

## **Fronteira DEA Difusa na Avaliação de Eficiência em Agricultura**

Eliane Gonçalves Gomes \*

João Carlos Correia Baptista Soares de Mello †

João Alfredo de Carvalho Mangabeira ‡

\* Empresa Brasileira de Pesquisa Agropecuária (Embrapa) – SGE  
Parque Estação Biológica, W3 Norte final, Asa Norte,  
70770-901, Brasília, DF, Brasil  
eliane.gomes@embrapa.br

† Universidade Federal Fluminense – Departamento de Engenharia de Produção  
Rua Passo da Pátria 156, São Domingos,  
24210-240, Niterói, RJ, Brasil  
jcsmello@producao.uff.br

‡ Embrapa Monitoramento por Satélite  
Av. Dr. Júlio Soares de Arruda 803, Parque São Quirino,  
13088-300, Campinas, SP, Brasil  
manga@cnpm.embrapa.br

---

### **Abstract**

This paper uses Data Envelopment Analysis (DEA) to measure the efficiency of some agricultural producers from the Holambra district (São Paulo State, Brazil). The total area of each property is one of the variables of the model, with two possible values: the value declared by the producer and the value measured by using IKONOS II satellite images. This variable presents uncertainty in its measurement and can be represented as interval data. The efficiency frontier is constructed considering the limits of uncertainty (interval limits), that is, the smallest and greatest possible values to be assumed for the imprecise variable. In this way, a region is constructed in relation to which the DMUs have a certain membership degree. The theoretical model, called fuzzy DEA model, is presented, as well as its application to the case of the evaluation of the efficiency of the agricultural producers of Holambra.

### **Resumo**

Este artigo usa Análise de Envoltória de Dados (DEA) para medir a eficiência de alguns agricultores do município de Holambra (estado de São Paulo, Brasil).

A área total de cada propriedade é uma das variáveis do modelo. Entretanto, esta variável apresenta dois possíveis valores: o valor declarado pelo produtor e o valor medido com o uso de imagens do satélite IKONOS (de alta resolução espacial). Desta forma, como essa variável apresenta incerteza na medição, pode ser representada como um dado intervalar. Assim, constrói-se uma região em relação à qual as DMUs possuem um certo grau de pertença. O modelo teórico proposto é apresentado, chamado de modelo DEA de fronteira difusa, assim como os resultados de sua aplicação ao caso da avaliação eficiência dos agricultores de Holambra.

**Keywords:** Data envelopment analysis; Agriculture; Interval data; Fuzzy frontier; Satellite images.

**Title:** Fuzzy DEA Frontier in Agricultural Efficiency Evaluation

---

## 1 Introdução

Avaliar a eficiência de unidades produtivas tem importância tanto para fins estratégicos, quanto para o planejamento e para a tomada de decisão. A eficiência de uma unidade produtiva pode ser medida pela comparação entre os valores observados e os valores possíveis de seus produtos (saídas) e recursos (insumos). Esta comparação pode ser feita, em linhas gerais, pela razão entre a produção observada e a produção potencial máxima alcançável, dados os recursos disponíveis, ou pela razão entre a quantidade mínima necessária de recursos e a quantidade efectivamente empregada, dada a quantidade de produtos gerados. Combinações dessas razões podem igualmente prover informações importantes.

O uso da Análise de Envoltória de Dados (*Data Envelopment Analysis* – DEA) (Charnes et al., 1978; Cooper et al., 2000) para medir a eficiência relativa de unidades produtivas tem-se mostrado bastante atractivo em diversos sectores de aplicação. O emprego de modelos DEA em agricultura pode vir a apoiar as decisões dos agricultores (e dos órgãos de fomento ou de associações de agricultores), ao indicar as fontes de ineficiência e as unidades que podem servir de referência às práticas adoptadas (identificação de *benchmarks*). Revisões sobre o estado da arte do uso de fronteiras de produção em agricultura podem ser vistas em Battese (1992), que apresenta aplicações de modelos de fronteiras paramétricas; aplicações de métodos de fronteiras à agricultura de países em desenvolvimento são resumidas por Bravo-Ureta e Pinheiro (1993). Coelli (1995) completa o estudo desses autores e mostra que de 38 artigos encontrados sobre o tema “fronteiras de produção e avaliação de eficiência”, somente 3 utilizavam DEA até aquela data (Färe et al., 1985; Ray, 1985; Chavas e Aliber, 1993). Em Gomes et al. (2003) encontra-se uma breve revisão sobre o estado da arte do uso de modelos DEA em agricultura. Uma revisão completa do estado da arte no tema foge ao escopo deste artigo. Entretanto, uma busca bibliográfica não exaustiva revelou que existem mais de 80 artigos publicados sobre o tema, em periódicos científicos das áreas de Investigação Operacional, Economia e Ciências Agrárias, sem contabilizar dissertações de mestrado e teses de

doutoramento relativas ao assunto.

Este artigo faz uso de DEA para medir a eficiência de uma amostra de 71 agricultores do município de Holambra, estado de São Paulo, Brasil. Os dados utilizados são aqueles originalmente usados para tipificação dos produtores rurais (Mangabeira, 2002), referentes ao ano de 2002 e obtidos por levantamento de campo, via questionários socioeconômicos.

As variáveis usadas são área total, mão-de-obra, uso de máquinas, como *inputs*, e renda líquida, como *output*. Note-se que a área total apresenta dois possíveis valores: o valor declarado pelo produtor e aquele medido a partir de sensoriamento remoto, com o uso de imagens do satélite IKONOS II, de alta resolução espacial (1m) (Dial e Grodecki, 2003). Como essa variável apresenta incerteza na medição (variável incerta), pode ser representada como um dado intervalar. Dessa forma, a fronteira eficiente é construída ao considerarem-se os menores e maiores valores possíveis de serem assumidos pela variável incerta.

Constrói-se, assim, uma região em relação à qual as unidades tomadoras de decisão possuem um certo grau de pertença. O modelo teórico usado é o apresentado em Soares de Mello et al. (2005), chamado de modelo DEA de fronteira difusa. É feito um resumo desse modelo e são apresentados os resultados da sua aplicação à avaliação dos agricultores de Holambra.

Dada a importância econômica da actividade agrícola da floricultura no município de Holambra (actividade predominante), pretende-se com os resultados gerados pelo modelo proposto avaliar se há algum tipo de cultura predominante entre os agricultores mais eficientes. Em particular, deseja-se comparar a eficiência dos que produzem flores com a dos que não o fazem. Ainda, dentro dos que produzem flores, verificar-se-á se o uso de estufas pode aumentar a eficiência. Deseja-se também verificar se esses agricultores fazem uso adequado dos recursos de que dispõem, em especial em relação ao uso da terra.

## **2 Modelo DEA de fronteira difusa**

### **2.1 Revisão bibliográfica**

Um revisão do estado da arte em incorporação de incertezas em DEA pode ser vista em Zhu (2003) e em Soares de Mello et al. (2005), cujo modelo, com pequena adaptação, é usado neste estudo. Destacam-se, a seguir, alguns trabalhos correlatos.

Wang et al. (2005) estudaram a avaliação de eficiência com modelos DEA em situações nas quais as variáveis são intervalares ou difusas. Foram construídos novos modelos DEA, baseados em aritmética intervalar. Os modelos propostos medem os limites superior e inferior da eficiência de cada DMU com variáveis incertas.

Haghighat e Khorram (2005), com base no modelo de Cooper et al. (1999) que considera modelos DEA com dados intervalares, descreveram como deve ser

o conjunto de dados das DMUs para produzir, nessas situações, o número máximo e mínimo de unidades eficientes. Para encontrar o número máximo de DMUs eficientes, os autores definiram limites superiores e inferiores que os índices de eficiência deveriam assumir. Para obter o número mínimo de unidades eficientes, os autores propuseram uma procedimento *branch and bound*.

Modelos FDH (Deprins et al., 1984) com variáveis imprecisas foram propostos por Jahanshahloo et al. (2004). Os autores usaram transformações para converter o modelo não linear em um modelo linear. A medida de eficiência é um intervalo, com limites superior e inferior.

Lertworasirikul et al. (2003) trataram variáveis imprecisas como conjuntos difusos. Esses modelos foram formalizados através de programação linear *fuzzy*. Os autores associaram as variáveis difusas a distribuições de possibilidades (Zadeh, 1978). Nesse enfoque, os índices *fuzzy-DEA* são únicos, mas dependentes do nível de possibilidade utilizado, isto é, para vários níveis de possibilidade utilizados há diversos índices diferentes correspondentes.

Um modelo DEA para avaliar DMUs de forma otimista foi proposto por Entani et al. (2002). Com esses resultados, foi determinada a eficiência por intervalos, pela proposição de novos modelos DEA. Com base no modelo *Inverted DEA* (Yamada et al., 1994), os autores avaliaram cada DMU de forma pessimista e calcularam índices de ineficiência por intervalos. Consideraram ainda dados por intervalos e propuseram modelos para calcular a eficiência e a ineficiência por intervalos, tal como feito para os dados com valores únicos e exactos.

Despotis e Smirlis (2002) usaram o modelo IDEA (*Imprecise Data Envelopment Analysis*) para lidar com dados imprecisos e, como resultado, obtiveram um limite superior e inferior para a eficiência de uma determinada DMU, o que permite uma melhor discriminação entre as DMUs. O modelo IDEA, que é um problema de programação não linear, foi proposto por Cooper et al. (1999) para tratar de dados com limites superior e inferior.

Os departamentos acadêmicos de uma Universidade foram avaliados por Lopes e Lanzer (2002), ao considerar como números difusos os resultados de DEA nas dimensões de ensino, pesquisa, extensão e qualidade.

Cooper et al. (2001) propuseram um modelo IDEA estendido, que permite não somente o uso de dados incertos, mas também o uso de restrições aos pesos do tipo regiões de segurança ou *cone-ratio*. O modelo foi aplicado à avaliação de eficiência de postos de uma companhia de telecomunicações coreana.

O modelo DEARA, proposto por Guo e Tanaka (2001), é uma extensão do modelo DEA CCR (Charnes et al., 1978), e usa conceitos da análise de regressão para gerar um modelo DEA difuso, que considera *inputs* e *outputs* difusos. Os índices de eficiência resultantes são índices de eficiência difusos ou intervalares.

Kao e Liu (2000) apresentam um modelo difuso que é transformado em uma família de modelos DEA convencionais, baseados em dados exactos. Os índices de eficiência difusos obtidos foram expressos por meio de funções intervalares, o que possibilitaria maior nível de informação para a gerência.

Para medir a eficiência técnica de DMUs, Triantis e Eeckaut (2000) usaram variáveis difusas (dados imprecisos) para realizar comparações pareadas e verificar a dominância ou não de uma DMU. Os resultados das comparações feitas par a par foram apresentados em uma matriz, que mostra dominância em dois sentidos. Este modelo não gera índices de eficiência, mas apenas indicações sobre quem domina quem.

Hougaard (1999) usou intervalos difusos para unir em um índice de eficiência a informação fornecida pelos índices de eficiência analíticos (DEA) e índices de eficiência subjectivos baseados em dados que reflectem aspectos qualitativos e organizacionais, expressos na forma de intervalos difusos. A forma de especificar a relação entre esses dois tipos de informação foi um índice corrigido, expresso na forma de um intervalo difuso.

Uma medida de eficiência técnica em ambiente difuso, em três estágios, foi proposta por Triantis e Girod (1998), com uso de modelos DEA clássicos que incorporaram conceitos desenvolvidos em programação paramétrica difusa (Carlsson e Korhonen, 1986).

Sengupta (1992) explorou a teoria dos conjuntos difusos no contexto de DEA, com três tipos de estatísticas difusas (programação matemática difusa, regressão difusa e entropia difusa) para ilustrar os tipos de decisão e de solução que podem ser alcançados quando os dados são vagos e a informação *a priori* é inexacta e imprecisa.

## **2.2 Abordagem proposta**

A abordagem aqui usada para incorporar dados intervalares a modelos DEA é a proposta por Soares de Mello et al. (2005) e destaca-se das existentes na literatura por não fazer nenhuma suposição em relação à forma como cada *input* ou cada *output* varia. Ou seja, não é assumido que os valores obedecem a alguma distribuição de probabilidade. Nessa proposta é construído um índice único de eficiência para a situação em que as variáveis (*inputs* ou *outputs*) apresentam incerteza. Qualquer que seja a variação, a fronteira de eficiência é construída ao considerarem-se apenas os valores máximos e mínimos possíveis de serem assumidos, com o uso posterior de programação linear clássica e modelos DEA tradicionais para a determinação das fronteiras.

### **2.2.1 Criação da fronteira DEA difusa**

Se em um modelo DEA não houver certeza sobre os valores assumidos por um *output* ou *input*, não haverá igualmente certeza sobre a exacta localização da fronteira DEA eficiente. Caso os valores do *output* (*input*) para algumas DMUs (unidades de tomada de decisão – *Decision Making Units*), sejam maiores que o suposto, a fronteira estará deslocada “mais acima” (“mais à direita”), isto é, em uma região de valores superiores para esse *output* (*input*). Caso os valores sejam inferiores ao suposto, a fronteira estará “mais abaixo” (“mais à esquerda”).

Portanto, neste caso, conforme destacado em Soares de Mello et al. (2005), a fronteira não é um conjunto no sentido clássico do termo, mas um conjunto nebuloso (Zadeh, 1965), para o qual não há sentido em dizer que um elemento pertence ou não ao conjunto; deve-se fazer referência ao grau de pertença desse elemento ao conjunto. Dessa forma, em vez de existirem DMUs na fronteira e outras fora da fronteira, haverá DMUs com diferentes graus de pertença à fronteira.

Pela abordagem aqui usada, diferentemente da lógica nebulosa clássica em que são postuladas funções de pertença, que determinam com que grau um certo elemento pertence a um determinado conjunto, o grau de pertença é calculado com base em propriedades geométricas das fronteiras geradas, em vez das funções clássicas.

No caso de um *output* com incerteza, a fronteira localizadas “mais acima” é aquela obtida por um modelo DEA clássico, CCR (Charnes et al., 1978) ou BCC (Banker et al., 1984) que considera o máximo valor do *output* incerto que cada DMU pode atingir, o que representa a melhor situação para todas as DMUs. Assim, essa fronteira é denominada de *Fronteira Optimista*. Analogamente, a fronteira obtida com o modelo DEA clássico que considere o menor valor de *output* para cada DMU é a *Fronteira Pessimista*, por considerar a situação menos favorável de produção.

No caso em que a variável incerta é um *input*, a *Fronteira Optimista* é aquela gerada pelos menores valores que os *inputs* podem assumir (localizada “mais à esquerda”). Já a fronteira composta pelos maiores valores assumidos pelos *inputs* (situação de uso de recursos não desejável) representa a *Fronteira Pessimista* (situada “mais à direita”).

A Figura 1 ilustra esses conceitos, para o modelo DEA BCC, em que a variável incerta é um *output*. A fronteira difusa é toda a região situada entre as fronteiras pessimista (fronteira inferior) e optimista (fronteira superior). Note-se ainda que uma DMU não é mais representada por um ponto; a incerteza na medição do *output* faz com que a representação da DMU seja um segmento de recta com extremidades determinadas pelos valores pessimista e optimista desse *output*. Em um caso mais geral, com várias variáveis incertas, a DMU ocupa um hiper volume, que pode ser representado pela sua diagonal (Soares de Mello et al., 2005).

Na Figura 1, conforme descrito em Soares de Mello et al. (2005),  $OP_{fo}$  e  $OP_{fp}$  referem-se ao *output* projectado na fronteira optimista e pessimista, respectivamente.  $c$  é o comprimento da DMU, ou seja, é a diferença entre os valores optimista e pessimista do *output*;  $l$  é a largura da faixa, isto é, representa para cada DMU a diferença entre o valor do *output* incerto para as fronteiras optimista e pessimista;  $p$  é parte que está na faixa, é a diferença entre o *output* optimista de cada DMU e a intersecção dessa DMU com a fronteira pessimista.

Uma vez definidos a fronteira difusa e os termos  $c$ ,  $l$  e  $p$ , deve-se definir o grau de pertença de cada DMU a essa fronteira. As DMUs que estão integralmente contidas na região que define a fronteira difusa devem ter grau de pertença 1 à fronteira. Já aquelas que apenas tocam a fronteira devem ter grau de pertença nulo. Entre esses dois casos extremos, as DMUs poderão ter graus de pertença intermédios.

Suponha-se a existência de uma DMU que contenha toda a largura da fronteira

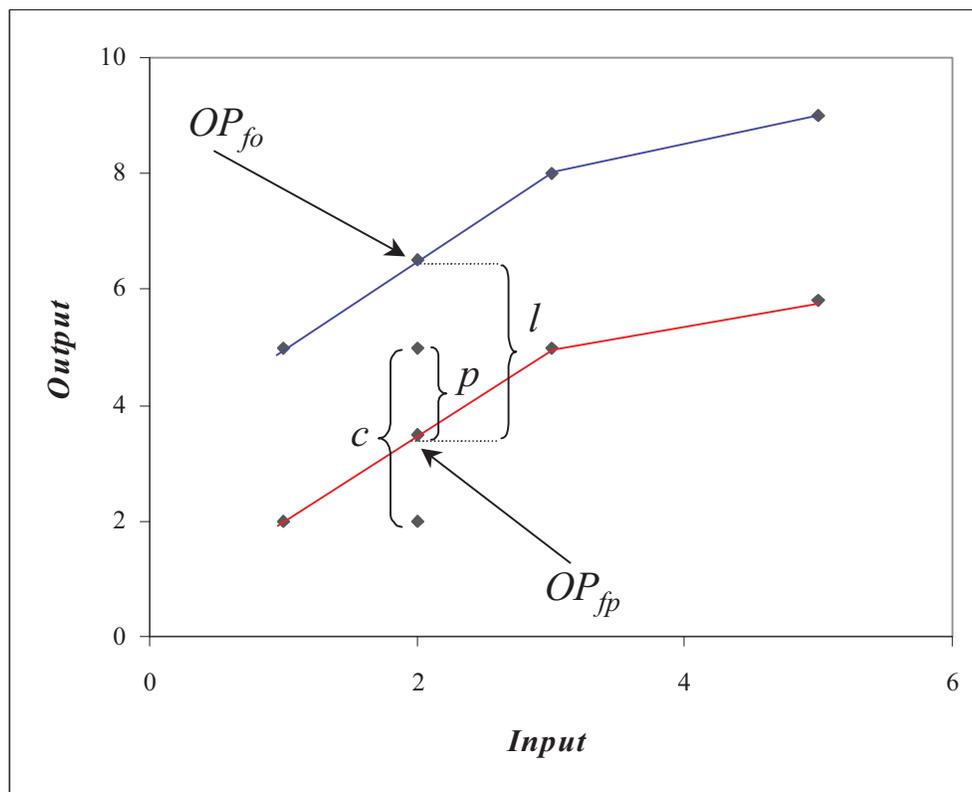


Figura 1: Fronteiras otimista e pessimista.

difusa, mas que tenha uma parte da largura da faixa externa à fronteira. Nesse caso, apesar de não estar totalmente excluída da fronteira, a sua pertença também não é total. Em situações semelhantes a essa, a pertença deveria obedecer à relação  $p/c$ , unitária quando  $p = c$ .

Por outro lado, suponha-se o caso em que uma DMU esteja totalmente contida na fronteira difusa, mas que exista uma região da fronteira que não contenha a DMU. Nessa situação, a pertença deveria ser  $p/l$ , unitária quando  $p = l$ .

Para garantir que uma DMU só tenha pertença 1 à fronteira difusa se ela for eficiente tanto na hipótese pessimista quanto na otimista, esses dois casos devem ser combinados. O produto das duas expressões anteriores satisfaz a essa propriedade e, dessa forma, a pertença à fronteira difusa,  $\varphi$ , é definida por  $\varphi = \frac{p^2}{lc}$ .

### 2.2.2 Cálculo algébrico da pertença

Para o caso em que apenas um *output* apresenta incerteza, para obter-se uma expressão que possa ser usada em modelos multidimensionais, faz-se necessário transformar as grandezas geométricas da relação  $\varphi = p^2/lc$  em quantidades que possam ser extraídas dos modelos DEA clássicos: *outputs* otimistas e pessimistas, eficiências com *output* pessimista em relação à fronteira pessimista ( $Ef_{fp}$ ) e com *output* otimista em relação à fronteira otimista ( $Ef_{fo}$ ).

Os valores de  $Ef_{fp}$  e de  $Ef_{fo}$  são calculados, para o caso de um *output* com incerteza, das definições clássicas de DEA orientado a *outputs*, segundo as relações  $Ef_{fp} = \frac{OP_{fp}}{O_{fp}}$  e  $Ef_{fo} = \frac{OP_{fo}}{O_{fo}}$ , nas quais  $O_{fp}$  e  $O_{fo}$  são, respectivamente, os valores nas fronteiras pessimista e otimista deste *output*.

A largura da faixa  $l$  é a diferença entre o alvo da fronteira otimista e o alvo da fronteira pessimista, ou seja,  $l = OP_{fo} - OP_{fp} = O_{fo}Ef_{fo} - O_{fp}Ef_{fp}$ . O comprimento da DMU  $c$  é a diferença entre o *output* otimista e o pessimista, isto é,  $c = O_{fo} - O_{fp}$ . A parte da DMU que está na fronteira  $p$  é a diferença entre o *output* otimista e o alvo do *output* pessimista na fronteira pessimista, desde que a diferença seja positiva. Isto implica que o *output* otimista deve estar dentro da faixa da fronteira difusa; caso contrário,  $p$  deve ser igual a 0, ou seja,  $p = O_{fo} - O_{fp}Ef_{fp}$ , se  $O_{fo} - O_{fp}Ef_{fp} \geq 0$ ;  $p = 0$ , caso contrário.

Com a definição “não geométrica” de  $l$ ,  $c$  e  $p$ , é possível obter a expressão que represente algebricamente a pertença no caso de um *output* incerto,  $\varphi_{output}$ , conforme apresentado em (I) (Soares de Mello et al., 2005).

$$\varphi_{output} = \frac{(O_{fo} - O_{fp}Ef_{fp})^2}{(O_{fo}Ef_{fo} - O_{fp}Ef_{fp})(O_{fo} - O_{fp})}, \text{ se } O_{fo} - O_{fp}Ef_{fp} \geq 0 \quad (I)$$

$$\varphi_{output} = 0, \text{ caso contrário}$$

Além do caso em que  $O_{fo} - O_{fp}Ef_{fp} < 0$ , onde o índice de pertença foi arbitrado como nulo, o cálculo algébrico dessa pertença também é zero caso  $O_{fo} - O_{fp}Ef_{fp} = 0$ . Por outro lado, como o numerador de (I) está elevado ao quadrado, nunca assume um valor negativo. Na orientação a *outputs*, o alvo na fronteira otimista é sempre

maior que o alvo na fronteira pessimista, e o *output* optimista é sempre maior que o *output* pessimista. Dessa forma, o denominador é, igualmente, sempre positivo. Portanto, o índice de pertença é sempre um número não negativo.

Caso as eficiências optimista e pessimista sejam unitárias, o índice de pertença é unitário. Entretanto, observa-se que  $O_p E_{ffp} \geq O_p$  (uma vez que na orientação a *outputs* a eficiência é maior ou igual a 1). Portanto, tem-se que  $O_{fo} - O_{fp} E_{ffp} \geq O_{fo} E_{ffo} - O_{fp} E_{ffp}$ . Verifica-se ainda que  $O_{fo} E_{ffo} - O_{fp} E_{ffo} \geq O_{fo} - O_{fp} E_{ffp}$  (haja visto que  $O_{fo} E_{ffo} \geq O_{fo}$ ). Logo, cada termo do denominador de (I) é maior ou igual à raiz quadrada do numerador. Em consequência, o numerador não é maior que o denominador e o índice de pertença não pode ser maior que a unidade.

Destaca-se ainda que a modelagem proposta só é válida nos casos em que os valores optimistas e pessimistas não sejam coincidentes, ou seja, nos casos em que haja incerteza na medição das variáveis.

Ainda deve-se observar que o índice de pertença (I) não é uma medida de eficiência, apesar de calculado a partir de eficiências e, dessa forma, não precisa respeitar as propriedades das medidas de eficiência. Em particular, o conjunto de DMUs com pertença unitária à fronteira difusa não é necessariamente um conjunto convexo.

De forma análoga ao que acontece com um *output* com incerteza, pode-se apresentar o caso em que haja um *input* com incerteza. Nesse caso, define-se como *input* optimista,  $I_{fo}$ , aquele com o menor valor que o *input* pode assumir, e *input* pessimista,  $I_{fp}$ , o de maior valor que o *input* pode assumir. Quando se consideram os *inputs* optimistas para todas as DMUs, tem-se a fronteira optimista; quando são considerados os *inputs* pessimistas para todas as DMUs, obtém-se a fronteira pessimista.

Deduções semelhantes às do caso de um *output* com incerteza permitem definir o índice de pertença para o caso de um *input* incerto,  $\varphi_{input}$ , conforme apresentado em (II) (Soares de Mello et al., 2005). Observe-se que em (II), as eficiências  $E_{ffp}$  (eficiência em relação à fronteira pessimista) e  $E_{ffo}$  (eficiência em relação à fronteira optimista) são orientadas a *inputs*.

$$\varphi_{input} = \frac{(I_{fp} E_{ffp} - I_{fo})^2}{(I_{fo} E_{ffo} - I_{fp} E_{ffp})(I_{fp} - I_{fo})}, \text{ se } I_{fp} E_{ffp} - I_{fo} \geq 0 \quad (\text{II})$$

$$\varphi_{input} = 0, \text{ caso contrário}$$

Deve-se referir que as expressões (I) e (II) são exactas no caso em que o *input* (ou *output*) que apresenta incerteza é o único *input* (ou *output*). Caso contrário, esta é uma aproximação radial para uma situação não radial, conforme destacado em Soares de Mello et al. (2005). Redução radial refere-se à redução equiproporcional de todos os *inputs* ou aumento equiproporcional de todos os *outputs*. Entretanto, neste caso, a redução ou acréscimo é em apenas em um deles, naquele com incerteza na medição. As expressões derivadas usadas para a fronteira difusa são aquelas que seriam usadas caso houvesse redução ou acréscimo em todas as variáveis, sendo, portanto, uma aproximação radial de um caso não radial. Uma solução exacta pode ser obtida pela formulação multiobjectivo para DEA (Lins et al., 2004), como mostrado em Soares de Mello et al. (2005). No entanto, este modelo exige um grande esforço computacional, o que pode recomendar o uso da aproximação radial

em casos em que o intervalo de variação seja pequeno.

### **3 Estudo de caso: Avaliação de eficiência dos agricultores de Holambra com modelo DEA de fronteira difusa**

#### **3.1 Agricultura em Holambra**

O município de Holambra situa-se no Estado de São Paulo, Brasil, com uma dimensão territorial relativamente pequena em relação aos demais municípios brasileiros (65 km<sup>2</sup>). Holambra tem cerca de 8.300 habitantes, segundo estimativas do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística para o ano de 2005 (Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística, 2005).

O município caracteriza-se pela recepção da imigração holandesa ao Brasil (final da década de 40) e tem economia fortemente baseada na actividade agro-pecuária, com predomínio das actividades hortícolas, citrícolas, plantas decorativas, flores, suinocultura, avicultura e laticínios. Quase toda sua produção agrícola advém de um grupo aproximado de 287 produtores, com 20 ha em média de área (Holambra, 1998).

Mangabeira (2002) mapeou o uso das terras do município de Holambra com base em imagens do satélite IKONOS II (do ano de 2000) e levantamentos de campo (em 2001). Com o uso de questionários de campo, pesquisou informações de 266 variáveis socioeconómicas (que geraram 204 indicadores), para uma amostra de 74 produtores rurais.

De posse desses 204 indicadores, o autor tipificou essa amostra de produtores. Para tal foi usada a Análise de Correspondência Múltipla (Bishop et al., 1975), seguida da análise de *cluster* pelo método de Ward (Everitt, 1974), para classificar os tipos de produtores agrícolas. Mangabeira (2002) identificou 6 tipos de agricultores em Holambra, cujas características são brevemente descritas a seguir. Desses, três grupos são de produtores de flores (62% do total de agricultores analisado), a saber, agrofloricultores, florescitricultores e floricultores.

- Produtores de flores
  - Agrofloricultores (7 agricultores): o sistema de produção é baseado na produção de flores em estufas. Caracteriza-se pelo baixo nível de capitalização, mas diferenciam-se dos demais grupos de produtores de flores pelo baixo uso de insumos agrícolas (fertilizantes, defensivos etc.) e pela não utilização de mecanização em estufas. Apresentam alta eficiência de emprego e renda por unidade de área.
  - Florescitricultores (24): caracterizam-se por produzir citros e flores. São produtores com nível médio de capitalização, com nível baixo a médio de produtividade líquida do capital por hectare em relação à área total e alto consumo de insumos agrícolas.

- Floricultores (13): apresentam como sistema de produção flores em estufas. Caracterizam-se pelo alto nível de capitalização em relação aos outros grupos, alto uso de insumos agrícolas, geração de emprego e mecanização por hectare cultivado. Não há presença de vegetação natural em suas propriedades.
- Não produtores de flores
  - Agrocitricultores (14): têm o sistema de produção baseado na produção de citros e com metade deles produzindo também cultura anual. São produtores com nível médio de capitalização, com uso médio de insumos agrícolas e baixa geração de emprego.
  - Agropecuaristas (4): são criadores de bovinos e suínos e têm agricultura, principalmente anual, em suas propriedades. São produtores com baixo nível de capitalização, baixa geração de emprego e que não utilizam insumos agrícolas e mecanização. Possuem granjas em suas propriedades.
  - Produtores Agrianuais (9): são agricultores que, na sua maioria, têm a cultura anual como principal actividade nos seus sistemas de produção. Caracterizam-se pelo baixo nível de capitalização em relação aos outros grupos, baixo nível de emprego por hectare e renda por hectare trabalhado, pelo uso razoável de insumos agrícolas e pela mecanização em suas propriedades. Com relação ao meio ambiente, metade dos produtores deste grupo praticam rotação de cultura.

### 3.2 Estruturação do problema

Para estruturar um modelo DEA é necessário definir as unidades a avaliar, as variáveis a usar (inputs e outputs), o modelo DEA adoptado (CCR, BCC, entre outros; orientação a inputs radial ou não radial, a outputs radial ou não radial, não orientado etc.). Na construção do modelo DEA deve-se atentar quais variáveis serão consideradas *inputs* e quais serão consideradas *outputs*. Para a avaliação dos agricultores de Holambra foram seleccionados 4 dos 206 indicadores derivados por Mangabeira (2002). Essas variáveis indicam as relações clássicas entre produção, capital e trabalho. Como *inputs* foram seleccionados Área Total (representada pela área total da propriedade, em hectares), Emprego (expresso por homem-hora-ano) e Uso de Máquinas (calculado como número total de horas de uso de máquinas no ano); Renda Líquida anual da propriedade, em reais, é o *output*.

Em Gomes e Mangabeira (2004), para medir a eficiência dos agricultores de Holambra, foram usadas as mesmas variáveis de *output* e *input*, com excepção da variável Área Total que foi substituída pelo *input* Área Cultivada. Estes autores não consideraram incerteza nos dados. Enquanto no artigo citado foi considerado que o não aproveitamento de uma área não era uma ineficiência, no presente artigo considera-se que o agricultor deve procurar aproveitar toda a área à sua disposição. Ressalta-se que nas propriedades analisadas pode-se desprezar a área submetida a constrangimentos ambientais. O uso da variável “área total” ao invés de “área cultivada” pode causar alguns problemas, pois a variável “área total” penaliza aqueles agricultores quem têm áreas não incluídas como fonte de produção e renda.

Já o uso da “área cultivada” fornece resultados de eficiência técnica, mas não de uma eficiência global, pois desconsidera a razão entre terra disponível e em uso; o emprego da variável “área cultivada” aumenta a eficiência daqueles produtores que utilizam estufa e mascara o mau aproveitamento da terra, conforme mostrado em Gomes e Mangabeira (2004).

Os valores das variáveis Emprego, Uso de Máquinas e Renda Líquida são aqueles fornecidos pelos agricultores nos questionários de campo. Já a variável Área Total pôde ser obtida de duas fontes: dos questionários de campo (ou seja, da informação fornecida pelo agricultor) e das imagens de satélite do município. O uso da imagem do satélite IKONOS II bem como o conhecimento dos limites de cada propriedade, permitiu calcular, com apoio de um Sistema de Informações Geográficas, a área total de cada propriedade. Esse valor, no entanto, é diferente do valor fornecido pelo agricultor. Assim, a variável Área Total é uma variável incerta que pode ser representada como um dado intervalar, sendo um dos limites do intervalo a informação dada pelo agricultor e o outro, o dado calculado com base na imagem do satélite IKONOS II.

As unidades de avaliação (DMUs) são as propriedades agrícolas amostradas por Mangabeira (2002). Dos 74 produtores, 3 foram descartados desta análise por dois motivos: são produtores de leite (portanto, com tecnologia bem diferente das demais DMUs) e apresentaram valor negativo para a variável Renda Líquida (o que obrigaria ao desenvolvimento de modelos para lidarem com esta situação). Dentre estes 71 agricultores, 44 produzem flores, sendo 35 exclusivamente em estufas, 4 somente em campo aberto e 5 possuem produção mista. Os dados usados encontram-se no Apêndice 1.

Quanto à questão de selecção do modelo DEA no que se refere aos retornos de escala, Banker (1996) propôs um teste de hipóteses para confirmar ou não a existência de ganhos ou perdas de escala. No entanto, trabalhos recentes (Hollingsworth e Smith, 2003; Soares de Mello et al., 2004) levantaram a hipótese de que o modelo DEA BCC ou não tem relação com a variação dos retornos de escala ou apresentam sempre retornos decrescentes de escala. Assim, face às questões levantadas por estes autores, preferiu-se não optar pelo teste proposto por Banker (1996) para selecção do modelo DEA. Para a escolha do modelo, deve-se observar que o modelo DEA CCR exige proporcionalidade de causa e efeito. No presente estudo, a duplicação dos valores dos *inputs* uso de máquina e mão-de-obra não acarreta em duplicação da produção. Além disso, as propriedades têm dimensões bem diferentes, o que também recomenda o uso do modelo DEA BCC para que uma DMU seja comparada apenas com as suas semelhantes.

O modelo DEA BCC foi orientado a *input* por três motivos: pretende-se saber se há excesso no uso dos recursos; para comparar os resultados com aqueles obtidos por Gomes e Mangabeira (2004); e a estrutura matemática dos modelos DEA difusos quando apenas uma variável apresenta incerteza, obriga a que a orientação do modelo seja *input* ou *output* conforme essa variável o seja.

Todos os resultados do modelo DEA necessários ao cálculo do índice de pertença foram obtidos com o uso do *software* SIAD (Angulo Meza et al., 2005).

### 3.3 Resultados

#### 3.3.1 Cálculo das medidas de eficiência

Conforme apresentado em (II), para o cálculo da pertença à fronteira difusa, na presença de um *input* com incerteza, é necessário calcular as eficiência em relação às fronteiras otimista e pessimista. A fronteira pessimista é aquela gerada quando do uso dos maiores valores do *input* e a fronteira otimista é aquela que comporta os menores valores para o *input* incerto. Devido à pequena diferença entre os valores, foi usada a aproximação radial, apesar de o modelo ser não radial, como referido ao final do item 2.

Calculando-se os modelos DEA BCC, verifica-se que a eficiência média em relação às fronteiras otimista e pessimista foi de cerca de 34%. Tanto em relação à fronteira otimista quanto à pessimista, 10 DMUs foram DEA BCC eficientes, sendo as mesmas nos dois casos.

Dentre as 10 DMUs eficientes, 5 são produtores de flores, todos em estufas e sem produção de flores em campo aberto. A eficiência média dos agricultores que não produzem flores no modelo DEA BCC foi de 43% para as fronteiras otimista e pessimista. Para aqueles que produzem flores, a eficiência média foi menor, cerca de 29% em relação a ambas as fronteiras. Dentro desta categoria, os produtores de flores em campo aberto tiveram eficiência otimista e pessimista médias de 18% e os que produzem em estufas de 32%.

Esses resultados de eficiência estão de acordo com a hipótese levantada por pesquisadores e especialistas na agricultura da região, de que os produtores de flores são mais ineficientes que aqueles que se dedicam a outras actividades agrícolas. Confirmam igualmente que aqueles que cultivam flores em estufas possuem melhor desempenho em relação aos produtores de flores em campo aberto.

A menor eficiência daqueles que produzem flores deve-se ao fato de que estes usam excessivamente insumos agrícolas (e sem controle, seja por desconhecimento, falta de assistência técnica, de pesquisas, ou por outros factores), o que tem impacto na redução da renda líquida.

Para aqueles agricultores que produzem flores em estufas, a maior eficiência é explicada pelo tipo de cultivo, já que este requer maior cuidado operacional; o cultivo em estufas, por ser um ambiente fechado (com espaço reduzido e controlado), impõe maior controle climático, no uso de insumos, de máquinas e de mão-de-obra.

Os resultados de maior eficiência dos não produtores de flores são opostos àqueles obtidos em Gomes e Mangabeira (2004), onde 6 agricultores foram eficientes, sendo 4 produtores de flores. Cabe destacar que enquanto o resultado do modelo dos multiplicados apresentava para o modelo de Gomes e Mangabeira (2004) uma grande quantidade de pesos zero para a variável Área Cultivada (89% das DMUs), no modelo proposto neste artigo, o modelo dos multiplicadores indica que a maior quantidade de pesos zero foi dada para a variável Uso de Máquinas (68% das DMUs), enquanto que apenas 20% das DMUs desconsideraram a Área Total no cálculo da medida de eficiência.

Adicionalmente, dentre os 6 agricultores vistos como eficientes por Gomes e Mangabeira (2004), 5 também o são pelo modelo aqui proposto. A exceção está em um agricultor, produtor de flor em estufa, que no modelo aqui proposto teve eficiência média de 28 e 27% em relação as fronteira otimista e pessimista, respectivamente.

Deve-se ser enfatizado que, como em qualquer modelo DEA, a escolha das variáveis é determinante na avaliação efectuada. No presente caso, além da escolha de variáveis, a forma como uma delas foi considerada mostrou-se fundamental. Considerar a variável “área” como sendo toda a área da propriedade ou apenas a área cultivada, traz importantes mudanças nos resultados. O uso da área total avalia melhor os agricultores que promovem uma total ocupação da terra com a actividade agrícola. Neste tipo de modelo, um agricultor pode ser eficiente, não por usar melhores técnicas mas apenas por empregar intensivamente toda a área à sua disposição. Já ao ser considerada como variável apenas a área cultivada, pode-se beneficiar indevidamente quem tenha uma grande quantidade de terra devoluta. Por outro lado, não se prejudica quem optou por manter reserva ambiental, construiu áreas de interesse social (lazer, educação, etc.) ou alojar outras actividades.

A escolha de uma das formas de considerar a área não é politicamente neutra. Assim, este artigo considera a área total, mas compara os resultados com os que foram obtidos com a área cultivada. Em tomada de decisão, as duas avaliações devem ser levadas em conta.

Ainda em relação à escolha das variáveis, o fato de o grupo dos agricultores que não produzem flores apresentar nível baixo a médio de capitalização e de emprego justifica também sua maior eficiência em relação ao grupo de produtores de flores, já que estas variáveis são *inputs* do modelo DEA.

### **3.3.2 Cálculo do índice de pertença**

Ao calcular-se o índice de pertença  $\rho$  obtém-se como resultado que essas mesmas DMUs apresentam pertença unitária e 61 tiveram pertença zero à fronteira difusa. Não houve DMUs com pertença intermediária.

Devido ao grande número de empates, há necessidade de melhor discriminar as unidades em avaliação, em especial para aquelas com pertença unitária (melhor desempenho). Para tal, é proposto o uso da fronteira invertida. Conforme destacado em Leta et al. (2005), o cálculo de eficiência em relação a essa fronteira permite avaliar as unidades de modo pessimista. É possível ainda calcular um índice composto de avaliação, que agrega os resultados em relação à fronteira original e à invertida e, assim, realizar uma avaliação mais completa das unidades, já que esse índice considera não só os pontos fortes (fronteira original), como também os fracos (fronteira invertida).

### 3.3.3 Fronteira invertida e índice composto de avaliação

Como destacado no item 2.2.2., o grau de pertença à fronteira não é uma medida de eficiência; duas DMUs que tenham grau nulo de pertença à fronteira podem ter posições relativas bem diferentes não detectadas pelo índice aqui proposto. Ou seja, ao contrário dos modelos DEA clássicos que fornecem muitos empates nos índices 100% eficientes, o enfoque proposto por Soares de Mello et al. (2005) e usado neste artigo fornece empates para as DMUs totalmente não pertencentes à fronteira. Uma revisão de métodos para diminuir os empates em DEA nas DMUs eficientes, pode ser vista em Angulo Meza e Lins (2002).

Para distinguir entre essas DMUs, Soares de Mello et al. (2005) propuseram o uso da fronteira invertida, que consiste em estimar uma fronteira de eficiência DEA na qual os *outputs* são considerado como *inputs* e os *inputs* como *outputs*. Essa fronteira foi usada inicialmente por Yamada et al. (1994) e Entani et al. (2002) com o objectivo de ou avaliar as DMUs de maneira pessimista, já que essa fronteira consiste das DMUs com as piores práticas gerenciais (e poderia ser chamada de fronteira ineficiente), e por Lins et al. (2005) para avaliar essas unidades como sendo as de melhores práticas segundo um ponto de vista oposto. Destaca-se que ao fazer a avaliação pelo “inverso”, a orientação do modelo DEA seleccionado também deve ser invertida.

Leta et al. (2005) usaram o conceito de fronteira invertida para discriminar DMUs eficientes, com o cálculo de um índice que considera tanto a eficiência em relação à fronteira original quanto em relação à invertida. Soares de Mello et al. (2005) aproveitam essa abordagem para distinguir entre duas DMUs que apresentem grau nulo ou unitário de pertença à fronteira difusa original, mas que tenham posições relativas bem diferentes não detectadas pelo índice de pertença. Para esse caso, quanto maior o grau de pertença à fronteira invertida menor a eficiência da DMU.

O uso do conceito de fronteira invertida no contexto da fronteira difusa tenta resolver o problema do grande número de empates. No entanto, para valores de incerteza pequenos, pode provocar o surgimento de um grande número de empates para DMUs medianamente eficientes. Métodos para resolver esse problema necessitam de estudos e desenvolvimentos futuros como, por exemplo, o uso de camadas de iso-eficiência (Tavares, 1998; Gomes, 2003).

Para obter um índice único de eficiência, Soares de Mello et al. (2005) englobaram os dois graus de pertença e obrigaram a que a variação do índice fosse entre 0 e 1. Esse índice foi chamado de *eficiência difusa* (ou *eficiência fuzzy-DEA*) ( $E_{f_{difusa}}$ ) e é dado pela equação (III), na qual  $\varphi_{original}$  é o grau de pertença à fronteira original e  $\varphi_{invertida}$  é o grau de pertença à fronteira invertida.

$$E_{f_{difusa}} = \frac{(\varphi_{original} - \varphi_{invertida} + 1)}{2} \quad (III)$$

Destaca-se que, apesar de por simplicidade de linguagem a agregação dos dois índices de pertença tenha recebido a denominação de eficiência difusa, este não é um indicador de eficiência no sentido clássico do termo. É apenas uma ponderação normalizada entre um índice de pertença, e o complementar de outro índice de pertença. O uso do complemento justifica-se pelo fato de na fronteira invertida

avaliar-se ineficiência, e os índices usados avaliam eficiências.

### 3.3.4 Cálculo do índice fuzzy-DEA

Ao calcular-se o índice apresentado em (III), obteve-se como resultado que dentre as 10 DMUs que haviam apresentado  $\varphi_{original}$  unitário, 8 apresentaram  $Ef_{difusa}$  igual a 1,0 (tiveram  $\varphi_{invertida}$  igual a zero) e 2 (não produtores de flores) obtiveram  $Ef_{difusa}$  igual a 0,5. Dentre as demais 61 DMUs, 5 (4 produtores de flores; 2 em estufas, 2 em campo) apresentaram índice agregado zero e o restante (sendo 38 produtores de flores) 0,5. Os resultados encontram-se no Apêndice 2.

Esse resultado permite alocar os agricultores em três grupos: alto, médio e baixo desempenho, conforme o valor de  $Ef_{difusa}$  seja 1,0, 0,5 ou 0,0, respectivamente. Além disso, dentre as 10 unidades com  $\varphi_{original}$  unitária, foi possível separar duas que poderiam ser consideradas “falsamente” eficientes, já que apresentaram  $\varphi_{invertida}$  igual a 1. Ou seja, segundo esta análise, não basta ao produtor ter bom resultado nas características em que é bom; também não deve ter resultado ruim naquilo em que não é tão bom.

Esses resultados corroboram os anteriormente discutidos, do melhor desempenho dos agricultores que não produzem flores, já que estes encontram-se majoritariamente no grupo de alto e médio desempenho. Igualmente, dentre os que produzem flores, aqueles que usam estufas em seu sistema de produção, têm desempenho superior (estão distribuídos nos três grupos, enquanto aqueles que produzem flor em campo, não aparecem no grupo de  $Ef_{difusa}$  unitária).

Para as unidades de desempenho intermediário, aqui denotado por  $Ef_{difusa}$  igual a 0,5, a discriminação não foi possível. Conforme anteriormente mencionado, o uso da fronteira invertida permite um melhor ajuste dos extremos, mas não separa as DMUs medianamente eficientes, o que pode ser conseguido, possivelmente, com métodos adicionais, como as já citadas camadas de iso-eficiência.

## 4 Conclusões

Ao não arbitrar, nem uma distribuição de probabilidade para as incertezas das variáveis, nem uma função nebulosa para as mesmas, a abordagem proposta neste artigo para incorporação de incertezas aos modelos DEA clássicos traz uma vantagem em relação aos modelos existentes na literatura. Além disso, é matematicamente simples, já que os resultados são obtidos por simples cálculos algébricos, sem necessidade de usar programação linear nebulosa. Ao determinar uma região onde se encontra a fronteira difusa e ao construir geometricamente uma função de pertença e, em consequência, a medida de eficiência difusa, os desenvolvimentos deste artigo situam-se próximos à origem dos conjuntos difusos sem, no entanto, usar suas funções características.

Para que uma DMU possua um valor elevado do índice fuzzy-DEA, deve ter um elevado grau de pertença em relação à fronteira otimista e baixo grau em relação

à fronteira pessimista. Dessa forma, todas as variáveis são levadas em conta no índice final. Assim, não basta a DMU ter bom desempenho naquilo em que ela é melhor; não deve ter também mau desempenho no critério em que for pior.

Essa característica permite eliminar outro dos inconvenientes dos modelos DEA BCC: o fato de a DMU de maior *output* ser eficiente independentemente dos valores dos *inputs* (Ali, 1993). No modelo aqui proposto, o valor da eficiência de tal DMU depende também de sua posição em relação à fronteira invertida.

Em relação ao estudo de caso, destacam-se dois aspectos interessantes. O primeiro refere-se à integração do sensoriamento remoto com técnicas de pesquisa operacional. O segundo diz respeito aos resultados obtidos, que confirmam a expectativa dos especialistas na agricultura praticada na região, de maior eficiência dos agricultores que não se dedicam à produção de flores. Ratificam, ainda, o sentimento de que os agricultores que usam essencialmente estufas têm melhor desempenho em relação ao que cultivam flores em campo aberto.

A comparação de resultados entre este artigo e o estudo que usou área cultivada permite a cada agricultor (ou ao seu órgão de assistência técnica) uma identificação mais precisa das suas deficiências: em particular se o seu problema é de uso de técnicas inadequadas ou de uso insuficiente da terra. Destaca-se, entretanto, que avaliações menos rigorosas, que levam em conta apenas a área cultivada, desconsiderando que tais propriedades rurais apresentam grandes extensões de terra sem uso.

Resultados obtidos com DEA são, via de regra, mais úteis para órgãos reguladores que para as unidades avaliadas. Ao comprovar hipóteses levantadas por pesquisadores, que não dispunham de ferramentas para testá-las, os resultados deste estudo (e de estudos similares) podem servir de parâmetro para pesquisadores e extensionistas, no apoio à busca de medidas que aumentem a racionalidade do uso dos insumos agrícolas, da mão-de-obra, de maquinarias e do uso eficiente da terra. Servem ainda para traçar políticas públicas mais eficientes nos planos, programas e projectos de desenvolvimento rural.

Destaca-se que apesar de considerar-se como variável incerta somente a área total de cada propriedade, os demais dados declarados pelo agricultor podem igualmente conter incertezas. Apesar de modelos que contemplem incertezas em várias variáveis já terem sido desenvolvidos (Soares de Mello et al., 2005), surge, neste caso, a questão de como quantificar essa incerteza e desenvolvimentos nesse sentido são vislumbrados pelos autores.

## 5 Agradecimentos

Ao CNPq, pelo apoio financeiro, por meio do Edital CNPq 19/2004 – Universal, processo n.º 472838/2004-0.

## 6 Referências

- Ali, A.I. Streamlined computation for data envelopment analysis. **European Journal of Operational Research**, v. 64, p. 61-67, 1993.
- Angulo Meza, L.; Biondi Neto, L.; Soares de Mello, J.C.C.B.; Gomes, E.G. ISYDS – Integrated System for Decision Support (SIAD – Sistema Integrado de Apoio a Decisão): A Software Package for Data Envelopment Analysis Model. **Pesquisa Operacional**, v. 25, n. 3, 2005.
- Angulo Meza, L.; Lins, M.P.E. Review of methods for increasing discrimination in data envelopment analysis. **Annals of Operations Research**, v. 116, p. 225-242, 2002.
- Banker, R.D. Hypothesis tests using DEA. **Journal of Productivity Analysis**, v. 7, n.2-3, p. 139-159, 1996.
- Banker, R.D.; Charnes, A.; Cooper, W.W. Some models for estimating technical scale inefficiencies in data envelopment analysis. **Management Science**, v. 30, n. 9, p. 1078-1092, 1984.
- Battese, G.E. Frontier production functions and technical efficiency: a survey of empirical applications in agricultural economics. **Agricultural Economics**, v. 7, p. 185-208, 1992.
- Bishop, Y.; Fienberg, S.; Holland, P. **Discrete multivariate analysis: theory and practice**. Cambridge: MIT Press, 1975.
- Bravo-Ureta, B.E.; Pinheiro, A.E. Efficiency analysis of developing country agriculture: a review of the frontier function literature. **Agricultural and Resource Economics Review**, v. 22, p. 88-101, 1993.
- Carlsson, C.; Korhonen, P. A parametric approach to fuzzy linear programming. **Fuzzy Sets and Systems**, v. 20, p. 17-33, 1986.
- Charnes, A.; Cooper, W.W.; Rhodes, E. Measuring the efficiency of decision-making units. **European Journal of Operational Research**, v. 2, p. 429-444, 1978.
- Chavas, J.; Aliber, M. An analysis of economic efficiency in agriculture: a nonparametric approach. **Journal of Agriculture and Resource Economics**, v. 18, p. 1-16, 1993.
- Coelli, T.J. Recent developments in frontier modelling and efficiency measurement. **Australian Journal of Agricultural Economics**, v. 39, n. 3, p. 219-245, 1995.
- Cooper, W.W.; Park, K.S.; Yu, G. IDEA and AR-IDEA: models for dealing with imprecise data in DEA. **Management Science**, v. 45, p. 597-607, 1999.
- Cooper, W.W.; Park, K.S.; Yu, G. An illustrative application of IDEA (Imprecise Data Envelopment Analysis) to a Korean mobile telecommunication company. **Operations Research**, v. 49, n. 6, p. 807-820, 2001.
- Cooper, W.W.; Seiford, L.M.; Tone, K. **Data Envelopment Analysis: a comprehensive text with models, applications, references and DEA-Solver software**. Boston: Kluwer Academic Publishers, 2000.
- Deprins, D.; Simar, L.; Tulkens, H. Measuring labor inefficiency in post offices. In: Marchand, M.; Pestieau, P.; Tulkens, H. (eds.) **The Performance of Public Enterprises: Concepts and Measurements**. Amsterdam: North-Holland, p. 243-267, 1984.
- Despotis, D.K.; Smirlis, Y.G. Data envelopment analysis with imprecise data. **European Journal of Operational Research**, v. 140, p. 24-36, 2002.

Dial, G.; Grodecki, J. Applications of IKONOS imagery. In: American Society for Photogrammetry and Remote Sensing 2003 Annual Conference, Anchorage, Alaska. **Proceedings...**, 2003.

Entani, T.; Maeda, Y.; Tanaka, H. Dual models of interval DEA and its extensions to interval data. **European Journal of Operational Research**, v. 136, p. 32-45, 2002.

Everitt, B. **Cluster analysis**. London: Heinemann Educational, 1974.

Färe, R.; Grabowski, R.; Grosskopf, S. Technical efficiency in Philippine agriculture. **Applied Economics**, v. 17, p. 205-214, 1985.

Gomes, E.G. **Modelos de análise de envoltória de dados com ganhos de soma zero**. Rio de Janeiro, 2003. Tese (Doutorado em Engenharia de Produção), Universidade Federal do Rio de Janeiro.

Gomes, E.G.; Mangabeira, J.A.C. Uso de análise de envoltória de dados em agricultura: o caso de Holambra. **Engevista**, v. 6, n. 1, p. 19-27, 2004.

Gomes, E.G.; Soares de Mello, J.C.C.B.; Biondi Neto, L. Avaliação de eficiência por análise de envoltória de dados: conceitos, aplicações à agricultura e integração com sistemas de informação geográfica. **Documentos**, n. 28. Campinas: Embrapa Monitoramento por Satélite, 2003. Disponível em: <[http://www.cnpm.embrapa.br/publica/download/d28.envoltdados\\_vf.pdf](http://www.cnpm.embrapa.br/publica/download/d28.envoltdados_vf.pdf)>. Acesso em: 14 dez. 2005.

Guo, P.; Tanaka, H. Fuzzy DEA: a perceptual evaluation method. **Fuzzy Sets and Systems**, v. 119, p. 149-160, 2001.

Haghighat, M.S.; Khorram, E. The maximum and minimum number of efficient units in DEA with interval data. **Applied Mathematics and Computation**, v. 163, p. 919-930, 2005.

Holambra em números. **Holambra Hoje**, agosto, 1998. (3<sup>a</sup> capa).

Hollingsworth, G.; Smith, P. Use of ratios in data envelopment analysis. **Applied Economics Letters**, v. 10, p. 733-735, 2003.

Hougaard, J.L. Fuzzy scores of technical efficiency. **European Journal of Operational Research**, v. 115, p. 529-541, 1999.

Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística. **Cidades@**. Disponível em: <<http://www.ibge.gov.br/cidadesat/default.php>>. Acesso em: 13 dez. 2005.

Jahanshahloo, G.R.; Matin, R.K.; Vencheh, A.H. On FDH efficiency analysis with interval data. **Applied Mathematics and Computation**, v. 159, p. 47-55, 2004.

Kao, C.; Liu, S.T. Fuzzy efficiency measures in data envelopment analysis. **Fuzzy Sets and Systems**, v. 113, p. 427-437, 2000.

Lertworasirikul, S.; Fang, S.C.; Joines, J.A.; Nuttle, H.L.W. Fuzzy data envelopment analysis (DEA): a possibility approach. **Fuzzy Sets and Systems**, v. 139, n. 2, p. 379-394, 2003.

Leta, F.R.; Soares de Mello, J.C.C.B.; Gomes, E.G.; Angulo Meza, L. Métodos de melhora de ordenação em DEA aplicados à avaliação estática de tornos mecânicos. **Investigação Operacional**, v. 25, n. 2, 2005.

Lins, M.P.E.; Angulo Meza, L.; Silva, A.C.M. A multi-objective approach to determine alternative targets in data envelopment analysis. **Journal of the Operational Research Society**, v. 55, p. 1090-1101, 2004.

Lins, M.P.E.; Novaes, L.F.L.; Legey, L.F.L. Real estate appraisal: a double perspective data envelopment analysis approach. **Annals of Operations Research**, v. 138, p. 79-96, 2005.

- Lopes, A.L.M.; Lanzer, E.A. Data envelopment analysis – DEA and fuzzy sets to assess the performance of academic departments: a case study at Federal University of Santa Catarina – UFSC. **Pesquisa Operacional**, v. 22, n. 2, p. 217-230, 2002.
- Mangabeira, J.A. de C. **Tipificação de produtores rurais apoiada em imagens de alta resolução espacial, geoprocessamento e estatística multivariada: uma proposta metodológica**. Campinas, 2002. Dissertação (Mestrado em Planejamento e Desenvolvimento Rural Sustentável), Universidade Estadual de Campinas.
- Ray, S. Measurement and test of efficiency of farmers in linear programming models: a study of West Bengal farms. **Oxford Bulletin of Economics and Statistics**, n. 47, p. 371-386, 1985.
- Sengupta, J.K. A fuzzy systems approach in data envelopment analysis. **Computers & Mathematics with Applications**, v. 24, n. 8-9, p. 259-266, 1992.
- Soares de Mello, J.C.C.B.; Angulo Meza, L.; Gomes, E.G.; Biondi Neto, L. Paradoxos em modelos DEA BCC. In: 11<sup>o</sup> Congresso da Associação Portuguesa de Investigação Operacional, 2004, Porto. **Actas...**, p. 62-62, 2004.
- Soares de Mello, J.C.C.B.; Gomes, E.G.; Angulo Meza, L.; Biondi Neto, L.; Sant'anna, A.P. Fronteiras DEA difusas. **Investigação Operacional**, v. 25, n. 1, p. 85-103, 2005.
- Tavares, G. **Data envelopment analysis: basic models and their main extensions. A model to analyse the modernisation of telecommunication services in OECD countries**. Coimbra, 1998. Tese (Mestrado em Ciências e Tecnologia), Universidade de Coimbra.
- Triantis, K.; Eeckaut, P.V. Fuzzy pair-wise dominance and implications for technical efficiency performance assessment. **Journal of Productivity Analysis**, v. 13, p. 207-230, 2000.
- Triantis, K.; Girod, O. A mathematical programming approach for measuring technical efficiency in a fuzzy environment. **Journal of Productivity Analysis**, v. 10, n. 1, p. 85-102, 1998.
- Wang, Y.M.; Greatbanks, R.; Yang, J.B. Interval efficiency assessment using data envelopment analysis. **Fuzzy Sets and Systems**, v. 153, p. 347-370, 2005.
- Yamada, Y.; Matui, T.; Sugiyama, M. New analysis of efficiency based on DEA. **Journal of the Operations Research Society of Japan**, v. 37, n. 2, p. 158-167, 1994.
- Zadeh, L. Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility. **Fuzzy Sets and Systems**, v. 1, p. 3-28, 1978.
- Zadeh, L. Fuzzy Sets. **Information and Control**, v. 8, n. 3, p. 338-353, 1965.
- Zhu, J. Imprecise data envelopment analysis (IDEA): a review and improvement with an application. **European Journal of Operational Research**, v. 144, p. 513-529, 2003.

**A Dados do estudo de caso.**

DMU	Área total (ha) limite inferior	Área total (ha) limite superior	Emprego (homem-hora-ano)	Uso de máquinas (hora-ano)	Renda líquida (R\$-ano)
DMU1	32,41	34,30	1.005	151,4	39.955
DMU2	34,00	34,90	41.571	1.645	481.536
DMU3	39,60	41,10	23.130	1.775	192.920
DMU4	6,09	6,10	16.380	720	125.000
DMU5	7,28	7,30	219	36,5	21.028
DMU6	11,80	11,90	66	55	1.700
DMU7	7,30	7,36	219	36,5	13.728
DMU8	6,00	6,40	12	20	1.340
DMU9	41,00	42,50	30.000	3.236	15.000
DMU10	5,30	5,70	312	12	3.370
DMU11	8,00	9,00	750	56	15.120
DMU12	16,70	17,00	2.772	72	51.360
DMU13	5,40	5,80	300	0	9.600
DMU14	14,50	14,60	42	84	2.920
DMU15	31,40	33,70	1.800	150	63.200
DMU16	19,50	19,80	2.040	54	319.050
DMU17	15,90	16,70	15.600	752	112.000
DMU18	19,40	19,80	11.400	152	9.000
DMU19	72,00	74,70	23.640	5.316	892.000
DMU20	14,60	15,00	9.000	120	7.500
DMU21	3,80	4,20	9.000	225	224.000
DMU22	26,30	27,20	10.458	1.788	805.070
DMU23	24,50	25,60	5.700	1.230	94.000
DMU24	18,30	18,50	4.350	276	142.621
DMU25	27,60	28,20	4.470	330	179.500
DMU26	15,30	15,70	4.692	1.100	139.700
DMU27	29,80	30,00	840	280	112.000
DMU28	12,20	13,00	25.500	1.820	390.000
DMU29	10,00	10,70	1.200	800	76.000
DMU30	9,20	10,00	5.526	170	34.696
DMU31	20,30	20,36	2.736	190	84.923
DMU32	20,70	21,50	15.612	744	37.217
DMU33	16,00	16,30	8.400	360	16.000
DMU34	25,60	28,00	16.830	900	3.000
DMU35	8,20	8,40	4.500	1.098	105.000
DMU36	32,80	38,70	76.55	553,5	21.097
DMU37	17,10	18,00	9.030	1.100	19.500
DMU38	28,70	29,00	23.400	1.122	32.512
DMU39	3,80	3,81	3.600	900	1.200.000
DMU40	8,30	8,40	16.200	2.025	250.000
DMU41	30,10	30,20	4.872	645	88.000

DMU	Área total (ha) limite inferior	Área total (ha) limite superior	Emprego (homem-hora-ano)	Uso de máquinas (hora-ano)	Renda líquida (R\$-ano)
DMU42	35,00	36,80	1.401	205	72.250
DMU43	30,00	30,20	14.400	72	40.080
DMU44	9,80	10,00	1.848	186	13.200
DMU45	34,00	37,00	12.960	900	465.000
DMU46	25,70	26,00	19.320	725	303.700
DMU47	24,00	24,50	402	80	22.000
DMU48	25,00	25,20	480	54	1.825
DMU49	15,00	15,30	1.263	113,6	14.588
DMU50	19,80	20,00	693	82,5	35.360
DMU51	5,80	6,50	918	9	63.875
DMU52	2,47	2,50	300	0	66.000
DMU53	16,90	17,00	1.500	90	4.016
DMU54	10,20	10,50	600	0	576
DMU55	30,00	31,60	300	0	2.880
DMU56	33,00	36,80	5.886	832	59.000
DMU57	21,20	22,50	1.335	99,5	75.850
DMU58	24,00	25,20	12.780	1.148	129.400
DMU59	1,46	1,50	2.400	0	52.000
DMU60	1,98	2,00	1.500	0	27.000
DMU61	22,50	23,00	6.540	204	65.998
DMU62	27,00	28,20	4.830	546	32.633
DMU63	9,50	10,30	13.200	200	108.000
DMU64	2,30	2,40	9.000	0	120.000
DMU65	32,70	32,90	6.540	292	40.700
DMU66	4,30	4,40	3.000	100	18.000
DMU67	16,80	17,00	11.475	435	31.000
DMU68	7,30	7,39	1.350	50	16.000
DMU69	13,00	13,10	1.710	42	22.000
DMU70	10,30	12,00	3.240	0	15.000
DMU71	3,60	4,20	3.600	150	6.000

## B Resultados do modelo DEA de fronteira difusa.

	Fronteira original			Fronteira invertida			$Ef_{difusa}$
	$Ef_{fo}$	$Ef_{fp}$	$\varphi_{original}$	$Ef_{fo}$	$Ef_{fp}$	$\varphi_{invertida}$	
DMU1	0,1605	0,1605	0	0,7900	0,7738	0	0,5
DMU2	0,1710	0,1709	0	1,0000	1,0000	1	0,0
DMU3	0,0585	0,0581	0	0,8382	0,8374	0	0,5
DMU4	0,2642	0,2700	0	0,5005	0,5005	0	0,5
DMU5	0,6169	0,6393	0	0,1709	0,1766	0	0,5
DMU6	0,4875	0,5129	0	0,5189	0,5228	0	0,5
DMU7	0,6157	0,6356	0	0,1780	0,1832	0	0,5

	Fronteira original			Fronteira invertida			<b>Ef</b> <sub>difusa</sub>
	<i>Ef</i> <sub>fo</sub>	<i>Ef</i> <sub>fp</sub>	$\varphi$ <sub>original</sub>	<i>Ef</i> <sub>fo</sub>	<i>Ef</i> <sub>fp</sub>	$\varphi$ <sub>invertida</sub>	
DMU8	1,0000	1,0000	1	0,3347	0,3199	0	1,0
DMU9	0,0472	0,0465	0	1,0000	1,0000	1	0,0
DMU10	0,6737	0,6612	0	0,1782	0,1745	0	0,5
DMU11	0,3575	0,3426	0	0,2117	0,1951	0	0,5
DMU12	0,1450	0,1443	0	0,3878	0,3949	0	0,5
DMU13	1,0000	1,0000	1	0,1541	0,1496	0	1,0
DMU14	0,4121	0,4340	0	0,4722	0,4964	0	0,5
DMU15	0,1437	0,1437	0	0,7612	0,7353	0	0,5
DMU16	1,0000	1,0000	1	0,3690	0,3768	0	1,0
DMU17	0,1178	0,1153	0	0,4814	0,4814	0	0,5
DMU18	0,1051	0,1048	0	0,5518	0,5669	0	0,5
DMU19	0,1198	0,1198	0	1,0000	1,0000	1	0,0
DMU20	0,1381	0,1370	0	0,4440	0,4570	0	0,5
DMU21	0,5303	0,5161	0	0,2558	0,2558	0	0,5
DMU22	0,3039	0,3032	0	0,3985	0,3991	0	0,5
DMU23	0,0987	0,0960	0	0,5639	0,5595	0	0,5
DMU24	0,1878	0,1880	0	0,3921	0,4021	0	0,5
DMU25	0,1966	0,1960	0	0,5810	0,5896	0	0,5
DMU26	0,1599	0,1580	0	0,3335	0,3369	0	0,5
DMU27	0,4086	0,4086	0	0,6513	0,6707	0	0,5
DMU28	0,1761	0,1677	0	0,7097	0,7097	0	0,5
DMU29	0,2694	0,2670	0	0,2392	0,2366	0	0,5
DMU30	0,2205	0,2092	0	0,2314	0,2206	0	0,5
DMU31	0,1286	0,1288	0	0,4518	0,4670	0	0,5
DMU32	0,0927	0,0913	0	0,5110	0,5110	0	0,5
DMU33	0,1305	0,1302	0	0,3832	0,3899	0	0,5
DMU34	0,0776	0,0734	0	1,0000	1,0000	1	0,0
DMU35	0,2632	0,2613	0	0,3183	0,3183	0	0,5
DMU36	0,0717	0,0624	0	0,9058	0,7958	0	0,5
DMU37	0,1219	0,1185	0	0,4219	0,4155	0	0,5
DMU38	0,0654	0,0658	0	0,7689	0,7689	0	0,5
DMU39	1,0000	1,0000	1	0,1693	0,1693	0	1,0
DMU40	0,2245	0,2260	0	0,5560	0,5560	0	0,5
DMU41	0,0823	0,0830	0	0,6684	0,6907	0	0,5
DMU42	0,1926	0,1926	0	0,8251	0,8135	0	0,5
DMU43	0,0708	0,0713	0	0,6955	0,7162	0	0,5
DMU44	0,2446	0,2429	0	0,2446	0,2489	0	0,5
DMU45	0,2781	0,2736	0	0,6269	0,5975	0	0,5
DMU46	0,2080	0,2082	0	0,5839	0,5897	0	0,5
DMU47	0,2394	0,2394	0	0,5730	0,5819	0	0,5
DMU48	0,2386	0,2386	0	1,0000	1,0000	1	0,0
DMU49	0,2017	0,2025	0	0,3632	0,3692	0	0,5
DMU50	0,2242	0,2282	0	0,4625	0,4746	0	0,5
DMU51	0,4189	0,3810	0	0,1467	0,1357	0	0,5
DMU52	1,0000	1,0000	1	0,0563	0,0577	0	1,0
DMU53	0,1742	0,1759	0	0,5211	0,5446	0	0,5
DMU54	1,0000	1,0000	1	1,0000	1,0000	1	0,5

	Fronteira original			Fronteira invertida			<b>Ef</b> <sub>difusa</sub>
	<i>Ef</i> <sub>fo</sub>	<i>Ef</i> <sub>fp</sub>	$\varphi$ <sub>original</sub>	<i>Ef</i> <sub>fo</sub>	<i>Ef</i> <sub>fp</sub>	$\varphi$ <sub>invertida</sub>	
DMU55	1,0000	1,0000	1	1,0000	1,0000	1	0,5
DMU56	0,0730	0,0667	0	0,8342	0,7755	0	0,5
DMU57	0,2304	0,2304	0	0,5030	0,4913	0	0,5
DMU58	0,0925	0,0900	0	0,5396	0,5328	0	0,5
DMU59	1,0000	1,0000	1	0,0776	0,0776	0	1,0
DMU60	0,9677	0,9737	0	0,0495	0,0495	0	0,5
DMU61	0,1022	0,1014	0	0,5183	0,5257	0	0,5
DMU62	0,0892	0,0867	0	0,6536	0,6487	0	0,5
DMU63	0,1905	0,1854	0	0,4086	0,4086	0	0,5
DMU64	1,0000	1,0000	1	0,2760	0,2760	0	1,0
DMU65	0,0729	0,0734	0	0,7573	0,7803	0	0,5
DMU66	0,4552	0,4534	0	0,1033	0,1046	0	0,5
DMU67	0,1171	0,1176	0	0,3945	0,4042	0	0,5
DMU68	0,3289	0,3290	0	0,1737	0,1779	0	0,5
DMU69	0,1891	0,1899	0	0,3064	0,3152	0	0,5
DMU70	1,0000	1,0000	1	0,2824	0,2512	0	1,0
DMU71	0,4904	0,4469	0	0,1789	0,1789	0	0,5