DMU portuguesas para o ano de 2001 foram significativos, apresentando uma ET média de 0,645. No modelo, o factor determinante na origem da ET foi o valor da ETP, ou seja, precisamente, aquela parcela que é mais controlável pelos gestores das DMU. A ineficiência de escala apresenta também valores não desprezáveis. Esta origem de ineficiência não é, contudo, controlável a curto prazo. Os serviços de água de maior dimensão são, em geral, penalizados pela EE, apresentando rendimentos decrescentes à escala. Em Portugal, os serviços de água têm um potencial de melhoria da ET média de 35,5 %, da qual 10,6 % correspondem a ganhos de escala (EE) e 26,9 % à melhoria da ETP. Isto significa que, em média, cada DMU pode reduzir em 35,5 % os *inputs* custo total e perdas de água, apresentando ainda o mesmo volume de água facturado. Das 70 DMU, e para RVE, 27 têm *slacks* em relação a um dos *inputs*, isto é, podem produzir a mesma quantidade de *output* consumindo menos recursos. No modelo ST, em média, os *inputs* custo total e perdas de água têm um *slack*, respectivamente, de 75 690 euros e 158 760 m³. Conforme referido, se a escala fosse óptima, ou seja, se existissem RCE, os serviços de água consumiam menos 10,6 % dos *inputs* para a mesma quantidade de *outputs* produzidos. Quando determinado o modelo DEA para RVE resulta que das 70 DMU, 27 DMU apresentam RVED, 39 DMU RVEC e 4 DMU RCE. Se se considerar a população servida, o valor da ET é ainda mais reduzido, em virtude da penalização da EE das DMU mais populosas. Para o volume facturado ocorre a situação contrária. As figuras 3 e 4 evidenciam a ET e a ETP hierarquizada por classes de pontuação para o modelo ST.

Considerando como exemplo as 5 DMU de maior dimensão, a tabela 7 evidencia os valores dos *inputs* actuais e dos seus *targets*, sem e com *slacks*, bem como os seus *peers*. Esta tabela atesta, de forma peremptória, as potencialidades da técnica de DEA como instrumento de *benchmarking*, identificando não só as poupanças potenciais destas DMU (radiais e não radiais), mas também os pares de referência que podem constituir seus *benchmarks*.

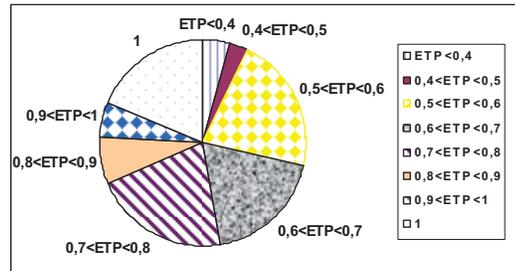
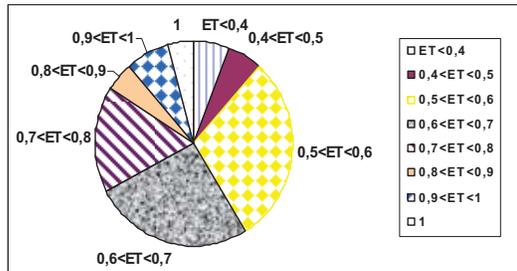


Figura 3: Número de DMU por classes da ET

Figura 4: Número de DMU por classes da ETP

Tabela 7: *Targets* e *peers* para as 5 DMU de maior dimensão sem e com *slacks*

DMU	Tipo	Variável	DMU 1	DMU 2	DMU 3	DMU 4*	DMU 5
Com <i>slacks</i>	Input	Custo total (10 ⁴ €)	2187 / 2187	2092 / 1950	2433 / 1800	1770 / 1342	2583 / 2583
		OPEX (10 ⁴ €)	8830 / 8830	9930 / 9260	10030 / 7440	5280 / 4710	14840 / 14840
	Output	Volume (10 ⁴ m ³)	2404 / 2404	2233 / 2233	2020 / 2020	1429 / 1429	2909 / 2909
<i>Peers</i>	-	-	1	12, 1, 5	1, 6, 35	24, 1	5

* Sem *slacks* apenas para a DMU 4 existirão diferenças. Para esta DMU o *input* custo total terá um *target* de 1580.

4 Análise de Sensibilidade aos Estimadores da DEA

4.1 Metodologia de *Bootstrap*

A DEA é encarada, habitualmente, como uma técnica não paramétrica, na qual a inferência estatística tradicional é difícil de prosseguir. Esta visão da DEA, muitas vezes considerada como uma das suas vantagens, não deixa, simultaneamente, de constituir uma das suas maiores fraquezas. Uma abordagem recente, que permite o desenvolvimento da desejada inferência estatística, consiste na aplicação da metodologia de *bootstrap* (reamostragem) aos estimadores da DEA. O *bootstrap* permite estimar o enviesamento e conduzir à inferência sobre os resultados da DEA. Esta metodologia foi introduzida por Bradley Efron em 1979 (Efron, 1979), mas só cerca de 10 anos mais tarde, em 1992, foi empregue, pela primeira vez, aos estimadores de DEA (Simar, 1992; Hall *et al.*, 1995; Ferrier e Hirschberg, 1997 e Simar e Wilson, 1998). A exposição e discussão aqui efectuada segue a abordagem desenvolvida por Simar e Wilson, que aplicam um algoritmo de *bootstrap* suave (*smooth*), adoptado com base no argumento da consistência (em alternativa poderia ser usado o *bootstrap naive*, mas que é inconsistente), baseado num processo de geração de dados (PGD) onde os *inputs* empregues são obtidos pelos desvios aleatórios da fronteira eficiente de *inputs* formada pelos *targets* (Simar e Wilson, 1998). Com efeito, de um ponto de vista formal, cada *input* no conjunto de observações de *input* / *output* $x_w = \{(x_k, y_k); k=1, \dots, w\}$ pode ser representado por:

$$(\mathbf{x}_k, y_k) = (\mathbf{x}_k^F / \theta_k, y_k) \quad (5)$$

onde \mathbf{x}_k^F constitui a fronteira de *inputs* não observável da DMU k . As medidas de eficiência “absolutas” são estimadas a partir da mesma distribuição, ou seja, $\theta_k \sim F_0$, $k = 1, \dots, w$. O PGD segue o princípio de que, restringido às relações entre *inputs* e *outputs*, os elementos estocásticos no processo produtivo são englobados totalmente pelas medidas aleatórias de eficiência dos *inputs*. A ideia principal da simulação de *bootstrap* consiste na imitação do PGD. O procedimento para o algoritmo em cada reamostra, limitado pelas proporções entre *inputs* e *outputs* observadas, é construído segundo duas fases. Na primeira fase a fronteira de *inputs* é estimada e os *pseudo-inputs* do *bootstrap* são criados através da aplicação do PGD na fronteira estimada de *inputs* e das pseudo-eficiências, desenvolvido a partir de alguma estimativa da distribuição F_0 . O algoritmo emprega um procedimento de reamostragem alisado (*smooth*), baseado no argumento da consistência (Silverman e Young, 1987). Na segunda fase a estimativa da eficiência de *bootstrap* é obtida por intermédio da contabilização da distância do *input* original em relação à estimativa do *bootstrap* da fronteira.

O algoritmo do *bootstrap* sistematiza-se em cinco passos, que são de seguida apresentados (Simar e Wilson, 1998 e Löthgren, 1998).

Em primeiro lugar, constroem-se os vectores de *inputs* e de *outputs* da fronteira usando as estimativas iniciais da eficiência $[(\mathbf{x}_k^F, y_k) = (\mathbf{x}_k \times \hat{\theta}_{kw}, y_k)]$.

Em segundo lugar, utiliza-se um alisamento de Kernel da distribuição empírica das estimativas originais da eficiência para gerar uma reamostra com substituição de pseudo-eficiências γ_k^* . O procedimento de alisamento baseia-se no método da reflexão que consiste em duas etapas, respectivamente, na adição de uma pequena perturbação a δ_k^* e na correcção sequente da reamostragem, onde δ_k^* representa a reamostra não alisada obtida independentemente com substituição a partir da distribuição empírica das estimativas originais da eficiência (Silverman, 1986). Na primeira etapa acrescenta-se a δ_k^* a perturbação $h\varepsilon_k^*$, na qual h representa a largura da banda ou da janela (*bandwidth* ou *window*) e o ε_k^* é obtido i.i.d. a partir de uma distribuição normal para gerar a pseudo-eficiência $\tilde{\delta}_k^*$. Como os valores das medidas de eficiência são limitados ao intervalo unitário, usa-se o procedimento de reflexão para gerar $\tilde{\delta}_k^*$ a partir de:

$$\tilde{\delta}_k^* = \begin{cases} \delta_k^* + h\varepsilon_k^* & \delta_k^* + h\varepsilon_k^* \leq 1 \\ 2 - (\delta_k^* + h\varepsilon_k^*) & \delta_k^* + h\varepsilon_k^* > 1 \end{cases} \quad (6)$$

Nesta acção torna-se fulcral a escolha da largura da banda, a qual se pode obter, de modo expedito, pela fórmula $h = 1.06 \times \sigma(\hat{\theta}_{kw}) \times w^{0.2}$ (Silverman, 1986). As eficiências finais das reamostras alisadas representadas por γ_k^* são obtidas por correcção da $\tilde{\delta}_k^*$ através de:

$$\gamma_k^* = \tilde{\delta}_k^* + \frac{(\tilde{\delta}_k^* - \bar{\delta}_k^*)}{\sqrt{1 + \frac{h^2}{\hat{\sigma}_{\hat{\theta}}^2}}} \quad (7)$$

onde $\bar{\delta}_k^*$ é a média da reamostra das eficiências originais. Esta correcção garante que a eficiência assintótica da reamostra tenha os mesmos dois primeiros momentos em relação às estimativas de eficiência originais.

Em terceiro lugar, as pseudo-eficiências alisadas são usadas para gerar os pseudo-dados do *bootstrap*.

Em quarto lugar, calcula-se novamente as eficiências utilizando o modelo de DEA para estimar as eficiências das amostras obtidas pelo *bootstrap*, usando o conjunto de pseudo-dados obtido.

Por fim, repetem-se B vezes os passos 2 a 4 para estimar um conjunto de B valores de estimativas de eficiência para DMU. Segundo alguns autores, o valor mínimo de B deve ser igual a 1000 (Hall, 1986).

A estimativa de *bootstrap* do enviesamento do estimador DEA é obtida pela fórmula:

$$\hat{\text{Env}}_k = \frac{1}{B} \sum_{b=1}^B \hat{\theta}_{kb}^* - \hat{\theta}_k \quad (8)$$

na qual o primeiro termo (do lado direito) corresponde à média do resultado da eficiência do *bootstrap* ($\bar{\theta}_k^*$) e o segundo termo ao resultado inicial da estimativa de DEA. O estimador de θ_k corrigido do enviesamento é calculado por:

$$\tilde{\theta}_k = \hat{\theta}_k - \hat{\text{Env}}_k \quad (9)$$

O erro padrão de $\hat{\theta}_{kw}^{*b}$ é determinado pela expressão:

$$\hat{\text{EP}} = \left\{ \frac{1}{B-1} \sum_{b=1}^B (\hat{\theta}_{kb}^* - \bar{\theta}_k^*)^2 \right\}^{1/2} \quad (10)$$

Conhecendo a função de distribuição empírica das eficiências de *bootstrap* $\hat{\theta}_{kb}^*$ com $b = 1, \dots, B$ e depois de uma nova correcção do enviesamento, que resulta na expressão 11 (Simar e Wilson, 1998), os intervalos de confiança podem ser obtidos, por exemplo, por intermédio do método percentil (Hall, 1998).

$$\tilde{\theta}_{kb}^* = \hat{\theta}_{kb}^* - 2 \times \hat{\text{Env}}_k \quad (11)$$

O método percentil é baseado na função de distribuição empírica das eficiências de *bootstrap* $\hat{\theta}_{kw}^{*b}$, $b = 1, \dots, B$, definido como $\hat{F}_k(s) = \frac{1}{B} \sum_{b=1}^B I(\hat{\theta}_{kw}^{*b} \leq s)$ para algum valor real s , onde $I(\cdot)$ representa uma função indicatriz normal (Efron e Tibshirani, 1993). Um intervalo de confiança $(1-2\alpha)$ para o valor real da eficiência θ para a DMU k é:

$$(\hat{\theta}_{kb}^{*(\alpha)}, \hat{\theta}_{kb}^{*(1-\alpha)}) \quad (12)$$

onde $\hat{\theta}_{kb}^{*(\alpha)}$ é o α quartil de \hat{F}_k , isto é, $\hat{\theta}_{kw}^{*(\alpha)} = \hat{F}_k^{-1}(\alpha)$. Se a função de distribuição empírica de $\hat{\theta}_{kw}^*$ for enviesada, é preferível centrar a mediana da distribuição sobre $\tilde{\theta}_k$, levando à obtenção de intervalos de confiança distintos, baseados na correcção do enviesamento das medianas (Simar e Wilson, 1998).

Simar e Wilson, em publicações posteriores, sugerem a realização de um artifício, baseado na técnica de “*trimming*”, para melhorarem os intervalos de confiança obtidos com o *bootstrap* (Simar e Wilson, 1998 e 2000b). Estes autores avançam uma outra justificação para alguma distorção dos resultados, assente na ideia de que o uso da estimativa do enviesamento acrescenta, necessariamente, erro aos intervalos de confiança estimados (*i. e.* o erro médio quadrado é maior no *bootstrap* corrigido do que na DEA). Argumentam também que só na circunstância onde a variância das eficiências de *bootstrap* seja menor que 1/3 do enviesamento ao quadrado a correcção do enviesamento deverá ser implementada ($R_k = \frac{1}{3\sigma^2} \times (\hat{\text{Env}}_B(\hat{\theta}(x_k, y_k)))^2$). Mais ainda, os mesmos autores alegam que, por essa relação se basear apenas nos valores estimados do enviesamento e das variâncias, e não nos valores reais, a opção pela correcção do enviesamento só deverá ser efectuada quando o R_k obtido estiver bem acima da unidade (Simar e Wilson, 1998 e 2000b).

4.2 Estimação dos Resultados do Caso de Estudo através de *Bootstrap*

Na análise da robustez da especificação do modelo ST aplicou-se o método de *bootstrap* atrás descrito. A diferença entre as medidas de eficiência estimadas pela DEA e as obtidas pelo *bootstrap*, ou melhor, o enviesamento, tal como o erro padrão, constituem medidas relevantes de análise de fiabilidade dos modelos. Efron sugere que uma relação entre a estimativa do enviesamento e do erro padrão superior a 0.25 é significativa, pelo que não devem ser rejeitados os resultados da eficiência obtidos por *bootstrap* (Efron, 1982). Simar e Wilson defendem que os resultados do *bootstrap* para cada DMU só devem ser aceites e preferíveis em relação às estimativas da DEA quando a variância dos valores obtidos pelo *bootstrap* for inferior a um terço do enviesamento ao quadrado (Simar e Wilson, 1998 e 2000b).

Nesta secção procurou-se não só examinar a sensibilidade dos resultados como testar a própria metodologia *bootstrap*, cuja aplicação empírica na DEA é recente e, embora defendida, por alguns autores, pode não ser muito benéfica, pelo menos em certas situações. Ademais, os casos práticos, referidos em (Simar e Wilson, 1998, 2000a e

2000b), ilustram distribuições de eficiência bem “comportadas” para este fim, isto é, com uma amplitude diminuta entre a eficiência máxima e a mínima, razão pela qual os intervalos de confiança, assim como os enviesamentos, são reduzidos. Como tal, podem constituir, ficticiamente, bons resultados. Todavia, se a relação entre o enviesamento e a amplitude referida se utilizar como indicador, verifica-se que a aplicação do *bootstrap*, de acordo com as metodologias seguidas, conduz a resultados pouco satisfatórios em relação a algumas DMU, em particular para as consideradas eficientes pela DEA. Pensa-se que esse fenómeno poderá ter origem na grande amplitude das eficiências determinadas pela DEA, as quais, recorde-se, definem a distribuição para a reamostragem no *bootstrap*, nos dados atípicos de algumas DMU, posicionando-as em regiões mais dispersas em termos de pontos que possam constituir referência para a determinação das eficiências em cada iteração do método, ou na conjugação desses dois efeitos. Na situação actual dos serviços de água portugueses, onde ocorrem DMU com eficiências inferiores a 0.4, muito embora os resultados do *bootstrap* possam, e devam, ser encarados como indicações de uma menor robustez das eficiências obtidas pela DEA, não é expectável que os valores alcançados pelo *bootstrap* sejam aceitáveis em aplicações práticas.

Para a aplicação do *bootstrap* empregou-se o *software* in2DEA, seguindo o procedimento exposto no trabalho de referência de Simar e Wilson. Numa primeira fase adoptou-se a linha sugerida por estes autores em 1998 (Simar e Wilson, 1998) e, posteriormente, numa segunda fase, introduziram-se as alterações subsequentes que os mesmos propuseram em 2000 referentes à obtenção dos intervalos de confiança (Simar e Wilson, 2000a e b).

A tabela 8 ilustra os resultados globais alcançados com a aplicação do *bootstrap* para o modelo ST (RVE). Como seria de esperar, o valor obtido pelo *bootstrap* é inferior ao da DEA, porque a DEA é um estimador da eficiência por excesso (conservativo). Também, por isso, quando se determinam os intervalos de confiança pelo *bootstrap* pode aparecer valores superiores a 1.

Tabela 8: Resultados globais do *bootstrap* do modelo ST

Modelo / estimativa	Média	Desvio padrão	Mínimo	Máximo
ST / DEA original	0.731	0.184	0.362	1.000
ST / DEA <i>bootstrap</i>	0.626	0.136	0.295	0.890

Na tabela 9 apresentam-se os resultados por DMU para o modelo ST (RVE). Na tabela são também estimados os intervalos de confiança com um nível de significância de 5 %, tanto para a média como centrados na mediana, para ter em conta o enviesamento. Conforme já tinha adiantado, os resultados alcançados não são muito úteis em relação às DMU eficientes. Parece que estas entidades, na maioria das situações, saem penalizadas com a aplicação do *bootstrap*, sendo mesmo alterada a sua ordem de eficiência. Mesmo usando o artifício sugerido por Simar e Wilson atrás referido os resultados obtidos continuam a ser algo limitativos do ponto de vista empírico.

Efectuaram-se diversos procedimentos de análise da sensibilidade da metodologia adoptada e apuraram-se as seguintes conclusões:

- O modelo é pouco sensível à fórmula de cálculo da largura da banda (h). Testaram-se vários métodos de cálculo deste parâmetro e variou-se, arbitrariamente, o seu valor, constatando-se que os resultados oscilaram pouco;

- Embora se tenha adoptado um $B=1000$, observou-se que um B inferior ($B=500$ ou $B=800$) ou superior ($B=2000$ ou $B=5000$) não conduzia a resultados muito díspares;
- Testou-se o modelo considerando os *pseudo-inputs* obtidos pelo *bootstrap* nas novas DEA em vez dos *inputs* originais (Löthgren, 1998), no qual se registaram diferenças significativas, mas não relevantes;
- Verificou-se que os valores das eficiências alcançados pelo *bootstrap* dependiam muito do passo inicial de geração de valores aleatórios com substituição das eficiências originais, obtidas pela DEA, com base na sua distribuição empírica. Tal pode ser explicado pela amplitude elevada existente entre o *input* menos eficiente e o mais eficiente. Este efeito é menos significativo quando esta diferença é reduzida;
- Por fim, analisou-se a influência da adopção de um *bootstrap* suave (através da estimativa da função de densidade de probabilidades de Kernel Gaussiana) em detrimento do *bootstrap naive* inconsistente, cujo objectivo era o de melhorar a estimação, tendo em conta a existência de uma mancha e de vários valores no limite da amostra. Constatou-se que os resultados para o *bootstrap naive*, embora distintos, eram inconsistentes e sem significado para a amostra estudada.

Recalculou-se o modelo de Simar e Wilson atrás aplicado com as alterações posteriores, sugeridas pelos mesmos autores, relativas à correcção do enviesamento do *bootstrap* e à melhoria dos intervalos de confiança (Simar e Wilson, 2000a e b). Adoptou-se ainda um nível de significância de 90 %, uma correcção por *trimming* de 10 % e um $B=2000$. Os resultados obtidos, que revelam algumas melhorias, mas ainda aquém do desejável, para efeitos da aplicação prática apresentam-se na tabela 10.

Por último, experimentou-se efectuar novamente todos os cálculos (representados nas tabelas 9 e 10), mas considerando apenas as 20 DMU mais eficientes para o modelo ST (RVE). Esta iniciativa dos autores, original na literatura, permitiu atestar que a eficiência oscilava entre 0.826 para a DMU 22 e 1.0 para as DMU tecnicamente eficientes da amostra. Como a amplitude entre a eficiência mínima e máxima era reduzida, seria esperado que os resultados alcançados pelo *bootstrap* fossem mais aceitáveis, o que se veio a confirmar. As tabelas 11 e 12 apresentam os desfechos desses exercícios.

Em suma, a técnica de *bootstrap*, que mantém a mesma linha não paramétrica da DEA e que será testada no caso de estudo, permite avaliar a robustez das medidas de eficiência obtidas pela DEA às variações da amostra e das variáveis não observáveis. Quando se repete o processo de reamostragem B vezes, estar-se-á em cada uma a determinar uma fronteira fictícia particular correspondente a um conjunto específico de *peers* (em relação ao qual cada DMU efectua o seu *benchmarking*), representando um nível particular de variáveis não observáveis ou não consideradas. A eficácia desta metodologia está muito dependente das características da amostra em análise, designadamente, do *gap* de eficiência existente. Quando a diferença entre as DMU mais eficientes e as menos eficientes não é substancial, a implementação da técnica *bootstrap* justifica-se possibilitando a inferência estatística, sendo compensador o esforço do seu cálculo. Caso contrário, quando o nível de ineficiência é elevado, com uma amplitude significativa (diferença entre a eficiência mínima e a eficiência máxima), o emprego da técnica *bootstrap*, ainda assim pode ser interessante para a aferição da robustez das medidas de eficiência da DEA, mas não os resultados que terão uma utilização condicionada num contexto prático.

Tabela 9: Resultados do *bootstrap* do modelo ST

DMU	$\hat{\theta}$ (DEA)	$\tilde{\theta}$ (Boot corr.)	\hat{Env}_k	Médiana _i	\hat{EP} (Erro pad.)	2.5 % (Média)	97.5 % (Média)	2.5 % (Mediana)	97.5 % (Mediana)
1	1.000	0.677	0.323	0.674	0.199	0.387	1.101	0.292	1.062
2	0.932	0.755	0.177	0.722	0.130	0.611	1.089	0.510	1.000
3	0.74	0.592	0.148	0.567	0.111	0.467	0.843	0.385	0.799
4	0.893	0.74	0.153	0.710	0.107	0.617	0.983	0.543	0.936
5	1.000	0.634	0.366	0.618	0.253	0.301	1.205	0.144	1.123
6	1.000	0.877	0.123	0.873	0.060	0.791	0.984	0.782	0.972
7	0.668	0.583	0.085	0.572	0.057	0.522	0.715	0.492	0.674
8	0.765	0.676	0.089	0.670	0.053	0.615	0.774	0.596	0.756
9	0.787	0.628	0.16	0.619	0.103	0.494	0.817	0.438	0.817
10	0.921	0.773	0.148	0.760	0.087	0.655	0.957	0.616	0.929
11	0.884	0.786	0.098	0.774	0.062	0.716	0.929	0.683	0.890
12	1.000	0.69	0.31	0.718	0.169	0.414	0.958	0.368	1.012
13	0.398	0.364	0.034	0.361	0.039	0.342	0.401	0.335	0.393
14	0.717	0.648	0.069	0.641	0.049	0.603	0.735	0.582	0.714
15	0.833	0.754	0.079	0.747	0.052	0.702	0.844	0.681	0.826
16	0.784	0.699	0.085	0.696	0.050	0.640	0.775	0.632	0.766
17	0.678	0.608	0.07	0.602	0.050	0.561	0.697	0.540	0.676
18	0.566	0.508	0.058	0.502	0.045	0.469	0.576	0.452	0.563
19	0.603	0.54	0.064	0.538	0.046	0.494	0.604	0.486	0.593
20	0.964	0.855	0.109	0.850	0.060	0.781	0.969	0.761	0.949
21	0.648	0.573	0.075	0.567	0.052	0.519	0.655	0.503	0.642
22	0.826	0.726	0.1	0.707	0.074	0.651	0.890	0.598	0.853
23	0.561	0.512	0.049	0.507	0.043	0.482	0.569	0.467	0.558
24	1.000	0.674	0.326	0.659	0.196	0.381	1.012	0.296	1.051
25	0.754	0.644	0.11	0.627	0.075	0.560	0.795	0.514	0.775
26	0.601	0.542	0.058	0.536	0.047	0.503	0.617	0.481	0.603
27	1.000	0.89	0.11	0.884	0.060	0.814	1.006	0.797	0.983
28	0.52	0.47	0.05	0.464	0.044	0.436	0.532	0.420	0.520
29	0.617	0.566	0.051	0.562	0.043	0.532	0.624	0.521	0.611
30	0.841	0.796	0.045	0.792	0.040	0.774	0.843	0.761	0.832
31	0.572	0.523	0.049	0.519	0.042	0.491	0.576	0.480	0.565
32	0.76	0.693	0.067	0.690	0.046	0.651	0.759	0.639	0.747
33	0.997	0.853	0.144	0.840	0.086	0.745	1.042	0.701	1.005
34	1.000	0.873	0.127	0.868	0.068	0.780	1.004	0.758	0.988
35	1.000	0.805	0.195	0.791	0.116	0.644	1.028	0.592	1.019
36	0.597	0.564	0.033	0.561	0.038	0.547	0.596	0.538	0.589
37	0.52	0.476	0.044	0.472	0.041	0.448	0.523	0.438	0.513
38	0.592	0.559	0.033	0.556	0.038	0.542	0.593	0.533	0.585
39	0.759	0.718	0.041	0.714	0.039	0.698	0.761	0.686	0.750
40	1.000	0.89	0.11	0.885	0.059	0.813	0.995	0.799	0.980
41	0.666	0.571	0.095	0.566	0.059	0.500	0.679	0.480	0.663
42	0.708	0.663	0.045	0.660	0.040	0.639	0.706	0.628	0.698
43	0.733	0.666	0.066	0.662	0.047	0.624	0.737	0.610	0.723
44	0.579	0.519	0.06	0.511	0.047	0.480	0.593	0.459	0.579
45	0.385	0.295	0.089	0.274	0.080	0.218	0.462	0.158	0.433
46	1.000	0.511	0.489	0.446	0.393	0.058	1.422	0.258	1.280
47	0.671	0.556	0.115	0.540	0.079	0.463	0.704	0.420	0.692
48	0.532	0.47	0.062	0.465	0.045	0.427	0.535	0.417	0.523
49	0.642	0.532	0.109	0.519	0.076	0.444	0.674	0.403	0.662
50	0.505	0.469	0.037	0.466	0.039	0.448	0.502	0.440	0.497
51	0.589	0.537	0.052	0.532	0.042	0.506	0.593	0.493	0.581
52	0.568	0.521	0.047	0.517	0.041	0.493	0.574	0.481	0.562
53	0.719	0.675	0.044	0.671	0.040	0.652	0.717	0.641	0.709
54	0.629	0.586	0.043	0.581	0.042	0.560	0.640	0.545	0.626
55	0.785	0.728	0.057	0.722	0.044	0.695	0.792	0.678	0.777
56	0.592	0.522	0.07	0.515	0.052	0.472	0.618	0.449	0.596
57	0.45	0.405	0.045	0.401	0.042	0.374	0.454	0.364	0.445
58	0.646	0.612	0.035	0.608	0.039	0.594	0.647	0.585	0.639
59	0.489	0.454	0.035	0.452	0.039	0.434	0.486	0.427	0.481
60	0.799	0.712	0.087	0.704	0.057	0.650	0.817	0.625	0.799
61	0.732	0.695	0.037	0.692	0.039	0.677	0.733	0.667	0.724
62	0.617	0.529	0.088	0.511	0.069	0.462	0.670	0.415	0.643
63	1.000	0.784	0.216	0.752	0.163	0.599	1.154	0.476	1.092
64	0.54	0.509	0.031	0.506	0.038	0.493	0.541	0.485	0.533
65	0.631	0.595	0.037	0.592	0.040	0.576	0.637	0.564	0.626
66	0.782	0.737	0.045	0.734	0.040	0.714	0.782	0.703	0.772
67	0.362	0.319	0.043	0.317	0.041	0.288	0.365	0.278	0.360
68	0.539	0.505	0.034	0.503	0.038	0.486	0.537	0.478	0.532
69	1.000	0.645	0.355	0.586	0.249	0.328	1.213	0.164	1.127
70	1.000	0.766	0.234	0.735	0.164	0.564	1.124	0.455	1.076

Tabela 10: Resultados das alterações efectuadas ao *bootstrap* do modelo ST

DMU	$\hat{\theta}$ (DEA)	$\tilde{\theta}$ (Boot. corr.)	\hat{Env}_k	$\sigma(\hat{\theta})$	$R_k^{(*)}$	Intervalo de confiança 90 %	
1	1.000	0.677	0.323	0.196	0.903	0.416	0.935
2	0.932	0.755	0.177	0.126	0.661	0.577	0.880
3	0.74	0.592	0.148	0.107	0.622	0.439	0.707
4	0.893	0.74	0.153	0.099	0.785	0.593	0.846
5	1.000	0.634	0.366	0.244	0.743	0.301	0.938
6	1.000	0.877	0.123	0.049	2.089	0.812	0.939
7	0.668	0.583	0.085	0.047	1.049	0.518	0.633
8	0.765	0.676	0.089	0.041	1.521	0.621	0.724
9	0.787	0.628	0.16	0.098	0.883	0.491	0.747
10	0.921	0.773	0.148	0.078	1.144	0.664	0.872
11	0.884	0.786	0.098	0.053	1.121	0.712	0.842
12	1.000	0.69	0.31	0.165	1.216	0.485	0.935
13	0.398	0.364	0.034	0.015	1.755	0.343	0.380
14	0.717	0.648	0.069	0.033	1.413	0.606	0.684
15	0.833	0.754	0.079	0.036	1.575	0.705	0.795
16	0.784	0.699	0.085	0.034	1.968	0.654	0.746
17	0.678	0.608	0.07	0.034	1.357	0.565	0.647
18	0.566	0.508	0.058	0.028	1.461	0.467	0.538
19	0.603	0.54	0.064	0.027	1.862	0.503	0.574
20	0.964	0.855	0.109	0.048	1.661	0.791	0.915
21	0.648	0.573	0.075	0.035	1.540	0.522	0.615
22	0.826	0.726	0.1	0.067	0.758	0.622	0.790
23	0.561	0.512	0.049	0.023	1.462	0.479	0.538
24	1.000	0.674	0.326	0.187	1.016	0.424	0.930
25	0.754	0.644	0.11	0.066	0.913	0.547	0.717
26	0.601	0.542	0.058	0.030	1.180	0.498	0.577
27	1.000	0.89	0.11	0.046	1.809	0.830	0.947
28	0.52	0.47	0.05	0.025	1.275	0.433	0.498
29	0.617	0.566	0.051	0.022	1.728	0.535	0.592
30	0.841	0.796	0.045	0.017	2.172	0.773	0.815
31	0.572	0.523	0.049	0.022	1.632	0.494	0.548
32	0.76	0.693	0.067	0.028	1.940	0.656	0.727
33	0.997	0.853	0.144	0.077	1.182	0.744	0.942
34	1.000	0.873	0.127	0.058	1.572	0.794	0.946
35	1.000	0.805	0.195	0.105	1.123	0.662	0.937
36	0.597	0.564	0.033	0.013	2.230	0.547	0.578
37	0.52	0.476	0.044	0.019	1.744	0.449	0.498
38	0.592	0.559	0.033	0.013	2.223	0.541	0.573
39	0.759	0.718	0.041	0.016	2.183	0.696	0.736
40	1.000	0.89	0.11	0.046	1.956	0.827	0.945
41	0.666	0.571	0.095	0.046	1.436	0.507	0.627
42	0.708	0.663	0.045	0.018	2.133	0.639	0.684
43	0.733	0.666	0.066	0.029	1.715	0.627	0.701
44	0.579	0.519	0.06	0.031	1.258	0.474	0.551
45	0.385	0.295	0.089	0.071	0.550	0.189	0.367
46	1.000	0.511	0.489	0.388	0.518	-	0.936
47	0.671	0.556	0.115	0.068	0.938	0.455	0.636
48	0.532	0.47	0.062	0.027	1.661	0.433	0.503
49	0.642	0.532	0.109	0.065	0.933	0.437	0.610
50	0.505	0.469	0.037	0.015	2.149	0.448	0.485
51	0.589	0.537	0.052	0.023	1.734	0.507	0.561
52	0.568	0.521	0.047	0.021	1.652	0.492	0.545
53	0.719	0.675	0.044	0.017	2.252	0.651	0.694
54	0.629	0.586	0.043	0.020	1.465	0.558	0.608
55	0.785	0.728	0.057	0.025	1.668	0.693	0.756
56	0.592	0.522	0.07	0.038	1.191	0.468	0.563
57	0.45	0.405	0.045	0.021	1.526	0.373	0.428
58	0.646	0.612	0.035	0.013	2.247	0.592	0.625
59	0.489	0.454	0.035	0.013	2.282	0.436	0.470
60	0.799	0.712	0.087	0.043	1.319	0.648	0.763
61	0.732	0.695	0.037	0.014	2.281	0.676	0.710
62	0.617	0.529	0.088	0.060	0.753	0.435	0.587
63	1.000	0.784	0.216	0.158	0.636	0.554	0.957
64	0.54	0.509	0.031	0.012	2.351	0.492	0.522
65	0.631	0.595	0.037	0.015	1.839	0.574	0.611
66	0.782	0.737	0.045	0.017	2.268	0.713	0.756
67	0.362	0.319	0.043	0.021	1.395	0.291	0.345
68	0.539	0.505	0.034	0.014	2.059	0.487	0.521
69	1.000	0.645	0.355	0.249	0.697	0.273	0.932
70	0.668	0.766	0.234	0.159	0.738	0.537	0.939

$$(*) R_k = \frac{1}{3\sigma^2} \times (\hat{Env}_B(\hat{\theta}(x_k, y_k)))^2$$

Tabela 11: Resultados do *bootstrap* do modelo ST para as 20 DMU mais eficientes

DMU	$\hat{\theta}$ (DEA)	$\tilde{\theta}$ (Boot corr.)	\hat{Env}_k	Médiana _i	2.5 % (Média)	97.5 % (Média)	2.5 % (Mediana)	97.5 % (Mediana)
1	1.000	0.956	0.044	0.941	0.917	1.086	0.873	1.039
2	0.932	0.91	0.023	0.905	0.891	0.959	0.877	0.941
4	0.893	0.871	0.022	0.866	0.853	0.915	0.838	0.903
5	1.000	0.957	0.043	0.940	0.918	1.086	0.869	1.045
6	1.000	0.964	0.036	0.960	0.933	1.012	0.919	1.009
10	0.921	0.898	0.023	0.895	0.879	0.936	0.869	0.928
11	0.884	0.865	0.02	0.863	0.848	0.890	0.841	0.887
12	1.000	0.954	0.046	0.937	0.913	1.093	0.860	1.047
20	0.964	0.939	0.025	0.935	0.918	0.979	0.907	0.971
22	0.826	0.805	0.021	0.801	0.788	0.851	0.775	0.835
24	1.000	0.952	0.048	0.934	0.909	1.096	0.855	1.050
27	1.000	0.975	0.025	0.973	0.954	1.010	0.947	1.004
33	0.997	0.973	0.024	0.968	0.953	1.032	0.935	1.011
34	1.000	0.958	0.042	0.945	0.921	1.044	0.887	1.029
35	1.000	0.966	0.034	0.963	0.937	1.025	0.920	1.012
40	1.000	0.963	0.037	0.955	0.930	1.034	0.907	1.018
46	1.000	0.953	0.047	0.935	0.911	1.092	0.861	1.045
63	1.000	0.978	0.022	0.973	0.959	1.035	0.940	1.016
69	1.000	0.952	0.048	0.934	0.909	1.084	0.857	1.047
70	1.000	0.966	0.034	0.961	0.936	1.029	0.917	1.015

Tabela 12: Resultados das alterações efectuadas ao modelo ST para as 20 DMU mais eficientes

DMU	$\hat{\theta}$ (DEA)	$\tilde{\theta}$ (Boot. Corr.)	\hat{Env}_k	$\sigma(\hat{\theta})$	$R_k^{(*)}$	Intervalo de confiança 90 %	
1	1.000	0.954	0.046	0.044	0.355	0.885	0.992
2	0.932	0.909	0.023	0.017	0.620	0.888	0.925
4	0.893	0.871	0.022	0.017	0.548	0.850	0.887
5	1.000	0.955	0.045	0.045	0.327	0.885	0.992
6	1.000	0.964	0.036	0.024	0.764	0.930	0.992
10	0.921	0.898	0.023	0.015	0.770	0.875	0.914
11	0.884	0.865	0.02	0.012	0.956	0.848	0.877
12	1.000	0.954	0.046	0.048	0.314	0.880	0.992
20	0.964	0.939	0.025	0.017	0.728	0.916	0.957
22	0.826	0.804	0.021	0.016	0.622	0.784	0.820
24	1.000	0.952	0.048	0.048	0.330	0.874	0.992
27	1.000	0.975	0.025	0.014	1.044	0.955	0.992
33	0.997	0.972	0.024	0.020	0.511	0.950	0.990
34	1.000	0.957	0.043	0.036	0.457	0.898	0.992
35	1.000	0.966	0.034	0.023	0.733	0.937	0.992
40	1.000	0.964	0.036	0.027	0.561	0.927	0.992
46	1.000	0.953	0.047	0.047	0.326	0.886	0.992
63	1.000	0.977	0.023	0.020	0.424	0.953	0.994
69	1.000	0.952	0.048	0.049	0.322	0.875	0.992
70	1.000	0.965	0.035	0.026	0.611	0.933	0.992

$$(*) R_k = \frac{1}{3\sigma^2} \times (\hat{Env}_B(\hat{\theta}(x_k, y_k)))^2$$

4 Conclusões

Os objectivos do presente artigo consistiram na análise e discussão da técnica fronteira não paramétrica de DEA para cálculo da eficiência de DMU e no emprego do método de *bootstrap* sobre os resultados obtidos no sentido do fornecimento de inferência estatística. Após a introdução, o artigo iniciou-se com uma explanação sumária sobre a técnica DEA, a qual foi aplicada a um conjunto de 70 serviços de água portugueses empregando o método de ST na especificação do modelo adoptado. Ulteriormente, a metodologia de *bootstrap* foi introduzida e discutida tendo em conta o *state-of-the-art*. Esta ferramenta foi testada usando como caso de estudo o sector da água em Portugal. Como conclusões mais relevantes deste documento refiram-se as seguintes:

- O uso da técnica de DEA apresenta várias vantagens, das quais se destacam a identificação de um conjunto de DMU (*peers*) eficientes com combinação de *inputs* e *outputs* semelhante para cada DMU ineficiente, a facilidade em lidar com múltiplos *inputs* e *outputs*, a adopção dos melhores resultados como elementos de comparação, a não assunção de uma forma funcional para a fronteira ou para a ineficiência quando associada ao erro, a natureza conservativa das avaliações e a decomposição da natureza da eficiência em várias componentes. Porém, a técnica de DEA não permite com facilidade a inferência estatística dos resultados obtidos;
- A primeira dificuldade do emprego da técnica de DEA diz respeito à selecção do tipo de modelo a considerar e do nível de detalhe adequado à respectiva aplicação. A abordagem *stepwise*, que permite determinar, passo a passo, a especificação dos modelos, constitui uma metodologia muito útil na selecção, não só das variáveis a adoptar como *inputs* e *outputs*, mas também da tecnologia de produção adequada, embora requeira alguns pressupostos que, por vezes, não se verificam (e. g. dimensão da amostra e independência);
- As DMU portuguesas apresentam, para o modelo ST adoptado, níveis de ineficiência significativos, sobretudo relacionados com a ETP, precisamente aquela parcela mais controlável pelos gestores das DMU. Os níveis de ineficiência de escala são também relevantes;
- A técnica de simulação de *bootstrap* faculta a análise de sensibilidade e da robustez dos resultados alcançados com a DEA. Esta técnica, de índole estatística, possibilita a avaliação da robustez das medidas de eficiência alcançadas com a DEA às variações da amostra e das variáveis não observáveis. De facto, a técnica de *bootstrap*, apesar de algo complexa e de produzir resultados ainda pouco apurados, constitui uma orientação claramente não determinística da DEA, no sentido da desejada inferência estatística;
- A aplicação da metodologia de *bootstrap* ao modelo ST demonstrou que, independentemente dos artificios usados e dos avanços e desenvolvimentos recentes, os valores obtidos para algumas DMU (tendencialmente as que apresentam uma eficiência unitária e/ou a informação que as caracteriza é atípica) são ainda pouco satisfatórios, ou melhor, pouco úteis do ponto de vista empírico, pelo menos para a realidade dos serviços de água em Portugal. Esta realidade evidencia, por um lado, a falta de robustez e significância estatística das estimativas de eficiência obtidas pelo modelo DEA e, por outro lado, que a técnica de *bootstrap* tem um valor algo limitado quando a dispersão dos valores da eficiência do modelo de DEA é muito grande. Alguns autores têm proposto artificios para testar ou melhorar os valores obtidos pelo *bootstrap*, procurando melhorar a viabilidade da implementação desta metodologia. No presente trabalho, procurou-se mitigar os valores das ineficiências que definem o processo de reamostragem, ensaiando-se a metodologia de *bootstrap* para os 20 serviços de água portugueses mais eficientes, tendo-se alcançado resultados para os intervalos de confiança mais interessantes e com um potencial de uso empírico relevante, havendo, contudo, ainda um caminho longo a percorrer neste domínio.

5 Referências

- Banker, R. (1993) Maximum Likelihood, Consistency and Data Envelopment Analysis: a Statistical Foundation, *Management Science*, Vol 39, No 10, pp. 1265-1273.
- Banker, R. (1996) Hypothesis Tests using Data Envelopment Analysis, *Journal of Productivity Analysis*, Vol 7, No 2/3, pp. 139-159.
- Banker, R., Charnes, A. e Cooper, W. (1984) Some Models for Estimating Technical and Scale Inefficiencies in Data Envelopment Analysis, *Management Science*, Vol 30, No 9, pp. 1078-1092.

- Bosworth, D., Stoneman, P. e Thanassoulis, E. (1996) The Measurement of Comparative Total Efficiency in the Sewerage and Water industry: an Exploratory Study, Office of Water Services, UK.
- Burns, P., Huggins, M., Riechmann, C. e Weyman-Jones, T. (2000) Choice of Model and Availability of Data for the Efficiency Analysis of Dutch Network and Supply Businesses in the Electricity Sector, *Frontier Economics*, Dienst uitvoering en toezicht Elektriciteitswet, Holanda.
- Charnes, A., Cooper, W. e Rhodes, E. (1978) Measuring the Efficiency of Decision Making Units, *European Journal of Operational Research*, Vol 2, No 6, pp. 429-444.
- Charnes, A., Cooper, W., Lewin, A. e Seiford, L. (1994) *Data Envelopment Analysis. Theory, methodology and applications*, Kluwer Academic Publishers, USA.
- Coelli, T., Prasada, R. e Battese, G. (1998) *An Introduction to Efficiency and Productivity Analysis*, Kluwer Academic Publishers, USA.
- Cooper, W., Seiford, L. e Tone, K. (2000) *Data Envelopment Analysis. A Comprehensive Text with Models, Applications, References and DEA-Solver Software*, Kluwer Academic Publishers, USA.
- Efron, B. (1979) Bootstrap Methods: another Look at the Jackknife, *Annals of Statistics*, Vol 7, No 1, pp. 1-26.
- Efron, B. (1982) *The Jackknife, the Bootstrap and other Resampling Plans*, Monograph No. 38, Society for Industrial and Applied Mathematics, USA.
- Efron, B. e Tibshirani, J. (1993) *An Introduction to the Bootstrap*, Chapman and Hall, UK.
- Färe, R. e Primont, D. (1987) Efficiency Measures for Multiplant Firms with Limited Data, In *Measurement in Economics: Theory and Applications in Economic Indices*, Ed. por W. Eichhorn e E. Diewert, Physica-Verlag, Alemanha, pp. 177-186.
- Farrell, M. (1957) The Measurement of Productive Efficiency, *Journal of the Royal Statistical Society*, Vol 120A, No 3, pp. 353-290.
- Ferrier, G. e Hirschberg, J. (1997) Bootstrap Confidence Intervals for Linear Programming Efficiency Scores: with an Illustration using Italian Banking Data, *Journal of Productivity Analysis*, Vol 8, No 1, pp. 19-33.
- Grosskopf, S. (1986) The Role of the Reference Technology in Measuring Productive Efficiency, *Economic Journal*, Vol 96, No 382, pp. 499-513.
- Grosskopf, S. (1996) Statistical Inference and Nonparametric Efficiency: a Selective Survey, *Journal of Productivity Analysis*, Vol 7, No 2/3, pp. 161-176.
- Hall, P. (1986) On the Number of Bootstrap Simulations Required to Construct a Confidence Interval, *Annals of Statistics*, Vol 14, No 4, pp. 1453-1462.
- Hall, P. (1988) Theoretical Comparison of Bootstrap Confidence Intervals, *Annals of Statistics*, Vol 16, No 3, pp. 927-953.
- Hall, P., Hardle, W. e Simar, L. (1995) Iterated Bootstrap with Applications to Frontier Models, *Journal of Productivity Analysis*, Vol 6, No 1, pp. 63-76.
- Kittelsen, S. (1998) Stepwise DEA: Choosing Variables for Measuring Technical Efficiency in Norwegian Electricity Distribution, Memorandum, No. 6, Oslo University.
- Kittelsen, S. (1999) Monte Carlo Simulations of DEA Efficiency Scores and Hypothesis Tests, Memorandum, No. 9, Oslo University.
- Löthgren, M. (1998) How to Bootstrap DEA Estimators: a Monte Carlo Comparison, Working Paper, No. 223, Stockholm University.
- Marques, R. (2005a) *A Regulação dos Serviços de Água e de Águas Residuais. Aplicação de Técnicas Não Paramétricas de Benchmarking*, Dissertação de Doutoramento, Instituto Superior Técnico, Universidade Técnica de Lisboa.
- Marques, R. (2005b) *A Regulação dos Serviços Públicos*, Edições Silabo, Lisboa.

- Marques, R. e Monteiro, A. (2004) Benchmarking the Economic Performance of Portuguese Water and Sewerage Services, In *Data Envelopment Analysis and Performance Measurement*, Ed. por Ali Emrouznejad e Victor Podinovski, Warwick Print, UK, pp. 65-72.
- Pedraja-Chaparro, F., Salinas-Jiménez, J. e Smith, P. (1999) On the Quality of the Data Envelopment Analysis Model, *Journal of the Operations Research Society*, Vol 50, No 6, pp. 636-644.
- Sarafidis, V. (2002) *An Assessment of Comparative Efficiency Measurement Techniques*, Europe Economics, Office of Water Services, UK.
- Silverman, B. (1986) *Density Estimation of Statistics and Data Analysis*, Chapman and Hall, UK.
- Silverman, B. e Young, G. (1987) The Bootstrap: to Smooth or not to Smooth?, *Biometrika*, Vol 74, No 3, pp. 469-479.
- Simar, L. (1992) Estimating Efficiencies from Frontier Models with Panel Data: a Comparison of Parametric, Non-parametric and Semi-parametric Methods with Bootstrapping, *Journal of Productivity Analysis*, Vol 3, No 1/2, pp. 171-191.
- Simar, L. e Wilson, P. (1998) Sensitivity Analysis of Efficiency Scores: How to Bootstrap in Nonparametric Models, *Management Science*, Vol 44, No 1, pp. 46-61.
- Simar, L. e Wilson, P. (2000a) Statistical Inference in Non-parametric Frontier Models: the State of the Art, *Journal of Productivity Analysis*, Vol 13, No 1, pp. 49-78.
- Simar, L. e Wilson, P. (2000b) A General Methodology for Bootstrapping in Nonparametric Frontier Models, *Journal of Applied Statistics*, Vol 27, No 6, pp. 779-802.
- Simar, L. e Wilson, P. (2002) Non-parametric Tests of Returns to Scale, *European Journal of Operational Research*, Vol 139, No 1, pp. 115-132.
- Tavares, G. (2002) *A bibliography of data envelopment analysis (1978-2001)*, Rutcor Research Report, Rutgers University.