

## **Carta $\bar{X}$ com Amostras de Tamanho Variável: Um Novo Procedimento Dinâmico**

Paulo Infante \*

J. Rodrigues Dias \*

\* Departamento de Matemática  
Universidade de Évora  
{pinfante, jrd}@uevora.pt

---

### **Abstract**

In the last years a new class of control charts which parameters change during production was developed. In this paper, we present a new procedure that consists in a very simple and attractive method to vary the samples size. In this procedure, which is based in the idea presented by Rodrigues Dias (1999) to obtain different sampling intervals, the size of the following sample depends on the information in the last instant of inspection, assuming different values, in a distinct form that it happens when we use the technique usually known by VSS, which considers only two values.

Some statistical properties are studied using, in particular, Markov chains. Using a control chart for the sample mean, we present and analyse, in a critical way, some results obtained for different changes of the quality. A comparative study with some previously developed procedures is also presented.

### **Resumo**

Nos últimos anos foi desenvolvida uma nova classe de cartas de controlo cujos parâmetros variam durante a produção. Neste trabalho apresenta-se um novo procedimento que consiste num método muito simples e atractivo de variar o tamanho das amostras. Neste procedimento, que tem por base a ideia apresentada por Rodrigues Dias (1999) para obter intervalos de amostragem variáveis, o tamanho da amostra seguinte depende da informação obtida no instante anterior de inspecção, podendo assumir vários valores, de uma forma diferente do que acontece com a técnica usualmente conhecida por VSS, que considera apenas dois valores.

Recorrendo, em particular, às cadeias de Markov para estudar algumas propriedades, e utilizando uma carta de controlo para a média, apresentam-se e analisam-se, de uma forma crítica, alguns resultados obtidos para diferentes alterações da característica da qualidade. Efectua-se um estudo comparativo com outros procedimentos apresentados na literatura.

**Keywords:** Statistical quality control,  $\bar{X}$  control chart, variable sample sizes.

**Title:**  $\bar{X}$  chart with variable sample sizes: a new adaptive method.

---

## 1 Introdução

As cartas de controlo do tipo Shewhart, introduzidas por volta de 1930, continuam a ser uma das ferramentas mais utilizadas em controlo de qualidade. Na sua concepção e utilização é necessário ter em conta, para além da recolha de subgrupos racionais, três aspectos fundamentais: os instantes de amostragem, os tamanhos das amostras e os limites de controlo. Nas cartas Shewhart clássicas, os valores destas grandezas são fixos durante todo o processo de controlo. Em particular, usando uma carta de controlo para a média, utilizam-se usualmente os limites “3-sigma”, as amostras têm um tamanho que, embora dependa do processo, está habitualmente compreendido entre 4 e 9 e são recolhidas periodicamente para análise. Estas cartas são consideradas estáticas.

Convém, no entanto, referir que os seus parâmetros, apesar de não variarem durante o processo de controlo não são necessariamente constantes. Por exemplo, os instantes de inspecção podem não ser constantes, embora sejam determinados antes do início do controlo do processo. Neste contexto pode ver-se uma nova metodologia, apresentada em Rodrigues Dias (2002), na qual os instantes de amostragem são definidos com base na taxa cumulativa de risco do sistema. Esta metodologia é comparada com outras em Infante (2004) e em Rodrigues Dias e Infante (em preparação).

Nos últimos anos foi desenvolvida uma nova classe de cartas de controlo, designadas por cartas dinâmicas ou cartas adaptáveis. Nestas cartas, pelo menos um dos seus parâmetros varia durante o processo de controlo baseado nos valores da estatística amostral que fornecem informação actualizada acerca do estado do processo produtivo. A flexibilidade deste tipo de carta de controlo poderá resultar numa maior eficácia desta em detectar alterações da qualidade. Foram estes supostos benefícios que motivaram o aparecimento de um grande número de publicações a partir de Reynolds *et al.* (1988). Neste artigo os autores consideram uma carta de controlo para a média com intervalos de amostragem variáveis. O procedimento apresentado, usualmente conhecido por VSI (Variable Sampling Intervals), consiste em utilizar um intervalo de amostragem pequeno se a média amostral estiver próxima dos limites de controlo e um intervalo de amostragem grande se a média amostral estiver próxima da linha central.

A ideia de variar o tamanho das amostras numa carta de controlo para a média é intuitivamente a mesma. Em Prabhu *et al.* (1993) e Costa (1994) analisa-se a eficácia de cartas de controlo para a média com duas possíveis dimensões amostrais, introduzindo o procedimento conhecido por VSS (Variable Sample Sizes). Neste, utiliza-se um tamanho de amostra pequeno quando a média amostral cai junto aos limites de controlo, numa região designada de aviso, e uma amostra de maior

dimensão quando a média amostral cai na região central. Estas cartas de controlo são concebidas de modo a que o tamanho médio das amostras seja o mesmo que o tamanho constante das amostras de uma carta de controlo clássica. Zimmer *et al.* (1998) consideram uma terceira dimensão amostral, verificando que daí resulta apenas uma modesta melhoria na eficácia da carta.

Daudin (1992) propõe uma carta de controlo para a média com amostragem dupla. Neste procedimento, conhecido por DS (Double Sampling), extraem-se 2 amostras de tamanhos diferentes, sendo a segunda amostra apenas analisada se a primeira amostra não é suficiente para decidir se o processo está sob controlo. No caso de ser necessária uma segunda amostra, a decisão baseia-se na informação conjunta das duas amostras.

Outras ideias foram introduzidas e têm sido estudadas as propriedades estatísticas das cartas associadas. Prabhu *et al.* (1994) apresentam um procedimento que permite variar simultaneamente o tamanho dos intervalos de amostragem e a dimensão das amostras. Zimmer *et al.* (2000) introduziram uma quarta dimensão amostral numa carta de controlo com tamanho de amostras variáveis e analisaram diversas variações de um terceiro estado de uma carta de controlo com intervalos de amostragem e tamanhos de amostra variáveis. Costa (1999) analisa uma carta de controlo para a média com todos os três parâmetros variáveis. Um levantamento bibliográfico de artigos relacionados com esta abordagem dinâmica, que foram publicados até 1997, pode ser visto em Tagaras (1998). Em particular, refira-se que em Rodrigues Dias (1999 a, b) é apresentada e analisada uma nova metodologia, simples e interessante, recorrendo à função densidade de probabilidade da variável normal reduzida, para obter diferentes intervalos de amostragem. Esta metodologia foi estudada, em termos das suas propriedades estatísticas, e comparada com outros métodos adaptativos em Infante (2004) e em Infante e Rodrigues Dias (em preparação) e foi analisada, em termos da sua robustez perante desvios à normalidade, em Infante e Rodrigues Dias (2003). Finalmente, em Infante (2004) e em Infante e Rodrigues Dias (2004) apresenta-se e analisa-se um novo esquema de amostragem que combina a metodologia de intervalos predefinidos proposta em Rodrigues Dias (2002) com o método adaptativo de amostragem apresentado em Rodrigues Dias (1999a, b), o qual revela excelentes potencialidades.

Neste trabalho, começa-se por introduzir um novo procedimento dinâmico para definir o tamanho das amostras, estudando-se algumas das suas propriedades estatísticas. Depois, efectua-se um estudo comparativo com alguns outros métodos, em termos do número médio de amostras e do número médio de itens inspecionados. Analisa-se, finalmente, a sensibilidade deste método quando o tamanho das amostras é limitado superiormente. Para além das considerações finais, as conclusões vão sendo apresentadas ao longo do texto. Dada a dimensão atingida pelo artigo com as questões anteriores, não se apresenta qualquer exemplo numérico de aplicação, com base na optimização de uma dada função objectivo. Do mesmo modo, outras comparações com outras abordagens, apesar de importantes, foram omitidas (como é o caso das Somas Acumuladas CUSUM e das Médias Móveis Exponencialmente Amortecidas EWMA).

Em síntese, parece-nos que este estudo é revelador do bom desempenho deste

novo procedimento quando se pretendem detectar pequenas e moderadas alterações da média (definidas adiante).

## 2 Novo Procedimento Dinâmico para Definir o Tamanho das Amostras

Vamos admitir que a produção, estando sob controlo estatístico, segue uma distribuição normal com média  $\mu_0$  e desvio padrão  $\sigma_0$ . Por outro lado, admitimos que num determinado instante, como resultado da presença de uma causa assinalável, a média do processo se altera para  $\mu_1 = \mu_0 \pm \lambda\sigma_0$ ,  $\lambda = |\mu_1 - \mu_0|/\sigma_0$ .

Neste trabalho, considera-se que uma alteração da média do processo é pequena quando  $\lambda$  é menor ou igual que 1, é moderada quando é maior que 1 e menor ou igual que 2 e é grande nos outros casos.

Utilizando uma carta de controlo para a média, consideramos que o processo está fora de controlo quando a média amostral  $\bar{X}$  cair fora dos limites de controlo, dados por  $\mu_0 \pm L\sigma_0/\sqrt{n}$ .

Na técnica conhecida por VSS a escolha do tamanho das amostras é difícil e não teoricamente determinada. Este novo método proposto neste artigo, daqui em diante designado por método RDN, é muito simples, rápido e intuitivo, e tem por base a mesma ideia apresentada em Rodrigues Dias (1999a, b) para obter intervalos de amostragem diferentes.

Seja  $\bar{x}_i$  o valor médio da  $i$ -ésima amostra (dentro dos limites de controlo) e  $n_i^*$  a sua dimensão. O procedimento por nós proposto sugere que o tamanho da amostra seguinte seja dado por

$$n_{i+1}^* = \text{Int} \left[ \Theta \left( \frac{k}{\phi(u_i)} \right) \right] \quad (1)$$

em que :

$$u_i = \frac{\bar{x}_i - \mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n_i^*}} \quad (2)$$

$$\bar{x}_0 = \mu_0, -L \leq u_i \leq L \quad (3)$$

$$n_1^* = \text{Int} \left[ \Theta \left( k\sqrt{2\pi} \right) \right] \quad (4)$$

$\phi(u)$  representa a função densidade de probabilidade da distribuição normal padronizada,

$L$  é o coeficiente dos limites de controlo,

$\text{Int}(x)$  representa o maior inteiro que não excede  $x$ ,

$\Theta(x)$  é uma função que se considere ser adequada e

$k$  uma constante conveniente.

Note-se, por um lado, que o valor da constante  $k$  dependerá, em particular, do custo de amostragem. Note-se, por outro lado, que para valores de  $|u_i| > L$  se está numa situação fora dos limites de controlo, podendo corresponder a um falso alarme (caso em que se pode convencionar, por exemplo, que o tamanho da amostra seguinte é igual à maior dimensão amostral possível).

Neste artigo, consideramos para  $\Theta(x)$  as funções  $\ln(x)$  e  $x^{1/2}$ , e calculamos o valor de  $k$  por forma a podermos comparar diferentes métodos. É claro que outras funções poderão e deverão ser consideradas em trabalhos futuros.

De acordo com este método, em função do valor da média da amostra de ordem  $i$ , facilmente se obtém o tamanho da amostra seguinte. Assim, quanto mais próxima estiver a média amostral da média inicial (linha central), menor será o tamanho das amostras e quanto mais se aproximar dos limites de controlo maior será o tamanho das amostras. Tal como no método VSS, no procedimento proposto o tamanho da amostra seguinte depende da informação obtida no instante actual de inspecção. Contudo, no método RDN é considerado um maior número de dimensões amostrais, sendo obtidas de uma forma perfeitamente definida.

### 3 Estudo de Algumas Propriedades Estatísticas

As propriedades de uma carta de controlo com um período fixo de inspecção são usualmente determinadas pelo número de amostras  $N_A$  e pelo número de itens  $N_I$  que são inspeccionados desde o instante em que o sistema falha até um ponto cair fora dos limites de controlo. Recorrendo às cadeias de Markov vamos procurar determinar o número médio de amostras e o número médio de itens. Em Prabhu *et al.* (1993) e Costa (1994), este tipo de abordagem é utilizada para determinar o número médio de amostras até detectar uma alteração para uma carta de controlo de médias usando o método VSS.

Começamos por dividir a região entre os limites de controlo em  $r$  sub-regiões  $R_1, R_2, \dots, R_r$ , tantas quanto o número possível de dimensões amostrais utilizando o método RDN. O tamanho da amostra de ordem  $i+1$  será igual a  $n_j$ , se a média da amostra de ordem  $i$ ,  $\bar{X}_i$ , pertencer à região  $R_j$ ,  $j=1, 2, \dots, r$ . Deste modo, em cada instante de inspecção, um de  $r$  estados transientes é atingido. O estado absorvente é atingido sempre que a média de uma amostra sai fora dos limites de controlo, estando o processo fora de controlo. A matriz de transição é dada por

$$P = \begin{bmatrix} p_{1,1}^\lambda & p_{1,2}^\lambda & \dots & p_{1,r+1}^\lambda \\ p_{2,1}^\lambda & p_{2,2}^\lambda & \dots & p_{2,r+1}^\lambda \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{r+1,1}^\lambda & p_{r+1,2}^\lambda & \dots & p_{r+1,r+1}^\lambda \end{bmatrix} \quad (5)$$

onde

$$P_{i,j}^\lambda = P(\bar{X}_i \in R_j | n_i, \lambda) \quad (6)$$

representa a probabilidade de passar do estado  $i$  para o estado  $j$ , isto é, a probabilidade de a próxima amostra ser de tamanho  $n_j$  sabendo que a actual tem dimensão  $n_i$  quando a média do processo se alterou  $\lambda$  desvios padrões.

Sendo  $N$  a variável aleatória que representa o tamanho de uma amostra analisada num determinado instante e  $\bar{X}$  a média dessa amostra, podemos escrever

$$N = n_j \Leftrightarrow n_j \leq \Theta \left( \frac{k}{\phi(u)} \right) < n_j + 1, \quad j = 1, 2, \dots, r \quad (7)$$

pelo que, sendo  $U$  a variável normal padronizada,

$$N = n_j \Leftrightarrow U \in R_j^* \Leftrightarrow \bar{X} \in R_j, \quad j = 1, 2, \dots, r \quad (8)$$

As sub-regiões  $R_j$ , bem como as probabilidades  $p_{i,j}^\lambda$  serão determinadas nos pontos seguintes para as duas funções  $\Theta(x)$  consideradas.

Pelas propriedades elementares das cadeias de Markov tem-se

$$E(N_A) = \bar{b}^T (I - Q_\lambda)^{-1} \bar{1} \quad (9)$$

$$E(N_I) = \bar{b}^T (I - Q_\lambda)^{-1} \bar{s} \quad (10)$$

onde  $I$  representa a matriz identidade de ordem  $r$ ,  $Q_\lambda$  representa a matriz de probabilidades de transição da qual foram retirados os elementos associados com o estado absorvente,  $\bar{1}$  é um vector coluna unitário  $r \times 1$ ,  $\bar{s}^T = (n_1, n_2, \dots, n_r)$  representa o vector dos tamanhos de amostras, onde  $n_1$  é a menor dimensão amostral obtida de acordo com o método, e onde  $\bar{b}^T = (b_1, b_2, \dots, b_r)$  representa o vector das probabilidades iniciais (com o processo sob controlo), usualmente dadas por

$$b_j = \frac{p_{jj}^0}{p_{j1}^0 + p_{j2}^0 + \dots + p_{jr}^0}, \quad j=1, 2, \dots, r \quad (11)$$

### 3.1 Caso em que $\Theta(x)=\ln(x)$

Quando se considera para  $\Theta(x)$  o logaritmo neperiano tem-se:

$$R_1^* = \left[ -\sqrt{2(n_1 + 1 - \ln(k\sqrt{2\pi}))}, \sqrt{2(n_1 + 1 - \ln(k\sqrt{2\pi}))} \right] \quad (12)$$

$$R_j^* = \left[ -\sqrt{2(n_j + 1 - \ln(k\sqrt{2\pi}))}, -\sqrt{2(n_j - \ln(k\sqrt{2\pi}))} \right] \cup \left[ \sqrt{2(n_j - \ln(k\sqrt{2\pi}))}, \sqrt{2(n_j + 1 - \ln(k\sqrt{2\pi}))} \right] \quad j = 2, 3, \dots, r-1 \quad (13)$$

$$R_r^* = \left[ -L, -\sqrt{2(n_r - \ln(k\sqrt{2\pi}))} \right] \cup \left[ \sqrt{2(n_r - \ln(k\sqrt{2\pi}))}, L \right] \quad (14)$$

Admitindo que o tamanho da amostra extraída num determinado instante de inspecção é igual a  $n_i$ ,  $i=1, 2, \dots, r$ , e que essa amostra tem média  $\bar{X}$ , realizando algumas simplificações algébricas obtemos

$$R_1 = \left[ \mu_0 - \sigma_0 \sqrt{\frac{2(n_1 + 1 - \ln(k\sqrt{2\pi}))}{n_i}}, \mu_0 + \sigma_0 \sqrt{\frac{2(n_1 + 1 - \ln(k\sqrt{2\pi}))}{n_i}} \right] \quad (15)$$

$$R_j = \left[ \mu_0 - \sigma_0 \sqrt{\frac{2(n_j+1-\ln(k\sqrt{2\pi}))}{n_i}}, \mu_0 - \sigma_0 \sqrt{\frac{2(n_j-\ln(k\sqrt{2\pi}))}{n_i}} \right] \cup \left[ \mu_0 + \sigma_0 \sqrt{\frac{2(n_j-\ln(k\sqrt{2\pi}))}{n_i}}, \mu_0 + \sigma_0 \sqrt{\frac{2(n_j+1-\ln(k\sqrt{2\pi}))}{n_i}} \right] \quad j = 2, 3, \dots, r-1 \quad (16)$$

$$R_r = \left[ \mu_0 - \sigma_0 \frac{L}{\sqrt{n_i}}, \mu_0 - \sigma_0 \sqrt{\frac{2(n_r-\ln(k\sqrt{2\pi}))}{n_i}} \right] \cup \left[ \mu_0 + \sigma_0 \sqrt{\frac{2(n_r-\ln(k\sqrt{2\pi}))}{n_i}}, \mu_0 + \sigma_0 \frac{L}{\sqrt{n_i}} \right] \quad (17)$$

Podemos então facilmente obter as probabilidades de transição entre estados (i=1, 2, ..., r):

$$P_{i,1}^\lambda = P(\bar{X} \in R_1 | n_i, \lambda) = \Phi\left(\sqrt{2(n_1+1-\ln(k\sqrt{2\pi}))} - \lambda\sqrt{n_i}\right) - \Phi\left(-\sqrt{2(n_1+1-\ln(k\sqrt{2\pi}))} - \lambda\sqrt{n_i}\right) \quad (18)$$

$$P_{i,j}^\lambda = P(\bar{X} \in R_j | n_i, \lambda) = \Phi\left(-\sqrt{2(n_j-\ln(k\sqrt{2\pi}))} - \lambda\sqrt{n_i}\right) - \Phi\left(-\sqrt{2(n_j+1-\ln(k\sqrt{2\pi}))} - \lambda\sqrt{n_i}\right) + \Phi\left(\sqrt{2(n_j+1-\ln(k\sqrt{2\pi}))} - \lambda\sqrt{n_i}\right) - \Phi\left(\sqrt{2(n_j-\ln(k\sqrt{2\pi}))} - \lambda\sqrt{n_i}\right) \quad j = 2, 3, \dots, r-1 \quad (19)$$

$$P_{i,r}^\lambda = P(\bar{X} \in R_r | n_i, \lambda) = \Phi\left(-\sqrt{2(n_r-\ln(k\sqrt{2\pi}))} - \lambda\sqrt{n_i}\right) - \Phi(-L - \lambda\sqrt{n_i}) + \Phi(L - \lambda\sqrt{n_i}) - \Phi\left(\sqrt{2(n_r-\ln(k\sqrt{2\pi}))} - \lambda\sqrt{n_i}\right) \quad (20)$$

Note-se que as probabilidades de transição não dependem do tamanho da amostra no estado actual quando o processo se encontra sob controlo ( $\lambda=0$ ), o que seria de esperar, pois a probabilidade de um ponto sair fora dos limites sem ter ocorrido qualquer alteração (falso alarme) não depende do tamanho da amostra utilizado.

Representando por  $\alpha$  a probabilidade de ocorrer um falso alarme,

$$\alpha = 2(1 - \Phi(L)) \quad (21)$$

as probabilidades de se utilizar uma determinada dimensão amostral, estando o processo sob controlo, são dadas por:

$$P(N = n_1) = \frac{2}{1-\alpha} \left[ \Phi\left(\sqrt{2(n_1+1-\ln(k\sqrt{2\pi}))}\right) - 0.5 \right] \quad (22)$$

$$P(N = n_j) = \frac{2}{1-\alpha} \left[ \Phi\left(\sqrt{2(n_j+1-\ln(k\sqrt{2\pi}))}\right) - \Phi\left(\sqrt{2(n_j-\ln(k\sqrt{2\pi}))}\right) \right], \quad j = 2, \dots, r-1 \quad (23)$$

$$P(N = n_r) = \frac{2}{1 - \alpha} \left[ \Phi(L) - \Phi \left( \sqrt{2 \left( n_r - \ln \left( k\sqrt{2\pi} \right) \right)} \right) \right] \quad (24)$$

Desta forma, o tamanho médio das amostras utilizadas sob controlo é obtido pela fórmula

$$E(N) = \sum_{j=1}^r n_j P(N = n_j) \quad (25)$$

Para se obter o valor da constante  $k$  por forma a que  $E(N)=n$ , sendo  $n$  o tamanho da amostra utilizado no procedimento clássico, podemos utilizar para valor inicial de  $k$  o obtido através da aproximação

$$k \approx \exp \left[ n + 0.45 + \frac{L \exp(-L^2/2)}{\sqrt{2\pi}} - \frac{1 - \alpha}{2} - \frac{L^2 \cdot \alpha}{2} \right] / \sqrt{2\pi} \quad (26)$$

que se obtém, mediante algum tratamento algébrico, atendendo a que

$$E \left[ \text{Int} \left( \ln \left( \frac{k}{\phi(U)} \right) \right) \right] \approx \ln(k\sqrt{2\pi}) + \frac{E(U^2)}{2} - 0.45 \quad (27)$$

No caso em que  $n=5$  e se utilizam os usuais limites “3-sigma” tem-se para valor inicial  $k=56.46$ , obtendo-se  $n_1=4$  e  $n_r=9$ , pelo que através de (25) se obtém  $k=57.30$ . Repare-se que os tamanhos possíveis das amostras são bastante sugestivos, sendo valores usuais num controlo por variáveis. Na Tabela 1 apresentamos os valores da constante  $k$  e os tamanhos máximo  $n_r$  e mínimo  $n_1$  associados a valores de  $n$  entre 2 e 9.

Tabela 1: Valores de  $k$ ,  $n_1$  e  $n_r$ , para diferentes valores de  $n$ .

$n$	$k$	$n_1$	$n_r$
2	2,853	1	6
3	7,755	2	7
4	21,080	3	8
5	57,302	4	9
6	155,762	5	10
7	423,406	6	11
8	1150,936	7	12
9	3128,569	8	13

### 3.2 Caso em que $\Theta(\mathbf{x})=\sqrt{x}$

Quando se considera para  $\Theta(\mathbf{x})$  a raiz quadrada tem-se:

$$R_1^* = \left[ -2 \sqrt{\ln \left( \frac{n_1 + 1}{k^{1/2} (2\pi)^{1/4}} \right)}, 2 \sqrt{\ln \left( \frac{n_1 + 1}{k^{1/2} (2\pi)^{1/4}} \right)} \right] \quad (28)$$



$$R_j^* = \left[ -2\sqrt{\ln\left(\frac{n_{j+1}}{k^{1/2}(2\pi)^{1/4}}}\right)}, -2\sqrt{\ln\left(\frac{n_j}{k^{1/2}(2\pi)^{1/4}}}\right)} \right] \cup \left[ 2\sqrt{\ln\left(\frac{n_j}{k^{1/2}(2\pi)^{1/4}}}\right)}, 2\sqrt{\ln\left(\frac{n_{j+1}}{k^{1/2}(2\pi)^{1/4}}}\right)} \right] \quad j = 2, 3, \dots, r-1 \quad (29)$$

$$R_r^* = \left[ -L, -2\sqrt{\ln\left(\frac{n_r}{k^{1/2}(2\pi)^{1/4}}}\right)} \right] \cup \left[ 2\sqrt{\ln\left(\frac{n_r}{k^{1/2}(2\pi)^{1/4}}}\right)}, L \right] \quad (30)$$

De forma análoga ao que se fez para o caso anterior, considerando que a amostra analisada num determinado instante tem dimensão  $n_j$  ( $j=1, 2, \dots, r$ ) e média  $\bar{X}$ , encontrando as sub-regiões  $R_j$  e depois de algum tratamento algébrico podemos obter as probabilidades de transição entre estados ( $i=1, 2, \dots, r$ ):

$$P_{i,1}^\lambda = P(\bar{X} \in R_1 | n_i, \lambda) = \Phi\left(2\sqrt{\ln\left(\frac{n_1+1}{k^{1/2}(2\pi)^{1/4}}}\right)} - \lambda\sqrt{n_i}\right) - \Phi\left(-2\sqrt{\ln\left(\frac{n_1+1}{k^{1/2}(2\pi)^{1/4}}}\right)} - \lambda\sqrt{n_i}\right) \quad (31)$$

$$P_{i,j}^\lambda = P(\bar{X} \in R_j | n_i, \lambda) = \Phi\left(-2\sqrt{\ln\left(\frac{n_j}{k^{1/2}(2\pi)^{1/4}}}\right)} - \lambda\sqrt{n_i}\right) - \Phi\left(-2\sqrt{\ln\left(\frac{n_{j+1}}{k^{1/2}(2\pi)^{1/4}}}\right)} - \lambda\sqrt{n_i}\right) + \Phi\left(2\sqrt{\ln\left(\frac{n_{j+1}}{k^{1/2}(2\pi)^{1/4}}}\right)} - \lambda\sqrt{n_i}\right) - \Phi\left(2\sqrt{\ln\left(\frac{n_j}{k^{1/2}(2\pi)^{1/4}}}\right)} - \lambda\sqrt{n_i}\right) \quad j = 2, 3, \dots, r-1 \quad (32)$$

$$P_{i,r}^\lambda = P(\bar{X} \in R_r | n_i, \lambda) = \Phi\left(-2\sqrt{\ln\left(\frac{n_r}{k^{1/2}(2\pi)^{1/4}}}\right)} - \lambda\sqrt{n_i}\right) - \Phi(-L - \lambda\sqrt{n_i}) + \Phi(L - \lambda\sqrt{n_i}) - \Phi\left(2\sqrt{\ln\left(\frac{n_r}{k^{1/2}(2\pi)^{1/4}}}\right)} - \lambda\sqrt{n_i}\right) \quad (33)$$

Tal como no caso anterior, pode observar-se que as probabilidades de transição não dependem do tamanho da amostra num dado instante quando o processo se encontra sob controlo.

As probabilidades de se utilizar uma determinada dimensão amostral, estando o processo sob controlo, são, para este caso, dadas por:

$$P(N = n_1) = \frac{2}{1 - \alpha} \left[ \Phi\left(2\sqrt{\ln\left(\frac{n_1 + 1}{k^{1/2}(2\pi)^{1/4}}}\right)}\right) - 0.5 \right] \quad (34)$$

$$P(N = n_j) = \frac{2}{1 - \alpha} \left[ \Phi\left(2\sqrt{\ln\left(\frac{n_{j+1}}{k^{1/2}(2\pi)^{1/4}}}\right)}\right) - \Phi\left(-2\sqrt{\ln\left(\frac{n_j}{k^{1/2}(2\pi)^{1/4}}}\right)}\right) \right] \quad j = 2, 3, \dots, r-1 \quad (35)$$

$$P(N = n_r) = \frac{2}{1 - \alpha} \left[ \Phi(L) - \Phi\left(2\sqrt{\ln\left(\frac{n_r}{k^{1/2}(2\pi)^{1/4}}}\right)}\right) \right] \quad (36)$$

Tal como no caso anterior, obtemos o valor da constante  $k$  por forma a que  $E(N)=n$ , sendo  $n$  o tamanho da amostra utilizado no procedimento estático. Neste caso,

torna-se mais complicado encontrar uma fórmula de aproximação para obter um valor inicial de  $k$ , atendendo a que a esperança matemática de  $\text{Int}(k/\phi(u))$  apresenta uma grande variabilidade. Consequentemente, procedemos a uma discretização dos valores de  $U$  entre  $-L$  e  $L$ , obtendo os correspondentes valores de  $N$  e as probabilidades associadas. Pode assim obter-se um valor de  $k$  mais fiável. Note-se que este procedimento pode também ser usado no caso anterior.

No caso em que  $n=5$  e se utilizam os usuais limites “3-sigma” tem-se  $k=6.309$ , obtendo-se  $n_1=3$  e  $n_r=37$ . Repare-se que os tamanhos possíveis das amostras não são tão sugestivos quanto os do caso anterior quando comparados com os tamanhos usuais das cartas Shewhart para variáveis. Contudo, podem ser valores razoáveis num procedimento em que varia apenas o tamanho da amostra, apresentando resultados muito bons quando a média sofre pequenas alterações, conforme veremos no ponto seguinte. Por outro lado, pode sempre fixar-se para maior tamanho das amostras um valor inferior, podendo os resultados globais não sofrer grandes alterações. Mais adiante analisaremos a sensibilidade deste método quando se impõe um limite superior para o tamanho das amostras. Mais concretamente, veremos qual a diferença em se considerar, neste caso concreto,  $n_r=25$ ,  $n_r=20$  e  $n_r=15$  em vez de  $n_r=37$ .

Na Tabela 2 apresentamos os valores da constante  $k$  e os tamanhos máximo  $n_r$  e mínimo  $n_1$  associados a valores de  $n$  entre 2 e 9.

Tabela 2: Valores de  $k$ ,  $n_1$  e  $n_r$ , para diferentes valores de  $n$ .

$N_0$	$k$	$n_1$	$n_r$
2	1,405	1	17
3	2,730	2	24
4	4,217	3	30
5	6,309	3	37
6	9,158	4	45
7	12,086	5	52
8	15,118	6	58
9	19,189	6	65

Tabela 2- Valores de  $k$ ,  $n_1$  e  $n_r$ , para diferentes valores de  $n$ .

## 4 Comparação com Outros Procedimentos

Neste ponto vamos comparar este novo procedimento usando uma carta de controlo para a média, com o método clássico de Shewhart, bem como com os procedimentos dinâmicos VSS e DS.

No caso da carta de médias clássica, com o tamanho das amostras constante e igual a  $n$ , as expressões para o número médio de amostras desde a falha até detecção  $E(N_A)$  e para o número médio de itens inspeccionados desde a falha até detecção  $E(N_I)$ , são facilmente obtidas, pois, neste caso,  $N_a$  segue uma distribuição

geométrica. Tem-se

$$E(N_A) = 1/p \tag{37}$$

$$E(N_I) = n/p \tag{38}$$

onde p é a probabilidade da média de uma amostra estar fora dos limites de controlo, sendo dada por:

$$p = 1 - \Phi(L - \lambda\sqrt{n}) + \Phi(-L - \lambda\sqrt{n}) \tag{39}$$

Em Prabhu *et al.* (1993) e em Costa (1994) são analisadas as propriedades e a performance do método VSS com dois tamanhos possíveis de amostras, que denotaremos por  $n_1$  e  $n_2$ , com  $n_1 < n < n_2$ . A região entre os limites de controlo é dividida em duas sub-regiões

$$R_1^* = ]-W, W] \tag{40}$$

$$R_2^* = ]-L, -W] \cup [W, L[ \tag{41}$$

onde  $0 < W < L$ . Repare-se que a sub-região  $R_1^*$  corresponde a valores centrais, enquanto  $R_2^*$  corresponde a valores mais próximos dos limites de controlo. Caso a média reduzida de uma amostra pertença a  $R_1^*$  então a próxima amostra terá tamanho  $n_1$  e caso pertença a  $R_2^*$  a próxima amostra terá tamanho  $n_2$ . O coeficiente W é obtido, para um dado valor de L, de modo a que o tamanho médio das amostras quando o processo está sob controlo seja igual a um valor específico n. Desta forma, tem-se

$$W = \Phi^{-1} \left[ \frac{2\Phi(L)(n_2 - n) + n - n_1}{2(n_2 - n_1)} \right] \tag{42}$$

Costa (1994) obteve, recorrendo às cadeias de Markov, expressões para  $E(N_A)$  e para  $E(N_I)$ , sendo dadas por

$$E(N_A) = p_1 \left[ \frac{1 - p_{22} + p_{12}}{(1 - p_{11})(1 - p_{22}) - p_{12}p_{21}} \right] + (1 - p_1) \left[ \frac{1 - p_{11} + p_{21}}{(1 - p_{11})(1 - p_{22}) - p_{12}p_{21}} \right] \tag{43}$$

$$E(N_I) = n_1 \left[ \frac{p_1(1 - p_{22}) + (1 - p_1)p_{21}}{(1 - p_{11})(1 - p_{22}) - p_{12}p_{21}} \right] + n_2 \left[ \frac{p_1p_{12} + (1 - p_1)(1 - p_{11})}{(1 - p_{11})(1 - p_{22}) - p_{12}p_{21}} \right] \tag{44}$$

onde

$$p_1 = \frac{2\Phi(W) - 1}{2\Phi(L) - 1} \tag{45}$$

$$p_{i1} = \Phi(W - \lambda\sqrt{n_i}) - \Phi(-W - \lambda\sqrt{n_i}), i = 1, 2 \tag{46}$$

$$p_{i2} = \Phi(-W - \lambda\sqrt{n_i}) - \Phi(-L - \lambda\sqrt{n_i}) + \Phi(L - \lambda\sqrt{n_i}) - \Phi(W - \lambda\sqrt{n_i}), i = 1, 2 \tag{47}$$

Para podermos comparar cartas de controlo com procedimentos diferentes, consideram-se nas mesmas condições numa situação de controlo, isto é, com o mesmo número médio de falsos alarmes, mesmo número médio de amostras analisadas e mesmo número médio de itens inspeccionados. Se o valor do coeficiente dos limites de controlo L e o intervalo de amostragem forem iguais em ambas as cartas, podemos afirmar que o número médio de falsos alarmes e o número médio de amostras é igual. Sendo igual o tamanho médio das amostras, então em ambas as cartas inspeccionam-se o mesmo número médio de itens quando o processo está sob controlo. Neste trabalho consideramos  $L=3$  (limites “3-sigma”) nos procedimentos clássico, VSS e RDN. Por outro lado, obtivemos W (no método VSS) e k (no método

RDN) de modo a que o tamanho médio de amostras fosse igual ao tamanho constante,  $n$ , das amostras do procedimento clássico.

Daudin (1992), por analogia com os planos de amostragem dupla, propôs uma carta de controlo para a média com amostragem dupla (DS), onde duas amostras de tamanhos  $n_1$  e  $n_2$  são retiradas periodicamente do processo produtivo, mas a segunda amostra (de maior dimensão) apenas é analisada quando a primeira não é suficiente para decidir sob o estado do processo. Este procedimento utiliza um coeficiente  $W$  para os limites de aviso e dois coeficientes  $L_1$  e  $L_2$  para os limites de controlo.

Designando por  $U_1$  a média padronizada da primeira amostra, isto é,

$$U_1 = \frac{(\bar{X}_1 - \mu_0) \sqrt{n_1}}{\sigma_0} \quad (48)$$

e por  $U_2$  a média padronizada da média global das duas amostras, dada por

$$U_2 = \frac{\sqrt{n_1 + n_2}}{\sigma_0} \left( \frac{n_1 \bar{X}_1 + n_2 \bar{X}_2}{n_1 + n_2} - \mu_0 \right) \quad (49)$$

tem-se o seguinte conjunto de regras:

1. Caso  $|U_1| \leq W$ , conclui-se que o processo está sob controlo e não se inspecciona a segunda amostra;
2. Caso  $|U_1| > L_1$ , conclui-se que ocorreu uma alteração;
3. Caso  $W \leq |U_1| < L_1$ , então a segunda amostra é imediatamente analisada:
  - (a) Caso  $|U_2| \leq L_2$ , conclui-se que o processo está sob controlo;
  - (b) Caso  $|U_2| > L_2$ , conclui-se que ocorreu uma alteração.

No referido artigo são apresentadas expressões para o tamanho médio das amostras e para o número médio de amostras inspeccionadas, embora neste último caso seja necessário recorrer a integração numérica. As referidas expressões são dadas por:

$$E(N) = n_1 + n_2 [\Phi(L_1 + \lambda\sqrt{n_1}) - \Phi(W + \lambda\sqrt{n_1}) + \Phi(-W + \lambda\sqrt{n_1}) - \Phi(-L_1 + \lambda\sqrt{n_1})] \quad (50)$$

$$E(N_A) = 1/p \quad (51)$$

com

$$p = 1 - \Phi(W + \lambda\sqrt{n_1}) + \Phi(-W + \lambda\sqrt{n_1}) - \int_{z \in I} \left\{ \Phi \left[ \frac{1}{\sqrt{n_2}} (\sqrt{n_1 + n_2} L_2 + \lambda(n_1 + n_2) - \sqrt{n_1} z) \right] \phi(z) \right\} dz + \int_{z \in I} \left\{ \left[ \frac{1}{\sqrt{n_2}} (-\sqrt{n_1 + n_2} L_2 + \lambda(n_1 + n_2) - \sqrt{n_1} z) \right] \phi(z) \right\} dz \quad (52)$$

onde

$$I = [-L_1 + \lambda\sqrt{n_1}, -W + \lambda\sqrt{n_1}] \cup [W + \lambda\sqrt{n_1}, L_1 + \lambda\sqrt{n_1}] \quad (53)$$

A expressão para o número médio de itens inspeccionados obtém-se pela identidade de Wald

$$E(N_I) = E(N_A) E(N) \quad (54)$$

Para efeitos de comparação, nas mesmas condições, sob controlo, admitindo um intervalo de amostragem igual ao dos outros procedimentos, os parâmetros  $W$ ,  $L_1$ ,  $L_2$ ,  $n_1$  e  $n_2$  devem ser escolhidos por forma a que o número médio de falsos alarmes e número médio de itens inspeccionados sejam iguais para todos os procedimentos. No referido artigo, são apresentadas diferentes combinações de valores para estes parâmetros. Para o caso em que  $n_1=3$ ,  $n_2=6$ ,  $W=1$ ,  $L_1=3.51$  e  $L_2=3$ , obtém-se  $E(N)=4.9$ , tendo a carta o mesmo número médio de falsos alarmes que uma carta usual com limites “3-sigma” e aproximadamente o mesmo número médio de itens inspeccionados que o procedimento clássico com  $n=5$ .

#### 4.1 Apresentação e Análise de Resultados

Considere-se  $E(N_A)^*$  o número médio de amostras analisadas desde a falha até que um alerta seja emitido pela carta de controlo no caso de se utilizar o método estático (clássico), e seja  $E(N_A)^{**}$  o número médio de amostras analisadas desde a falha até que um alerta seja emitido pela carta de controlo, associado a um dado esquema de amostragem dinâmico. Para compararmos os dois procedimentos, em termos dos respectivos valores de  $E(N_A)$ , podemos considerar

$$Q_1 = \frac{E(N_A)^* - E(N_A)^{**}}{E(N_A)^*} \times 100\% \quad (55)$$

podendo, então, dizer que  $Q_1$  representa a redução relativa, em %, do número médio de amostras analisadas quando se utiliza um determinado procedimento dinâmico em vez do método clássico.

Analogamente, considere-se  $E(N_I)^*$  o número médio de itens inspeccionados no caso de se utilizar o método clássico e seja  $E(N_I)^{**}$  o número médio de itens inspeccionados associado a um dado esquema de amostragem dinâmico. Assim, para compararmos os dois métodos, em termos dos respectivos valores de  $E(N_I)$ , podemos considerar

$$Q_2 = \frac{E(N_I)^* - E(N_I)^{**}}{E(N_I)^*} \times 100\% \quad (56)$$

e podemos dizer que  $Q_2$  representa a redução relativa, em %, do número médio de itens inspeccionados quando se utiliza um determinado procedimento dinâmico em vez do método clássico.

Nas Tabelas 3 e 4 apresentam-se alguns resultados obtidos para  $Q_1$  e  $Q_2$  considerando diferentes alterações da média da qualidade, associadas a diferentes valores de  $\lambda$ , usando as duas versões do novo método, bem como os métodos VSS e DS. No caso do método VSS considerámos 2 combinações possíveis de tamanhos amostrais. Assim, no esquema designado por VSS(a) tem-se  $n_1=2$  e  $n_2=25$  e no esquema designado por VSS(b) tem-se  $n_1=3$  e  $n_2=15$ . Por um lado, estamos a usar valores habitualmente considerados na literatura para este esquema de amostragem (que nos parecem razoáveis na prática) e, por outro lado, valores que permitem um

bom desempenho do método para diferentes alterações da média. Embora seja possível obter para cada alteração considerada uma combinação que minimize o número médio de amostras até detecção, como se pode ver em Prabhu *et al.* (1993) e em Costa (1994), a sua aplicação prática por vezes não parece viável. Refira-se também que a carta pode ter um bom desempenho para uma dada alteração com um dado par de valores  $(n_1, n_2)$ , mas ter um mau desempenho com o mesmo par de valores para outra alteração. Refira-se, por fim, que no método DS, utilizamos os valores dos parâmetros referidos no ponto anterior.

Da observação destas tabelas podemos tecer algumas considerações:

Tabela 3: Valores de  $Q_1$  para diferentes valores de  $\lambda$ , no caso em que  $n=5$  e  $L=3$ .

$\lambda$	<b>RDN</b> $\Theta(\mathbf{x})=\ln(\mathbf{x})$	<b>RDN</b> $\Theta(\mathbf{x})=\mathbf{x}^{1/2}$	<b>VSS(a)</b> $(n_1, n_2)=(2, 25)$ <b>W=1.5032</b>	<b>VSS (b)</b> $(n_1, n_2)=(3, 15)$ <b>W=1.3757</b>	<b>DS</b>
0,2	1,1	6,30	20,0	9,4	28,1
0,4	7,7	39,6	66,1	45,2	45,9
0,6	18,3	61,9	72,6	63,6	53,1
0,8	26,0	60,2	60,0	60,9	54,6
1,0	26,4	47,6	38,1	47,0	51,5
1,2	20,4	30,5	11,3	26,9	44,5
1,4	12,0	13,7	-14,6	5,8	34,5
1,6	4,9	1,3	-33,7	-10,3	23,3
1,8	0,8	-4,7	-43,2	-18,1	13,3
2,0	-0,6	-5,8	-43,6	-18,3	6,3
2,5	-0,3	-1,9	-25,7	-7,1	0,4
3,0	0,0	-0,2	-9,3	-1,2	0,0

1. O novo procedimento dinâmico conduz, em termos globais, a resultados bastante interessantes quanto à redução do número médio de amostras inspeccionadas até detectar uma alteração pequena da qualidade, e também para alguns casos de uma alteração moderada, relativamente ao método clássico, e, conseqüentemente, uma redução do tempo médio de mau funcionamento. São também interessantes os resultados relativos à redução do número médio de itens inspeccionados quando a alteração é pequena.
2. De um modo geral, para alterações pequenas e também em alguns casos de alterações moderadas, verifica-se que a utilização da raiz quadrada conduz a uma maior eficácia da carta do que aquela que se obtém usando o logaritmo. Repare-se que, para além desta maior eficácia, se consegue também uma redução do número médio de itens inspeccionados quando a alteração é pequena. Para alterações grandes e em certos casos de alterações moderadas, o método clássico tem um desempenho relativamente melhor, sendo também melhor em termos do número médio de itens inspeccionados quando  $\lambda > 1$ .
3. Em termos globais, poder-se-á concluir que o método DS é, entre os que foram analisados, o mais eficiente, pois para além de revelar, no que concerne ao

número médio de amostras, um melhor desempenho na detecção de alterações da média, também é comparativamente melhor quanto ao número médio de itens a inspeccionar. No entanto, em certos casos, como se pode verificar nos quadros em análise, o método DS é pior que outros. Em particular, o método RDN é mais rápido na detecção das alterações  $\lambda=0.6$  e  $\lambda=0.8$  quando se utiliza a raiz quadrada.

4. Os esquemas VSS são claramente menos eficientes que o novo método com qualquer uma das funções  $\Theta(x)$  consideradas quando  $\lambda > 1.2$ , o mesmo acontecendo no método RDN no caso da raiz quadrada para valores de  $\lambda$  a partir de .8. Para pequenas alterações da média, os esquemas VSS são preferíveis.

Tabela 4: Valores de  $Q_2$  para diferentes valores de  $\lambda$ , no caso em que  $n=5$  e  $L=3$ .

$\lambda$	<b>RDN</b> $\Theta(x)=\ln(x)$	<b>RDN</b> $\Theta(x)=x^{1/2}$	<b>VSS(a)</b> $(n_1, n_2)=(2, 25)$ <b>W=1.5032</b>	<b>VSS (b)</b> $(n_1, n_2)=(3, 15)$ <b>W=1.3757</b>	<b>DS</b>
0,2	-0,6	-0,8	0,0	0,2	27,1
0,4	1,6	18,6	5,4	21,9	40,1
0,6	6,9	33,7	40,5	35,9	42,1
0,8	10,8	24,2	47,0	31,0	37,7
1,0	9,6	-0,2	26,9	11,0	28,2
1,2	3,9	-30,0	-18,4	-20,1	14,5
1,4	-2,5	-55,3	-83,5	-53,1	-0,9
1,6	-6,4	-66,6	-150,0	-74,6	-13,4
1,8	-6,7	-61,4	-198,6	-77,6	-18,2
2,0	-4,8	-45,7	-217,7	-65,5	-13,7
2,5	-0,8	-10,8	-208,0	-22,1	15,7
3,0	0,0	-1,2	-121,9	-3,5	34,5

A terminar, refira-se que quer em Prabhu *et al.* (1993), quer em Costa (1994) se questiona se a vantagem do método DS, em diferentes situações, compensa as dificuldades de administração. Daudin (1992) refere que a questão prática reside em saber se a melhoria na eficiência compensa o problema e o custo da sua administração. Prabhu *et al.* (1993) apontam mesmo um conjunto de vantagens do método VSS sobre o método DS.

Por outro lado, o facto da 2<sup>a</sup> amostra ser contígua à primeira pode ser uma dificuldade acrescida de implementação. De facto, apenas em alguns processos poderá ser possível a implementação do método DS, processos em que seja desprezável o tempo de recolha e análise de cada amostra. Além disso, quando se concebe uma carta de controlo a ser utilizada com o método DS existe uma grande variedade de alternativas na escolha dos parâmetros que necessitam ser especificados. Nos esquemas VSS e RDN os limites de controlo são fixos, o que pensamos corresponder a uma maior simplicidade. Daudin (1992) refere que o facto do número de amostras a inspeccionar não ser fixo pode ser uma dificuldade de administração, bem como o facto do processo de decisão ser complexo.

#### 4.2 Caso em que a maior dimensão amostral é predefinida

Como se verificou nos valores apresentados na Tabela 2, este novo procedimento dinâmico, na sua versão “raiz quadrada” pode implicar a utilização de tamanhos de amostras elevados tendo como referência os valores usuais do método clássico. Ora, pode no intervalo de tempo entre duas amostras consecutivas ser fisicamente impossível ou administrativamente muito difícil recolher e analisar amostras de tal dimensão. Neste caso, ainda é possível a utilização do método limitando à partida o tamanho da maior amostra.

Sendo, no método RDN,  $\Theta(x)=\sqrt{x}$ , para analisar em que medida é que os resultados anteriores podem ser afectados, considerámos, em vez de  $n_r=37$ , as situações em que é apenas possível utilizar  $n_r^*=25$ ,  $n_r^*=20$  e  $n_r^*=15$ . Os valores da constante  $k$  passam a ser iguais a 6.325, 6.346 e 6.377, respectivamente, em vez do valor 6.309 obtido no caso em que  $n_r=37$ , de modo a que se continue a ter  $E(N)=n=5$ .

Representemos, então, por  $E(N_a)_1$  e por  $E(N_I)_1$ , respectivamente, o número médio de amostras analisadas e o número médio de itens inspeccionados, adoptando o método RDN, quando se limita a maior dimensão amostral; analogamente, no caso em que tal limitação não é imposta, consideremos  $E(N_a)_0$  e  $E(N_I)_0$ . Sendo assim, as respectivas variações relativas, em percentagem, podem ser dadas pelas grandezas

$$Q_3 = \frac{E(N_a)_0 - E(N_a)_1}{E(N_a)_0} \cdot 100\% \quad (57)$$

$$Q_4 = \frac{E(N_I)_0 - E(N_I)_1}{E(N_I)_0} \cdot 100\% \quad (58)$$

Na Tabela 5 e na Tabela 6 (onde  $n_r^*$  representa o limite superior imposto à dimensão amostral), apresentam-se os valores de  $Q_3$  e de  $Q_4$  para diferentes valores de  $\lambda$  associados a diferentes alterações no nível médio da qualidade. Da observação destas Tabelas, podemos tirar as seguintes conclusões:

Tabela 5: Valores de  $Q_3$  para diferentes valores de  $\lambda$ , com  $L=3$  e  $n=5$ .

$\lambda$	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0	2.5	3.0
$n_r^* = 25$	0,5	3,9	3,6	0,7	-0,1	-0,2	-0,2	-0,2	-0,2	-0,2	-0,1	0,0
$n_r^* = 20$	1,1	9,1	10,4	3,0	0,2	-0,4	-0,5	-0,6	-0,6	-0,6	-0,3	0,0
$n_r^* = 15$	2,0	18,2	26,0	10,9	2,5	-0,3	-1,1	-1,3	-1,4	-1,3	-0,6	-0,1

1. No que concerne ao número médio de amostras, a eficácia da carta de controlo para a média mantém-se sensivelmente igual quando se limita a maior dimensão amostral para alterações de magnitude  $\lambda > 1$ . No caso em que  $\lambda < 1$ , verificam-se algumas reduções relevantes no número médio de amostras analisadas, embora no caso em que  $n_r=25$  (que corresponde a uma redução da maior dimensão amostral superior a 30%), estas reduções sejam inferiores a 4%, o que é bem elucidativo da pequena sensibilidade do método quando se limita a dimensão da maior amostra. Apenas no caso em que  $n_r=20$ , quando



$\lambda=0.6$ , e no caso em que  $n_r=15$ , quando  $0.4 \leq \lambda \leq 0.8$ , se obtiveram reduções superiores a 10%.

2. Quando se limita o tamanho da maior amostra, o número médio de itens inspeccionados sofre um aumento, por vezes bastante considerável, para alterações da média de magnitude  $\lambda \geq 0.8$ . Este aumento acentua-se com a diminuição do tamanho da maior amostra. Para alterações menores da média registam-se reduções do número médio de itens inspeccionados, embora apenas em três das situações consideradas sejam superiores a 5%.
3. Da conjunção das duas alíneas anteriores, podemos concluir que o método RDN é globalmente robusto quando se limita o tamanho da maior amostra, podendo mesmo aumentar a sua eficiência.

Tabela 6: Valores de  $Q_4$  para diferentes valores de  $\lambda$ , com  $L=3$  e  $n=5$ .

$\lambda$	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0	2.5	3.0
$n_r^* = 25$	0,2	2,4	1,3	-2,5	-4,1	-4,6	-4,8	-4,8	-4,7	-4,1	-1,6	-0,3
$n_r^* = 20$	0,3	5,2	4,3	-3,8	-8,2	-9,7	-10,2	-10,3	-9,8	-8,5	-3,2	-0,5
$n_r^* = 15$	0,4	9,6	11,2	-3,0	-12,9	-17,1	-18,4	-18,5	-17,4	-14,9	-5,5	-0,8

## 5 Considerações Finais

Neste trabalho apresentámos um novo procedimento dinâmico para definir o tamanho das amostras em controlo de qualidade. Foram sugeridas duas versões deste procedimento, uma que conduz a dimensões amostrais usuais e outra que conduz a analisar algumas amostras de maior a dimensão. Este procedimento é de implementação muito simples, não requerendo a adição de novos limites à carta Shewhart clássica nem qualquer formação especial por parte do operador. As amostras são retiradas periodicamente, ficando perfeitamente definido o tamanho da amostra seguinte a partir do valor médio da amostra actual.

Com base numa abordagem markoviana, foi possível estabelecer algumas propriedades estatísticas que permitiram a comparação com outros métodos dinâmicos. Os resultados obtidos são bastante interessantes quando se pretendem detectar alterações pequenas e moderadas da média. Por outro lado, podemos concluir que o método é robusto quando se limita o tamanho da maior amostra a inspeccionar, pois tal não afecta de uma forma muito significativa o seu desempenho. Pensamos que este método oferece uma alternativa em determinadas situações, tomando em linha de conta a comparação de desempenhos estatísticos com outros métodos e os requisitos necessários a cada um.

Refira-se que o caso em que se considerou a função logaritmo, pelos tamanhos de amostra obtidos, poderá ser perfeitamente adaptável a um esquema combinado com intervalos variáveis. Por outro lado, pensamos que será possível estender a

ideia a outras cartas de controlo, bem como obter o valor da constante  $k$  de modo a minimizar um custo total. Finalmente, refira-se que outras funções  $\Theta(x)$  poderão e deverão ser consideradas na tentativa de aumentar o desempenho estatístico-económico do método.

#### **Agradecimento:**

Os Autores agradecem os úteis comentários feitos por um Referee, que contribuíram para a melhoria do artigo e, em particular, para uma melhor explicitação e compreensão de algumas conclusões.

## **6 Referências**

- Costa, A.,  $\bar{X}$  Chart with Variable Sample Size, *Journal of Quality Technology*, Vol. 26, 1994, pp. 155-163.
- Costa, A.,  $\bar{X}$  Chart with Variable Sample Size and Sampling Intervals, *Journal of Quality Technology*, Vol. 29, 1997, pp. 197-204.
- Costa, A.,  $\bar{X}$  Charts with Variable Parameters, *Journal of Quality Technology*, Vol. 31, 1999, pp. 408-416.
- Daudin, J. J., Double Sampling  $\bar{X}$  Charts, *Journal of Quality Technology*, Vol. 24, 1992, pp.78-87.
- Infante, P. - *Métodos de Amostragem em Controlo de Qualidade*, Tese de Doutoramento, Universidade de Évora, 2004.
- Infante, P.; Rodrigues Dias, J., Robustez de um Novo Método Dinâmico de Amostragem em Controlo de Qualidade, em *Literacia e Estatística*, editado por P. Brito, A. Figueiredo, F. Sousa, P. Teles e F. Rosado, 2003, pp. 345-360.
- Infante, P.; Rodrigues Dias, J. - Esquema Combinado de Amostragem em Controlo de Qualidade com Intervalos Predefinidos Adaptáveis, em *Estatística com Acaso e Necessidade*, editado por P. Rodrigues, E. Rebelo e F. Rosado, 2004, pp. 335-347.
- Infante, P.; Rodrigues Dias, J., A Comparative Study Between a New Sampling Method and Others Adaptive Sampling Schemes, em preparação.
- Prabhu, S. S.; Runger, G. C.; Keats, J. B., An Adaptive Sample Size  $\bar{X}$ , *International Journal of Production Research*, Vol. 31, 1993, pp. 2895-2909.
- Prabhu, S. S.; Montgomery, D. C.; Runger, G. C., A Combined Adaptive Sample Size and Sampling Interval  $\bar{X}$  Control Scheme, *Journal of Quality Technology*, Vol. 27, 1994, pp. 74-83.
- Reynolds, M. R. Jr.; Amin, R. W. ; Arnold, J. C. ; Nachlas, Joel A.,  $\bar{X}$  Charts with Variable Sampling Intervals, *Technometrics*, Vol. 30, 1988, pp. 181-192.
- Rodrigues Dias, J., Analysis of a New Method to Obtain Different Sampling Intervals in Statistical Quality Control. *Proceedings of the IV Congreso Galego de Estatística e Investigación de Operacións*, Universidade de Santiago de Compostela, 1999a, pp. 155-158.
- Rodrigues Dias, J., A New Method to Obtain Different Sampling Intervals in Statistical Quality Control, 1999b, Universidade de Évora, 18 pp.
- Rodrigues Dias, J., Amostragem em Controlo de Qualidade com Intervalos Diferentes Predefinidos: Uma Nova Abordagem, 2002, *Joclad 2002*, Lisboa.

Rodrigues Dias, J.; Infante, P., Control Charts with Predetermined Sampling Intervals, em preparação.

Tagaras, G., A Survey of Recent Developments in the Design of Adaptive Control Charts, *Journal of Quality Technology*, Vol. 30, 1998, pp. 212-231.

Zimmer, L. S.; Montgomery, D.C.; Runger, G. C., A three-state adaptive sample size  $\bar{X}$  control chart, *International Journal of Production Research*, Vol. 36, 1998, pp. 733-743.

Zimmer, L. S.; Montgomery, D.C.; Runger, G. C., Guidelines for the application of adaptive control charting schemes, *International Journal of Production Research*, Vol. 38, 2000, pp. 1977-1992.

