

Limites para Eficiências não Radiais em DEA: uma Abordagem Vectorial

João Carlos Correia Baptista Soares de Mello * Lidia Angulo Meza †
Eliane Gonçalves Gomes ‡ Luiz Biondi Neto §

* Departamento de Engenharia de Produção - Universidade Federal Fluminense
Rua Passo da Pátria 156, 24210-240, São Domingos, Niterói, RJ, Brasil
jcsmello@producao.uff.br

† Departamento de Ciência dos Materiais - Universidade Federal Fluminense
Av. dos Trabalhadores 420, 27255-125, Volta Redonda, RJ, Brasil
lidia@metal.eeimvr.uff.br

‡ Empresa Brasileira de Pesquisa Agropecuária (Embrapa) - SGE
Parque Estação Biológica, W3 Norte final, 70770-901, Asa Norte, Brasília, DF
eliane.gomes@embrapa.br

§ Departamento de Eletrônica e Telecomunicações - Universidade do Estado do Rio de Janeiro
Rua São Francisco Xavier, 524, Bl. E, Sala 5025, 20550-900, Maracanã, Rio de Janeiro, RJ, Brasil
lbiondi@uerj.br

Abstract

This paper presents a new approach to evaluate non-radial DEA efficiencies. This approach uses vector formulation to non-radial efficiencies. We propose the construction of an efficiency vector that leads to an index, which is an upper bound for the non-radial efficiency module. We also perform the evaluation of a lower limit for the same index. The developments here proposed are for DEA BCC model, as for the CCR model the efficiencies are the same independently from the projection region. The proposed score is applied in a numeric example.

Resumo

Este artigo apresenta uma nova abordagem para o estudo de eficiências não radiais em DEA, qual seja, uma formulação vectorial para o seu cálculo. Propõe-se a construção de vectores de eficiência que fornecem um majorante para o módulo da eficiência não radial e um limite inferior para a mesma grandeza. Os desenvolvimentos referem-se ao modelo DEA BCC, já que no modelo CCR as eficiências são iguais independentemente da região de projecção. O índice proposto é aplicado a um exemplo numérico.

Keywords: DEA; Directional efficiency; Vectors projection.

Title: Upper and Lower Bounds for Non- Radial Efficiencies in DEA: a Vector Approach

1 Introdução

As medidas de eficiência em DEA têm sido abordadas considerando dois enfoques clássicos. O primeiro considera índices de eficiência radiais, isto é, que consideram a redução ou aumento equiproporcional dos *inputs* ou dos *outputs* (Debreu, 1951; Farrel, 1957) e que podem ser obtidos pelos modelos clássicos de DEA, CCR (Charnes et al., 1978) e BCC (Banker et al., 1984). Nos modelos radiais tem-se optado pela redução dos *inputs* ou aumento dos *outputs*, não ocorrendo alterações simultâneas.

O segundo enfoque considera índices de eficiência não radiais, ou seja, variações não proporcionais dos *inputs* e *outputs* e permissão de alteração simultânea dos *inputs* e *outputs*. Alguns dos índices existentes que adoptam este enfoque são Ruggiero e Bretschneider (1998), que introduziram a medida ponderada de Russell; Pastor et al. (1999), que propõem medidas de eficiência globais – *Global Efficiency Measures*, GEMs; Briec (2000), que apresenta uma modificação e extensão das medidas de Russell; Tone (2002), que propõe uma medida baseada nas folgas utilizando o conceito de super eficiência. Ruggiero (2000) faz um estudo das múltiplas medidas de eficiência formuladas até a data do estudo e propõe uma nova medida para corrigir os problemas com as medidas existentes. Em Tone (2001) encontra-se uma revisão bibliográfica dos índices de eficiência não radiais até a data, baseados nas folgas. Nestes dois últimos artigos é enfatizado o tratamento escalar da eficiência.

Estas abordagens acarretam várias inconsistências aos índices obtidos. Entre elas citam-se os casos de eficiências negativas e maiores do que um (Gonzalez Araya, 2003) e a combinação matematicamente inadequada de índices. A solução para esse problema está no tratamento vectorial da eficiência seguindo uma analogia com a derivada direccional.

De facto, uma vez que a eficiência depende do ponto de projecção, ela é caracterizada por um número e por uma direcção de projecção. Grandezas caracterizadas desta forma são vectoriais. Assim, considerar a eficiência como escalar, como feito usualmente na literatura (Pastor, 1995; Tone, 2001), não tem sentido. Seria como postular que a velocidade de um corpo devesse ser escalar.

Este artigo propõe a construção de um vector de eficiências que projectado na direcção do vector fornece um majorante para o módulo da eficiência não radial. É ainda construído um segundo vector que fornece um limite inferior para a mesma grandeza e são verificadas as condições em que os dois limites são iguais. Destaca-se que os desenvolvimentos que se seguem referem-se ao modelo DEA BCC, já que no modelo DEA CCR as eficiências são iguais independentemente da região de projecção.

2 Abordagem Proposta

2.1 Formulação Bidimensional

2.1.1 Modelo baseado em analogia com derivada direccional

A Figura 1 ilustra os conceitos que serão a seguir definidos. O vector \vec{ef} , aqui chamado vector eficiência, tem como coordenadas aparentes o simétrico da eficiência orientada a *inputs* e a eficiência orientada a *outputs*. O simétrico da eficiência orientada a *inputs* é usado no lugar da própria eficiência, visto que a projecção é feita na direcção decrescente do eixo horizontal.

Quanto à eficiência orientada a *outputs*, existe um problema de nomenclatura. A teoria clássica de DEA considera como eficiência orientada a *outputs* o resultado de um PPL que minimiza um quociente não inferior à unidade. Por esta definição, uma DMU será tanto mais eficiente quanto menor o índice de eficiência. O uso deste número na formulação vectorial de eficiência levaria a um vector com uma coordenada no intervalo $[0,1]$ e a outra no intervalo $[1, \infty[$. Na hora de compor um índice único com estas coordenadas haveria a predominância de uma coordenada sobre outra, pelo simples facto de serem definidas de forma diferente.

Há ainda que considerar que não é intuitivo, principalmente para leigos, falar em eficiências superiores à unidade, e que indicam melhores DMUs quanto menor for o índice. Uma solução clássica para este problema de interpretação é trabalhar com o inverso da eficiência orientada a *outputs*, que passa a ser um número no intervalo $[0,1]$, tal como a orientada a *inputs*. Pode-se ainda dizer que o índice obtido do PPL é, na verdade, uma ineficiência e a verdadeira eficiência é o inverso desse índice. Usando esta interpretação, doravante o inverso da eficiência orientada a *outputs* será, denominada apenas por eficiência orientada a *outputs*. Matematicamente, o vector eficiência \vec{ef} é dado por (1), onde e_i e e_o são as eficiências nas orientações a *inputs* e *outputs*.

$$\vec{ef} = -e_i\vec{i} + e_o\vec{j} \tag{1}$$

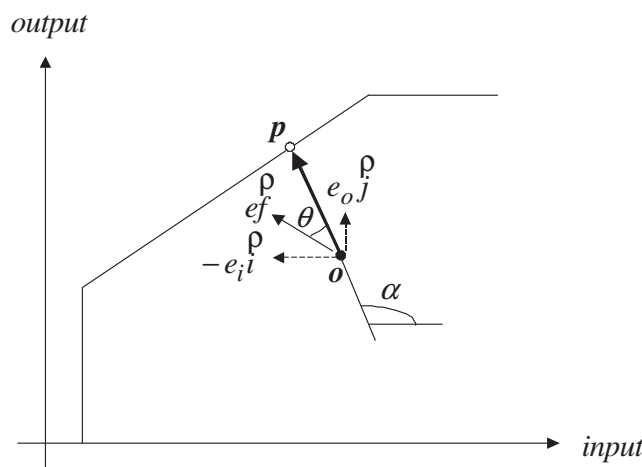


Figura 1: Representação bidimensional da fronteira DEA BCC.

Dado um ponto p na fronteira, define-se o vector \vec{v} como aquele que tem origem na DMU

o e extremidade no ponto p . O vector \vec{v} determina a direcção da projecção da eficiência, sendo que esta direcção faz um ângulo θ com o vector eficiência \vec{ef} .

Da definição de produto interno tem-se que o módulo da projecção do vector eficiência no vector \vec{v} , ou o módulo da eficiência no vector \vec{v} (doravante chamado eficiência direccional) é dado por (2), onde α é o ângulo que o vector \vec{v} faz com o semi-eixo positivo dos *inputs* (havendo decréscimo de *inputs*, como ocorre em projecções dominantes, α é um ângulo maior que 90°). Note-se que em (2), $\cos \alpha$ e $\text{sen} \alpha$ são as coordenadas do vector unitário $\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$, ou seja, são os cosenos directores do vector \vec{v} .

$$ef_{\vec{v}} = \vec{ef} \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = -e_i \cos \alpha + e_o \text{sen} \alpha \quad (2)$$

Tem-se, por outro lado, que o produto interno também pode ser calculado em função dos módulos dos dois vectores e do ângulo formado por eles, como apresentado em (3), ou ainda em (4). De (4) deduz-se que a eficiência direccional é máxima quando $\theta = 0^\circ$.

$$\vec{ef} \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \vec{ef} \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} \cos \theta \quad (3)$$

$$\vec{ef} \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \vec{ef} \cos \theta \quad (4)$$

Segundo o modelo até agora adoptado, conclui-se que a eficiência direccional máxima é obtida na direcção do vector eficiência. Tendo em vista essa propriedade, é fácil observar que a formulação proposta apresenta inconsistências. Com efeito, no caso de $e_o = e_i = e$, tem-se $ef_{\vec{v} \text{ max}} = e\sqrt{2} > 1$, o que é uma clara contradição. Repare-se, ainda, que uma aplicação deste índice ao modelo CCR conduziria a valores da eficiência direccional $ef_{\vec{v}}$ variáveis com a direcção, o que contradiz a propriedade deste modelo de ter a eficiência técnica invariante com a orientação.

2.1.2 Modelo com factor de correcção

As inconsistências mencionadas no item anterior são particularmente evidentes no caso da DMU o já estar na fronteira. Neste caso, o vector \vec{v} não pode ser determinado pela diferença de pontos (uma vez que as duas são coincidentes), mas pelos seus cosenos directores. Para tal DMU, $\vec{ef} = (-1, 1)$ e, portanto, a eficiência direccional é dada pela expressão (5).

$$ef_{\vec{v}} = -\cos \alpha + \text{sen} \alpha \neq 1 \quad (5)$$

Para uma DMU na fronteira, a eficiência direccional deveria ser unitária qualquer que seja a direcção. Para obter este resultado basta dividir o valor obtido por $-\cos \alpha + \text{sen} \alpha$. A proposta para a eficiência direccional de qualquer outra DMU é corrigir o índice (4), dividindo-o pela eficiência direccional do seu alvo, ou seja, pelo resultado da expressão (5). Obtém-se, assim, um número entre 0 e 1. De acordo com esta proposta, a eficiência direccional da DMU o na direcção do vector \vec{v} é dada pela equação (6).

$$ef_{\vec{v}} = \frac{-e_i \cos \alpha + e_o \text{sen} \alpha}{-\cos \alpha + \text{sen} \alpha} \tag{6}$$

Evidentemente, a expressão (6) somente é válida para o caso em que o denominador não seja zero. Como na formulação em análise só se consideram projecções dominantes, $\cos \alpha$ e $\text{sen} \alpha$ nunca assumiram o mesmo valor e, como consequência, o denominador será sempre diferente de zero.

Para investigar as propriedades do índice proposto é conveniente calcular a sua derivada em relação ao ângulo α , conforme apresentado em (7).

$$\frac{def_{\vec{v}}}{d\alpha} = \frac{-e_o + e_i}{(\text{sen} \alpha - \cos \alpha)^2} \tag{7}$$

Três situações podem ocorrer:

- $e_i > e_o$: Neste caso, a derivada é positiva e a eficiência direccional é estritamente crescente com o ângulo α . Consequentemente, assume o maior valor na orientação a *input* e o menor na orientação a *output*.
- $e_i < e_o$: Analogamente, a derivada é sempre negativa e, portanto, a orientação a *output* fornece o valor máximo e a orientação a *input* o valor mínimo.
- $e_i = e_o$: Nesta situação, a derivada é nula e, portanto, a eficiência direccional é constante.

Como caso particular deste último tem-se o modelo CCR. Comprova-se, assim, que o índice corrigido mantém coerência com as propriedades do modelo DEA CCR.

É importante destacar que todos os desenvolvimentos anteriores consideraram que as projecções orientadas a *input*, a *output* ou não radiais teriam os alvos sempre na mesma face. Como pode ser observado na Figura 2 nem sempre isso acontece. Neste caso, os índices propostos supõem que os alvos encontram-se no segmento \overline{AC} , quando na verdade estão na face \overline{BC} . Portanto, a eficiência direccional calculada é maior ou igual que a eficiência direccional real. Dessa forma, a equação (VI) transforma-se na inequação (8).

$$\vec{ef} \leq \frac{-e_i \cos \alpha + e_o \text{sen} \alpha}{-\cos \alpha + \text{sen} \alpha} \tag{8}$$

Para obter uma melhor avaliação da eficiência direccional é necessário, além do limite superior, estimar um limite inferior. Para tal, estende-se a face onde o alvo é projectado e calculam-se as eficiências orientadas a *input* e a *output* em relação a uma fronteira fictícia, composta apenas por essa face. Como a DMU em observação está mais afastada desta fronteira fictícia que da fronteira real, os cálculos efectuados fornecem um valor inferior à eficiência direccional real. Se as duas estimativas forem iguais, ou seja, todas as projecções forem na mesma face, tem-se o valor exacto da eficiência direccional. Caso contrário, são válidas as desigualdades apresentadas em (9), onde x_o e y_o são o *input* e o *output* da DMU o em análise; a e b são, respectivamente, os coeficientes angular e linear da face de projecção.

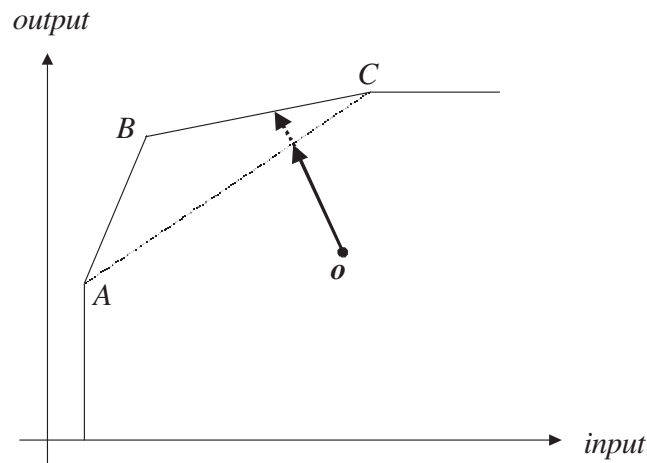


Figura 2: Projecção em diferentes faces.

$$\frac{(ax_o + b)(y_o - b) \cos \alpha + ax_o y_o \operatorname{sen} \alpha}{ax_o(ax_o + b)(\operatorname{sen} \alpha + \cos \alpha)} \leq \vec{ef} \leq \frac{-e_i \cos \alpha + e_o \operatorname{sen} \alpha}{-\cos \alpha + \operatorname{sen} \alpha} \quad (9)$$

Cabe observar que a determinação do limite inferior exige o cálculo da equação da face de projecção, o que pode acarretar problemas computacionais de ordem de dimensão superior (Dulá, 2002; Gonzalez Araya, 2003).

Vale ainda ressaltar que caso o ponto de projecção seja uma DMU extremo-eficiente não existirá uma única face de suporte. Neste caso, pode-se usar a recta tangente à fronteira suavizada (Soares de Mello et al., 2002).

2.2 Formulação Multidimensional

A formulação bidimensional do problema determina a direcção de projecção através de um único ângulo α . Para dimensões superiores vários ângulos devem ser considerados. Estes ângulos são determinados através dos cosenos directores do vector que indica a direcção de projecção, ou seja, pelas coordenadas do unitário de tal vector (o vector dividido pela sua norma), conforme apresentado em (10), onde $\cos \alpha_i$ é a i -ésima coordenada do unitário do vector de projecção.

$$e\vec{f}_{\vec{v}} = \frac{e\vec{f}_{\|\vec{v}\|}}{\sum_i \cos \alpha_i} \quad (10)$$

Deve-se considerar que o vector eficiência tem número de coordenadas igual à dimensão do problema, isto é, a soma do número de *inputs* e *outputs*. Portanto, o simples cálculo das eficiências radiais orientadas a *input* e a *output* não é suficiente para caracterizar tal vector.

Observe-se que cada coordenada do vector está associado, *coeteris paribus*, ao índice de contracção (expansão) do i -ésimo *input* (*output*) para atingir a fronteira. No caso de *input* este índice é o simétrico do factor de contracção, e no caso do *output* é o inverso do factor de

contração. O factor de contração é calculado segundo o PPL (11) e o de expansão segundo o PPL (12).

$$\begin{aligned}
 & \text{Min } h_o \\
 & \text{sujeito a} \\
 & h_o x_1 \geq \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{j1} \\
 & x_2 \geq \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{j2} \\
 & \dots \\
 & y_1 \leq \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{j1} \\
 & y_2 \leq \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{j2} \\
 & \dots \\
 & \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1
 \end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned}
 & \text{Max } h_o \\
 & \text{sujeito a} \\
 & x_1 \geq \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{j1} \\
 & x_2 \geq \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{j2} \\
 & \dots \\
 & h_o y_1 \leq \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{j1} \\
 & y_2 \leq \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{j2} \\
 & \dots \\
 & \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1
 \end{aligned} \tag{12}$$

A Tabela 1 apresenta um exemplo numérico para o caso de dois *inputs* e um *output*. A DMU *D* é BCC ineficiente e em qualquer direcção é projectada com dominância na face composta pelas DMUs *A*, *B* e *C*.

A Tabela 2 apresenta os resultados do cálculo dos factores de contração e de expansão para a DMU *D*. Os resultados não radiais foram obtidos pelos PPLs já apresentados e os resultados radiais obtidos pelo programa SIAD (Angulo Meza et al., 2004).

Para a DMU *D* o vector eficiência é dado por $(-0,80, -0,80, 0,89)$ (Tabela 2). Observa-se que tanto as eficiências radiais quanto as componentes do vector eficiência são relativas a alvos da mesma face. Portanto, para esta DMU, os valores obtidos por qualquer eficiência direccional são valores exactos, já que os majorantes são iguais aos minorantes.

Embora os valores apresentados sejam meramente um exemplo numérico, sem conexão com problemas práticos, podem ser encontrados na literatura vários exemplo de modelos com

Tabela 1: Dados para o exemplo numérico multidimensional.

| DMU | Input 1 | Input 2 | Output |
|-----|---------|---------|--------|
| A | 1 | 1 | 1 |
| B | 11 | 1 | 11 |
| C | 1 | 11 | 11 |
| D | 5 | 5 | 8 |

Tabela 2: Resultados da DMU D para os dados da Tabela 1.

| | Ef_{Input1} | Ef_{Input2} | Ef_{Output} | $Ef_{Inputradial}$ |
|-------------|---------------|---------------|---------------|--------------------|
| Eficiência | 0,80 | 0,80 | 0,89 | 0,90 |
| λ_A | 0,30 | 0,30 | 0,20 | 0,30 |
| λ_B | 0,30 | 0,40 | 0,40 | 0,35 |
| λ_C | 0,40 | 0,30 | 0,40 | 0,35 |

2 inputs e 1 output. Por exemplo, em Soares de Mello et al (2003) apresenta-se um modelo de avaliação de companhias aéreas em que os inputs são pessoal e assentos.km oferecidos, e o output é assentos.km vendidos. No contexto desse exemplo, pode-se interpretar a Ef_{Input1} como o percentual de redução de pessoal, se apenas fosse possível mexer nessa variável, para a DMU tornar-se eficiente. Já Ef_{Input2} representaria o percentual de redução de assentos.km oferecidos, caso apenas essa variável fosse alterada, para a DMU ficar eficiente. Já Ef_{Output} representaria o quanto é necessário aumentar percentualmente a quantidade de passageiros.km vendidos para atingir a fronteira eficiente. E, por fim, $Ef_{Inputradial}$ representa o quanto os dois *inputs* devem ser reduzidos (equiproporcionalmente) para a DMU atingir a fronteira, sem alterar o *output*.

Dentre as várias direcções possíveis, pode-se calcular eficiência na direcção do próprio vector eficiência. Para este caso, é possível obter uma forma geral do majorante, que é dada pela expressão (13).

$$ef_{e\vec{f}} \leq \frac{\vec{e\vec{f}} \cdot \vec{e\vec{f}}}{\|\vec{e\vec{f}}\| \cdot \sum_i \cos \alpha_i} = \frac{\|\vec{e\vec{f}}\| \cdot \|\vec{e\vec{f}}\|}{\|\vec{e\vec{f}}\| \sum_i \cos \alpha_i} \cdot \cos \theta = \frac{\|\vec{e\vec{f}}\|}{\sum_i \cos \alpha_i} = \frac{\vec{e\vec{f}} \cdot \vec{e\vec{f}}}{\sum_n ef_o + \sum_r ef_i} \quad (13)$$

Para o exemplo das Tabelas 1 e 2, a desigualdade transforma-se em igualdade e, assim, tem-se que $ef_{e\vec{f}} = \frac{\vec{e\vec{f}} \cdot \vec{e\vec{f}}}{\sum_n ef_o + \sum_r ef_i} = \frac{(0,8)^2 + (0,8)^2 + (0,89)^2}{0,8 + 0,8 + 0,89} \cong 0,83$.

No exemplo apresentado, destaca-se que devido a pequena dimensão o esforço computacional envolvido não foi alto, mas ao incrementar-se o número de variáveis a situação muda, já que não existe algoritmo eficiente para calcular a equação do todas as faces eficientes (Dulá, 2002). Para resolver este problema a formulação multiobjectivo de DEA de Lins et al (2004) pode ser usada para determinar a intersecção de qualquer recta, que contenha uma dada DMU, com a fronteira eficiente, como mostrado em Soares de Mello et al (2005).

3 Conclusões

Este artigo apresenta uma nova abordagem para o cálculo de eficiências não radiais. O índice proposto não apresenta inconvenientes caso o alvo esteja situado na região de dominância. De facto, o sinal negativo nas eficiências orientadas a *input* impede o surgimento das eficiências negativas.

Por outro lado, o factor de correcção impede que a eficiência seja maior que um. Este factor de correcção poderia acarretar outro problema, qual seja o da divisão por zero. No entanto, mais uma vez, observa-se que tal facto não acontece na região de dominância.

A abordagem apresentada apenas leva ao cálculo de um índice em casos particulares. Em casos mais gerais, fornece limites inferiores e superiores da eficiência direccional. Estes limites são baseados na geometria do problema. São, portanto, mais consistentes que os índices tradicionais baseados em somas (sem sentido para o cálculo da eficiência, já que esta é baseada em distâncias euclidianas) ou em ponderações, que sempre exigem arbitrariedade de um decisor (situação contrária aos paradigmas de DEA). Os limites aqui apresentados podem servir como teste de consistência para os numerosos índices não radiais já existentes.

4 Agradecimentos

Ao CNPq pelo apoio financeiro, processo 470423/2004-8.

5 Referências

- Angulo-Meza, L., Biondi, L. N., Soares de Mello, J.C.C.B., Gomes, E.G., Coelho, P.H.G. (2004). FSDA – Free Software for Decision Analysis (SLAD – Software Livre de Apoio a Decisão): A Software Package for Data Envelopment Analysis Models. *Congreso Latino Iberoamericano de Investigación de Operaciones y Sistemas*, La Habana – Cuba.
- Banker, R.D., Charnes, A., Cooper, W.W. (1984). Some Models For Estimating Technical Scale Inefficiencies in Data Envelopment Analysis. *Management Science*, 30 (9), 1078-1092.
- Briec, W. (2000). An extended Färe-Lovell technical efficiency measure. *International Journal of Production Economics*, v. 65, p. 191-195.
- Charnes, A., Cooper, W.W., Rhodes, E. (1978). Measuring the efficiency of decision-making units. *European Journal of Operational Research*, v. 2, p. 429-454.
- Debreu, G. (1951). The coefficient of resource utilization. *Econometrica*, v. 19, p. 273-292.
- Dulá, J.H. (2002). Computations in DEA. *Pesquisa Operacional*, v. 22, n. 2, p. 165-182.
- Lins, M.P.E., Angulo Meza, L., Silva, A.C.M. (2004). A multi-objective approach to determine alternative targets in data envelopment analysis. *Journal of the Operational Research Society*, v. 55, p. 1090-110.
- Farrell, M.J. (1957). The measurement of productive efficiency. *Journal of the Royal Static Society*. Ser. A. 120, p. 253-281.
- Gonzalez-Araya, M.C. (2003). *Projeções Não Radiais em Regiões Fortemente Eficientes da Fronteira DEA - Algoritmos e Aplicações*. Tese de Doutorado. Programa de Engenharia de Produção. COPPE/UFRJ.

- Pastor, J.T. (1995). Improving the new DEA-efficiency measure of Tone. *Working paper*. Departamento de Estadística e Investigación Operativa. Universidad de Alicante.
- Pastor, J.T., Ruiz, J.L., Sirvent, I. (1999). An enhanced DEA Russell graph efficiency measure. *European Journal of Operational Research*, v. 115, p. 596-607.
- Ruggiero, J., (2000). Measuring technical efficiency. *European Journal of Operational Research*, v. 121, p. 138-150.
- Ruggiero, J., Bretschneider, S. (1998). The weighted Russell measure of technical efficiency. *European Journal of Operational Research*, v. 108, p. 438-451.
- Soares de Mello, J.C.C.B., Estellita-Lins, M.P., Gomes, E.G. (2002). Construction of a Smoothed DEA Frontier. *Pesquisa Operacional*, v. 22, n. 2, p. 183-201.
- Soares de Mello, J.C.C.B., Angulo-Meza, L., Gomes, E. G.; Serapião, B.P.; Lins, M.P.E. (2003). Análise de Envoltória de Dados no estudo da eficiência e dos benchmarks para companhias aéreas brasileiras. *Pesquisa Operacional*, v. 23, n. 2, p. 325-345.
- Soares de Mello, J.C.C.B., Gomes, E.G., Angulo-Meza, L., Biondi, L.N., Sant'Anna, A. P. (2005). Fronteiras DEA difusas. *Investigação Operacional*, v. 25, n. 1, p. 85-103.
- Tone, K. (2002). A slacks-based measure of super-efficiency in data envelopment analysis. *European Journal of Operational Research*, v. 143, p. 32-41.
- Tone, K. (2001). A slacks based measure of efficiency in Data Envelopment Analysis. *European Journal of Operational Research*, v. 130, p. 498-509.