

# INVESTIGAÇÃO OPERACIONAL

Dezembro 1987

Número 2

Volume 7

Publicação Científica da

**apodlo**

Associação Portuguesa para o Desenvolvimento  
da Investigação Operacional.

# INVESTIGAÇÃO OPERACIONAL

Propriedade:

APDIO — Associação Portuguesa para o Desenvolvimento  
da Investigação Operacional

## ESTATUTO EDITORIAL

*«Investigação Operacional», órgão oficial da APDIO cobre uma larga gama de assuntos reflectindo assim a grande diversidade de profissões e interesses dos sócios da Associação, bem como as muitas áreas de aplicação da I. O. O seu objectivo primordial é promover a aplicação do método e técnicas da I.O. aos problemas da Sociedade Portuguesa.*

*A publicação acolhe contribuições nos campos da metodologia, técnicas, e áreas de aplicação e software de I. O. sendo no entanto dada prioridade a bons casos de estudo de carácter eminentemente prático.*

---

**Distribuição gratuita aos sócios da APDIO**

# INVESTIGAÇÃO OPERACIONAL

volume 7 - nº 2 - Dezembro 1987

Publicação semestral

Director : J.M. Pinto Paixão  
(Fac. Ciências - Universidade de Lisboa)

## Comissão Editorial

|                     |                            |                         |                            |
|---------------------|----------------------------|-------------------------|----------------------------|
| Mordecai Avriel     | (Israel)                   | A. Simões Monteiro      | (NORMA)                    |
| João A. Branco      | (IST - Univ. Técn. Lisboa) | Mohamed Najim           | (ENSIAS - Argélia)         |
| Josep Casanovas     | (UPC - Espanha)            | J. Manuel Oliveira      | (EFACEC)                   |
| J. Dias Coelho      | (FE - Univ. Nova Lisboa)   | Fernando Pacheco        | (Univ. Católica)           |
| Nuno Crato          | (NORMA - Açores)           | A. Gouvêa Portela       | (IST - Univ. Técn. Lisboa) |
| J.A. Romão Eusébio  | (CIMPOR)                   | M. Baptista Rodrigues   | (Partex - CPS)             |
| A. Sousa Ferraria   | (Petrogal)                 | A. Guimarães Rodrigues  | (Univ. Minho)              |
| D. V. Gokhale       | (Estados Unidos)           | Bernard Roy             | (LAMSADE - França)         |
| J. Borges Gouveia   | (FE - Univ. Porto)         | C. Moreira da Silva     | (FE - Univ. Porto)         |
| R. Campos Guimarães | (FE - Univ. Porto)         | L. Valadares Tavares    | (IST - Univ. Técn. Lisboa) |
| Masao Iri           | (TU - Japão)               | Isabel H. Themido       | (IST - Univ. Técn. Lisboa) |
| Joaquim J. Júdice   | (FC - Univ. Coimbra)       | B. Calafate Vasconcelos | (FE - Univ. Porto)         |
| A. Rinnoy Kan       | (EU - Holanda)             | José M. Viegas          | (IST - Univ. Técn. Lisboa) |
| Nelson Maculan      | (UFRJ - Brasil)            | Andres Weintraub        | (UC - Chile)               |

A Revista "INVESTIGAÇÃO OPERACIONAL" está registada na Secretaria de Estado da Comunicação Social sob o nº108335.

Esta Revista é distribuída gratuitamente aos sócios da APDIO. As informações sobre inscrições na Associação, assim como a correspondência para a Revista devem ser enviadas para a sede da APDIO - Associação Portuguesa para o Desenvolvimento da Investigação Operacional - CESUR, Instituto Superior Técnico, Av. Rovisco Pais, 1000 Lisboa.

Este Volume foi subsidiado por :  
Instituto Nacional de Investigação Científica (INIC)  
Junta Nacional de Investigação Científica e Tecnológica (JNICT)  
Fundação Calouste Gulbenkian.  
Para efeitos de dactilografia e composição, foram utilizados equipamentos gentilmente postos à disposição pelo CEAUL (DEIOC-Faculdade de Ciências de Lisboa).

Assinatura : 3000\$00

## Nota do Editor

Este é o primeiro de dois números de 'Investigação Operacional' dedicados inteiramente à publicação de um conjunto de artigos seleccionado de entre os trabalhos apresentados ao III Congresso da APDIO, realizado em Coimbra, em Outubro de 1987. A selecção dos trabalhos esteve a cargo da Comissão de Programa do Congresso, cuja actividade não quero deixar de salientar, sobretudo tendo em atenção o esforço que foi solicitado aos 'referees' que analisaram um significativo número de artigos num curto espaço de tempo.

É também importante afirmar, desde já, que a distribuição dos artigos pelos dois números da 'IO' obedeceu apenas à preocupação de assegurar uma certa unidade temática. Isto, acompanhado de um necessário equilíbrio entre os vários tipos de trabalho publicados. Procurou-se, desta forma, proporcionar uma leitura diversificada em qualquer um dos volumes e que transmitisse uma imagem, tão fiel quanto possível, do desenvolvimento da Investigação Operacional no nosso país.

Assim, no presente exemplar, poderá o leitor encontrar um testemunho da variedade de áreas de actuação da comunidade portuguesa de IO, e onde se conjugam vários campos de interesse. Na verdade, o Congresso de Coimbra revelou, no nosso entender, um significativo dinamismo dos membros da APDIO, empenhados numa agradável diversidade de domínios como a simulação, a análise de sistemas, a modelação, a optimização. Igualmente, ficou patente em alguns trabalhos uma saudável, e bem necessária, preocupação de intervenção nos muitos problemas reais onde a Investigação Operacional tem um importante contributo a dar.

Poder-se-á, porventura, dizer que a comunidade portuguesa de IO está, ainda, muito centrada nos meios académicos. Contudo, em nosso entender, tal não deverá significar uma fuga à prova de fogo que sempre constitui o salto da conceptualização para a implementação no chamado 'mundo real'. Sem querer abusar do privilégio de dispor destas linhas, gostaria de chamar a atenção para este grande repto que nos é posto e que, no fundo, se poderia exprimir pelas perguntas: que é isso da Investigação Operacional? Que contributo temos a dar para o desenvolvimento científico-tecnológico, particularmente num país como o nosso?

Com estas questões, procuramos dar o pontapé de saída para um 'pequeno' forum na nossa revista e sob o tema - Investigação Operacional em Portugal: o que é, o que será? Aguardamos ansiosamente os primeiros contributos. Até lá, convido-vos a uma leitura atenta deste número da 'IO'.

O Editor  
  
José M. Pinto Paixão



EURO: the Association of European Operational  
Research Societies Within I.F.O.R.S.

Every year EURO organizes a summer institute  
for selected young scientists working in a particular field of O. R.

## SIXTH EURO SUMMER INSTITUTE

Madeira, Portugal, May 26 – June 10, 1989

### THEME FOR 1989: DECISION SUPPORT SYSTEMS

*Organization:* EURO and APDIO (The Portuguese O. R. Society), with the support of ORS (The British O. R. Society) and also of DTIM (Regional Association for the Development of Information Technologies in Madeira) and the University of Madeira.

*Activities:* The Institute will take place on Funchal, Madeira island. Accommodation will be offered by the EURO Summer Institute organization. Each participant will present a research paper on the above theme. Invited lectures by prominent speakers will be given. A special issue of EJOR (European Journal of Operational Research) will be prepared jointly during the stay.

*Application:* Admittance is limited to 20 promising young persons (age 25–35) from different countries. Applicants should send their curriculum vitae together with an unpublished paper in the field of Decision Support Systems to their national O.R. Society. These societies will select their national candidates and submit them before March 1 to the coordinator of the Sixth EURO Summer Institute. The final choice of the 20 participants will be made by the scientific committee.

*Further information:* available at your national O. R. Society.

*Coordinator:* Prof. J. Paixão; DEIOC – Faculty of Sciences, University of Lisbon; Avenida 24 de Julho, 134; 1300 Lisboa; Portugal.

*Scientific and Organizing Committee:* V. Belton, J.P. Brans, A.I. Cardoso, J. Clímaco, V. Miranda, J. Paixão, A. Rodrigues, I. Themido.

*Youth Committee:* A. Rodrigues, A.I. Barros, H. Lourenço.

# MODELO ESTOCÁSTICO DE SIMULAÇÃO DE FOGOS FLORESTAIS

Francisco Cardoso Ferreira  
Paulo Nuno Silva

Grupo de Análise de Sistemas Ambientais  
Faculdade de Ciências e Tecnologia  
Universidade Nova de Lisboa

## Resumo

Os fogos florestais representam um factor de elevado prejuízo económico e ecológico. Grande esforço tem sido feito na implementação de programas de prevenção e combate de fogos. Na procura de dotar estes programas de um máximo de eficácia, têm sido desenvolvidos modelos que permitem calcular índices de risco e descrever a propagação do fogo. Estes modelos apresentam geralmente uma grande complexidade e implicam uma recolha de dados exaustiva. Uma nova abordagem é apresentada através de um modelo estocástico que determina o caminho mais provável de propagação do fogo entre uma zona e outra no interior duma área definida por quadrículas, com base em coeficientes que caracterizam o combustível vegetal, a topografia, o grau de limpeza e a direcção do vento.

## Abstract

Forest fires represent a great economical and ecological damage factor. A great effort has been made on the increment of fire combat and prevention programmes. Searching for a better efficiency of these programmes, some models have been developed with the objective of risk degrees calculation and fire spreading description. These models generally present a great complexity and they need an exhaustive data input. A new approach is presented through a probabilistic model which calculates the fire's most probable path between two areas. The model is based on coefficients that characterize vegetable fuel, topography, cleanliness forest level and wind direction.

**Keywords:** fire, forest, , probabilistic model.

## 1. Introdução

Os fogos florestais constituem a principal causa de degradação da floresta em Portugal. Os fogos florestais têm como consequência fundamental a perda de combustíveis vegetais, produzindo-se um conjunto de prejuízos ecológicos e económicos. A renovação de uma área florestal é difícil, demorada e por vezes irreversível, não se atingindo geralmente o equilíbrio ecológico que deveria caracterizar a situação anterior à ocorrência do fogo.

Alguns esforços têm sido efectuados no sentido de minimizar o número de fogos e a área queimada, através de um incremento nas acções de prevenção e combate a fogos.

Para o aumento da eficácia destas acções é fundamental a disponibilidade de informação que permita conhecer quer o risco de fogo, quer as características de propagação de uma frente de fogo. Neste sentido, têm sido desenvolvidos modelos de vários tipos, descrevendo o comportamento da frente de fogo ao longo do tempo e a sua dependência da área afectada, permitindo simular a evolução do sinistro. Assim, enquanto que a determinação de um nível de risco se enquadra nas acções de prevenção, a simulação do comportamento de um fogo permite um aumento de eficácia no seu combate. O modelo de Rothermel (1)(2) tem sido o mais utilizado na simulação de fogos florestais, apresentando uma formulação complexa que exige uma grande disponibilidade de dados.

## 2. Factores/parâmetros de um fogo

Um primeiro passo na elaboração de modelos que simulem a evolução de um fogo é a determinação e análise dos factores que determinam quer o seu aparecimento (ignição do combustível vegetal), quer o seu alastramento (propagação do fogo). Estes factores, que descrevem na sua maioria a inflamabilidade da vegetação, dividem-se em dois grupos:

### 1. Factores ou parâmetros intrínsecos

- a) Composição da matéria vegetal, que é a causa da sua combustibilidade;
- b) Espécie vegetal, que condiciona a sua inflamabilidade;
- c) Estado da população vegetal, que determina as dimensões e quantidade do combustível existente.

Os factores intrínsecos não variam continuamente, apresentando uma certa estabilidade durante intervalos de tempo relativamente grandes.

### 2. Factores ou parâmetros extrínsecos

- Factores meteorológicos/ambientais, enquanto causas que alteram a inflamabilidade da matéria vegetal e determinam a propagação do fogo.

O modelo apresentado integra os diferentes factores mencionados, calculando o caminho mais provável entre um ou mais focos de incêndio e uma determinada área integrada numa matriz quadrangular.

O modelo, implementado em computador em linguagem BASIC, procede segundo considerações estocásticas, procurando-se afectar a propagação do fogo pelos factores intrínsecos, referidos anteriormente, e por uma certa aleatoriedade associada a factores como a direcção do vento.

## 3. Descrição do modelo

O modelo baseia-se numa matriz rectangular de oitenta quadrículas, traduzindo um determinado espaço, seleccionando-se a zona em estudo através da escolha das quadrículas respectivas.

Na determinação do caminho mais provável da frente de fogo entre uma quadrícula e outra foram considerados os seguintes parâmetros específicos:

- a) as espécies existentes em cada quadrícula, segundo um coeficiente na escala de 1 a 5, correspondendo a um aumento de inflamabilidade da espécie vegetal predominante na quadrícula. Este aumento de inflamabilidade reflecte-se na probabilidade de ignição da quadrícula considerada. Elaborou-se com base em dados do I.C.O.N.A. (Espanha)(3)(4) a tabela I, contendo as espécies mais frequentes nas florestas portuguesas e o seu índice de inflamabilidade ou de ignição utilizáveis neste modelo;



**TABELA I**  
**Coefficientes de espécie**

|                         |   |
|-------------------------|---|
| <i>Pinus sylvestris</i> | 3 |
| <i>Pinus pinea</i>      | 4 |
| <i>Pinus pinaster</i>   | 4 |
| Outras coníferas        | 1 |
| <i>Quercus sp.</i>      | 1 |
| <i>Eucalyptus sp.</i>   | 2 |
| Outras frondosas        | 1 |
| Matagal                 | 5 |

b) a limpeza da quadrícula, considerada através de um coeficiente (1 a 5) que representa o estado da quadrícula em termos de presença de mato, ou outras espécies arbustivas, e a sua influência na inflamabilidade da quadrícula e na propagação do fogo;

c) um coeficiente de topografia que traduz a influência dos acidentes topográficos na propagação do fogo, integrando o declive ou descontinuidades no terreno;

d) o vento, através da sua direcção, considerado como possuindo uma distribuição normal com determinada média e desvio padrão, influenciando decisivamente o percurso da frente de fogo.

#### **4. Dados de entrada do modelo**

O modelo contempla dois tipos de situações:

1. Uma situação mais determinística, onde a informação sobre os coeficientes é fornecida quadrícula a quadrícula, e em que apenas a direcção do vento decorre de acordo com um processo estocástico, sendo caracterizada por uma distribuição normal, com média e desvio padrão indicados pelo utilizador do modelo no início de cada simulação.
2. Uma situação menos determinística, onde a informação sobre cada coeficiente é fornecida sob a forma de uma probabilidade de cada coeficiente assumir um dado valor numa dada quadrícula, sendo considerado cada coeficiente como uma variável aleatória. O vento, tal como na situação 1., comporta-se como uma variável aleatória com distribuição normal.

#### **5. Funcionamento do modelo**

Considerando um dado instante em que a quadrícula de coordenadas (i,j) está em fogo, são calculados os coeficientes de espécie, de limpeza e de topografia relativos às quadrículas circundantes, onde ainda não se tenha verificado fogo. Na situação determinística descrita anteriormente efectua-se uma consulta directa aos coeficientes indexados, enquanto que na situação menos determinística se procede à geração dos coeficientes com base numa variável pseudo-aleatória com distribuição uniforme.

Gera-se de seguida um valor para a direcção do vento recorrendo a uma variável pseudo-aleatória com distribuição normal e com parâmetros definidos no início da simulação. A direcção gerada vai determinar a atribuição de um coeficiente correspondente ao vento, pressupondo-se que um valor de direcção de vento oblíquo afectará 3 quadrículas (a situada obliquamente e as duas contíguas) e que um valor de direcção paralela ou perpendicular apenas afectará uma quadrícula (a que se situa no sentido do vento).

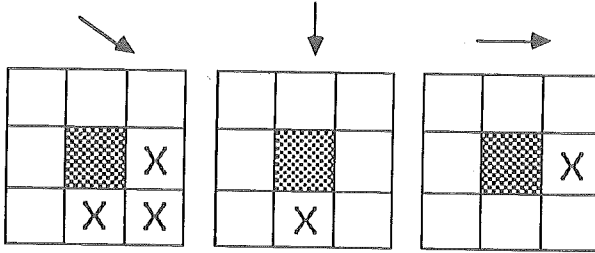


Figura 1 - Afectação de quadrículas consoante a direcção do vento

Define-se, seguidamente, para cada quadrícula ainda não ardida, e em redor da quadrícula em simulação, um potencial de propagação de fogo, (**Ptf**) que resulta dos diferentes coeficientes indexados ou gerados, depois de devidamente ponderados. Considera-se que o vento tem uma importância determinante no caminho do fogo (85 %) totalizando os restantes factores, (topografia do terreno, grau de limpeza florestal e a espécie vegetal) os restantes 15 % de influencia. Esta ponderação é consequência duma análise do modelo de Rothermel (1)(2) e dos modelos utilizados pelo I.C.O.N.A. (3)(4).

**Ptf** corresponde à probabilidade de cada quadrícula em redor da área em simulação, arder :

$$Ptf = 0.15 * ((Ce + Ct + Cl) / 15) + 0.85 * Cv$$

**Ce** = coeficiente de espécie C {1,2,3,4,5}

**Ct** = coeficiente de topografia C {1,2,3,4,5}

**Cl** = coeficiente de limpeza florestal C {1,2,3,4,5}

**Cv** = coeficiente de vento C [0,1]

Finalmente, gera-se para cada quadrícula, contígua à quadrícula em fogo, uma variável pseudo-aleatória de distribuição uniforme que vai determinar a propagação ou não do fogo para essa quadrícula, de acordo com o potencial de propagação de fogo (probabilidade de a quadrícula arder).

Considerando um primeiro acontecimento em que uma quadrícula está a arder, o acontecimento seguinte corresponderá à propagação do fogo para uma ou várias quadrículas contíguas à primeira, para as quais se vai repetir o processo descrito.

A simulação pára quando o fogo ultrapassa os limites da área definida através das quadrículas ou quando atinge a quadrícula final (ou em estudo).

Todo o processo apresentado é repetido um determinado número de vezes, correspondendo este número à dimensão da amostra escolhida pelo utilizador, não devendo ser inferior a 30.

## 6. Resultados do modelo

Após todas as simulações constituindo a amostra, é afectada a cada quadrícula uma probabilidade dada pela relação simples:

$$P(i,j) = 1/d * \sum c(i,j)$$

**P(i,j)** = probabilidade final da quadrícula arder

**d** = dimensão da amostra

$\sum c(i,j)$  = número de vezes que a quadrícula pertenceu ao caminho de propagação do fogo ao longo da dimensão da amostra

Esta probabilidade final  $P(i,j)$  permite determinar o caminho mais provável do fogo entre a quadrícula ou quadrículas iniciais e a quadrícula final ou o limite da área definida.

A determinação deste caminho segue um algoritmo em que se consideram três passos:

1. Para cada quadrícula procede-se à escolha da quadrícula contígua de maior probabilidade  $P(i,j)$ ; no caso de empate são escolhidas as quadrículas empatadas.
2. Para cada quadrícula escolhida procede-se sempre de acordo com 1. até desempate, sendo então escolhido o caminho de maior probabilidade.
3. O processo termina quando se atinge o limite da área definida ou a quadrícula final.

O modelo apresenta como resultados:

- a) um mapa com a probabilidade final de fogo  $P(i,j)$  de cada quadrícula;
- b) um mapa com as área de equiprobabilidade que se pretenda analisar;
- c) um mapa com o caminho mais curto de propagação entre uma ou mais quadrículas iniciais e a área em estudo.

### 6. Verificação e análise do modelo

A sensibilidade do modelo foi testada revelando-se o seu comportamento adequado. Neste contexto, apresentam-se os resultados de uma simulação efectuada com a matriz quadrangular de base e recorrendo a coeficientes de limpeza, topografia e espécie, indexados (figura 2).

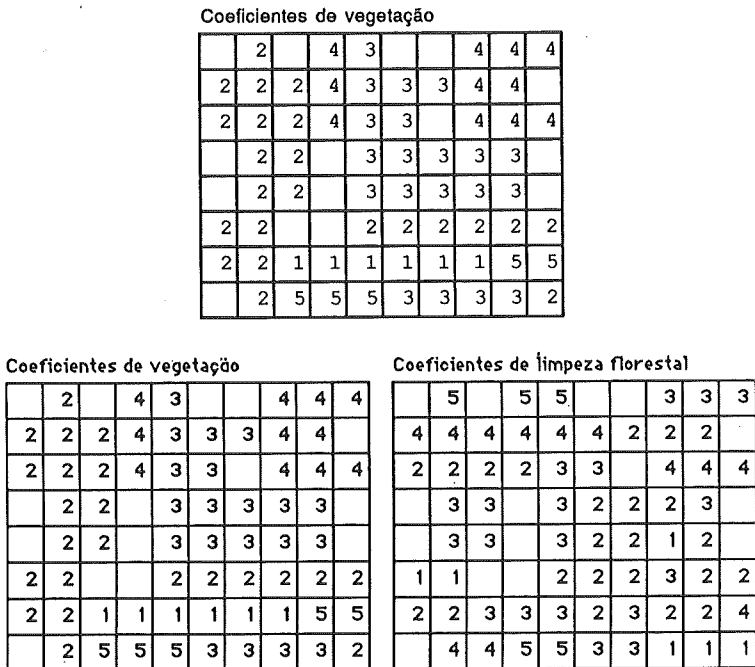


Figura 2 - Exemplo de coeficientes de espécie, limpeza e topografia indexados

A simulação baseou-se num foco de incêndio na quadrícula nº 43, sendo a zona de estudo a quadrícula nº 20. A direcção de vento introduzida foi de 45 graus e o seu desvio padrão de 10 graus.

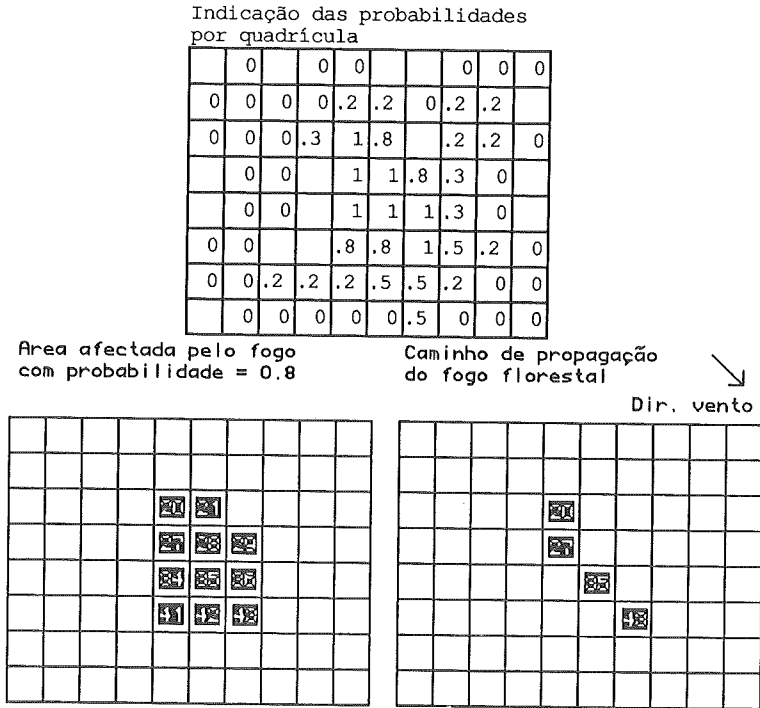


Figura 3 - Resultados do modelo

Os resultados obtidos (figura 3) são muito satisfatórios, propagando-se o fogo numa frente cada vez mais ampla que atinge sempre a quadrícula em estudo. A aleatoriedade do processo encontra-se igualmente expressa na reduzida mas existente probabilidade das quadrículas abaixo e à direita da quadrícula onde se originou o incêndio.

O caminho mais curto surge na figura 3 como o caminho de propagação do fogo, sendo relevante também a informação dada pelas zonas de equiprobabilidade superior que mostram bem o desenvolvimento do incêndio.

Não foi considerado o tempo de propagação do fogo, dado que o modelo apenas procura determinar o caminho do fogo e não o tempo gasto nesse percurso. Para determinação do tempo de propagação seria necessário considerar parâmetros como a humidade do combustível, compactação do combustível, densidade do povoamento, área de cada quadrícula, velocidade do vento, distribuição do calor e outros parâmetros utilizados por modelos que calculam a velocidade de propagação (1)(2).

**8. Melhoramentos do modelo**

a) Incorporar os parâmetros físicos e ambientais necessários ao cálculo da velocidade de propagação e conseqüentemente do tempo gasto durante o caminho calculado, tornando deste modo o modelo mais próximo do real;

b) O modelo constitui apenas uma proposta de metodologia na abordagem do problema

da propagação de fogos florestais, apresentando uma elevada fiabilidade na medida em que, testado para situações muito diferentes, a resposta do modelo foi aceitável, devendo-se no entanto executar uma validação externa através da análise de resultados reais.

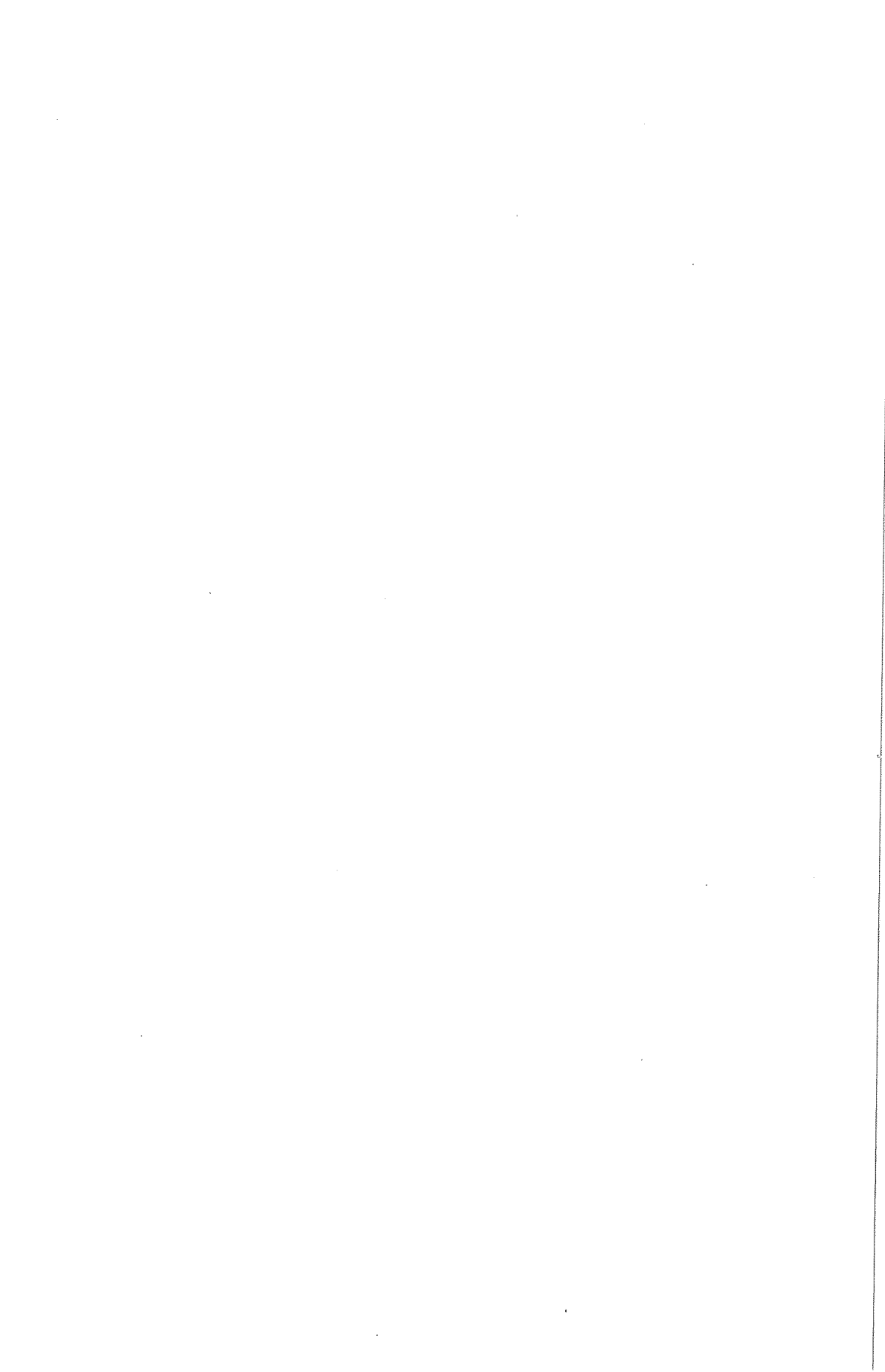
## **9. Conclusões**

A resposta do modelo é satisfatória, calculando o caminho do fogo de uma quadrícula a outra, a partir de coeficientes descrevendo a quadrícula e da direcção do vento;

Este resultado sugere ser o modelo uma base válida para a elaboração de um modelo mais complexo e realista, descrevendo a propagação do fogo e não apenas o seu caminho, podendo ser utilizado em tempo real na definição de estratégias de prevenção e combate a fogos florestais.

## **10. Referências**

1. Rothermel, R.C., "A mathematical model for predicting fire spread in wildland fuels"  
USAD Forest Services Research Paper Int-115, U.S. Department of Agriculture, 1972.
2. Rothermel, R.C., "How to predict the spread and intensity of forest and range fires"  
U.S. Department of Agriculture, 1983.
3. I.C.O.N.A., "Técnicas para defensa contra incendios florestales"  
Monografia 24, Madrid, 1981.
4. I.C.O.N.A., "Manual de prediccion del peligro de incendios florestales"  
I.C.O.N.A., 1982.



# GESTÃO DA PRODUÇÃO DE UM COMPLEXO INDUSTRIAL: SIMULAÇÃO E OPTIMIZAÇÃO

R. Correia  
P. Monteiro  
O. Martins  
A. Dourado

LIS-Laboratório de Informática e Sistemas  
Departamento de Engenharia Electrotécnica  
Largo Marquês de Pombal 3000 Coimbra

## Resumo

Um centro de produção de pasta e de papel é uma instalação complexa. A interdependência entre os vários departamentos constituintes dificulta a previsão do evoluir global do centro na ocorrência de alterações nos ritmos de produção.

Para permitir uma operação mais coordenada e eficiente está em desenvolvimento um sistema computarizado baseado num modelo matemático global do centro de produção. Focam-se dois aspectos do sistema: o de simulação do comportamento do centro em face a planos de produção e o de optimização do planeamento a curto prazo, ambos apoiados por modernos meios gráficos.

A optimização é feita segundo um critério de desempenho quadrático pelo método de Tamura de 3 níveis com iteração pelos controlos, sendo especificados o período de planeamento, o estado inicial do centro, o estado final desejado e a produção de papel utimado a cumprir. É apresentado e discutido um caso prático de planeamento.

## Abstract

A pulp and paper mill is a complex production center. The interdependence between its several departments makes the prevision of the overall evolution of the center difficult when there are changes in the production rates.

For a better coordination and more efficient operation a computational system based on a mathematical model of the production center has been developed. Two aspects of the system are focused: the simulation of the center behaviour for a specified production plan and the short term optimization of the plan, both of them aided by the use of modern graphical tools.

The optimization is based on a quadratic performance criterium and uses the three level hierarchical method of Tamura with interaction by the inputs. The planning period, the initial state of the center, the desired final state and the needed paper production are specified. A practical problem of planning is presented and discussed.

**Keywords:** Production management, simulation, optimization, hierarchical control.

## 1. Introdução

A simulação é de grande utilidade no estudo e desenvolvimento de processos industriais. Um dos seus domínios de aplicação é a planificação da produção: um operador humano pode ensaiar por tentativa e erro diferentes alternativas de produção adentro de um período de planificação pré-estabelecido, cuja avaliação deve ser feita em termos da utilização eficiente de matérias primas e de energia, do respeito pelas restrições de qualidade e pelo cumprimento da carteira de encomendas. No nosso caso, toda a instalação, que inclui vários departamentos fabris e depósitos intermédios, é representada por um conjunto de equações e restrições associadas, que conjuntamente constituem o modelo matemático.

A tarefa de planeamento pode, porém, ser automatizada. Uma forma eficaz de o fazer consiste em enunciar um critério de desempenho que pondere os custos e/ou os inconvenientes resultantes de cada decisão; da minimização desta função resulta um plano óptimo de produção. O sistema computadorizado de planeamento não deve requerer conhecimentos especializados de informática. Moderno equipamento interactivo, associado aos poderosos meios gráficos disponíveis (que tiram grande partido da conceptualização pela visão) pode ser utilizado com êxito na actividade de planeamento.

## 2. Modelização matemática

O Centro de Produção em estudo é o da Portucel de Viana do Castelo. Produz papel kraft a partir de madeira de pinho e de eucalipto e foi modelizado como um conjunto de 7 departamentos, 8 depósitos intermédios e unidades produtoras de energia (figura 2.1). Os depósitos intermédios permitem o amortecimento das flutuações nos ritmos de produção dos departamentos.

Medimos o nível dos depósitos pela massa de material  $x_i$  ( $i=1, \dots, nx$ ),  $nx=8$ , neles acumulado. Admitimos proporcionalidade entre os caudais mássicos  $u_i$ ,  $r_j$  e  $s_l$  respeitantes a um mesmo departamento, e consideramos os  $u_i$  ( $i=1, \dots, nu$ ),  $nu=7$ , variáveis de controlo. Atendendo à figura (2.1), por balanços de massa e substituição dos  $r_j$  e  $s_l$  em termos de  $u_i$  somos levados à equação de estado (2.1.1)

$$x(t) = B \cdot u(t) \quad , B_{8 \times 7} \quad (2.1.1)$$

sob as restrições de estado inicial dos depósitos,

$$x(0) = x^0 \quad (2.1.2)$$

das capacidades limite de produção dos departamentos,

$$u_{\min} \leq u(t) \leq u_{\max} \quad (2.2.1)$$

e das capacidades limite dos depósitos intermédios

$$x_{\min} \leq x(t) \leq x_{\max} \quad (2.2.2)$$

Os balanços energéticos, por seu lado, levam a uma relação entre a energia-vapor que é necessário produzir na caldeira auxiliar (S), os ritmos de produção dos vários departamentos (u) e a energia eléctrica comprada à EDP (EE):

$$S(t) = a_u^T \cdot u(t) + e \cdot EE(t) \quad (2.3)$$

ou, de outra forma,

$$a_E^T \cdot E(t) = a_u^T \cdot u(t) \quad (2.4)$$

onde

$$E(t) = [EE(t) \ S(t)]^T \quad (2.4.1)$$

Há ainda que atender às restrições energéticas

$$E_{\min} \leq E(t) \leq E_{\max} \quad (2.5)$$

Consideramos o período de planeamento dividido em N intervalos de estacionaridade,  $k=0, 1, \dots, N-1$ , de duração fixa  $T$ , o que dá lugar ao seguinte modelo de tempo discreto:

$$x_{k+1} = x_k + B \cdot u_k \quad (2.6.1)$$

$$a_E^T \cdot E_k = a_u^T \cdot u_k \quad (2.6.2)$$

sob

$$x_{\min k} \leq x_k \leq x_{\max k} \quad (2.7.1)$$

$$u_{\min k} \leq u_k \leq u_{\max k} \quad (2.7.2)$$

$$E_{\min k} \leq E_k \leq E_{\max k} \quad (2.7.3)$$

$$x_0 = x^0 \quad (2.7.4)$$

Pressupomos que a secção de energia é sempre capaz de fornecer a energia necessária, ou seja, que nenhuma sequência factível de ritmos de produção é inviabilizada pelas restrições (2.6.2) e (2.7.3).



**3. Princípios de planeamento a curto prazo**

A natureza dos processos em jogo faz com que haja baixa de eficiência e aumento de poluição durante transitórios, pelo que seria ideal manter tanto quanto possível os ritmos de produção constantes ou minimizar o número e velocidade das suas variações [8]. As paragens programadas para manutenção e as paragens acidentais impedem, no entanto, que a fábrica esteja permanentemente em regime de equilíbrio (regime permanente),  $dx/dt = 0$ .

O tamanho finito dos depósitos, traduzido na restrição  $x_{min_k} \leq x_k \leq x_{max_k}$ , impõe a necessidade de coordenação entre unidades produtivas.

Estabelecer um plano de produção é, dentro do nosso modelo, fixar os  $u$ ,  $EE$  e  $S$ . Os principais objectivos, para além do já enunciado e que é o mais importante, são [4]: maximizar a eficiência do centro de produção; agendar e preparar paragens obrigatórias e os respectivos arranques; cumprir a produção desejada de papel ultimado; otimizar o uso da energia; terminar um intervalo de planeamento num estado que facilite o planeamento seguinte.

A dificuldade do problema reside em que estes objectivos são em grande parte contraditórios. Por exemplo, após paragem, para corrigir um excessivo desvio no estado do sistema, podemos ser obrigados a variar fortemente os ritmos de produção. No seu conjunto, estes factores remetem para um prazo de planeamento de cerca de 2 a 5 dias, aliás de acordo com a prática fabril.

**4. Simulação**

A complexidade dos modernos centros de produção e a forte interdependência entre os diversos departamentos fabris dificultam a previsão do evoluir geral do centro em resposta a perturbações programadas nas suas variáveis de comando, sobretudo por operadores inexperientes [1], [2].

O programa de simulação elaborado com base no modelo matemático acima estabelecido será muito útil na formação de operadores por lhes permitir perspectivar de imediato a evolução de todo o centro como um todo integrado e dinâmico face à especificação de planos de produção numa forma interactiva e simples. Por outro lado, constituirá sempre um valioso auxiliar no apoio à decisão para uso quotidiano na planificação da produção, por exemplo como forma de modificação pontual de planos óptimos.

Para efeitos de visualização dos resultados, quer num terminal de vídeo quer num "plotter", é feito uso do sistema GKS (Graphical Kernel System).

São assim gerados os diagramas de fluxo, que incluem o desenho colorido de peças de equipamento, depósitos e respectivas ligações [12], podendo ser visualizada a dinâmica dos tanques de armazenamento e ritmos de produção, e gráficos referentes à dinâmica global do centro de produção (ver, p. ex., a figura 5.3)

**5. Apoio à decisão : Optimização**

O real valor do plano óptimo depende do critério de performance adoptado, que deve exprimir suficientemente bem os objectivos enunciados.

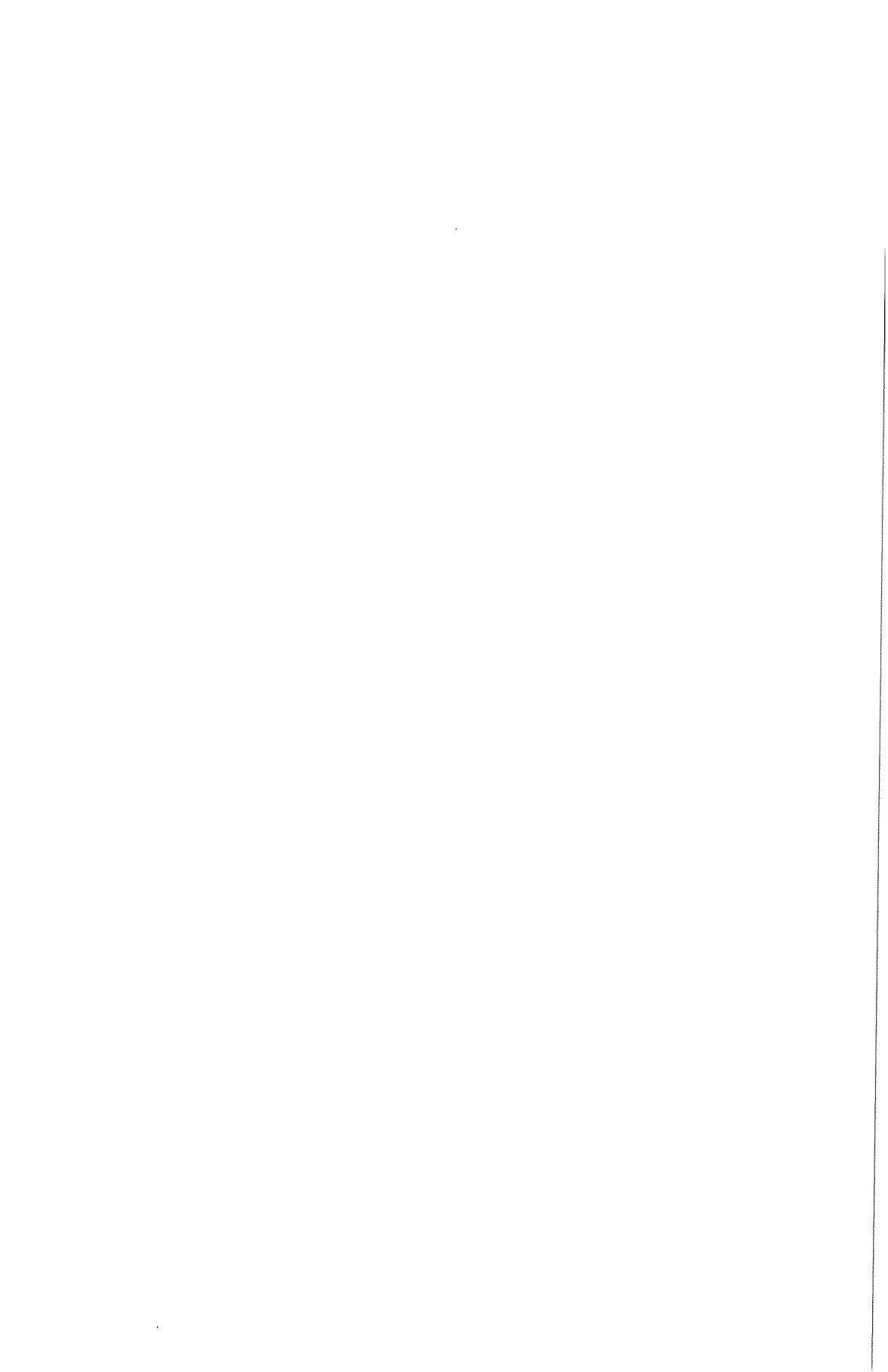
Por outro lado, deve ser minimizável com robustez e em tempo útil. Têm sido ensaiados com sucesso critérios quadráticos [5] [10] [11]. Aproveitamos esta experiência ao decidir usar (5.1.1).

**5.1 Características do método de Tamura a 3 níveis**

Pelo método de Tamura a 3 níveis, que expomos no apêndice A, minimizamos o critério (5.1.1) sob (2.6.1), (2.7.1), (2.7.2) e (2.7.4).

$$\begin{aligned}
 J = & \sum_{i=1}^{n_x} \left( \sum_{k=1}^{N-1} [ 1/2 q_{ij} (x_{ik} - x_{ref_{ik}})^2 ] + 1/2 h_{ij} (x_{iN} - x_{ref_{iN}})^2 \right) + \\
 & \sum_{i=1}^{n_u} \sum_{k=0}^{N-1} [ 1/2 r_{ij} (u_{ik} - u_{ref_{ik}})^2 ] + \sum_{i=1}^{n_x} \sum_{k=0}^{N-1} [ 1/2 s_{ij} (z_{ik} - z_{ref_{ik}})^2 ] \quad (5.1.1), \\
 & r_{ij} > 0, q_{ij} > 0, s_{ij} > 0, h_{ij} > 0 .
 \end{aligned}$$

As variáveis  $z_j$ , chamadas "de interacção", permitem-nos separar a equação de estados (2.6.1) em equações de subsistema (5.1.2) e (5.1.3).



Idealmente, ponderaríamos os termos em  $u$  e em  $x_N$ : seria então de esperar que os ritmos de produção se mantivessem tão constantes quanto as diversas restrições o permitissem, e terminaríamos o intervalo de planeamento num estado  $x_N$  conveniente. Na prática, dada a obrigatoriedade de todos os termos, pela natureza do método, ponderamos comparativamente pouco os termos em  $x_1, \dots, x_{N-1}$  (os níveis devem poder variar em relação aos respectivos valores de referência) e também pouco os termos de interacção em  $z_0, \dots, z_{N-1}$  (ponderadores segundo direcções irrelevantes dos ritmos de produção).

### 5.3 Pós-optimização da produção de energia

A minimização dos custos energéticos é deixada para uma fase posterior. Nessa fase, e numa primeira abordagem, procuramos,  $k$  a  $k$ , a distribuição entre queima de combustível na caldeira auxiliar e a compra de energia à EDP mais favorável. Concretamente, procuramos, pelo método do Simplex,

$$\min_{E_k} J_{e|k} \quad \text{sob} \quad (2.6.2) \text{ e } (2.7.3), \quad \text{dados os } u_k$$

onde

$$J_{e|k} = C_{E_k}^T \cdot E_k \quad (5.7)$$

O vector de coeficientes de custo  $C_{E_k}$ , referente à despesa global em que  $E_k$  importa (critério (5.7)) é indexado por prevermos flutuações do custo de energia da EDP ao longo do dia.

### 5.4 Um caso prático de planeamento a curto prazo

Consideramos um caso prático de paragem agendada de 16 horas na unidade produtiva nº 5 (de caustificação) com estado inicial  $x^{(0)}$  de 50% em todos os depósitos, estado final desejado  $x^{(N)} = x^{(0)}$  e produção de papel ultimado  $u_7$  especificada a 80% da capacidade ao longo de todo o período de planeamento de 3 dias. Tomamos como duração  $T$  de cada intervalo de estacionaridade 4 horas

Neste caso, como mostra a figura (5.1), de  $u = u_{ref}$  resulta violação de (2.7.1). Há então que coordenar conjuntamente a produção das diversas unidades de modo a evitar esta extravasão. A mencionada optimização do critério (5.1.1) realiza com eficácia este desiderato, como seguidamente veremos.

#### 5.4.1 Convergência dos processos de coordenação e predominância da ponderação sobre os ritmos de produção.

Ensaíamos, para coordenação aos 2º e 3º níveis, respectivamente os métodos de maximização de gradiente simples ("steepest ascent") e gradiente conjugado ("conjugate gradient") com os critérios de término das iterações

$$|\partial L / \partial \lambda_{jk}| < \text{erro3} = 0.5 \quad (3^\circ \text{ nível}) \quad (5.8.1)$$

$$|\partial L_i / \partial p_{jk}| < \text{erro2} = 0.01 \quad (2^\circ \text{ nível}) \quad (5.8.2)$$

Torna-se necessário um erro2 substancialmente baixo uma vez que a coordenação feita ao 3º nível supõe atingido, de facto, o máximo dos diversos lagrangeanos  $L_i$  em ordem aos  $p_i$  (ver apêndice A).

Obtemos aceleração da convergência de 2º nível guardando os respectivos multiplicadores de Lagrange de optimização em optimização de 2º nível.

Nas figuras (5.4) e (5.5) tentamos relacionar o passo de maximização do nível 3, passo3, com o número de iterações deste mesmo nível para, respectivamente, ( $r_{ij}=10$ ,  $s_{ij}=1$ ,  $q_{ij}=1$ ,  $h_{ij}=10$ ) e ( $r_{ij}=100$ ,  $s_{ij}=1$ ,  $q_{ij}=1$ ,  $h_{ij}=10$ ). O passo mais elevado que registamos é aquele acima do qual verificámos divergência. Pela proximidade a que o passo óptimo está deste valor, não seria de aconselhar o seu uso numa situação genérica.

Verificamos neste e noutros casos que quanto maiores os  $r_{ij}$ , mais lenta é a convergência da optimização.

#### 5.4.2 Correlação entre a predominância da ponderação sobre os ritmos de produção e a qualidade do plano obtido

Nas figuras (5.2) e (5.3) podem observar-se soluções óptimas para, respectivamente,

$r_{ij}=10$  e  $r_{ij}=100$  com as restantes ponderações sempre iguais ( $s_{ij}=1$ ,  $q_{ij}=1$ ,  $h_{ij}=10$ ). Observamos que:

- (i) A gama prescrita para os depósitos, 10-90% é sempre respeitada.
- (ii) Na fig. (5.2), os ritmos de produção variam muitas vezes nos departamentos 5 e 6, o que não é aconselhável, como referido.
- (iii) Na fig. (5.3), o número de variações significativas dos ritmos de produção  $u_5$  e  $u_6$  é muito baixo (quando muito duas variações). A variação de ritmo de produção em  $u_6$  é consequência da paragem de  $u_5$  e é a mínima variação necessária para que  $x_B$  se mantenha dentro da gama 10-90%, que é completamente explorada. Esta figura exprime uma boa coordenação entre unidades produtivas para o caso prático apresentado.

## 6. CONCLUSÃO

O sistema de apoio à gestão é ilustrativo das realidades do centro de produção da Portucel de Viana e é interactivo. Com um bom interface homem-máquina é adequado ao treino de operadores.

O centro de produção tem uma estrutura simples, destituída de linhas de produção alternativas. A solução que apresentamos para o problema de optimização, baseada num critério quadrático e num método de decomposição-hierarquização (método de Tamura a 3 níveis com interacção pelos controlos), é eficiente neste caso.

Face a futuros casos de centros de produção mais complexos, com linhas paralelas de produção, haverá provavelmente que repensar o problema de planeamento óptimo: a convergência torna-se mais difícil de obter, haverá possivelmente que considerar outros critérios de performance. Por outro lado, deverá ser robusta, de modo a poder ser usada por operadores fabris não especialistas em optimização.

## Agradecimentos

Este trabalho é financiado pela Portucel, EP e pela JNICT (protocolo nº 308.86.74/FCI). Aqui lhes deixamos expressos os nossos agradecimentos.

## Referências

- [1] Yorke G. L., The Utilization of a mill operations model for kraft mill operation. 70th Annual Meeting of CPPA, 1984.
- [2] Kirsch R., Using mill wide information system to improve efficiency and profitability. Tappi Journal, Junho, 1986.
- [3] Jansson E., A mill wide system for supervision and production control. Pulp and Paper Canada, vol. 82 nr. 1, 1981.
- [4] Uronen P., Production planning systems for integrated paper mills: tasks and methodology. Pulp and Paper Canada, vol. 82 nr. 3, 1981.
- [5] Leiviska K., P. Uronen., Dynamic optimization of a sulphate mill pulp line. IFAC/IFORS Symposium, Toulouse, France, 1979, pags. 25-32.
- [6] Ostrovsky G. M., M. Mikailova, T. A. Berezhinsky, Optimization of large-scale complex systems. Int. J. Systems. Sci., vol. 17, nr. 8, 1986.
- [7] Singh, M. G., A. Titli, Systems: decomposition, optimization and control. Pergamon Press, 1978.
- [8] Edlund, S.G., K.H. Rigerl, A computer based production control system for the coordination of operations in a pulp and paper mill. IFAC World Congress, Helsinki, 1978.
- [9] Geoffrion, A. M., Duality in nonlinear programming: a simplified applications-oriented development. SIAM Review, Vol. 13, No. 1, Janeiro de 1971.
- [10] Leiviska, K. Short term production scheduling of the pulp mill. Acta Polytechnica Scandinavica, Math. Comp. Sci. No. 36, Helsinki, 1982.
- [11] Ruiz, J., E. Muratore, A. Ayral, D. Durand, Optimill: Optimal Management of Pulp Mill Production Departments and Storage Tanks. Proceedings of the 6th International IFAC/IMEKO Conference, 1986.
- [12] Bernardino, J., J. Delgado, A. Dourado P. Correia, Interface Homem-Máquina Para Controlo de um Processo Industrial. Relatório interno. Dep. Eng. Electrotécnica da Universidade de Coimbra, Setembro de 1987.

**APENDICE A: DESENVOLVIMENTO DO MÉTODO DE TAMURA A 3 NÍVEIS COM INTERACÇÃO PELOS CONTROLOS**

Pretende-se minimizar o critério (5.1.1) sob as restrições dinâmicas (5.1.2) e (5.1.3), de interconecção (5.1.4), inicial (2.7.4) e de desigualdade (2.7.1) e (2.7.2) em ordem às variáveis de controlo  $u$ , problema que se designa *primal* [7],[9].

Para o efeito, associa-se no presente método multiplicadores de Lagrange  $p$  a (5.1.2) e (5.1.3) e  $\lambda$  a (5.1.4). Definindo, por conveniência de notação,

$$M_{ijk} = \begin{matrix} m_{ij} \cdot u_{jk} & , & i=1, \dots, nx & , & j=1, \dots, nu & , & k=0, \dots, N-1 \\ 0 & , & \text{noutros casos} \end{matrix}$$

e

$$U_{ik} = \begin{matrix} b_{ii} \cdot u_{ik} & , & i=1, nu & , & k=0, \dots, N-1 \\ 0 & , & \text{noutros casos} \end{matrix}$$

forma-se um lagrangeano global (A.1), agrupa-se os seus termos segundo o índice  $i$  de  $x, u, z$  (de subsistema) em (A.2), e ainda segundo os índices  $i$  e  $k$  (de subsistema e intervalo de estacionaridade) em (A.3),

$$L(x, u, z, p, \lambda) = J + \sum_{i=1}^{nx} \sum_{k=0}^{N-1} p_{ik} (-x_{ik+1} + x_{ik} + U_{ik} + z_{ik}) + \sum_{k=0}^{N-1} \lambda_{ik} (z_{ik} - \sum_{j=1}^{nu} m_{ij} u_{jk}) \tag{A.1}$$

$$L(x, u, z, p, \lambda) = \sum_{i=1}^{nx} L_i(x_i, u_i, z_i, p_i, \lambda) \tag{A.2}$$

$$L_i(x_i, u_i, z_i, p_i, \lambda) = \sum_{k=0}^N L_{ik}(x_{ik}, u_{ik}, z_{ik}, p_i, \lambda) \tag{A.3}$$

verificando-se

$$L_{ik} = \begin{matrix} H_{ik} & , & k=0 \\ H_{ik} - p_{ik-1} (x_{ik} - x_{ref_{ik}}) & , & k=1, 2, \dots, N-1 \\ 1/2 h_{ii} (x_{iN} - x_{ref_{iN}})^2 - p_{iN-1} x_{iN} & , & k=N \end{matrix} \tag{A.3.1}$$

onde

$$H_{ik} = 1/2 q_{ii} (x_{ik} - x_{ref_{ik}})^2 + 1/2 s_{ii} (z_{ik} - z_{ref_{ik}})^2 + 1/2 r_{ii} (u_{ik} - u_{ref_{ik}})^2 + \lambda_{ik} z_{ik} - \sum_{j=1}^{nu} \lambda_{jk} M_{jik} + p_{ik} (x_{ik} + U_{ik} + z_{ik}) \tag{A.3.2}$$

São semelhantes as soluções  $x, u, z$  do problema *primal* e do seguinte *dual* [7], [9]:

$$\begin{matrix} \max & \min & L \\ \lambda, p & x, u, z & \\ \text{sob (2.7.1) e (2.7.2)} \end{matrix} \tag{A.4}$$

O método de Tamura a 3 níveis, tirando partido da estrutura particular do lagrangeano, agrupa as operações de maximização e de minimização da seguinte forma:

$$\max_{\lambda} \sum_{i=1}^{nx} \max_{p_i} \sum_{k=0}^N \min_{x_{ik}, u_{ik}, z_{ik}} L_{ik} \tag{A.5}$$

sob (2.7.1) e (2.7.2)

Dados  $\lambda$  e  $p$ , da minimização em ordem a  $x_{ik}, u_{ik}$  e  $z_{ik}$  de  $L_{ik}$  sob (2.7.1) e (2.7.2), resulta

$$u_{ik}^* = \text{sat} \left( 1/r_{ii} \left( \sum_{j=0}^{nx} \lambda_{jk} m_{ji} - p_{ik} b_{ii} \right) + u_{ref_{ik}} \right), \quad i=1, \dots, nu$$

$$z_{ik}^* = 1/s_{ii} (-\lambda_{ik} - p_{ik}) + z_{ref_{ik}}, \quad i=1, \dots, nx$$

$$x_{ik}^* = \text{sat} (1/q_{ij} (p_{ik-1} - p_{ik}) + x_{ref_{ik}}, x_{\min_{ik}}, x_{\max_{ik}}), \quad i=1, \dots, nx \quad (\text{excepto para } k=0, \text{ em que } x \text{ é dado}) \quad (\text{A.6.1})$$

$$x_{iN}^* = \text{sat} (1/h_{ij} p_{iN-1} + x_{ref_{iN}}, x_{\min_{iN}}, x_{\max_{iN}}), \quad i=1, \dots, nx \quad (\text{A.6.2})$$

onde

$$\text{sat}(V, V_{\min}, V_{\max}) = \begin{matrix} V & , & V_{\min} \leq V \leq V_{\max} \\ V_{\max} & , & V > V_{\max} \\ V_{\min} & , & V < V_{\min} \end{matrix}$$

Resta o problema das maximizações em ordem aos  $p_i$  e a  $\lambda$ . Definindo

$$\min_{x_{ik}, u_{ik}, z_{ik}} L_{ik}(x_{ik}, u_{ik}, z_{ik}, p_i, \lambda) = L_{ik}^*(p_i, \lambda), \quad (\text{A.8.1})$$

sob (2.7.1) e (2.7.2)

$$\sum_{k=0}^N L_{ik}^*(p_i, \lambda) = L_i^*(p_i, \lambda), \quad (\text{A.8.2})$$

e ainda

$$\sum_{i=1}^{nx} \max_{p_i} L_i^*(p_i, \lambda) = L^*(\lambda), \quad (\text{A.8.3})$$

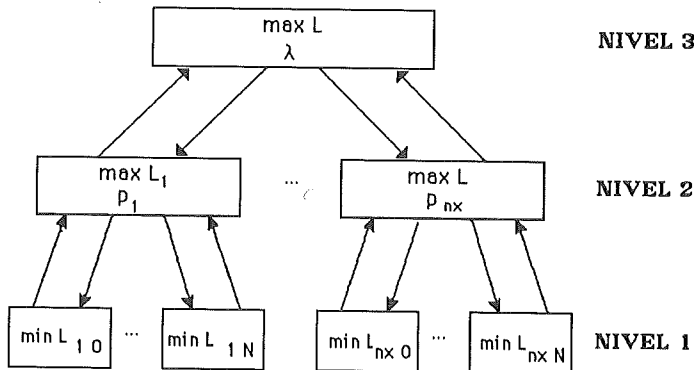
tem-se

$$\partial/\partial p_{ik} L_i^* = -x_{ik+1}^* + u_{ik}^* + x_{ik}^* + z_{ik}^* \quad (\text{A.9.1})$$

$$\partial/\partial \lambda_{jk} L^* = z_{jk}^* - \sum_{j=1}^{nu} m_{ij} u_{jk}^* \quad (\text{A.9.2})$$

As expressões (A.9) permitem efectuar as maximizações referidas em (A.5) segundo métodos de gradiente

Em resumo, obtém-se uma estrutura de cálculo hierárquico a 3 níveis em que as tarefas interactivam do seguinte modo:



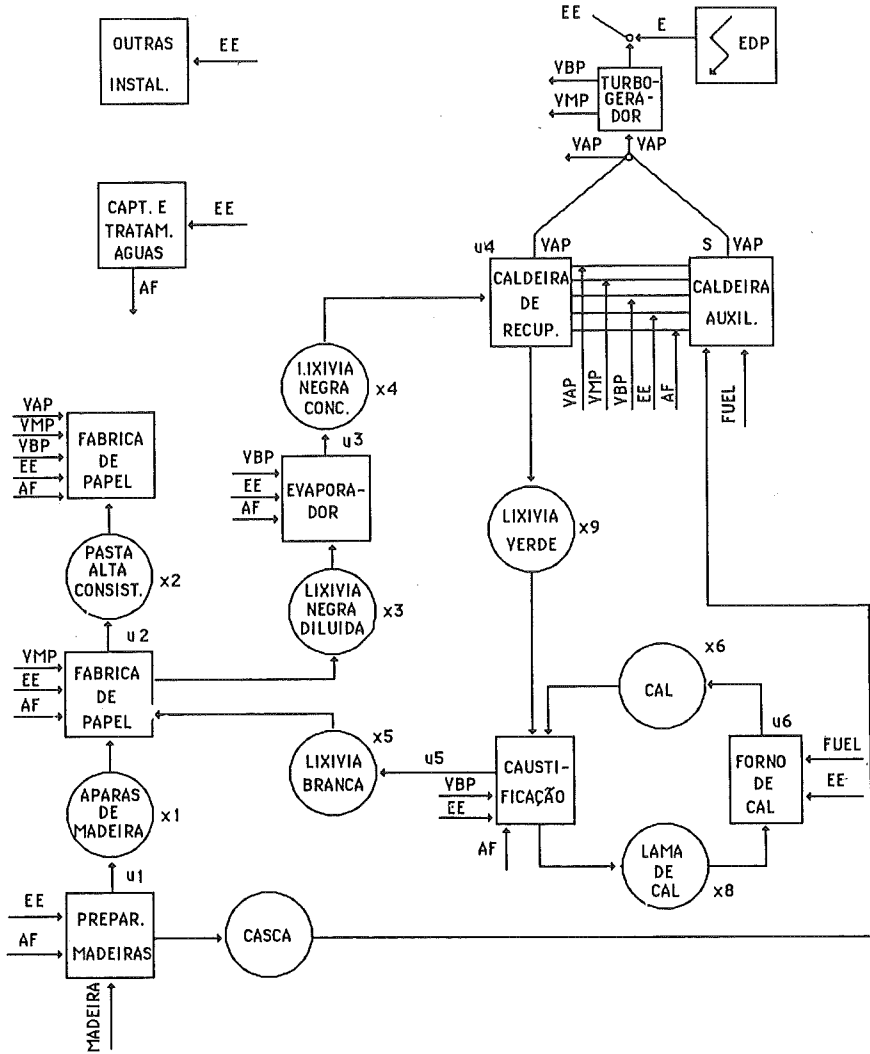


Fig. 2.1 - Representação esquemática do centro de produção de Viana do Castelo, mostrando os vários departamentos e depósitos de armazenagem. VAP, VMP, VBP - vapor de alta, média e baixa pressão; EE - energia eléctrica; AF - água filtrada.

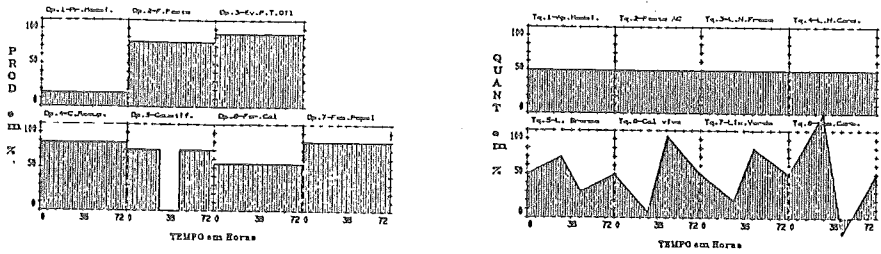


Fig. 5.1 - Caso em que, pela aplicação de  $u = u_{ref}$ , se verifica extravasão de  $x_8$ . Este caso exige, portanto, coordenação inter-unidades produtivas através da optimização do critério (5.1).  
 Figura da esquerda: regime de produção.  
 Figura da direita: trajectória dos níveis dos depósitos.

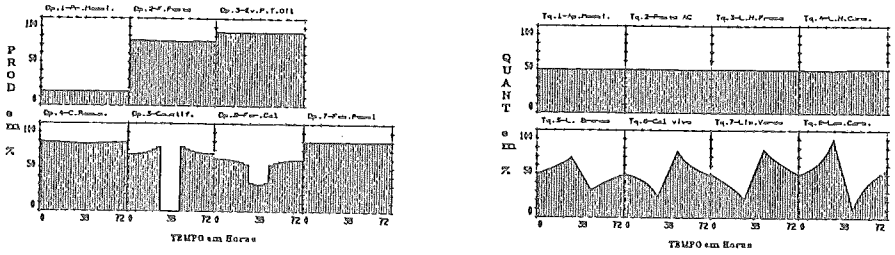


Fig. 5.2 - Solução óptima para  $r_{ij} = 10$ ,  $q_{ij} = 1$ ,  $s_{ij} = 1$  e  $h_{ij} = 10$ .  
 Figura da esquerda: regime óptimo de produção.  
 Fig da direita: trajectória óptima dos níveis dos depósitos.

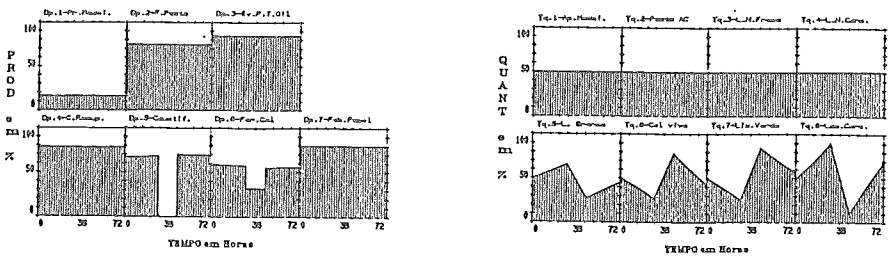


Fig. 5.3 - Solução óptima para  $r_{ij} = 100$ ,  $q_{ij} = 1$ ,  $s_{ij} = 1$  e  $h_{ij} = 10$ .  
 Figura da esquerda: regime óptimo de produção.  
 Fig da direita: trajectória óptima dos níveis dos depósitos.



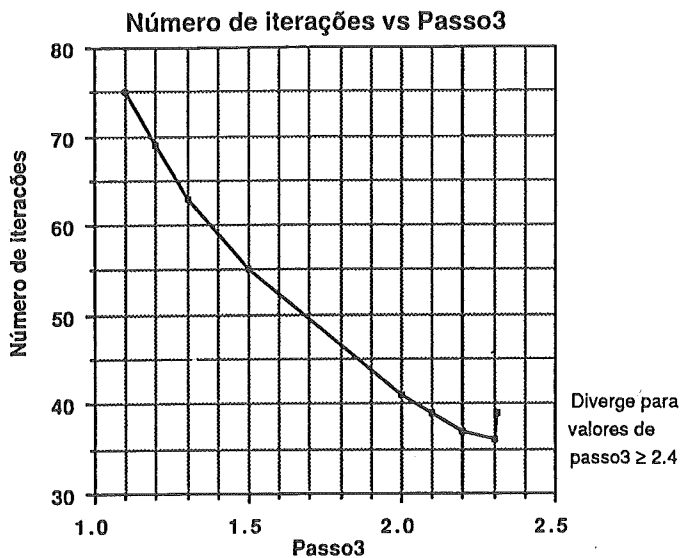


Figura 5.4

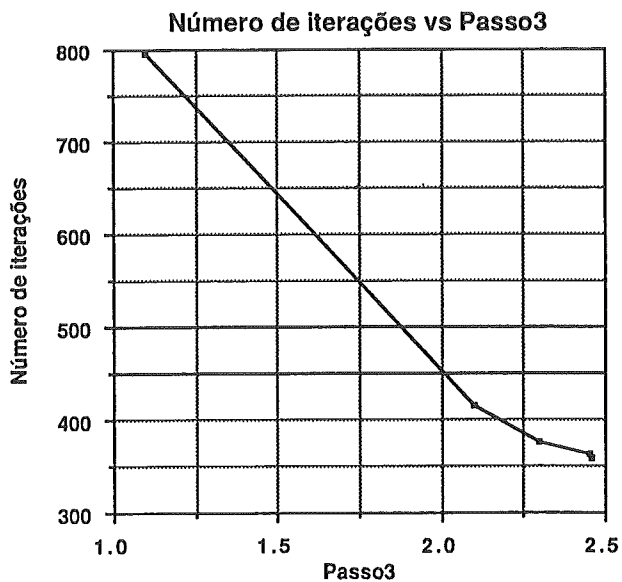
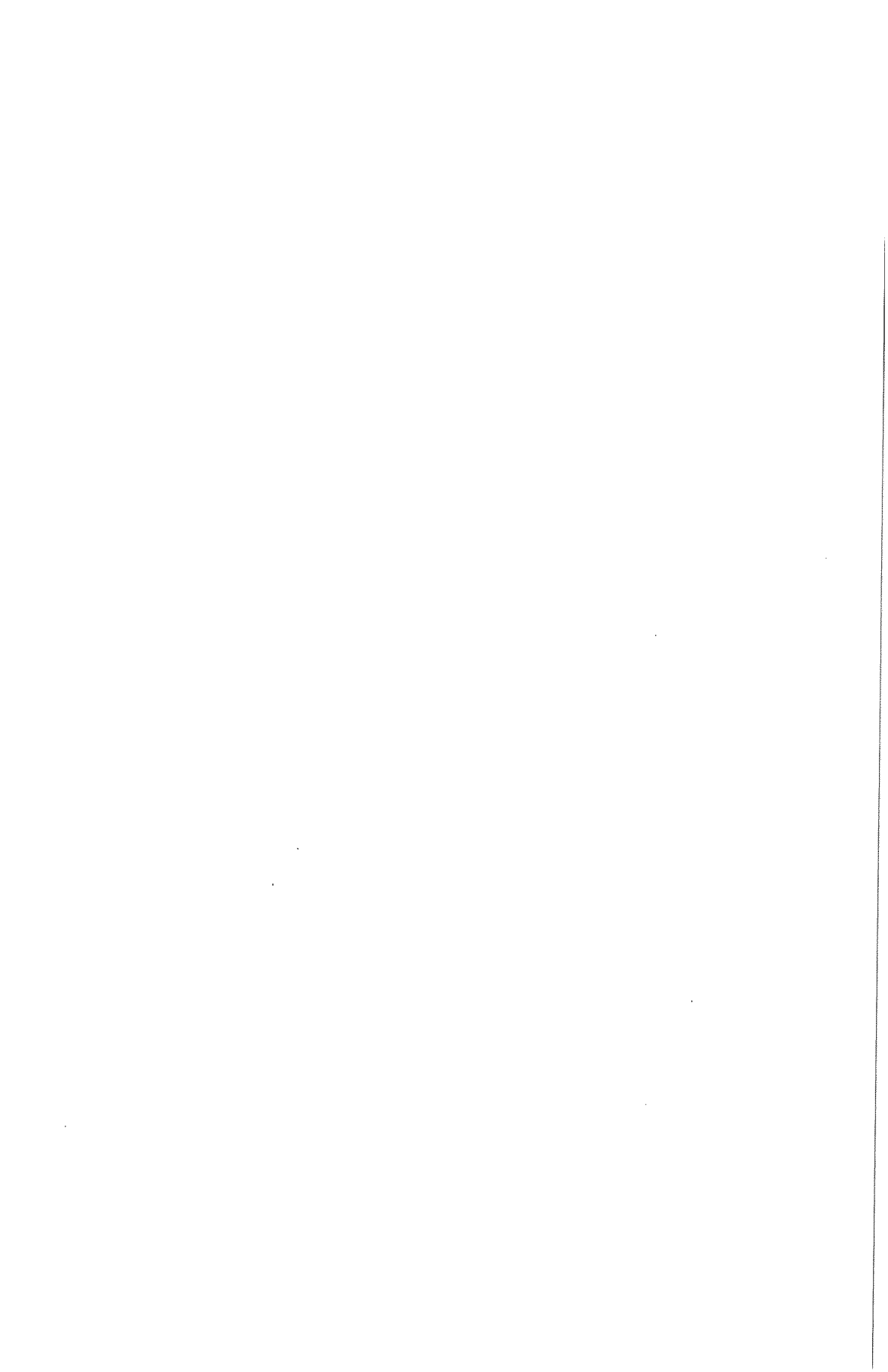


Figura 5.5

Figuras 5.4 e 5.5 : Relação entre o valor do passo3 e o número de iterações do nível 3 com coordenação por gradiente simples e critério de término  $|\partial L / \partial \lambda_{jk}| \leq 0.5$  para respectivamente  $(r_{ij}=10, q_{ij}=1, s_{ij}=1 \text{ e } h_{ij}=10)$  e  $(r_{ij}=100, q_{ij}=1, s_{ij}=1 \text{ e } h_{ij}=10)$ .



# DETERMINAÇÃO DE DIAGRAMAS DE CARGA IMPRECISOS ÚTEIS AO PLANEAMENTO DE ENERGIA ELÉCTRICA

Vladimiro Miranda  
Manuel A.C.C. Matos

Faculdade de Engenharia U.P.- D.E.E.C. / INESC (norte)  
Rua dos Bragas / Largo de Mompilher 4000 PORTO  
Tel. 351 2 321006 / Telex 23023 INESC P / Fax 351 2 318692

## Resumo

Nesta comunicação apresentam-se e propõem-se os fundamentos de uma metodologia para classificar diagramas de carga relativos a consumos de energia eléctrica, com base em técnicas de obtenção de agrupamentos imprecisos. Definidos os protótipos de cada agrupamento e as funções de pertença de cada item da amostra ensaiada, constroem-se diagramas de carga imprecisos, representativos de cada tipo de consumo, tendo associada a cada nível de carga uma distribuição de possibilidade. Finalmente, indica-se como é possível efectuar-se a agregação de diagramas imprecisos para representar uma carga de natureza mista num estudo de planeamento.

## Abstract

In this paper the foundations of a new load diagram classification procedure are presented, based on fuzzy clustering techniques. Having obtained the prototypes or centers of each cluster and derived the membership functions of every item in the load sample to each cluster, fuzzy load diagrams related to each type of consumption are built with a possibility distribution associated to load level. These fuzzy load curves are then lumped up in order to represent a mixed type load for system planning purposes.

**Keywords:** power systems, load curves, fuzzy sets, fuzzy clustering, distribution system planning.

## 1. Introdução

É antiga a pretensão de classificar os diagramas de carga de um Sistema Eléctrico de Energia de acordo com a forma da curva representativa dos consumos de potência ao longo do tempo. O diagrama de um consumidor ou de um grupo de consumidores apresenta características variáveis que dependem, em primeiro lugar, da própria natureza dos consumos mas que também sofrem alterações com o dia da semana, com a época do ano ou com a actividade económica, para mencionar apenas alguns factores.

Variadas técnicas têm sido propostas e adoptadas para classificar diagramas de carga. Pesem embora os méritos relativos de cada uma, algumas críticas genéricas poderão ser adiantadas.

Em primeiro lugar, não é do nosso conhecimento que se tenha ido mais além do que procurar obter partições estritas do conjunto dos diagramas (para os dividir em categorias), eventualmente com tomada em consideração de erros de classificação. Esta

abordagem ignorou o facto de se estar perante um contexto de categorias vagamente definidas: neste tipo de situações, tanto "a pertença de um objecto a uma classe" como "um certo número de objectos formar um agrupamento ou um padrão" é uma questão de grau, de qualidade.

Por outro lado, na tentativa de "capturar" a variabilidade das curvas de carga em cada categoria, são por vezes adoptados modelos estocásticos ou probabilísticos das mesmas. A incerteza que rodeia a questão da tipificação dos diagramas é, porém, de uma natureza distinta da que está associada aos fenómenos aleatórios, em que o elemento motor é o acaso - pelo contrário, uma forte dose de incerteza resulta da natureza vaga, imprecisa do problema de definição do que é um uso característico da energia eléctrica.

Esta comunicação tem por objectivo propor uma nova metodologia de abordagem do problema da tipificação das curvas de carga, inspirada nos conceitos e axiomática dos conjuntos imprecisos (fuzzy sets) concebidos por Zadeh. A apresentação é dado um carácter operacional, isto é, descrevem-se os passos a dar para a obtenção de resultados importantes para determinados processos de decisão, no caso presente relacionados com o planeamento de sistemas eléctricos de energia.

Muita gente partilha ainda a ilusão de que o conceito de "imprecisão" aparece como substituto da incerteza estatística ou que, com uma interpretação adequada, se pode reduzir a esta. Nenhuma destas ideias é correcta. A informação associada a um modelo impreciso é de natureza diferente da de um modelo estocástico: o que se pode extrair de um modelo estatístico pode ser intuitivamente incompatível com a informação que se desejaria usar num processo de decisão. Por exemplo, a afirmação de que dado consumo é aproximadamente de tipo industrial é rica de significado e é positiva em relação a um resultado adquirido e estabelecido; um modelo probabilístico introduziria o aleatório onde ele não existe nem o desejamos e não permitiria fazer afirmações categóricas em relação a uma situação particular (ao falar, por exemplo, numa probabilidade de 0,95 de que o diagrama esteja contido dentro de uma faixa representativa dos diagramas industriais, ligamo-nos irremediavelmente ao acaso e corremos o risco de que, naquele caso particular, tal não se verifique...).

## 2. Alguns conceitos básicos

Sem excessiva pormenorização de rigor e com o intuito de clarificar a exposição, recordamos seguidamente alguns conceitos e vocabulário fundamentais.

O conceito de *imprecisão* encontra-se matematicamente associado, tal como o concebeu Zadeh (1965), ao de *pertença* de um elemento a um conjunto. Para um conjunto  $A$  tradicional, dito *estrito* ou *rígido* (*hard set* em inglês), tal que  $X \supset A$ , é possível definir-lhe uma função característica ou de pertença  $u_A: X \rightarrow \{0,1\}$  tal que

$$u_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

Este conceito é ampliado ao definir-se um subconjunto impreciso  $B$  de  $X$  como uma função de pertença  $u_B: X \rightarrow [0,1]$ . Abandona-se deste modo a lógica bivalente discreta por uma lógica contínua em  $[0,1]$ , identificando-se deste modo  $u_B(x)$  com o grau de pertença de  $x$  a  $B$ .

Obtém-se uma partição- $c$  estrita ou rígida (*hard c-partition*) de  $X$  ao definir um conjunto de  $c$  subconjuntos de  $X$ , estritamente incluídos nele e mutuamente exclusivos, cuja união seja o próprio  $X$ . Tomando como ponto de partida  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ , a tentativa de determinar um inteiro  $c$  e uma partição- $c$  estrita de  $X$  exibindo subconjuntos de características homogéneas será designada como um problema de *agrupamento estrito* (*hard clustering*). O problema de encontrar a "melhor" (num certo sentido) partição é combinatório, dada a imposição de integralidade às funções de pertença e ao número de agrupamentos  $c$  a determinar.

Se os  $c$  subconjuntos de  $X$  forem imprecisos (definidos através de  $c$  funções de pertença), estamos perante uma *partição- $c$  imprecisa* (*fuzzy  $c$ -partition*) de  $X$ , e a tentativa de os determinar receberá o nome de *agrupamento impreciso* (*fuzzy clustering*). Neste caso, a cada elemento  $x$  de  $X$  estará associado um vector de reais compreendidos entre 0 e 1 indicando o grau de pertença de  $x$  a cada subconjunto impreciso. Esta relaxação da condição de integralidade imposta às funções de pertença liberta o problema do colete de forças combinatório, permitindo a adopção de outras abordagens algorítmicas.

### 3. Agrupamento impreciso de diagramas de carga

#### 3.1. Passo 0: decisões prévias

A metodologia que a seguir se descreve foi concebida para aplicação ao planeamento da distribuição de energia eléctrica, pelo que o primeiro passo necessário é, obviamente, a colheita de um número abundante e variado de curvas de carga. Tal processo está condicionado à definição prévia do tipo de diagrama que se pretende analisar - sem perda de generalidade, admitamos que se trata do diagrama diário de consumo de potência activa. Igualmente importa ter em consideração o tipo de discretização que se pretende obter: se se escolher uma representação das curvas de carga em degraus horários, ter-se-á cada diagrama definido por 24 pontos. Alternativamente, se o problema da dimensão for crítico para a exequibilidade do cálculo, poder-se-á reter um menor número de degraus do período diurno e calcular, também, o valor da potência média das horas nocturnas.

#### 3.2. Passo 1: normalização e representação

Dado um conjunto de diagramas de carga discretizados, procede-se à sua normalização dividindo-se cada nível de carga pelo valor da área sob a curva (correspondente à energia consumida). Este procedimento permite dar mais ênfase à forma dos diagramas: note-se que a ponta do diagrama normalizado representa, numa certa escala, o inverso do factor de carga, ou seja, o quociente entre o valor médio e o valor máximo do diagrama. (alternativamente, poderia dividir-se os diagramas pela respectiva potência média, obtendo-se uma representação em p.u.; o processo escolhido visa apenas facilitar a operacionalidade de passos posteriores da método). Por outro lado, a relação entre a ponta de potência e a energia foi motivo de preocupação em diversas metodologias que procuraram modelizar os trânsitos de potência num sistema eléctrico a partir do conhecimento dos consumos de energia. Outras vantagens desaparecerão mais tarde.

Dada a normalização efectuada, a soma dos valores dos degraus de cada curva normalizada é constante, pelo que se pode omitir, sem perda de informação, o valor de um deles (por exemplo, o que corresponda à menor variância). Um diagrama de cargas será então representado por um ponto  $x$  num espaço de  $n$  dimensões  $\mathbb{R}^n$ , sendo  $n$  igual ao número de degraus em que a curva foi discretizada menos um.

#### 3.3. Passo 2: agrupamento impreciso

Para a aglomeração dos pontos em agrupamentos imprecisos, propomos o algoritmo de Bezdek (1981), que se baseia num critério da família dos métodos de mínimos quadrados. Uma das características desta metodologia é que produz como resultados não só os valores das funções de pertença de cada ponto a cada agrupamento mas também as coordenadas do centroide (ou protótipo) de cada agrupamento, o qual pode em certo sentido ser tomado como um ponto representativo das características mais "puras" do respectivo grupo.

Se considerarmos uma partição- $c$  imprecisa do conjunto  $D$  de  $p$  diagramas e designarmos por  $v_i$  o protótipo do aglomerado  $i$  ( $1 \leq i \leq c$ ), podemos definir uma medida de "semelhança" entre um ponto  $x_k \in D$  e o protótipo  $v_i$  através de

$$(d_{ik})^2 = \langle x_k - v_i, x_k - v_i \rangle_A = (x_k - v_i)^T A (x_k - v_i)$$

correspondendo a matriz definida positiva  $A$  à fixação de uma norma para o espaço  $\mathbb{R}^n$ . Como é sabido, se  $A$  for a matriz identidade obtém-se a norma euclidiana.

O critério de agrupamento corresponde à minimização da seguinte função objectivo:

$$\min J_m(\mathbf{U}, \mathbf{v}) = \sum_{k=1}^p \sum_{i=1}^c (u_{ik})^m (d_{ik})^2$$

em que  $\mathbf{U}$  é uma partição- $c$  imprecisa de  $\mathbf{D}$ , definida pelas funções de pertença  $u_{ik}$  de cada ponto  $k$  ao aglomerado  $i$ , e  $m$  é um coeficiente de peso tal que  $m \in ]1, \infty[$ .

Como se vê,  $J_m$  é mais precisamente uma família infinita de objectivos parametrizados por  $c$ ,  $m$  e  $A$ . Na resolução algorítmica, outros parâmetros são de ter em conta, como seja uma hipótese de partição inicial  $\mathbf{U}^0$  e uma tolerância  $\epsilon$ .

A escolha do número adequado  $c$  de diagramas típicos a identificar deverá ser guiada por critérios de validação diversos (coeficiente de partição, entropia da classificação, coeficientes de separação ou outros - não existe nenhum critério absoluto de aferição da qualidade dos agrupamentos determinados por um qualquer processo algorítmico, ver Bezdek) e temperada pelo bom senso e pela experiência de planeamento energético.

Do valor do coeficiente  $m$  dependerá o carácter mais ou menos impreciso da relação de pertença de cada ponto aos diversos agrupamentos; valores de  $m$  próximos de 1 originam soluções mais rígidas, ou seja, tendem a atribuir cada ponto mais declaradamente a um agrupamento, enquanto que para  $m \rightarrow \infty$  se verifica que  $u_{ik} \rightarrow 1/c$ ,  $\forall i, k$ , não havendo discriminação alguma.

A escolha da norma através da fixação de uma matriz definida positiva  $A$  é igualmente importante. Como as bolas são hipersféricas na métrica euclidiana, os algoritmos tenderão a atribuir valores de pertença iguais a pontos que sejam radialmente simétricos com respeito ao centroide de cada agrupamento; dito de outro modo, os algoritmos tentarão dar preferência, descobrir ou "forçar" a existência de agrupamentos "circulares". Para compensar tal tendência, terão de ser ensaiadas outras normas, para além da euclidiana, entre as quais são importantes a norma diagonal (em que  $A$  é uma matriz diagonal inversa da matriz que contém as variâncias amostrais nas  $n$  dimensões do espaço dos diagramas) e a norma de Mahalanobis (em que  $A$  é a inversa da matriz de covariâncias da amostra de diagramas, para as  $n$  dimensões de  $\mathbb{R}^n$ ).

Em alternativa à fixação prévia de uma norma, poderá seguir-se o algoritmo de Gustafson e Kessel (1979, citado por Bezdek), aparentado com o de Bezdek e que procura adaptar a cada agrupamento uma norma adequada à sua forma geométrica. Como inconveniente deste algoritmo pode apontar-se-lhe o ser computacionalmente muito mais pesado do que o anteriormente citado.

Como resultado da aplicação dos algoritmos e variantes citados, obter-se-á finalmente uma definição de um conjunto de  $c$  agrupamentos, representados pelos respectivos protótipos, e uma discriminação, para cada diagrama, dos seus graus de pertença a cada agrupamento.

Este resultado, só por si, é importante, pois pode ser utilizado não só para os fins descritos nos parágrafos seguintes, mas também para a classificação de outros diagramas. Partindo da hipótese que a introdução de mais um diagrama não alterará de forma significativa o arranjo dos agrupamentos imprecisos, é possível determinar os valores das funções de pertença a cada agrupamento desse novo diagrama e assim afirmar, num certo sentido que, por exemplo, se caracteriza por ser "60% doméstico, 30% industrial e 10 % comercial".

Note-se, de novo, que não há qualquer significado probabilístico ou estocástico associado aos valores indicados, que apenas reflectem que a classificação não é (por não poder ser) categórica em nenhuma das três categorias consideradas.

### 3.4. Passo 3: construção de distribuições de possibilidade

Embora, para alguns efeitos, se pudesse ficar satisfeito com a representação de cada classe de consumos por um diagrama típico, simbolizado pelo respectivo protótipo, o certo é que tal atitude significaria extrair uma informação demasiado pobre do conjunto de elementos disponíveis. Por outro lado, representar uma classe por um único diagrama seria esquecer a natureza intrinsecamente qualitativa da questão: a frase "diagrama de cargas de um consumo do tipo industrial" é, por si só, reveladora do carácter vago (propositadamente vago e todavia não ambíguo) da descrição que oferece. Iremos, pois propor uma nova descrição (imprecisa) de classe de consumos. Para isso, começamos por definir *conjunto de nível  $\alpha$*  ou *núcleo  $\alpha$*  de um subconjunto impreciso  $u_i$  de  $X$  como o conjunto rígido  $C(u_i, \alpha)$  derivado de  $u_i$  para cada  $\alpha \in [0, 1]$  tal que

$$C(u_i, \alpha) = \{x \in X \mid u_i(x) > \alpha\}.$$

Regressando ao problema dos diagramas de carga, serão então determinados os núcleos dos agrupamentos obtidos, para dois níveis  $\alpha > \beta > 0,5$ . Os diagramas pertencentes ao núcleo  $\alpha$  (por exemplo, de valor igual a 0,9) serão considerados como sendo representações "puras" igualmente válidas da classe em que se incluem; os diagramas excluídos do núcleo  $\beta$  (com valor, por exemplo, igual a 0,85) serão interpretados como categoricamente não podendo representar a classe de consumos em consideração. Para aqueles cuja função de pertença esteja entre  $\alpha$  e  $\beta$  será admitida a possibilidade de representarem ocasionalmente a classe, mas não com o mesmo grau de possibilidade que os do nível  $\alpha$ .

Uma vez determinados os núcleos, procurar-se-ão os respectivos valores mínimo e máximo dos diagramas em cada uma das  $n$  dimensões, ou seja, determinar-se-á a amplitude da variação possível para cada degrau do diagrama de cargas. Sejam, então, definidos os seguintes limiares

$d_k^{\min(\alpha)}$  - valor mínimo encontrado nos diagramas do núcleo  $\alpha$  para a dimensão  $k$

$d_k^{\max(\alpha)}$  - valor máximo encontrado nos diagramas do núcleo  $\alpha$  para a dimensão  $k$

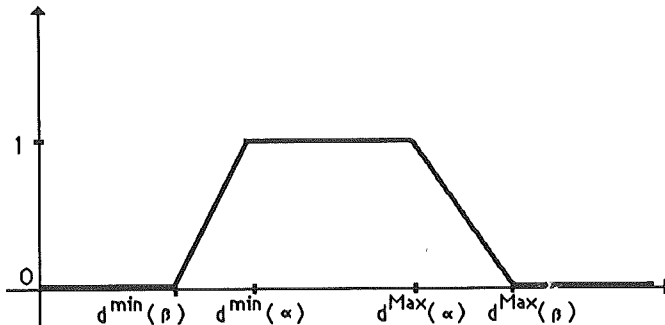


FIGURA 1 - Distribuição de possibilidade trapezoidal

Este cálculo permitirá a construção de uma distribuição de possibilidade trapezoidal  $Poss[d_k]$ , cuja forma geral se encontra exemplificada na figura 1, tal que obedece à seguinte descrição:

$$\begin{aligned}
 & 0 && \text{para } d_k < d_k^{\min(\beta)} \\
 & \frac{d_k - d_k^{\min(\beta)}}{d_k^{\min(\alpha)} - d_k^{\min(\beta)}} && \text{para } d_k^{\min(\beta)} < d_k < d_k^{\min(\alpha)} \\
 Poss[d_k] = & 1 && \text{para } d_k^{\min(\alpha)} < d_k < d_k^{\max(\alpha)} \\
 & \frac{d_k^{\max(\beta)} - d_k}{d_k^{\max(\beta)} - d_k^{\max(\alpha)}} && \text{para } d_k^{\max(\alpha)} < d_k < d_k^{\max(\beta)} \\
 & 0 && \text{para } d_k^{\max(\alpha)} < d_k
 \end{aligned}$$

Obtém-se com este procedimento a tipificação dos diagramas de carga de uma forma imprecisa, com indicação, para cada intervalo de tempo, da distribuição da possibilidade de ocorrência de valores de potência - graficamente, tal corresponde de certo modo a representar um diagrama típico por uma "mancha", densa em volta do diagrama identificado com o protótipo e progressivamente mais esbatida à medida que os valores dele se afastam. É óbvio que nem todos os diagramas possíveis de ser considerados dentro da tal "mancha" são válidos, pois as correlações entre os níveis de carga atingidos em diversas horas do dia não são nulas e as ocorrências estão sujeitas à condição de que a energia total consumida seja idêntica para qualquer delas.

### 3.5. Passo 4: definição de diagramas de carga a partir de previsões macro-económicas de consumos de energia

Neste passo do processo pressupõe-se a existência de um modelo auxiliar macro-económico que fornecerá indicações sobre projecções do consumo de energia eléctrica numa determinada área ou território, sujeito a estudos de planeamento da distribuição de energia eléctrica. Estas indicações deverão revestir a forma de previsões de consumo de energia por actividade, de tal forma que sejam identificadas essas actividades com os tipos de diagramas apurados no processo classificativo de agrupamento - eis a razão por que anteriormente se mencionou que a escolha do número  $c$  de diagramas típicos deveria ser temperada pela experiência de planeamento energético.

A influência de cada actividade no diagrama de cargas da região em análise pode ser obtida directamente multiplicando o respectivo diagrama impreciso típico pela energia consumida prevista. Constroi-se, assim, uma curva de carga associada a uma distribuição de possibilidade. Deste modo, a afirmação de que "o consumo industrial deverá aumentar para  $x$  MWh" ficará acompanhada por uma descrição da possibilidade de organização do respectivo diagrama de cargas, obtendo-se uma indicação matematicamente imprecisa, mas clara e não ambígua, quanto à gama dos valores de potência que em cada hora é possível esperar que ocorram.

### 3.6. Passo 5: agregação de diagramas num cenário de consumo misto

Como é de esperar, as cargas de uma subestação ou de linhas de 60 ou 15 kV, ou mesmo de muitos postos de transformação, não correspondem a energia e potência consumidas por actividades "puras". Quando se pretende, de alguma forma, exprimir a forma ou andamento geral de tais curvas de carga, há que agregar actividades diferentes.



A agregação simples pode efectuar-se, como é evidente, pela soma dos protótipos representativos de cada actividade, pesada pelas respectivas energias. Tal processo é, porém, rudimentar, pois um diagrama impreciso típico, tal como definido anteriormente, está associado a uma distribuição de possibilidade. Ao contrário dos modelos estocásticos, em que as distribuições de probabilidade têm que ser submetidas a operações de convolução que não se revelam simples de efectuar, a agregação de distribuições de possibilidade pode ser efectuada com recurso a operadores mais simples. No caso presente, utilizar-se-á o operador Maxmin, que permite a definição da possibilidade de um dado valor  $a$ , Poss[ $a$ ], como sendo

$$\text{Poss}[a] = \text{Max} \{ \min \{ \text{Poss}[a_1]; \text{Poss}[a_2] \} \mid a_1 + a_2 = a \}$$

Este operador é aplicável directamente sobre cada degrau de cada diagrama impreciso resultante do passo anterior (valores  $a_1$  e  $a_2$ ) para se obter a valor de possibilidade do degrau do diagrama de cargas correspondente à soma dos dois. Com este procedimento, é fácil de verificar que a forma da distribuição de possibilidade resultante da agregação de duas distribuições trapezoidais é ainda trapezoidal, pelo que a agregação sucessiva de diagramas típicos imprecisos é trivial e resulta ainda numa distribuição trapezoidal.

#### 4. Conclusões

Acreditamos que esta comunicação traz consigo duas contribuições importantes, merecedoras de reflexão.

Em primeiro lugar e acima de tudo, propõe um corte com processos tradicionais de definir o que é um diagrama de cargas típico. Visto que este conceito é intrinsecamente qualitativo, a sua apreciação é feita de modo eficiente pelos seres humanos, devido à sua maestria no domínio do reconhecimento de padrões e formas. Os modelos probabilísticos nunca puderam realmente capturar a essência da tipificação, e provavelmente aumentaram em certa medida a confusão ao introduzirem o aleatório no lugar da variedade. O conceito de imprecisão, tal como acima exposto, vem contribuir para repor as coisas no seu lugar.

Em segundo lugar, a metodologia descrita tem um carácter operacional que lhe permite ser reproduzida e adoptada sem dificuldade. Com a modelização descrita, é possível não só classificar diagramas de carga como também agregar consumos correspondentes a actividades diferentes, obtendo-se uma expressão qualitativa do diagrama resultante. Está assim um pouco mais aberta a porta para a utilização de técnicas de computação simbólica na área científica que lida com o planeamento de sistemas eléctricos de energia.

O procedimento abordado nesta comunicação, devido às suas características, poderá proporcionar uma sólida e eficiente base de trabalho por si só, na previsão dos diagramas de carga que poderão ocorrer em dado território, devido ao incremento dos consumos; porém, acreditamos que a sua utilidade será extremamente potenciada quando a utilização de diagramas imprecisos for incorporada num sistema interactivo de auxílio ao planeamento dos sistemas de energia, nomeadamente da distribuição.

#### Nota final

Esta comunicação resulta de trabalhos desenvolvidos no âmbito do contrato de investigação 69/85/86 financiado pela Universidade do Porto.

#### Referências

1. Zadeh, L.A., Fuzzy Sets, Inf. Control, Vol. 8 (1965), pag. 338-353
2. Bezdek, J.C., Pattern Recognition with Fuzzy Objective Function Algorithms, 1981, Plenum Press, New York



## UM MODELO PARA PLANEAMENTO INTERACTIVO DE REDES TELEFÓNICAS RURAIS

Carlos H. Antunes\*, João N. Clímaco\*, Paulo N. Nordeste\*\*, José B. Diogo\*\*, José F. Craveirinha\*

\*Departamento de Eng<sup>a</sup> Electrónica  
Universidade de Coimbra, 3000 COIMBRA  
\*\*Centro de Estudos de Telecomunicações (CTT)  
Sítio das Palhas, 3800 AVEIRO

### Resumo

Este trabalho apresenta um modelo interactivo, baseado em microcomputador, para apoio ao planeamento de redes telefónicas rurais, que foi desenvolvido no âmbito da colaboração entre o D.E.E.U.C. (Universidade de Coimbra) e o C.E.T. (CTT). O modelo utiliza um algoritmo heurístico simples e pelas suas potencialidades interactivas e gráficas é particularmente indicado para planeamento descentralizado onde se procura tirar o máximo proveito da experiência do agente da decisão. A principal inovação do modelo consistiu em associar a filosofia "what you see is what you get" com um algoritmo simples que permitiu a construção de um editor de rede flexível, onde se teve em conta a prática dos utilizadores (planeadores locais). Uma motivação central deste trabalho foi o desenvolvimento de um editor de rede com estas características que veio a permitir o teste de sistemas mais sofisticados de apoio ao planeamento de redes telefónicas locais (ver [15]).

### Abstract

This paper presents an interactive model for rural telephone network planning based on microcomputer, which was developed under a contract of cooperation between the Department of Electrical Engineering Science (University of Coimbra) and the Centre of Telecommunication Studies (Portuguese Telecom). The model is based on a simple heuristic algorithm and its interactive and graphical capabilities make it particularly adequate for decentralized planning where we try to make the most of the decision maker's experience.

The inovative feature of the model is the association of the philosophy "what you see is what you get" with a simple algorithm, which enabled to construct a flexible network editor where we took into account the experience of the local planner. A main objective of this work was the development of a network editor with those features, which is enabling to test more sophisticated support systems for local telephone network planning (see [15]).

**keywords:** Interactive decision support systems, heuristics, local telephone network planning.

### 1. Introdução. Planeamento de Redes Telefónicas em Geral e Redes Rurais.

Uma rede telefónica em geral pode ser representada por uma colecção de nodos, normalmente com diferentes objectivos funcionais, alguns dos quais (ou todos) são ligados por arcos de comunicação.

Os nodos podem representar centros de procura de serviço ou estações de trânsito. Os centros de procura de serviço correspondem a diferentes níveis de agregação dos assinantes desde o nível mais baixo do simples assinante a níveis sucessivamente mais elevados tais como pontos de distribuição, servindo directamente grupos locais de assinantes, pontos de flexibilização e concentradores, correspondendo à procura associada a diferentes grupos de assinantes de uma dada zona e estações locais, servindo todos os assinantes da sua área. As estações de trânsito realizam uma função dita de comutação, que permite interligar de acordo com certas regras e restrições circuitos incluídos em arcos adjacentes de forma a permitir uma ligação entre o nó-origem e o nó-destino. De notar que as funções de agregação de procura e de comutação podem estar sobrepostas no mesmo nodo (é o caso por exemplo da estação local que é um centro de agregação de procura para a rede inter-estações e ao mesmo tempo um centro de comutação para os assinantes da sua área de serviço).

Os arcos representam por seu lado meios de comunicação para o tráfego oferecido, com uma capacidade limitada (definida pelo número de circuitos) e suportados fisicamente por sistemas de transmissão tais como pares de fios, cabos coaxiais, fibras ópticas, sistemas de micro-ondas, de rádio móvel ou de transmissão por satélite. De notar que o termo circuito é aqui tomado no seu sentido genérico, correspondendo a uma unidade de capacidade de arco definida como equivalente a um canal vocal.

Os mais importantes tipos de informação envolvidos em qualquer problema de planeamento de redes telefónicas são: a especificação dos princípios de encaminhamento (i.e. as regras que definem o conjunto de caminhos possíveis para transmissão de chamadas/dados de um nodo para outro) e a caracterização funcional dos nodos; localização e capacidade das estações; áreas de serviço dos centros de comutação e dos centros de procura; topologia da rede, capacidade dos arcos e capacidade dos sistemas de transmissão disponíveis; plano geográfico dos sistemas de transmissão de diferentes tipos incluindo o número de circuitos associados com os diferentes arcos da rede (plano de transmissão, que define a rede de transmissão, distinta da rede, dita funcional, já mencionada); tráfego oferecido entre cada par de nodos e sua caracterização do ponto de vista estocástico; custos estimados dos diferentes componentes da rede e custos globais; restrições sobre a qualidade de serviço (tipicamente a probabilidade de bloqueio para o tráfego telefónico e as restrições sobre a qualidade de transmissão); eventualmente outro tipo de restrições (financeiras, de fiabilidade ou outras).

Duma forma genérica o problema de planeamento numa rede de telecomunicações pode enunciar-se como a obtenção da **configuração da rede no horizonte do período de planeamento**, bem como a determinação da **estratégia de evolução óptima** a partir da situação no ano zero, que **minimize os custos, satisfazendo a procura e as restrições de qualidade de serviço**. Para mais detalhes sobre aspectos gerais ver [1].

Torna-se aparente que o problema geral de planeamento inclui um número enorme de variáveis muito frequentemente com dependências funcionais complexas e envolvendo literalmente milhares de decisões. Daqui a necessidade de dividir e sub-dividir os problemas de planeamento até estes se tornarem matematicamente/computacionalmente tratáveis. Claro que não se poderá deixar de levar em conta um grau adequado de ligação entre os diferentes níveis de problemas. Uma consequência desta estratégia global é a decomposição espacial do problema, traduzida na consideração dos problemas de planeamento de redes rurais, urbanas e interurbanas, tendo em conta, nomeadamente, as diferenças significativas relativas à estrutura das redes, tipo de procura e estrutura de custos.

Uma abordagem dos aspectos metodológicos envolvidos no planeamento de redes telefónicas e uma proposta de tipologia para estes problemas foi apresentada em [14].

As redes telefónicas rurais, em particular, caracterizam-se pela baixa densidade de assinantes, um baixo valor do tráfego médio por linha de assinante e por uma acentuada dispersão geográfica dos grupos de assinantes. Estas características explicam o facto de a relação entre os custos de transmissão e de comutação ser significativamente maior que para as redes urbanas e facilitam a utilização de algoritmos simples de tipo heurístico. Por outro lado, o encaminhamento de tráfego é o mais simples possível (não há normalmente encaminhamento alternativo) o que simplifica bastante a modelização do tráfego oferecido.

## 2. Objectivos e Enquadramento do Trabalho

O modelo apresentado é centrado no problema estático de planeamento que consiste na obtenção (para uma dada área geográfica e uma dada estimativa da procura) da estrutura da rede no ano horizonte (número e localização das centrais bem como respectivas áreas de serviço) bem como a determinação do tipo e quantidade de equipamento necessário para garantir um compromisso aceitável entre a minimização dos custos e a qualidade de serviço ([2], [3]). No caso particular das redes rurais, dada a simplicidade do problema (os assinantes estão ligados directamente às centrais locais) podem sobrepôr-se os processos de planeamento da rede funcional e da rede de transmissão, mencionados na introdução.

Pretendeu-se com este trabalho desenvolver um editor de rede baseado em microcomputador adequado a um processo descentralizado de planeamento, tendo em conta as características das redes rurais e dos utilizadores e obter um compromisso razoável entre a eficiência algorítmica, a flexibilidade do modelo e simplicidade de utilização. Isto permitindo, por outro lado, realizar um estudo aprofundado e uma experimentação de um editor de rede baseado num algoritmo heurístico simples, capaz de servir de "campo de ensaios" à construção de sistemas de apoio à decisão mais sofisticados para planeamento de redes telefónicas locais (ver secção 5 - novos desenvolvimentos). Outros trabalhos relevantes sobre planeamento de redes rurais são descritos em [5], [6] e [7].

## 3. Descrição do Modelo

### 3.1. Estrutura da Rede Local

Uma rede telefónica local (de que a rede rural é um caso particular) é constituída pelas instalações exteriores de linhas de assinante e pelos circuitos de junção ( ver fig. 1).

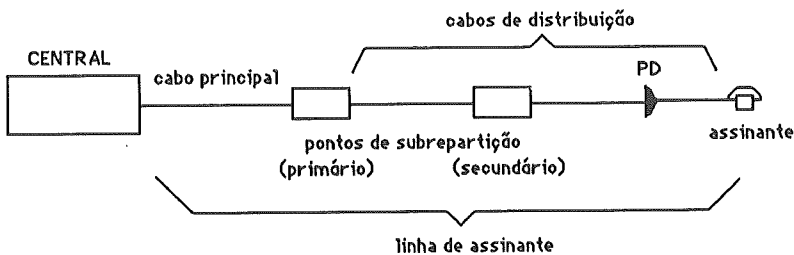


fig. 1 - Nomeclatura da rede local

A nomeclatura utilizada é a dos CTT e inclui os seguintes elementos:

**Central local** - centro de comutação ao qual se ligam os assinantes numa dada área de serviço.

**Área de serviço da central local** - conjunto da central local e das linhas dos assinantes por ela servidos.

**Linha de assinante** - circuito a 2 fios (par) entre o aparelho telefónico do assinante (pp) e a central local.

**Ponto de distribuição (PD)** - ponto da rede onde chegam os cabos locais e a partir do qual são distribuídos os pares na direcção dos assinantes.

**Linha de serviço de assinante** - percurso da linha de assinante compreendida entre o ponto de distribuição e o aparelho telefónico do assinante.

**Circuito de junção** - circuito que liga duas centrais.

**Centro primário** - central onde se ligam as centrais locais (através dos circuitos locais: junções utilizadas para o tráfego interurbano) e por intermédio do qual são estabelecidas as comunicações entre as estações locais da mesma zona não ligadas directamente e as comunicações inter-urbanas.

**Ponto de subrepartição (armário)** - equipamento localizado num ponto da rede de cabos locais que permite ligar um par de entrada a um qualquer par de saída. De acordo com a sua posição funcional podem distinguir-se pontos de subrepartição primários e secundários. Estes pontos permitem uma gestão mais económica e flexível da rede de cabos.

**Cabo principal** - cabo, em geral de maior capacidade, que liga a central a um ponto de subrepartição.

**Cabo de distribuição** - cabo que sai de um ponto de subrepartição para outro ponto de subrepartição ou para pontos de distribuição.

**Concentrador** - equipamento permitindo servir um dado número de linhas de assinante por meio de um número de pares inferior ao número de linhas de assinante, à custa de uma pequena probabilidade de bloqueio.

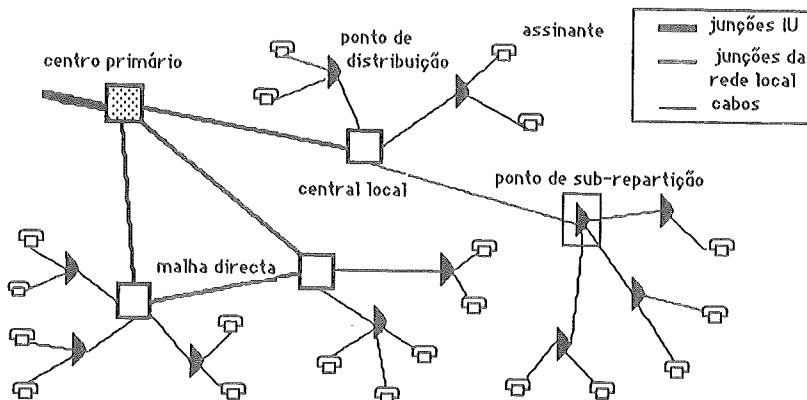


fig. 2 - Estrutura de uma rede telefónica local

### 3.2 Descrição do Método

O modelo computacional de apoio ao planeamento pode ser dividido em quatro fases.

**Fase I** : A partir da rede existente, da estimativa da procura para o ano horizonte do estudo (pp prováveis), e das instalações previstas a curto prazo (pp pendentes), o utilizador constrói sobre o ecrã uma representação aproximada da distribuição de assinantes que deverá ser servida (equivalente ao chamado "mapa de moscas"). Para facilitar a visualização pode atribuir-se um "peso de assinantes" a cada ponto desenhado (pp existente, pp pendente ou pp provável) de modo a não sobrecarregar a representação em zonas mais densas.

Nesta fase de introdução dos pp o utilizador tem à sua disposição várias janelas parcelares (fig. 3) que representam subdivisões, que considere mais adequadas, da área em estudo. De modo a permitir uma representação mais apurada da distribuição de assinantes, as janelas parcelares podem ter diferentes factores de escala. Cada uma destas janelas parcelares está permanentemente disponível para ser trazida ao ecrã, através de simples escolha num "menu".

O programa está concebido de forma a constituir um tipo de "editor de rede", incluindo funções de apagamento de pontos já introduzidos.

Para além da distribuição de assinantes o utilizador deve representar toda a informação relativa à rede instalada (pontos de distribuição, pontos de subrepartição, centrais de comutação, meios de transmissão, etc.). Sempre que necessário o programa activa (coloca em primeiro plano no ecrã) "caixas de diálogo", a serem preenchidas pelo utilizador para introdução de toda a informação relevante sobre a rede existente no ano inicial do período de planeamento.

**Fase II** : Os assinantes são posteriormente agregados, de acordo com critérios pré-definidos e/ou decisão do agente de planeamento, em zonas de pontos de distribuição (PD) servindo grupos de assinantes. Definida uma região sobre o ecrã, com o auxílio do "rato" o programa calcula o número de PDs necessários para servir os assinantes dentro da região, bem como as suas localizações (fig. 4).

**Fase III** ( agregação de PDs) : As zonas de PD são agregadas em zonas elementares de procura (envolve o isolamento de regiões e cálculo automático do centro da procura colocado no centro de gravidade da região). Este processo interactivo termina quando o

utilizador julga que o conjunto de nós assim obtido (cujo "peso" individual vai sendo automaticamente determinado) reflecte as condições topográficas e físicas da rede. O utilizador poderá optar por ser ele a localizar alguns destes pontos, entrando em conta com a sua própria experiência. Ver exemplo do resultado desta fase na fig. 5.

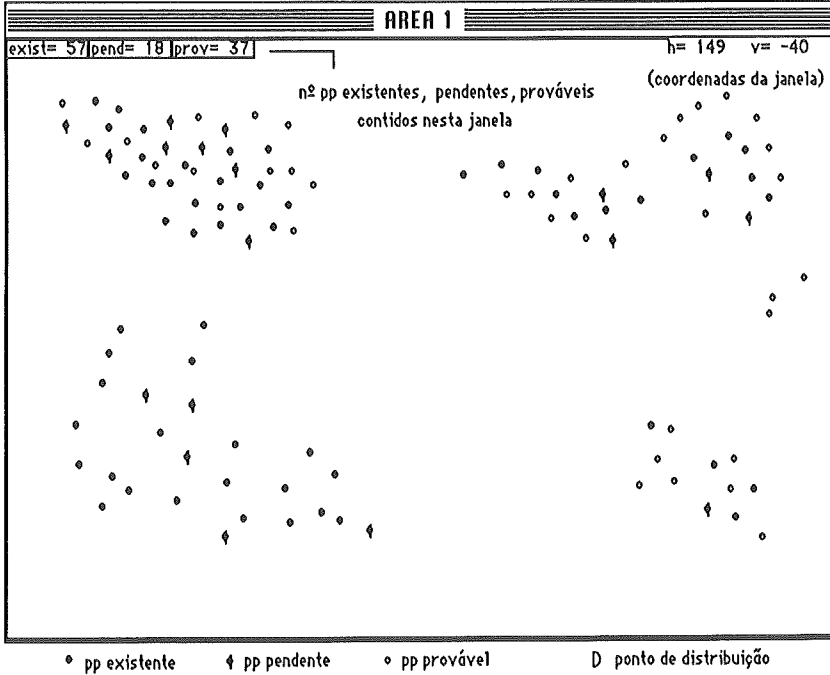


fig. 3 - Aspecto da distribuição de assinantes representada sobre uma janela

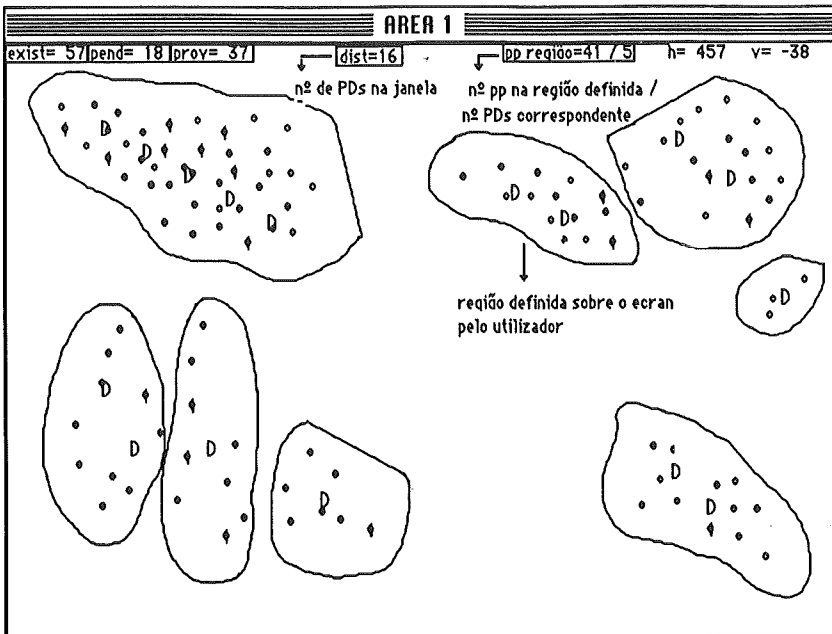


fig. 4 - Definição de zonas de PDs

Ao utilizador compete também representar os arcos de transmissão (que, na prática, devem seguir aproximadamente as estradas ou caminhos, de modo a reduzir os custos de instalação e de manutenção) fornecendo ao programa, através do preenchimento de uma "caixa de diálogo", as suas principais características.

Fase IV ( algoritmo ) : Um algoritmo heurístico é então aplicado ao grafo final anteriormente obtido, o qual é representado numa janela que condensa a informação introduzida em todas as janelas parcelares (fig. 6).

Se necessário, mesmo depois de já se encontrar a trabalhar sobre a janela final, o utilizador pode vir corrigir informação de janelas parcelares, voltando depois à janela final. De facto, a tolerância a erros do utilizador, deve ser uma característica fundamental de qualquer programa interactivo.

O algoritmo dá a possibilidade de estudar a ligação de cada nodo representando um ponto de agregação da procura a um ou vários pontos de concentração (PC). Um PC pode corresponder a uma central de comutação, a concentradores ou a um MIC de assinante (sistema de transmissão digital para um grupo de assinantes).

As intervenções do agente de planeamento no decorrer do processo, incorporando a sua experiência, evitam a pesquisa de soluções à partida não económicas.

O utilizador tem ainda a capacidade de especificar diferentes tipos de restrições, nomeadamente:

- os pontos em que, para todas as soluções, se localiza uma central ;
- os pontos onde nunca será permitido localizar centrais ;
- os conjuntos de pontos que devem ligar-se, em todas as soluções, a uma dada central ;
- os conjuntos de pontos que, em todas as soluções, devem ligar-se à mesma central.

### Algoritmo

Por considerações económicas conclui-se que a rede rural tem normalmente uma estrutura em árvore. Isto torna atractiva a utilização de um algoritmo heurístico, de tipo iterativo, que permite calcular de forma eficiente (a partir do grafo representativo da rede) o número de centrais, a sua localização e as áreas de serviço correspondentes. Para mais detalhes sobre este algoritmo veja-se [6].

Este algoritmo é formalizado nos passos seguintes:

Passo (o) : Considera-se um número inicial de centrais igual ao número mínimo especificado pelo agente de decisão (geralmente o número existente no ano zero do período de planeamento).

Passo (i) : Liga-se cada nodo a um centro de comutação segundo um critério de distância mínima, atendendo às restrições introduzidas pelo utilizador.

Como resultado obtém-se uma primeira definição das áreas de serviço (grupos de assinantes que se ligam a cada central).

Nesta fase é utilizado o algoritmo de Dijkstra [11] para achar caminhos mais curtos.

Passo (ii) : Dentro das áreas de serviço determinadas na fase anterior, relocalizam-se agora uma a uma as centrais que o agente de decisão não fixou previamente. A mudança testada é adoptada sempre que conduza a um valor menor da função objectivo -custo total da rede.



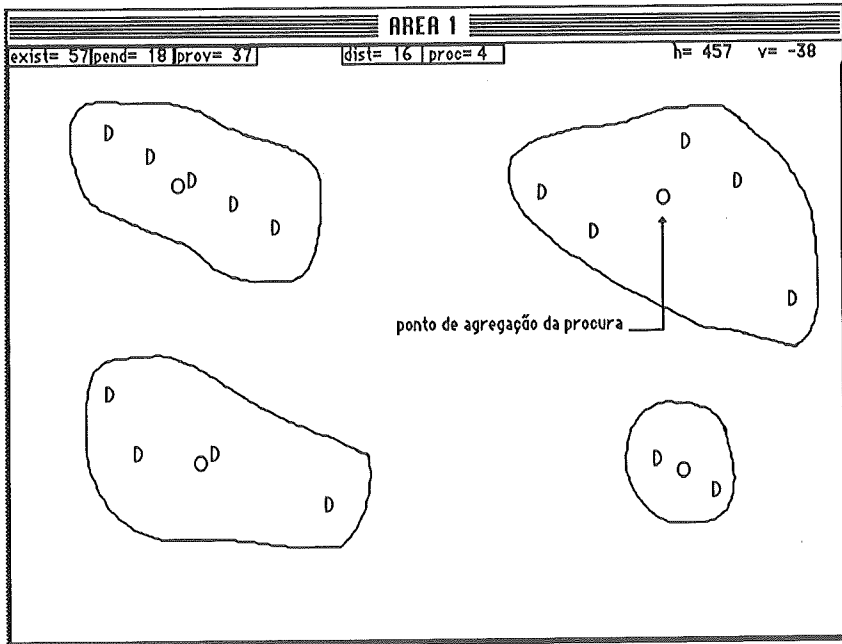


fig. 5 - Cálculo dos centros de agregação da procura

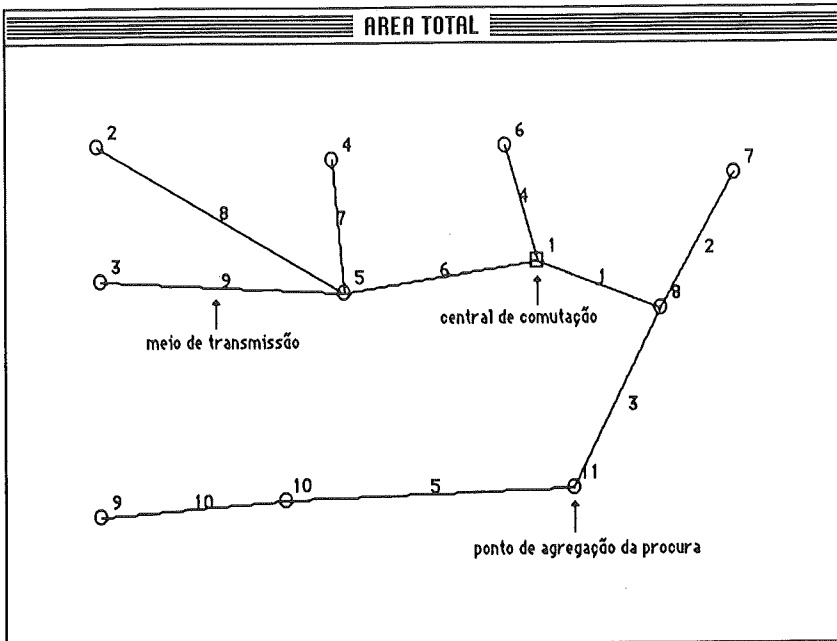


fig. 6 - Janela global, agrupando as janelas parcelares, e meios de transmissão

**Passo (iii) :** A partir da nova configuração criada pelas eventuais realocações das centrais na fase anterior, são rearranjadas as áreas de serviço avaliando (em termos do valor resultante para a função objectivo) a vantagem de ligar cada nodo a outro centro de comutação.

As duas etapas (ii) e (iii) são iterativamente repetidas até que, com o actual número de centrais, não se consiga obter por realocação dos centros de comutação ou por ligação dos nodos a outra central, uma rede de custo mais baixo.

Com este método seleccionam-se várias soluções sub-óptimas (com o custo apresentado em termos do valor actual), podendo o utilizador optar por apoiar a decisão sobre estes resultados ou correr novamente o programa modificando algumas condições .

Considera-se então uma nova central e repete-se todo o processo a partir de (i) até testar todas as configurações desde o número mínimo até ao número máximo de centrais especificado para a zona em estudo.

O programa, na versão actual, dá a possibilidade de estudo da rede com uma ou duas centrais, com e sem concentradores. Para cada solução é calculado o equipamento necessário ao mais baixo custo de modo a satisfazer as restrições e usando, sempre que possível, o equipamento existente.

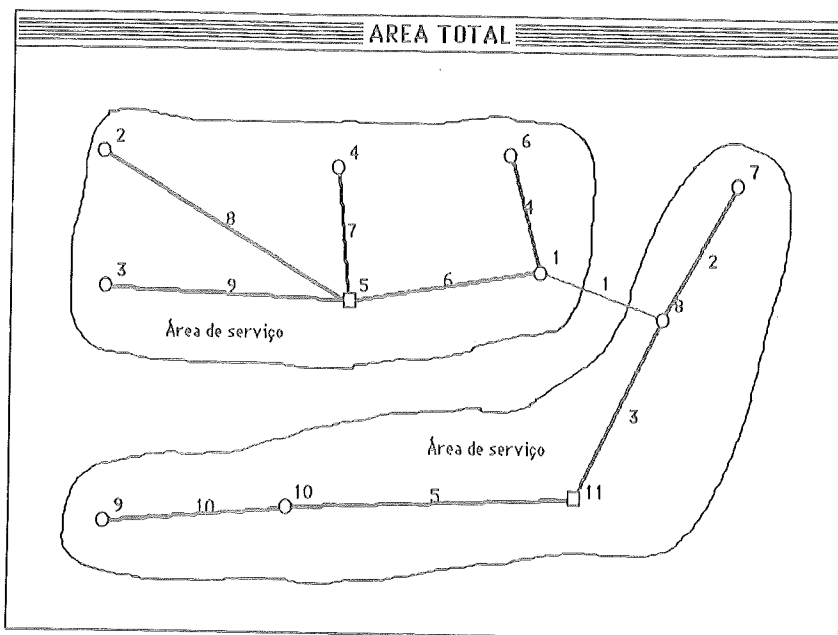


fig. 7 - Resultado da aplicação do algoritmo. Só os arcos a cheio fazem parte da solução final

O resultado da aplicação do algoritmo para duas centrais está exemplificado na fig. 7. Para além desta representação gráfica toda a informação relevante relativa às soluções parcelares e finais do algoritmo, nomeadamente as capacidades de comutação e transmissão relativas a cada elemento da rede e os correspondentes custos parciais e totais são armazenados em ficheiros auxiliares.

Notar que a rede de junções (rede de interligação entre as estações locais e o centro de trânsito da região) tem que ser calculada e o seu custo adicionado ao da rede local definida a partir do algoritmo. Para este efeito há que calcular o número  $n$  de circuitos em cada feixe em função do tráfego oferecido. Tendo em conta que não há encaminhamento alternativo e que as estações locais realizam uma função de concentração do tráfego

proveniente de um número relativamente elevado de 'fontes de tráfego' (assinantes) estatisticamente independentes a aproximação corrente para o cálculo de  $n$  utiliza o clássico modelo de Erlang-B, i.e. o sistema estocástico M/M/n - sem espera. Haverá simplesmente que inverter a fórmula de Erlang-B, em ordem a  $n$ :

$$E_B(A, n) = \frac{A^n/n!}{\sum_{i=0}^n \frac{A^i}{i!}} \leq E_0 \quad (1)$$

para o grau de serviço prescrito (probabilidade de bloqueio das chamadas no feixe)  $E_0 = 1\%$  e para o valor estimado  $A$  da esperança matemática do tráfego oferecido, suposto de Poisson. Por razões de eficiência computacional pode utilizar-se, para  $A \leq 6$  Erlangs o valor aproximado

$$n \approx A + 2\sqrt{A} \quad (2)$$

Caso  $A > 6$  Erlangs utilizaremos a fórmula recursiva (ver p. ex. [12]).

$$E_B(A, x) = \frac{A E_B(A, x-1)}{x + A E_B(A, x-1)}; E_B(A, 0) = 1$$

até obter  $n$  que satisfaça a desigualdade (1). Claro que um valor inicial conveniente para a pesquisa, minorante de  $n$ , será a parte inteira do tráfego transportado  $A(1-E_0)$ .

#### 4. Características Principais da Implementação

O programa foi escrito em Pascal e implementado em Macintosh II. Esta escolha resultou das capacidades gráficas e interactivas deste microcomputador e o facto de ser de fácil utilização por pessoas sem preparação especial em informática, situação frequente no contexto português. Sempre que possível, conforme foi ilustrado atrás, as propostas de evolução da rede resultantes do programa são apresentadas em forma gráfica de maneira a permitir uma rápida visualização de cada solução pelo utilizador.

Antes de iniciar o estudo de um dado problema de planeamento o programa activa uma caixa de diálogo do tipo descrito em [8]. O utilizador deve então indicar a duração do período de planeamento, a taxa de desconto admitida e os ficheiros onde está armazenada a informação sobre as capacidades de ampliação e custos dos diferentes tipos de equipamentos que podem ser utilizados num dado estudo (estes dados podem ser facilmente alterados por recurso a um programa auxiliar). Por outro lado, sempre que se introduzem possíveis estações ou arcos (meios de transmissão) durante as várias fases do processo de edição da rede, o utilizador fornece ao programa toda a informação relevante através de caixas de diálogo, automaticamente activadas.

O programa está organizado em torno de 'menus' onde cada item controla uma acção específica que ou é imediatamente implementada (por exemplo seleccionar uma 'janela' ou calcular a posição dum centro de procura) ou é activada através do 'click' do 'rato' sobre um ponto do écran (p. ex. colocar um "pp" num dado ponto).

Os principais 'menus' para controlar o programa são os seguintes: "PONTOS" (permite colocar ou eliminar diferentes tipos de pontos, directamente sobre o écran, nomeadamente "pps", pontos de distribuição, centros de procura, pontos de subpartição, estações); "AREAS" (permite activar as diferentes 'janelas' e calcular os 'PDs', os centros de procura e os pontos de subpartição), "INFORMAÇÃO" (permite 'desenhar' os arcos do grafo original, escolher os 'pesos' dos diferentes pontos e apresentar variada informação relativa a nodos e arcos do grafo); "PESQUISA" (activa o algoritmo e mostra as sucessivas soluções da iteração); "RESTRICÇÕES" (permite introduzir diferentes tipos de restrições relativas aos nodos do grafo, anteriormente referidas).

Para mais detalhes sobre a implementação ver [13].

## 5. Novos Desenvolvimentos

Num artigo submetido para publicação [15] serão apresentados os desenvolvimentos deste trabalho levados a cabo durante o último ano lectivo.

Apresentam-se em seguida as principais características e blocos funcionais (ver fig. 8) deste sistema de apoio à decisão, destinado ao planeamento dinâmico de redes rurais e de que o presente artigo é o núcleo inicial:

- editor de rede integrando heurísticas destinadas a resolver sub-problemas nas fases de agregação dos assinantes;
- analisador estático que calcula as K-melhores redes para o horizonte do período de planeamento;
- procedimento de análise pós-optimal das soluções estáticas suportado por uma base de regras interactiva e alimentado por um editor de soluções estáticas;
- analisador dinâmico utilizado para calcular as k-melhores estratégias de expansão da rede (evoluções topológicas e das capacidades dos arcos e nodos) ao longo do período de planeamento. Estas estratégias de expansão são acessíveis através de um editor de soluções dinâmicas.

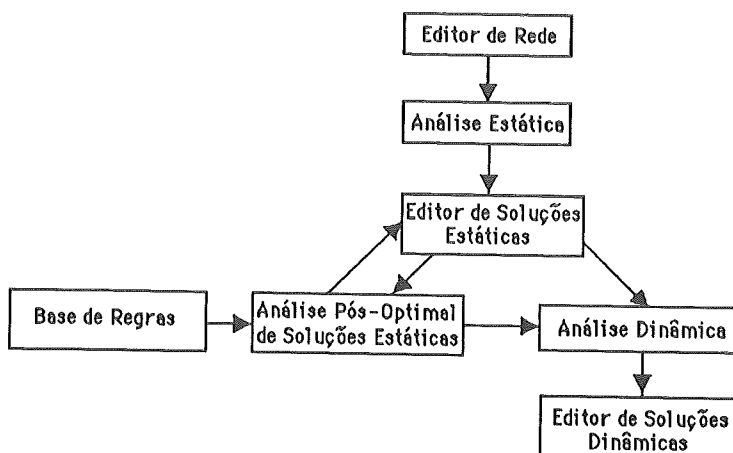


fig. 8

## Referências

- [1] Planification du Réseau Général; UIT - CCITT; Genève, 1983
- [2] Planification des Réseaux Locaux; UIT - CCITT; Genève, 1979
- [3] Télécommunications Rurales; UIT - CCITT; Genève, 1979
- [4] Bergsten, Staffan ; Rudberg, Anders ; Optimización de Redes de Telecomunicaciones; Ericsson Review; num. 3, 1982
- [5] Stave, Bjorn ; Bastøe, Erik ; Trosby, Finn; Optimal placement of exchanges in rural areas; International Network Planning Symposium, 1980

- [6] Programa de ordenador para la planificación telefonica de areas rurales; Centro de Investigación ITT de Standard Eléctrica, Madrid
- [7] Sigelle, M. ; Fouin, P., CRITER - An Interactive Computer Tool for Rural Telephone Network Planning; Third International Network Planning Symposium, 1986
- [8] Chernicoff, Stephen, Macintosh Revealed (vol I : Unlocking the Toolbox; vol II : Programming with the Toolbox); Hayden Book Company, 1985
- [9] Inside Macintosh (vols I, II, III); Addison-Wesley Publishing Company; Apple Computer, 1985
- [10] Jensen, Paul; Network Flow Programming; John Wiley & Sons, 1980
- [11] Hu, T. C.; Combinatorial Algorithms; Addison-Wesley Publishing Company, 1982
- [12] Kubasik, Jerzy; On Some Numerical Methods for the Computation of Erlang and Engset Functions; Proc. 11<sup>th</sup> International Teletraffic Congress, Kyoto, 1985
- [13] Henggeler, Antunes; Clímaco, João; Nordeste, Paulo; Craveirinha, José; "Uma Visita Guiada a um Modelo de Planeamento Interactivo de Redes Rurais", 3<sup>o</sup> Workshop Nacional das Telecomunicações, INESC-APDC, Aveiro, Nov. 87
- [14] Craveirinha, José; Clímaco, João; "A Tentative Survey of Applications of Mathematical Programming to Telephone Network Planning", 13<sup>th</sup> International Symposium on Mathematical Programming, Tokyo, Set., 1988
- [15] Costa, J. P.; Antunes, C.H.; Clímaco, J.N.; Craveirinha, J.F.; "A Dynamic Interactive Rule-Based Model for Rural Telephone Network Planning", Submetido para publicação.

## APÊNDICE - MODELO DE CUSTOS

Trabalhou-se com valores presentes dos custos referidos ao ano inicial do período de planeamento e incluindo os custos de substituição, operação e manutenção dos equipamentos da rede.

O valor presente correspondente à instalação ou expansão de um dado tipo de equipamento que custa  $C_i$  no ano  $i$  é dado por:

$$P V (C_j) = \frac{C_i}{(1+r)^i} \left[ 1 + \frac{1-s}{(1+r)^t} a^{-1} + \frac{u_a}{r} \right]$$

onde:

$r$  = taxa de desconto estimada

$s$  = valor residual do equipamento subtraído pelos custos de desmontagem

$t_a$  = tempo de vida do equipamento

$u_a$  = custo anual de operação e manutenção expresso em relação ao custo de instalação

### Funções de custo

. Linhas de assinante:

$$C_1 = C_s \quad d_e$$

onde

$d_e$  = distância entre o assinante e a estação

$C_s$  = custo do cabo de ligação por assinante (depende do tipo de cabo e da atenuação) e por unidade de comprimento

. Estações:

$$C_e = C_{te} + C_{fe} + (C_{le} + C_{cl}) \quad n_s + C_{eje} \quad n_{je} + C_{ejs} \quad n_{js}$$

onde

$C_{te}$  = custo do edifício

$C_{fe}$  = custo fixo de energia

$C_{le}$  = custo de energia por linha

$C_{cl}$  = custo de comutação por linha

$n_s$  = número de assinantes ligados à estação

$C_{eje}$  = custo da energia por junção de entrada

$n_{je}$  = número de junções de entrada

$C_{ejs}$  = custo da energia por junção de saída

$n_{js}$  = número de junções de saída

. Junções:

$$C_j = C_{fj} + C_{vj} \quad d_j$$

$d_j$  = comprimento da junção

$C_{vj}$  = custo por junção por unidade de comprimento

$C_{fj}$  = custo fixo por junção

# ESTRATÉGIAS DE DESENVOLVIMENTO LOCAL NA ÁREA DO PARQUE NATURAL DO ALVÃO - VISÃO RECTROSPECTIVA COM RECURSO A MATRIZES DE TRANSIÇÃO

João Manuel Bento  
Adelaide da Conceição Fernandes

Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro

## Resumo

Após uma breve descrição da área correspondente ao Parque Natural do Alvão localizado em zonas contíguas de Vila Real e Mondim de Basto, apresenta-se os resultados da fotointerpretação sistemática de seis classes de utilização, mais representativas das actividades aí presentes. Com base nos elementos recolhidos, procedeu-se à construção das matrizes de transição referentes ao período 1947-1984.

A partir da comparação das evoluções esperadas e observadas, foi possível definir 3 fases correspondentes a diferentes formas de conceber a utilização desse espaço, traduzidas em utilizações finais diversas. Enumera-se, ainda, um conjunto de diferenças mais vincadas entre a situação actual e inicial, apresentando-se por fim, um conjunto de sugestões de forma a contrariar a tendência recente.

## Abstract

After a brief description of the area correspondent to Parque Natural do Alvão located in contiguous zones of Vila Real and Mondim de Basto, the results of the systematic photointerpretation of the six more representative activities accomplished are presented. Based on the collected data, transition matrices referring to the period 1947-1984 have been established. Based on the comparison of the expected and observed evolutions, it was possible to define 3 phases concerning to different ways of conceiving the utilization of that area, conducing to distinct final utilizations.

A set of the most relevant differences between the previous and the actual situation is mentioned, presenting, at the end, suggestions to contract the recent tendency.

**Keywords:** Historical aerial photography; Land use; Transition matrices.

## INTRODUÇÃO

O conteúdo deste artigo é o resultado de parte do trabalho que tem vindo a ser desenvolvido em colaboração com o Parque Natural do Alvão (P.N.A.), numa tentativa de definição e explicação dos diferentes tipos de mudanças que foram sendo operadas na forma de ocupação e utilização desse território.

Apesar de nas últimas décadas não se ter assistido, aí, a uma modificação da paisagem rural tão intensa como noutras regiões do interior do país, algumas alterações são identificáveis,

nomeadamente as que dizem respeito ao abandono de áreas agrícolas, à maior ocupação por povoamentos florestais, e ao avanço das manchas de afloramentos rochosos como resultado de processos erosivos intensos. Por análise multidimensional, pretende caracterizar-se este processo dinâmico, detectando o conjunto das variáveis mais explicativas dos fenómenos presentes. Em fase intermédia de trabalho, dado que estava compilada informação que permitia detectar o tipo de evolução verificada nas últimas décadas para um conjunto de pontos suficientemente alargado, ensaiou-se a definição das diferentes estratégias que estiveram subjacentes ao evoluir desta realidade. É deste processo, em parte conduzido com recurso a matrizes de transição, que trata a presente publicação, sendo precedida duma breve caracterização da referida área e apresentando-se, por fim, um conjunto de propostas dizendo respeito a uma mais eficiente gestão deste território, dentro dos objectivos subjacentes à formação dum Parque Natural.

#### ALGUMAS CONSIDERAÇÕES RESPEITANTES AO P.N.A.

O P.N.A., criado pelo Decreto-Lei nº237/83, com uma área de 7220 ha, situa-se no distrito de Vila Real, repartindo-se por áreas contíguas aos concelhos de Vila Real, com 4361 ha, e Mondim de Basto, com os restantes 2859 ha.

O P.N.A. pode identificar-se como um anfiteatro aberto nas vertentes viradas a Oeste da cadeia montanhosa de condensação Marão-Larouco, começando em cotas abaixo dos 300 m, na zona de Ermelo (260 m na Volta da Lousa) e terminando, na de Lamas de Olo, acima dos 1300 (1329 m no marco geodésico de Caravelas); cerca de 80% da sua área situa-se acima dos 800 m. O rio Olo é um traço permanente em toda a sua área, estando o seu leito de montanha, bem expresso nas quedas de água das Fisgas de Ermelo, em local de excelente panorâmica.

Para além duma escassez real de bons solos agrícolas, a principal limitação ao desenvolvimento duma agricultura mais intensiva centra-se na presença de condições extremas de temperatura e ocorrência de geadas que impedem a existência dum período vegetativo longo. Como excepção poder-se-á considerar a zona mais baixa de Ermelo, onde culturas como a vinha e o milho apresentam já possibilidades de implementação. Atendendo à duração muito limitada do período seco, o factor água no solo não parece constituir entrave ao alargamento das áreas agrícolas.

A população presente na referida área manteve-se sensivelmente constante desde meados do século passado até aos anos 20-30. A partir desta data, assiste-se a um acréscimo bastante considerável até aos anos 50-60, altura em que se inicia uma diminuição muito acentuada devido à emigração. Nas freguesias integradas no Parque, Ermelo e Lamas de Olo, o decréscimo populacional verifica-se até à actualidade, enquanto, a nível de



concelhos e distrito esta tendência só é notória até 1970, começando a partir desta data a verificar-se uma inversão do tipo de evolução observada.

As oscilações da população foram de alguma forma acompanhadas com variações mais ou menos acentuadas, ao nível das actividades produtivas, traduzidas quer pela evolução dos efectivos pecuários presentes, quer pelas alterações verificadas nas diferentes formas de utilização desse território. Da análise dos dados disponíveis são de realçar as relações entre a área de agricultura e a população e as que envolvem as variáveis número de caprinos e ovinos e áreas de incultos e floresta.

A área incluída no P.N.A. surge tipicamente identificada com outros tipos de regiões onde a actividade agrícola praticada se poderá caracterizar como de agricultura em montanha. Aí, colocar-se-á como vector orientador do tipo de evolução a definição de padrões de qualidade a atingir e que, de alguma forma, permitam contrabalançar os menores índices de produtividade física alcançados.

#### APLICAÇÃO DAS MATRIZES DE TRANSIÇÃO A ÁREA CONSIDERADA

As matrizes de transição condensam a informação necessária para se poder avaliar acerca do tipo de evolução operada numa determinada realidade, entre dois momentos diferentes.

A matriz de transição (P), com um número de linhas e colunas igual ao número de estratos ou estádios considerados, é constituída pelos elementos  $P_{ij}$ , que traduzem a probabilidade do estrato j passar a i, num determinado intervalo de tempo (k). Os elementos  $P_{ii}$  representam a probabilidade de manutenção dentro do mesmo estádio. Quanto mais próximos forem os valores do traço e a ordem da matriz, maior a estabilidade.

Os vectores de ocupação do solo (V), traduzem a área ocupada por cada um dos estratos em determinada data e têm, portanto, um número de elementos igual ao número (N) dos estratos considerados.

A evolução dum sistema no tempo pode ser descrita, simplesmente, por meio de equações matriciais:

$$\begin{bmatrix} P_{11} & \dots & P_{1j} & \dots & P_{1N} \\ \cdot & & \cdot & & \cdot \\ P_{i1} & \dots & P_{ij} & \dots & P_{iN} \\ \cdot & & \cdot & & \cdot \\ P_{N1} & \dots & P_{Nj} & \dots & P_{NN} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} V_{1t} \\ \cdot \\ V_{jt} \\ \cdot \\ V_{Nt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{1(t+k)} \\ \cdot \\ V_{i(t+k)} \\ \cdot \\ V_{N(t+k)} \end{bmatrix}$$

ou simplifadamente:

$$P * V_t = V_{t+k} \quad \text{no momento } t+k$$

$$P * V_{t+k} = V_{t+2k} = P(P * V_t) = P^2 * V_t \quad \text{no momento } t+2k$$

$P * V_{t+(n-1)k} = V_{t+nk} = P(P^{n-1} * V_t) = P^n * V_t$  no momento  $t+nk$

donde,

$$P^n * V_t = V_{t+nk}$$

Portanto a evolução do sistema entre dois instantes  $t$  e  $t+nk$ , para determinada matriz de transição, só depende do intervalo  $nk$ .

Com as equações matriciais do tipo:

$$P * V_t = V_r$$

sendo  $V_t$  e  $V_r$  respectivamente os vectores inicial e final, pode-se calcular a ocupação do solo nos períodos seguintes. Ao manter-se esta tendência de evolução, isto é, se a matriz de transição não se alterar, a ocupação do solo tenderá para uma situação final estável, que coincide com o vector próprio ( $V_{\text{est}}$ ), correspondente ao maior dos valores próprios da matriz  $P$ , o valor próprio principal. Desta forma:

$$P * V_{\text{est}} = \lambda_{\text{max}} * V_{\text{est}}, \text{ com}$$

$\lambda_{\text{max}}$  - valor próprio principal

O vector final para que tenderá o sistema é independente da situação inicial, sendo obtido exclusivamente a partir da matriz de transição  $P$  considerada. Desta forma ele traduzirá a importância atribuída a cada um dos estádios considerados no período de tempo a que diz respeito a matriz em questão.

As primeiras aplicações das matrizes de transição devem-se a LESLIE (6) no estudo da evolução das diferentes classes etárias de uma população. O estudo e simulação da evolução de ecossistemas sob pressão humana foi feito em 1981 por FLORET e Le FLOC'H (3) através de matrizes de transição. Em estudos do âmbito do apresentado neste trabalho, evolução das unidades de ocupação do território e expectativas futuras, apontam-se entre outros os casos de DEBUSSCHE et al. (1), LAMARCHE e ROMANE (5) e mais recentemente GUERREIRO (4) para a região do Planalto de Miranda.

A obtenção das matrizes de transição foi feita a partir das ocupações do solo referentes a instantes diferentes. Para tal foram utilizadas as coberturas aerofotográficas da região em causa nos anos de 1947, 1958, 1968, 1978 e 1984. Foram analisados 1155 pontos sistematicamente distribuídos dentro da totalidade do P.N.A., em cada um dos 5 voos disponíveis. Cada um dos pontos foi localizado nas fotografias mais recentes (1984), para posteriormente serem localizados e determinado o tipo de ocupação nas fotografias de anos anteriores.

Com duas avaliações consecutivas de ocupação do solo, aqui distanciadas de 10 anos, com excepção do último período que é de 6 anos, poderá ser definida a probabilidade de manutenção ou mudança de uma determinada ocupação (ou estrato), por simples contagem dos totais de pontos em que tais situações se verificaram. Feita posteriormente a homogeneização das colunas de cada matriz de forma que as suas somas sejam iguais à unidade, estaremos em condições de

obter a respectiva matriz de transição.

Na avaliação das ocupações do solo, foram considerados os seguintes estratos: agricultura (A), folhosas (F), resinosas (R), incultos (I), afloramentos rochosos (R) e áreas sociais (S).

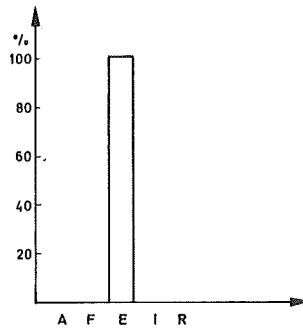
A determinação da ocupação do solo nem sempre foi fácil de realizar, pois as fotografias, além de apresentarem tonalidades por vezes bastante diferentes, tinham escalas disparees o que dificultou o trabalho de localização dos pontos.

Neste caso, como se possuíam cinco conjuntos de fotografias aéreas, obtiveram-se cinco vectores de ocupação do solo, o que deu possibilidade de construir dez matrizes, correspondentes a todas as possíveis transições. Destas apenas iremos utilizar as quatro correspondentes a períodos de observação consecutivos, por serem aquelas que permitirão uma leitura mais clara e maior facilidade de interpretação e comparação com a realidade.

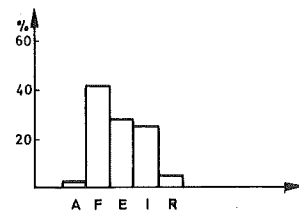
Para cada período considerado, apresenta-se igualmente o vector próprio correspondente ao valor próprio máximo, determinado a partir das respectivas matrizes de transição, e a representação gráfica da situação final.

Para a determinação do vector próprio eliminaram-se as transferências que envolviam a área social, devido à pouca representatividade desse tipo de movimentos, podendo a sua inclusão enviesar por completo a interpretação dos fenómenos operados na realidade.

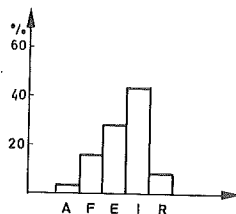
|      |   | 1947 |     |   |     |     |    |
|------|---|------|-----|---|-----|-----|----|
|      |   | A    | F   | E | I   | R   | VP |
| 1958 | A | .88  | -   | - | .04 | -   | 0  |
|      | F | .04  | .94 | - | .01 | -   | 0  |
|      | E | .01  | -   | 1 | .06 | .01 | 1  |
|      | I | .07  | .06 | - | .81 | .21 | 0  |
|      | R | -    | -   | - | .08 | .79 | 0  |



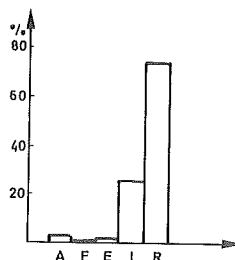
|      |   | 1958 |     |     |     |     |     |
|------|---|------|-----|-----|-----|-----|-----|
|      |   | A    | F   | E   | I   | R   | VP  |
| 1968 | A | .81  | -   | -   | .01 | -   | .02 |
|      | F | .01  | .98 | -   | .03 | -   | .42 |
|      | E | -    | -   | .89 | .11 | .01 | .27 |
|      | I | .17  | .02 | .11 | .80 | .22 | .25 |
|      | R | -    | -   | -   | .04 | .77 | .04 |



|      |   | 1968 |     |     |     |     |     |
|------|---|------|-----|-----|-----|-----|-----|
|      |   | A    | F   | E   | I   | R   | VP  |
| A    |   | .88  | .01 | -   | .01 | -   | .04 |
| F    |   | -    | .96 | -   | .02 | -   | .17 |
| 1978 | E | -    | -   | .87 | .09 | .01 | .28 |
|      | I | .12  | .03 | .13 | .84 | .27 | .43 |
|      | R | -    | -   | -   | .05 | .73 | .08 |



|      |   | 1978 |     |     |     |     |     |
|------|---|------|-----|-----|-----|-----|-----|
|      |   | A    | F   | E   | I   | R   | VP  |
| A    |   | .87  | .01 | -   | .00 | -   | .01 |
| F    |   | .02  | .91 | -   | -   | -   | .00 |
| 1984 | E | -    | -   | .84 | .00 | -   | .01 |
|      | I | .11  | .08 | .15 | .86 | .05 | .25 |
|      | R | -    | -   | .01 | .14 | .95 | .74 |



#### PERSPECTIVAS DE EVOLUÇÃO SEGUNDO OS MODELOS CONSIDERADOS

As perspectivas de evolução são várias, dependendo da matriz de transição tomada por base. Neste ponto, vão-se apresentar as hipóteses que estiveram subjacentes à evolução das formas de ocupação da área do P.N.A.. Estas hipóteses foram determinadas, para os anos recentes, através de equações matriciais e, para a situação final, pelos respectivos vectores próprios, surgindo a sua representação no Gráfico 1.

Evolução baseada na matriz de transição de 47-58: Na previsão da situação final, através do vector próprio, se a tendência de 1947 para 1958 se mantivesse a área do Parque seria na totalidade ocupada por resinosas. Todos os outros estratos, além das resinosas, seriam reduzidos a zero por cento. Estes resultados devem-se ao facto de, neste período a intervenção humana ser bastante acentuada e exclusivamente assente numa acção de arborização com incidência de resinosas.

Evolução baseada na matriz de transição de 58-68: Se as formas de ocupação da área do Parque mantivessem a tendência de evolução expressa nesta matriz de transição, a situação final seria muito mais diversificada que a dada pela matriz de transição de 47-58. A área arborizada seria de 68,5%, a de incultos 25,3% sendo os afloramentos rochosos e a agricultura apenas de respectivamente, 4,3% e 1,9%. É de salientar, nestes 10 anos, a grande acção exercida pelo homem a nível da arborização que passou, nesta década, a incluir igualmente a introdução de folhosas. Note-se a diminuição no

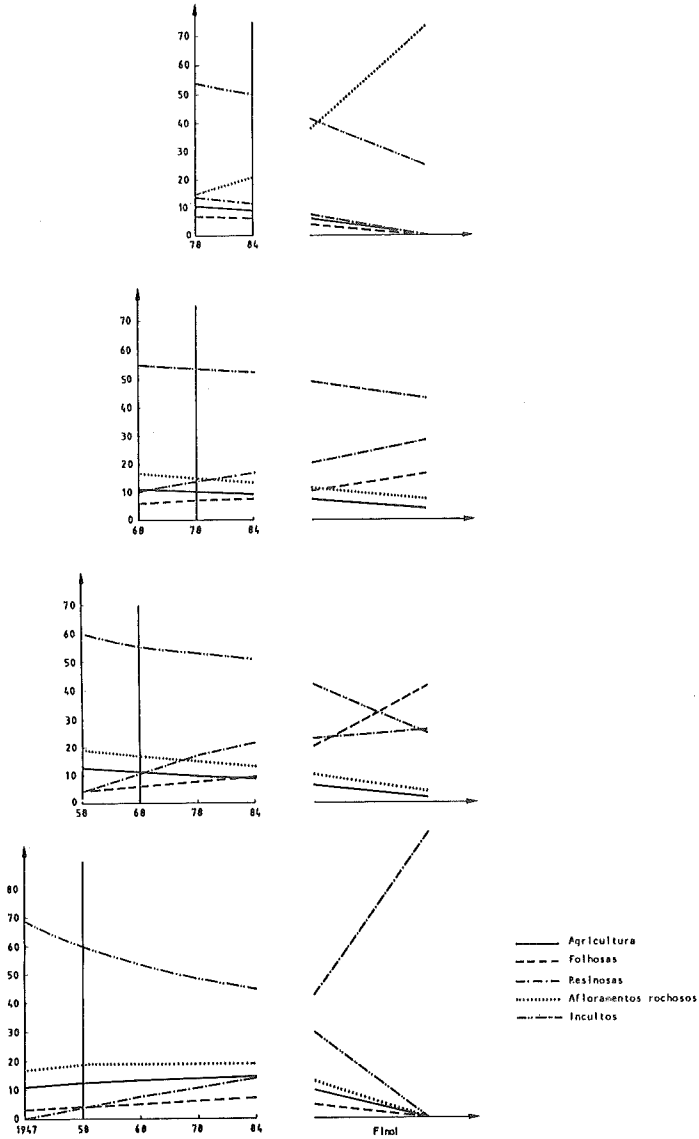


Gráfico 1 - Representação da evolução das situações observada e estimadas com base nas respectivas matrizes de transição

estrato agrícola que se deve, como já se referiu, à diminuição da população presente.

Evolução baseada na matriz de transição de 68-78: As tendências expressas nesta hipótese, tal como já se verificava nas de 58-68, sugerem uma diminuição dos estratos agrícola e afloramentos rochosos. As folhosas ocupariam 16,5% e as resinosas 28,2%. De todos os estratos o que ocuparia maior área seria o de incultos, o que evidencia a fraca intervenção do homem nesta década.

Evolução baseada na matriz de transição de 78-84: Segundo esta tendência, a ocupação final do solo seria 73,9% de afloramentos rochosos e 24,9% de incultos. Os restantes estratos ocupariam apenas 1,2%. Esta tendência pode ser explicada por uma intervenção muito activa do fogo e má gestão dos incultos por pastoreamento excessivo.

Os desvios entre as situações observadas e as previstas, com base nas diferentes matrizes de transição, podem ser avaliados pela utilização dum teste de  $\chi^2$ .

Os valores esperados são sempre calculados através da matriz anterior ao ano em questão. Assim para o ano de 1968, em que os valores esperados foram calculados através da matriz de transição de 1947-1958, o valor de  $\chi^2$  é igual a 23.5, existindo uma diferença significativa entre os valores observados e os esperados. Conclui-se que a tendência evolutiva de 1947 para 1958 não se manteve para 1968. Dos estratos considerados, aqueles que mais contribuíram para esta diferença foram o de resinosas, o de agricultura e o de afloramentos rochosos.

De facto, o surto inicial de arborização com resinosas atenua-se a partir da segunda década em consideração, passando a intervenção humana a assentar em modelos mais diversificados de arborização com a inclusão de novos povoamentos de folhosas, assistindo-se igualmente ao início da diminuição das áreas agrícolas. Relativamente à década anterior, fundamentalmente assente numa arborização com base em resinosas, expressa pela composição do vector próprio correspondente a essa matriz, surge uma concepção que aponta para uma utilização final do território, repartida pelos estratos folhosas, resinosas e incultos, em detrimento da agricultura e afloramentos rochosos.

Esta tendência manter-se-á na década seguinte (68-78), sendo a perspectiva final de ocupação desta área igualmente repartida preferencialmente pelos três estratos referidos, em detrimento dos dois restantes, notando-se apenas uma inversão da importância relativa entre essas actividades na sua forma final. Não existe de facto diferença significativa entre a evolução previsível e aquela que se operou. Dos estratos considerados, aquele que maior diferença apresenta, entre os valores observados e esperados, é o de resinosas, tendo todos os outros, valores muito idênticos. Desta forma podemos considerar o lapso de 1958-1978 como um período de continuidade, apontando-se para uma utilização final mais equilibrada entre os diferentes estratos referidos, de alguma forma mais de acordo com as potencialidades e as restrições do território em causa.

Finalmente, para 1984 obtiveram-se de novo valores de  $\chi^2$  altamente significativos. Poder-se-á, portanto, fazer coincidir o ano de 1978 com um novo período de viragem no tipo de intervenção que vimos descrevendo. Aqui são essencialmente dois estratos que contribuem para essa diferença (resinosas e afloramentos rochosos). Uma nova etapa surge nos anos recentes associada a uma utilização

final preferencialmente repartida entre a utilização como inculco e afloramentos rochosos.

No gráfico 1 apresenta-se, para as diferentes datas, as situações iniciais e o desenvolvimento que seria de esperar até se atingir a situação final de equilíbrio.

Daqui se pode concluir que é possível dividir o período de observação em causa em ~~duas~~ três etapas distintas: anterior a 1958, 1958-1978 e anos posteriores a 1978. Ressaltam nesta divisão concepções e objectivos distintos na forma de conceber e utilizar o espaço disponível. Essas concepções reflectem opções no tempo subjacentes às diferentes formas de intervenção humana, consolidadas em bases institucionais, mais ou menos evidentes.

### CONCLUSÕES

Dentro da área do Parque, apesar das alterações ocorridas não serem tão acentuadas como noutras regiões do País, onde o abandono maciço da população provocou mudanças muito acentuadas no tipo de ocupação existente, não podemos, no entanto, concluir que esta área se manteve ao longo do período considerado numa situação de completo imobilismo. De facto, desde 1947 até à actualidade, são notórias as seguintes alterações fundamentais:

- Surgimento duma ampla mancha de povoamentos de resinosas, praticamente inexistente anteriormente à década de 50;
- Diminuição importante das áreas de agricultura, iniciada a partir da mesma década;
- Progressão preocupante das áreas de afloramentos rochosos, ocorrendo principalmente nos últimos anos.

Recorrendo à utilização das matrizes de transição, foi possível contabilizar as diferentes transferências ocorridas entre estratos, ao longo do período considerado e explicitar as diferentes perspectivas presentes ao longo do tempo, quanto à forma da sua utilização final. Por outro lado, poder-se-á, neste momento, efectuar a comparação entre os efeitos das intervenções a realizar, com a evolução recente das formas de utilização desta área.

Desde já, parece-nos que o tipo de acções a privilegiar deverá contribuir para o ajustamento deste território a um esquema de utilização final de alguma forma semelhante ao decorrente da matriz de transição entre 68 e 78, que aponta para uma repartição equilibrada entre as diferentes actividades, pese embora a impossibilidade de recuperar algumas das áreas de afloramento rochoso hoje existentes.

O conjunto das acções, a incentivar, parecem-nos dever incidir essencialmente:

- Na introdução de pastagens semeadas nas zonas mais promissoras, de solos espessos, com povoamentos florestais adultos envolventes (Plana dos Mijaceiros);
- Na melhoria dos prados naturais "lameiros" através de

fertilizações e calagens equilibradas;

- Na arborização, preferencialmente com folhosas, reservando a utilização de resinosas apenas como forma de recuperar situações de erosão mais intensa e onde a implantação das primeiras se torna problemática;

- Na melhor utilização da água que, embora não sendo considerada como recurso escasso, poderá ser utilizada numa forma mais eficiente através nomeadamente:

- . da impermeabilização de levadas;
- . do armazenamento da água em açudes e barragens.

Desta forma, pretende-se contribuir para uma utilização mais intensiva das áreas incultas, preferencialmente vocacionadas para a produção pecuária e florestal, em simultâneo com uma gestão mais eficiente das áreas agrícolas actuais.

Finalmente, consideramos desejável que dentro da área do Parque se estimule a formação de associações de agricultores que garantam, no futuro, a representatividade das populações locais na discussão e avaliação de propostas de ordenamento e utilização deste território, e que constituam, desde já, o embrião de organizações de produtores responsáveis pela garantia de origem dum conjunto de bens (artesanato, mel, carne, linho) que, pela sua especificidade, qualidade e características próprias, poderão vir a constituir importante fonte de receitas das populações locais.

#### BIBLIOGRAFIA

(1) DEBUSSCH, M. et al - An account of the use of a transition matrix. Agro-Ecosystems, Elsevier Scientific Publishing Company, Amsterdam 1977 (81-92).

(2) FERNANDES, A. - Evolução das formas de ocupação do território no Parque Natural do Alvão. UTAD, Vila Real, 1986.

(3) FLORET C., FLOCH, E. Le - Dynamique de systèmes écologiques de la zone aride. Acta Ecologica, Vo. 2 nº3, Gauthier-Villars, 1981.

(4) GUERREIRO, J. - Problemas y perspectivas de la ordenacion rural en areas perifericas, el caso de Miranda do Douro (Portugal). Centro Internacional de Altos Estudos Agronomicos Mediterraneo, Instituto Agronomico Mediterraneo de Zaragoza, Saragoça, 1986.

(5) LAMARCHE, H.; ROMANE, F. - Analysis of landscape change through social economical and ecological criteria on the base of a commune in South of France. Intern. Symp. Landschafts Information System, Bonn, 1982.

(6) LESLIE, P. - On the uses of matrices in certain population mathematics. Biometrika, 33, 183-212, 1945.



## RACIONALIZAÇÃO DO REAPROVISIONAMENTO DE STOCKS EM REVISÃO PERIÓDICA

B. Calafate Vasconcelos

Faculdade de Engenharia  
Universidade do Porto

### Resumo

Na gestão de stocks pelo sistema clássico de revisão periódica, cada artigo tem associado um período óptimo, conducente ao custo mínimo. Em teoria haverá tantos períodos de revisão quantos os artigos existentes em armazém. Na prática, porém, há interesse em reduzir essa diversidade a um pequeno número de períodos distintos a fim de: a) facilitar os procedimentos; b) agregar as encomendas; e c) limitar o total de reaprovisionamento, para o conjunto dos artigos, à capacidade de processamento existente na empresa. Estas vantagens deverão compensar o agravamento de custo motivado pela redução de periodicidades. A determinação do período prático para cada artigo, contempla simultaneamente os três aspectos acima referidos e controlando o agravamento do custo, é o objecto da presente comunicação.

### Abstract

The classic inventory control under a periodic review policy assigns to each item an optimum review interval for minimum inventory variable costs. Theoretically there would be as many intervals as the number of items in stock. In practice, however, such diversity is reduced to a few distinct intervals aiming to: i) make procedures easier, ii) aggregate items ordered to the same supplier, and iii) restrict the total number of replenishments to the procurement capacity actually available in organisation. Naturally, procurement savings so obtained should trade off the inventory cost penalty due to non-optimal intervals being adopted to individual items. The paper proposes a method to assign practical periods to items, considering simultaneously all the three aspects mentioned above under the restriction of a given inventory cost penalty.

**Keywords:** Inventory Control, Stocks, Periodic Review Policy, Multi-item.

### INTRODUÇÃO

A revisão periódica (RP) é um método clássico utilizado na gestão de stocks renováveis de materiais sujeitos a procura independente e estável. As variáveis de decisão são o período de revisão  $T$  e o nível de enchimento  $R$ . Em datas pré-fixadas, intervaladas de  $T$ , lança-se uma encomenda ao fornecedor cuja quantidade é calculada pela diferença entre o nível de enchimento  $R$  e o stock nominal nessa data. O stock nominal é constituído pelas existências em armazém mais as entradas pendentes (encomendas colocadas, mas não recebidas) menos as saídas pendentes (entregas a clientes já devidas, mas não satisfeitas).

Em situações determinísticas com taxa de procura constante, o período óptimo de revisão  $T^*$  pode ser calculado a partir da quantidade económica de encomenda  $Q^*$ , decorrente do modelo de Wilson<sup>1</sup>:

$$Q^* = (2 \cdot F_0 \cdot d / (F_1 \cdot C))^{1/2}$$

$$T^* = Q^* / d = (2 F_0 / (F_1 \cdot C \cdot d))^{1/2} \quad (I)$$

em que

$F_0$  = Custo processual do reaprovionamento;

$F_1$  = taxa anual de posse do artigo;

$d$  = procura anual do artigo;

$C$  = custo unitário do artigo;

$T^*$  = período óptimo de revisão, expresso em anos.

Na prática, embora se não verifiquem os pressupostos determinísticos, é frequente adoptar para  $T$  o valor obtido de (I), por razões de simplicidade de cálculo (embora o erro possa ser significativo). A análise aqui feita dirige-se, sobretudo, para esse procedimento.

A um período de revisão  $T$ , expresso em anos, corresponde um número anual de reaprovionamentos  $n = 1/T$ . O número óptimo é

$$n^* = (F_1 \cdot C \cdot d / (2 F_0))^{1/2} \quad (II)$$

Há portanto uma relação simples entre  $Q^*$ ,  $T^*$  e  $n^*$ . Estes valores são os que conduzem ao custo anual de gestão mínimo  $K^*$ , dado pela expressão

$$K^* = (2 F_0 \cdot F_1 \cdot C \cdot d)^{1/2} \quad (III)$$

Naturalmente, quando nos desviamos dos valores óptimos, o custo de gestão aumenta. Seja  $q$  o factor de desvio calculado por

$$q = Q/Q^* = T/T^* = n^*/n \quad (IV)$$

e  $k$  o respectivo agravamento de custo, definido por

$$k = K/K^* \quad (V)$$

A relação entre  $k$  e  $q$ , como se demonstra em Wild<sup>2</sup> (p.342-344), é

$$k = 1/2(q + 1/q) \quad (VI)$$

cuja representação gráfica se apresenta na fig. 1. Invertendo a

relação, obtêm-se as raízes

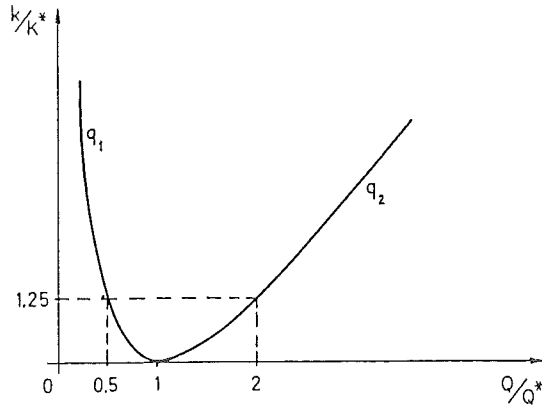


Fig. 1

$$q_1 = k - (k^2 - 1)^{1/2} \tag{VIIa}$$

$$q_2 = k + (k^2 - 1)^{1/2} \tag{VIIb}$$

sendo  $q_1 \cdot q_2 = 1$ .

Na expressão (I) aparecem os parâmetros  $F_0$  e  $F_1$  cujo valor é, na prática, constante, se não para a totalidade dos artigos em armazém, pelo menos para uma grande família. Nessas circunstâncias, podemos escrever

$$T^* = v/U^{1/2} \tag{VIII}$$

sendo  $U = C \cdot d$

em que  $v$  é uma constante do armazém ou da família, e  $U$  uma característica do artigo, habitualmente designada por "valor anual de uso". Idênticas considerações, permitem escrever

$$n^* = 1/v \cdot U^{1/2} \tag{IX}$$

$$K^* = b \cdot U^{1/2} \tag{X}$$

Esta abordagem, como observa Murdoch<sup>3</sup>, evita a necessidade de estimar os parâmetros  $F_0$  e  $F_1$  quando é imposto o número anual de encomendas  $N$  para o conjunto dos artigos (esse número decorre de uma determinada capacidade instalada em pessoal e equipamentos que se não vai alterar no prazo imediato). Temos então:

$$N = \sum n_i = 1/v \sum U_i^{1/2} \tag{XI}$$

em que o índice  $i$  se refere a cada um dos artigos. Donde

$$v = \sum U_i^{1/2} / N \quad (\text{XII})$$

Como os  $U_i$ 's são dados contabilísticos correntes, o valor de  $v$  é obtido facilmente e, através de (VIII), calcula-se o  $T^*_i$  de cada artigo.

#### RACIONALIZAÇÃO DOS PERÍODOS

A expressão (X) indica que o custo mínimo é função do valor de uso do artigo, como se representa na fig. 2, pela curva  $K^*(U)$ .

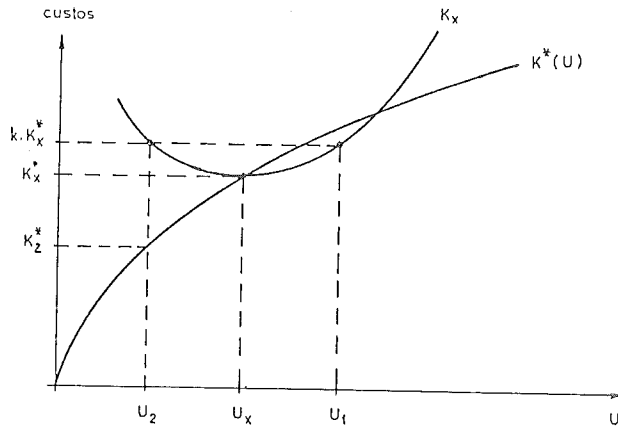


Fig. 2

Deste modo, um artigo caracterizado por  $U_x$ , terá um custo  $K^*$  se for adoptado o período

$$T^*_x = v / U_x^{1/2} \quad (\text{XIII})$$

Porém, se adoptarmos um período diferente, por exemplo

$$q \cdot T^*_x$$

então, o custo aumenta para

$$k \cdot K^*_x$$

estando  $q$  e  $k$  relacionados por (VI). Quer isto dizer que um artigo definido por  $U_x$ , tem um custo dado pela curva  $K_x$  (fig. 2), cujo mínimo se situa em  $K^*(U)$ .

Na mesma figura aparecem  $U_1$  e  $U_2$  que têm a particularidade de definirem sobre a curva  $K_x$ , o mesmo custo  $k \cdot K^*_x$ . Este último é o custo que resulta se adoptarmos para o artigo  $X$  os períodos

$$T_1 = v / U_1^{1/2}$$

ou

$$T_2 = v / U_2^{1/2}$$

O desvio em relação ao óptimo é, no primeiro caso,

$$q_1 = T_1/T^*_x = (U_x/U_1)^{1/2}$$

e no segundo

$$q_2 = T_2/T^*_x = (U_x/U_2)^{1/2}$$

E como o agravamento de custo  $k$  é o mesmo nos dois casos, conclui-se através de (VI), após algumas combinações analíticas, que

$$U_x = (U_1 \cdot U_2)^{1/2} \quad (\text{XIVa})$$

$$T^*_x = (T_1 \cdot T_2)^{1/2} \quad (\text{XIVb})$$

$$(q_2)^2 = (1/q_1)^2 = (U_1/U_2)^{1/2} = T_2/T_1 \quad (\text{XIVc})$$

Considere-se agora que  $T_1$  e  $T_2$  são dois períodos consecutivos de uma sucessão  $\dots, T_1, T_2, T_3, \dots, T_n$  à qual devem ser reduzidos todos os períodos teóricos. Para o artigo  $X$  é indiferente adoptar  $T_1$  ou  $T_2$  visto que o agravamento de custo é igual em ambos os casos. Todos os artigos cujos períodos teóricos estejam em  $(T_1, T^*_x)$  devem passar a  $T_1$  e os situados em  $(T^*_x, T_2)$  vão para  $T_2$ . Assim,  $X$  define a fronteira, devendo notar-se que ele é o artigo do intervalo  $(T_1, T_2)$  a que corresponde o maior agravamento de custo.

Para definir uma sucessão de períodos  $T_1, T_2, T_3, \dots, T_i, \dots$  um critério assente (Rambaux<sup>4</sup>) é o de fixar para todos os intervalos o mesmo agravamento máximo. Então decorre de (XIV) que

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{T_3}{T_2} = \frac{T_{i+1}}{T_i} = q^2 \quad (\text{XV})$$

a que corresponde o agravamento  $k$  dado por (VI). Repare-se que os sucessivos períodos estão em sucessão geométrica.

Exemplo: Admitindo um agravamento máximo de 2,5%, então

$$k=1,025; q_1=0,8; q_2=1,25; q_1^2=0,64; q_2^2=1,5625=1/q_1^2$$

Se pretendermos que um dos períodos seja  $T_1=1$  semana (5 dias), a sucessão vem:  $T_{i+1} = 1,5625 T_i = T_i/0,64$

T(semanas): 1,0; 1,6; 2,4; 3,8; 6,0; 9,3; 14,6; 22,7; 35,5; 55,5;...

T(dias): 5; 8; 12; 19; 30; 47; 73; 114; 178; 278;...

Se pretendermos incluir o período de 1 ano (52 semanas)

T(semanas): 52,0; 33,3; 21,3; 13,6; 8,7; 5,6; 3,6; 2,3; 1,5; 0,9;...

AGREGAÇÃO DE ENCOMENDAS

A agregação de encomendas refere-se à prática corrente de juntar diversos artigos na mesma nota de encomenda ao fornecedor. Assim o custo de reaproveitamento é repartido, tornando económico encomendar mais vezes e menos de cada vez.

O problema da agregação de encomendas tem sido tratado por diversos autores, em que se incluem Goyal<sup>4</sup>, Silver<sup>5</sup> e Bastian<sup>6</sup>. A abordagem habitual passa pelo estabelecimento de um período base de revisão para cada grupo de artigos com o mesmo fornecedor: cada artigo é então reaproveitado em múltiplos do período base, sendo o múltiplo tanto maior quanto menor for o valor de uso do artigo.

A agregação de encomendas, quando aplicada a todos os artigos em armazém, agrupados por fornecedor, torna conveniente a adopção de períodos em sucessão geométrica de razão 2, isto é:

$$\dots; 1; 2; 4; 8; 16; 32; 64; \dots$$

ou

$$T_i = T_0 \cdot 2^i; \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

Escolhido um qualquer termo da sucessão para período base, todos os outros termos são múltiplos ou sub-múltiplos daquele. Assim, serve a todos os grupos de artigos, mesmo que tenham períodos base distintos.

Para a sucessão referida

$$q^2 = T_{i+1}/T_i = 2$$

donde  $q = 2^{1/2}$ . O máximo agravamento de custo (para o artigo fronteira) vem dado pela relação (VI)

$$k = 1/2 (2^{1/2} + 1/2^{1/2}) = 1,06$$

isto é, 6%. Para os artigos cujos períodos teóricos coincidem com os termos da sucessão, naturalmente, não haverá agravamento, portanto, o valor médio, para o conjunto dos artigos, situar-se-á entre 0 e 6%, digamos a cerca de 3%.

Tal agravamento é, em geral, aceitável. Por exemplo, para um milhão de contos de mercadorias compradas por ano, sendo a taxa de posse  $F_1=25\%$  e o custo de aprovisionamento  $F_0=1$  conto/encomenda, a expressão (III) daria para custo óptimo de gestão  $K^*=707$  contos. Um agravamento de 3% seria da ordem dos 21 contos. Deve porém notar-se que a sucessão proposta facilita o agrupamento de encomendas, fazendo baixar o valor  $F_0$  respeitante a cada artigo. Se este valor passasse para 750 esc., o custo de gestão seria 691 contos (já com o agravamento de 3%), portanto, inferior ao da situação primitiva.

LIMITAÇÃO DO NÚMERO DE ENCOMENDAS

Cada artigo tem um período de revisão teórico dado por (I) quando é

estimado o custo de encomenda  $F_0$ ; ou dado por (VIII) quando se fixa o número total de encomendas  $N$ . Determinado o período teórico, escolhe-se o período prático, dentro da sucessão adoptada.

Nas fórmulas anteriores, o período vem expresso em anos e para o converter em semanas, a expressão (VIII) passa a

$$T^* = 52 \sqrt{v/U^{1/2}} \quad (\text{XVII})$$

Observe-se que o parâmetro  $v$ , obtido de (XII), caracteriza a situação global de reaprovisionamento, relativamente à qual o artigo possui um peso  $U$ . O valor de  $T^*$  permite determinar o período prático, dentro da sucessão adoptada.

Por exemplo, com a sucessão

$$T = 1, 2, 4, \dots, 64.$$

a fronteira entre  $T=1$  e  $T=2$  é (ver XIV)

$$T_{12} = (1 \times 2)^{1/2} = 1,41 \text{ semanas;}$$

e entre  $T=2$  e  $T=4$

$$T_{24} = (2 \times 4)^{1/2} = 2,87 \text{ semanas.}$$

Através de (XVII) vem

$$1,41 = 52 \sqrt{v/U^{1/2}} ; U^{1/2}/v = 36,77$$

$$2,87 = 52 \sqrt{v/U^{1/2}} ; U^{1/2}/v = 18,38$$

Procedendo de forma idêntica para todos os períodos da sucessão, obtém-se a seguinte tabela geral:

|             |       |       |       |      |      |      |      |
|-------------|-------|-------|-------|------|------|------|------|
| $U^{1/2}/v$ | ....  | 36,77 | 18,38 | 9,19 | 4,60 | 2,30 | 1,15 |
|             | 36,77 | 18,38 | 9,19  | 4,60 | 2,30 | 1,15 | .... |
| -----       |       |       |       |      |      |      |      |
| T(semanas)  | 1     | 2     | 4     | 8    | 16   | 32   | 64   |

Exemplo: Seja um artigo com  $U=2000$ , um armazém em que  $\varepsilon U^{1/2}=400$ . O número total de encomendas, por ano não deve exceder 200. Então

$$v = 400/200 = 2; U^{1/2}/v = 22,4; \text{ da tabela: } T=2 \text{ semanas}$$

Se pretendermos reduzir o mínimo de encomendas para 150, vem

$$v = 400/150=2,7; U^{1/2}/v=16,8; \text{ da tabela: } T = 4 \text{ semanas}$$

CONCLUSÃO

A análise apresentada permite determinar os períodos de revisão para os diversos artigos de um armazém, por redução a um pequeno conjunto de periodicidades distintas. Esse conjunto está subordinado ao agravamento de custo que se decide aceitar.

Um conjunto particularmente interessante corresponde a períodos segundo a sucessão

$$T_i = T_0 \cdot 2^i \quad (i = 0, 1, 2, \dots)$$

em que os períodos são múltiplos uns dos outros. O agravamento teórico de custo é da ordem dos 3%, mas na prática ele é largamente compensado pelas economias derivadas da agregação de encomendas.

Finalmente pode interligar-se a sucessão de periodicidades com a limitação, frequentemente imposta, sobre o número global de encomendas, utilizando a tabela fornecida.

A análise baseou-se em modelos determinísticos. Nas situações probabilísticas em que, na prática se adopta o período obtido por (I), então é inteiramente legítima a abordagem que foi aqui proposta. Já não acontece o mesmo se o período de revisão for calculado a partir de outros critérios.

REFERÊNCIAS

- (1) WILSON, R.H. (1934): A Scientific Routine for Stock Control. Harvard Business Review, 13, p.116-128
- (2) WILD, RAY (1979) : Production and Operations Management Holt, Rinehart and Winston
- (3) MURDOCH, J. (1965) : Coverage Analysis - A New Technique for Optimising the Stock Ordering Policy. Dep. Aeronautics, Cranfield Inst. Technology
- (4) RAMBAUX, A. : Gestão Económica dos Stocks. Ed. Pórtico
- (5) GOYAL, S.K. (1974) : Determination of Optimum Packaging Frequency of Items Jointly Replenished. Managt. Science, Vol. 21, p. 436
- (6) SILVER, E.A. (1976): A Simple Method of Determining Order Quantities in Joint Replenishments Under Deterministic Demand. Managt. Science, Vol. 22, p. 1351
- (7) BASTIAN, M. (1986) : Joint Replenishment in Multi-item Inventory Systems. J. Opl. Res. Soc., Vol. 37, 12, p.113



## DOIS ALGORITMOS ROBUSTOS PARA OPTIMIZAÇÃO NÃO-LINEAR

R. Salcedo  
M. J. Gonçalves  
J. Chorão  
J. Bastos  
S. Feyo de Azevedo

Departamento de Engenharia Química  
Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto  
Rua dos Bragas 4099 Porto Codex

### Resumo

Apresentam-se dois algoritmos de optimização que se complementam, permitindo em conjunto resolver um número significativo de problemas de optimização, com aplicação particular em Ciências Aplicadas.

O primeiro é uma variante do método de procura directa aleatória proposto originalmente por Luus e Jaakola. Resolve problemas não lineares com e sem restrições e mostra-se eficaz em ultrapassar óptimos locais.

O segundo algoritmo tem por base o método de Roth e Meyer, que é uma variante do método de Gauss-Newton para problemas com estrutura de mínimos quadrados. Inclui-se também neste algoritmo uma estratégia de procura final numa grelha alargada que se revela eficiente em ultrapassar o problema clássico dos mínimos locais.

Os dois algoritmos foram implementados em FORTRAN 77, em computadores Hewlett-Packard 310 e Apple Macintosh, tendo sido testados com funções objectivo severas, publicados na literatura para o efeito, e subsequentemente aplicados a problemas de engenharia. Apresentam-se assim resultados dos méritos de cada um dos algoritmos.

### Abstract

Two optimization algorithms are presented which complement each other and together cover a significant number of optimization problems, with particular application to Applied Science.

The first one was derived from the original random search method of Luus and Jaakola. It is found to be more efficient than the original method in dealing with non-linear constrained and unconstrained problems, successfully overcoming the difficulties of local minima.

The second algorithm is based in the 'modified damped least squares' approach of the Gauss-Newton method, proposed by Meyer and Roth. It takes advantage of the least squares structure and is most adequate for parameter estimation in non-linear models.

The routines are written in FORTRAN 77 and tests with sixteen functions, published in the literature, were performed both in Hewlett Packard 310 and an Apple Macintosh. Results are presented on the behaviour of each algorithm.

**Keywords:** Optimização, não-linear, procura aleatória, mínimos quadrados.

### Introdução

Optimização é essencialmente o processo colectivo de encontrar o conjunto de condições necessárias para, numa dada situação, obter os melhores resultados.

Três estágios emergem numa análise de estratégias que tenham em vista a gestão de recursos de um sistema, seja para o caso de um sistema de Engenharia ou outra ciência experimental.

O primeiro é o da concepção e subsequente validação de um modelo matemático. Esta validação deve resultar de uma sequência de passos envolvendo identificação e discriminação de modelos, estimativa de parâmetros e análise de sensibilidade. O segundo estágio consiste no desenvolvimento de estratégias alternativas de optimização. Este liga com o estágio final de implementação de soluções seleccionadas e de monitorização do sistema depois da implementação.

Sendo esta uma visão tão alargada, não surpreende que mesmo quando o domínio de aplicação é restrito se possa lançar mão de um número alargado de critérios para a organização e classificação de estudos de optimização.

Como Horn e Klein [1] comentaram, usam-se frequentemente três critérios de que resultam classificações independentes mas complementares desses estudos.

O primeiro critério tem a ver com o objectivo do trabalho. Essa ênfase pode estar (a) no método de optimização, (b) na teoria associada à área de aplicação ou (c) na melhoria de um sistema particular já existente.

O segundo critério baseia-se na natureza do modelo adoptado para a descrição do sistema. O modelo pode ser (1) inventado para efeito de teste, (2) uma estrutura determinística ou (3) uma representação tipo 'caixa preta'.

A associação de critérios tais como a-1 (a que mais se adapta ao conteúdo deste artigo), b-2, c-2 ou c-3 são comuns mas muitas outras combinações são possíveis.

Finalmente um terceiro critério baseia-se no número ou tipo de variáveis de optimização. De um ponto de vista matemático o número de variáveis pode ser finito e os métodos que resolvem estes casos são incluídos no campo da programação matemática. Noutros casos as variáveis de optimização podem ser contínuas e dependentes do tempo e/ou espaço, a função objectivo é representada por um funcional e os métodos usados caem no campo do cálculo variacional.

### Estratégias para funções não lineares

Na perspectiva de uma classificação de métodos de optimização baseada na natureza das funções dos problemas [2] dois casos com largo significado em Ciências Aplicadas correspondem respectivamente ao estudo de problemas com funções não lineares, sujeitas a restrições lineares ou não lineares e ao estudo de problemas com funções objectivo 'soma de quadrados de funções não lineares'.

Com a crescente disponibilidade de meios computacionais cada vez mais potentes deve encarar-se o desenvolvimento de algoritmos robustos para a solução dos problemas não lineares. Isto é, deve pôr-se a robustez antes da eficiência (medida em número de cálculos da função objectivo). O algoritmo que se apresenta tem por base o método de Luus e Jaakola [3], [4]. Trata-se de um método de procura directa aleatória que se mostra eficaz em ultrapassar óptimos locais na resolução de problemas com e sem restrições.

Problemas com estrutura de mínimos quadrados são parte do dia a dia da investigação e desenvolvimento em todas as áreas experimentais. Particularmente, com o desenvolvimento das estratégias de análise em tempo-real, tornam-se relevantes na área de controlo industrial [5]. Deve, nestes casos, utilizar-se uma estratégia que aproveite o facto de que perto do óptimo a matriz Hessiano pode ser aproximada pelo produto da matriz

Jacobiano transposta pela matriz Jacobiano. Aproveitando essa estrutura torna-se viável a utilização de métodos tipo Gauss-Newton e o conhecimento de uma estimativa final do Hessiano permite calcular dados estatísticos relevantes como é o caso da variância e dos intervalos de confiança das estimativas. O algoritmo que se implementou tem por base o método de Meyer e Roth [6]. Inclui uma estratégia de procura final numa grelha alargada, a qual se revela também eficiente em ultrapassar o problema clássico dos mínimos locais.

#### Métodos com procura aleatória

Luus e Jaakola [3] [7] [8], propuseram um algoritmo de resolução de problemas de funções objectivo na lineares, com restrições (lineares ou não lineares), por procura directa aleatória. O algoritmo tem vindo a beneficiar de alterações, nomeadamente as propostas por Gaines e Gaddy [9]. A partir de uma estimativa inicial  $\underline{z}_j$  ( $j=1, n$ ) do vector-solução de uma função objectivo  $F(\underline{v}_j; j=1, n)$  sujeita a restrições de desigualdade do tipo,

$$g_l(\underline{v}_j) \leq 0 \quad (j=1, n; l=1, m) \quad (1)$$

$$h_k(\underline{v}_j) \geq 0 \quad (j=1, n; k=1, r) \quad (2)$$

são efectuadas P1 procuras aleatórias (tentativas) dentro da região definida pelos intervalos de procura de cada parâmetro, segundo,

$$\underline{v}_j = \underline{z}_j + R\underline{r}_j \quad (j=1, n) \quad (3)$$

em que  $R$  é um número aleatório compreendido entre  $-1/2$  e  $+1/2$ , e  $r_j$  é a amplitude do intervalo de procura do parâmetro  $j$ . Toma-se então como novo ponto de partida o vector  $\underline{z}_j = \underline{v}_j$  ( $j=1, n$ ) que melhore a função objectivo sem violar as possíveis restrições impostas pelo problema. Após o cálculo de P1 vectores aleatórios reduz-se o intervalo de procura de cada parâmetro por um factor fixo  $\delta$ , de acordo com:

$$\underline{r}_j = \underline{r}_j * (1 - \delta) \quad 0 < \delta < 1; \quad j=1, n \quad (4)$$

O algoritmo terminará após P2 reduções dos intervalos de procura (explorações). Pode-se assim afirmar que o algoritmo de Luus e Jaakola procede por geração de vectores aleatórios em torno de óptimos locais, operando em intervalos de procura sucessivamente apertados.

A simplicidade de programação do algoritmo descrito, assim como a sua eficiência na optimização de funções com restrições [3] [7] [8] [9] [10] [11], tornam-no particularmente atractivo para a resolução de problemas de optimização em Engenharia.

#### Alterações ao algoritmo de Luus e Jaakola

Neste trabalho apresentam-se alterações ao algoritmo de Luus e Jaakola efectuadas no sentido de aumentar a probabilidade de a solução obtida corresponder ao óptimo global, insensibilizando essa mesma solução à estimativa inicial utilizada. Manteve-se no entanto a possibilidade de ser o utente a introduzir a estimativa inicial, caso assim o deseje.

A primeira alteração havia sido já proposta [10] [11], e consiste na determinação da função objectivo antes das restrições, pois o conhecimento desta é muitas vezes necessário para a determinação das próprias restrições.

O problema da sensibilidade da solução obtida à estimativa inicial foi ultrapassado fornecendo ao programa uma estimativa inicial muito afastada do óptimo (relativamente à função objectivo), estimativa essa que é encontrada (para problemas com restrições) mediante uma procura sistemática

de malha grosseira. Esta 'mã' estimativa garante a progressão do algoritmo. De facto, se a estimativa inicial for um óptimo local, com valor da função objectivo próximo do óptimo global mas em que os parâmetros estejam afastados dos valores correctos, pode suceder que o algoritmo de Luus e Jaakola não obtenha qualquer sucesso devido à redução excessiva dos intervalos de procura.

Ao contrário do algoritmo original de Luus-Jaakola, considerou-se o factor de redução dos intervalos de procura variável, isto é,  $\delta_j (j=1, n)$ , sendo o seu valor determinado pelo comportamento dos parâmetros, relativamente à função objectivo, ao longo do processo de optimização. Assim, optou-se por usar o valor  $\delta = .05$  (recomendado por Luus e Jaakola) desde que na passagem pelos sucessivos óptimos locais a variação nos parâmetros fosse inferior a 5%, reduzindo-se para  $\delta = .01$  se houvesse uma variação superior nos mesmos parâmetros. Isto permite uma procura aleatória mais cuidada no caso de algum dos parâmetros variar significativamente entre óptimos locais.

Consideraram-se três níveis de precisão, dependendo do número de explorações, como segue:

| Nível de Precisão | 1   | 2   | 3   |
|-------------------|-----|-----|-----|
| Nº de Explorações | 100 | 200 | 400 |

O primeiro nível tem como objectivo a determinação grosseira do óptimo global, prestando-se especial atenção aos extremos dos intervalos de procura, pois é nestes que muitas vezes se encontram os óptimos globais nos problemas com restrições.

O segundo nível tem como objectivo uma determinação mais apertada do óptimo global, com ampliação dos intervalos de procura para 10% do seu valor original, a partir da exploração 150, desde que o seu intervalo se tenha reduzido para menos de 10% do intervalo original. Novamente é aqui prestada especial atenção aos extremos dos intervalos de procura. A maior parte dos problemas conseguem-se resolver com precisão razoável utilizando 200 explorações e 100 tentativas/exploração, ou seja, com um máximo de 20000 cálculos da função objectivo.

O terceiro nível tem como principal objectivo aumentar a probabilidade do óptimo ser global e não local, assim como aumentar a precisão nos resultados. Isto consegue-se a partir do óptimo obtido no final de 200 explorações (nível 2), utilizando os intervalos de procura originais. No final de 400 explorações, os intervalos de procura encontram-se reduzidos a cerca de  $3 \times 10^{-5}$  do seu valor inicial.

Como alteração final, incluíram-se no algoritmo de Luus e Jaakola critérios de paragem relativamente à convergência na função objectivo e parâmetros da optimização. Como os critérios de paragem podiam conduzir ao aparecimento de óptimos locais como resultados finais da optimização, consideraram-se apenas como activados para o nível máximo de precisão (nível 3).

#### O algoritmo de Meyer e Roth

Em problemas clássicos de estimativa de parâmetros o modelo geral é da forma :

$$y(J) = f(\underline{x}(J), \underline{v}(J)) + \epsilon(J) \quad (5)$$

em que

$y(J)$  é o vector ( $m \times 1$ ) de observações sob condições  $\underline{x}(J)$

$\underline{x}(J)$  é o vector ( $q \times 1$ ) de variáveis independentes para o conjunto de condições especificados por  $J$

$\underline{y}^{(j)}$  é o vector (p x 1) de parâmetros desconhecidos

$\underline{f}^{(j)}$  é o vector (m x 1) de funções não lineares em  $\underline{y}$

$\underline{\epsilon}^{(j)}$  é o vector (m x 1) dos erros, incluindo todas as discrepâncias entre  $\underline{y}$  e  $\underline{f}$  (erros de medida, erros nas variáveis independentes e inadequações dos modelos)

A função a minimizar é da forma:

$$F(\underline{y}) = [\underline{\epsilon}^{(j)}]^T \underline{\epsilon}^{(j)} \quad (6)$$

em que  $[\underline{\epsilon}^{(j)}]^T$  é o transposto de  $\underline{\epsilon}^{(j)}$ .

Centre-se a análise num conjunto de condições especificadas por  $j$  e omite-se este índice para simplificar a escrita.

Para funções objectivo com estrutura de mínimos quadrados pode demonstrar-se [2] que a matriz Hessiano ( $H_{1j} = \partial^2 F / \partial v_1 \partial v_j ; 1, j = 1, p$ ) é dada por :

$$\underline{H} = 2 * [J^T J + (\sum \epsilon_1 \underline{G}^{(1)}, 1 = 1, m)]_{\underline{y}} \quad (7)$$

em que:

$\underline{G}^{(1)}(\underline{y})$  é a matriz Hessiano (p x p) de  $\epsilon_1(\underline{y})$

$\underline{J}(\underline{y})$  é a matriz Jacobiano (p x p) de  $\underline{\epsilon}(\underline{y})$

de onde, na vizinhança da solução:

$$\underline{H}(\underline{y}) = 2 \underline{J}^T(\underline{y}) \underline{J}(\underline{y}) \quad (8)$$

Também o vector  $\underline{g}(\underline{y})$ , gradiente de  $F(\underline{y})$  é calculado por:

$$\underline{g}(\underline{y}) = \underline{J}^T(\underline{y}) \underline{\epsilon}(\underline{y}) \quad (9)$$

A importância destas simplificações é grande para viabilizar o cálculo com métodos de 2ª ordem Além de mais, o conhecimento de estimativas do Hessiano permite o cálculo imediato da matriz das covariâncias  $\underline{C}(\underline{y})$ , para o mínimo  $(\underline{y})_{est}$  :

$$\underline{C}(\underline{y}) = \left[ (2F(\underline{y}) / (m-p)) * \underline{H}^{-1}(\underline{y}) \right]_{\underline{y} = (\underline{y})_{est}} \quad (10)$$

de onde se calcula a variância :

$$V_1(\underline{y}) = C_{11}(\underline{y}) \quad (11)$$

relevante para a estimativa dos intervalos de confiança individuais com probabilidade  $100(1-\beta)\%$ , %ICI:

$$\%ICI = t \frac{s_1(\underline{y}) * t(\beta/2, m-p)}{(\underline{y})_1_{est}} * 100 \quad (12)$$

em que  $s_1(\underline{y}) = [V_1(\underline{y})]^{1/2} \quad (13)$

e  $t(\beta/2, m-p)$  representa a distribuição t de Student.

O método proposto por Meyer e Roth[6] é uma extensão do método de Gauss-Newton, em linha com a variante de Hartley[12] e com sugestões anteriores de Levenberg[13], usando como matriz de pesos, para uma dada iteração, a matriz diagonal  $\underline{D}$  cujos elementos são os elementos da diagonal da matriz  $\underline{J}^T \underline{J}$ .

Em resumo, o método tem os seguintes passos:

(A) Arbitrar  $\underline{y}^{(0)}$

(B) Para a iteração  $J$

(i) determinar o passo de variação da estimativa- $\Delta^k(\lambda, \underline{y})$

$$\Delta^k(\lambda, \underline{y}) = (\underline{J}^T \underline{J} + \lambda \underline{D})^{-1} \underline{J}^T \underline{\epsilon} \quad (14)$$

em que  $\lambda$  é o parâmetro de amortecimento de Levenberg e Marquardt [14]

(ii) Minimizar  $F(\underline{y} + \gamma \Delta^k(\lambda, \underline{D}))$  (15)

o que significa uma procura de  $\gamma$ , 'factor de comprimento do passo'

Este é o procedimento genérico. O algoritmo, que foi implementado com base neste procedimento, inclui uma série de aspectos da maior relevância para a sua eficiência e que importa mencionar:

a) Executa procedimentos alternativos de procura de  $\gamma$  em função de condições de convergência demonstradas por Meyer e Roth, incluindo parâmetros de amortecimento a fornecer pelo utilizador. Em métodos numéricos não há soluções universais e assim esta flexibilidade é fundamental para o uso alargado do algoritmo.

b) A matriz Jacobiano é calculada numericamente.

c) Inclui critérios de decisão sobre um mínimo local a três níveis:

c1- em função da variação da função objectivo

c2- em função da variação do passo de procura

c3- em função dos valores do gradiente

d) Obtido um mínimo local, o algoritmo prevê uma grelha final de procura com acréscimos sucessivos em todos os parâmetros de 1%, 10%, 50% e 100%, que melhora a probabilidade de a procura conduzir ao mínimo global.

#### Implementação dos algoritmos

Os algoritmos descritos foram implementados num computador Apple Macintosh (UPC Motorola 68000 a  $\approx 7.8$  MHz) e num computador HP 310 (UPC Motorola 68010 a 8 MHz) em FORTRAN 77.

Como gerador de números pseudo aleatórios utilizou-se um gerador linear com características semelhantes à função de biblioteca RND do Basic Northstar [15].

Para o algoritmo de procura aleatório os critérios de paragem utilizados exigem o cumprimento simultâneo da condição da função objectivo (variação relativa entre sucessos  $< 10^{-5}$ ) e dos parâmetros a otimizar (variação média quadrática  $< 2.5 \times 10^{-5}$ ). Outros valores, menores, podem ser utilizados com possível penalização no tempo de execução. Não se recomenda a utilização de erros superiores, devido à possibilidade de ocorrência de ótimos locais como resultado final da optimização.

No algoritmo de Meyer e Roth utilizaram-se três critérios de paragem, (i) variação da função objectivo  $< 10^{-5}$ ; (ii) variação média quadrática dos parâmetros a otimizar  $< 10^{-6}$ ; (iii) máximo dos componentes do gradiente  $< 10^{-9}$ . A verificação de qualquer dos critérios leva a procura para a grelha final alargada. O critério (iii) só opera nos casos em que as condições de convergência levam a que a procura em linha só seja levada a cabo numa direcção.

O método para gerar o factor de amortecimento,  $\lambda$ , é semelhante ao

proposto por Marquardt. O valor inicial de 0.01 é razoável se bem que seja dependente do problema. Na iteração 1, faz-se  $\lambda_1 = \lambda_{1-1}/4$  se a procura foi caracterizada em todas as direcções ou então  $\lambda_1 = 4\lambda_{1-1}$  se a procura se faz numa direcção única.

### Comparação de algoritmos

Para testar os algoritmos descritos utilizaram-se funções de optimização severas, disponíveis na literatura para o efeito [6][11][16][17][18]. Nas tabelas 1-A e 1-B apresentam-se os 16 casos seleccionados.

O algoritmo modificado de Luus e Jaakola foi comparado com o algoritmo original, implementado por Beira [10][11].

As funções utilizadas, correspondentes a problemas com e sem restrições, e os resultados obtidos encontram-se na tabela 2. Todos os casos foram testados com as mesmas condições iniciais ( $\underline{z}_j, \underline{r}_j$ ;  $j=1, n$ ) e com os mesmos valores dos parâmetros de optimização ( $P1=100, P2=400$ ). Para o algoritmo original de Luus e Jaakola, utilizou-se o factor de redução  $\delta=0.05$ .

Para os problemas sem restrições, as estimativas iniciais foram as propostas pelos autores das várias funções tabeladas. Os intervalos de procura iniciais consideraram-se iguais a 12 vezes o valor absoluto das estimativas iniciais correspondentes, excepto para a funções nº1, 2 e 5 em que se obtiveram resultados mais correctos utilizando intervalos procura mais pequenos (1 o valor absoluto das estimativas iniciais).

Para os problemas com restrições, as estimativas iniciais foram determinadas pelo algoritmo, sendo os intervalos de procura definidos pelas restrições.

Possíveis melhorias no algoritmo proposto incluem uma maior insensibilização ao intervalo de procura inicial, para problemas sem restrições, assim como redução no tempo de execução. Estudos prosseguem nesse sentido(4).

Podem verificar-se que as alterações introduzidas no algoritmo de Luus e Jaakola melhoram substancialmente a sua eficácia na optimização de funções complexas com e sem restrições.

O estudo alargado que se apresenta na tabela 3 permite algumas conclusões relevantes:

- (i) O método de Meyer e Roth revela-se bastante adequado para a resolução de problemas de mínimos quadrados (funções nº 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7).
- (ii) O algoritmo modificado de Luus e Jaakola revela a sua robustez ao conseguir resolver problemas de mínimos quadrados (funções nº 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7). Tem obviamente a penalização do tempo e além de mais não dá a informação necessária aos cálculos estatísticos finais.
- (iii) Os testes do algoritmo de Luus e Jaakola modificado nos dois computadores fizeram emergir a sensibilidade do algoritmo aos números pseudo-aleatórios gerados.

Todos os casos excepto os correspondentes às funções 1, 2 e 5 apresentam soluções idênticas para os dois computadores, utilizando domínios iniciais de procura com um raio, em torno do ponto inicial, igual a duas vezes o valor absoluto da estimativa inicial.

No caso das funções 1 e 2, e com o HP, foi necessário limitar esse inicial ao valor absoluto da estimativa inicial. No caso da função 5

também com o Apple se teve de adaptar estes valores iniciais e o HP encontrou mínimos locais que não conseguiu ultrapassar. Neste último caso o problema só se resolveu com a escolha de novos valores iniciais.

Faz parte de qualquer estratégia de optimização testar as soluções com valores iniciais diferentes e assim este caso, que só reforça a necessidade deste procedimento, não afecta em nada as conclusões sobre a robustez do método.

#### AGRADECIMENTOS

O presente trabalho foi subsidiado parcialmente pelo INIC - Instituto Nacional de Investigação Científica, e pela JNICT - Junta Nacional de Investigação Científica e Tecnológica (Contrato nº 703.85.13).

#### REFERENCIAS

- [1] Horn, F and Klein, J., (1972), Adv. in Chem. Ser., 109, pg. 141
- [2] Gill, P.; Murray, W.; Wright, M., (1981), "Practical Optimization", Academic Press, N. Y.
- [3] Luus, R.; Jaakola, T.H. I., (1973), AIChE J., 19, nº 4, pg. 760
- [4] Salcedo, R.; M. J. Gonçalves; Fayo de Azevedo, S., "An Improved Random Search Algorithm for Non-linear Optimization", em preparação.
- [5] Gonçalves, M. J.; Chorão, J. M.; Fayo de Azevedo, S., (Maio de 1987), "Adaptação em linha de modelos não lineares de Processos Industriais; I- estimativa de parâmetros", Encontro de Microinformática em Engenharia Química, Ordem dos Engenheiros, Porto.
- [6] Meyer, R. R.; Roth, P. M. (1972), J. Ins. Maths. Applics., 9, pg. 218
- [7] Luus, R. R., (1975), Canad. J. of Chem Eng., 53, pg. 217
- [8] Luus, R. R., (1974), Chem Eng. Science, 29, pg. 1013
- [9] Gaines, L. D.; Gaddy, J. L., "Process Optimization by Flow Sheet Optimization", Ind. Eng. Chem Proc. Des. Dev., 15, 206 (1976)
- [10] Beira, E., (1976), "Optimização pelo método de Luus e Jaakola - Programa OPTIM", relatório interno nº 20, CEQ, FEUP, pg. 1, 27
- [11] Beira, E., (1976), "Programas de optimização por procura directa", relatório interno nº 35, CEQ, FEUP, pg. VII -1, 15
- [12] Hartley, H. O., (1961), Technometrics 3
- [13] Levenberg, K., (1964), Q. Appl. Math., 2, pg. 164
- [14] Marquardt, D. W., (1963), J. Soc. Ind. Appl. Math., 11, pg. 431
- [15] Ruckdeschel, F. R., (1981), "Basic Scientific Subroutines", vol. I, pg. 131
- [16] Wolfe, M. A., (1978), "Numerical Methods for Unconstrained Optimization", Van Nostrand, Reinhold Co., N. Y., Appendix B
- [17] Rudd, D. F.; Watson, C. C., (1968), "Strategy of Process Engineering", John Wiley & Sons, Inc., N. Y., Chap. 6, 8
- [18] Kuester, J. L.; Mize, J. H., (1973), "Optimization Technics with FORTRAN", McGraw-Hill, pg. 309



Tabela 1-A - Funções de teste utilizadas

| FUNÇÃO | AUTOR                          | FUNÇÃO DE TESTE   | VALORES INICIAIS   | OPTIMIZAÇÃO (autor)                               |
|--------|--------------------------------|---|--|---|
| 1      | Box[16]<br>(1958)              | $y=a+b \exp(c \cdot x)$   | a=20.0<br>b=2.0<br>c=0.5<br>obj=2*10 <sup>22</sup>       | a=15.5<br>b=1.2<br>c=.02<br>obj=10 <sup>-12</sup> |
| 2      | Box[16]<br>(1958)              | $y=a+b \exp(c \cdot x)$   | a=20.0<br>b=2.0<br>c=0.5<br>obj=2*10 <sup>22</sup>       | a=15.67<br>b=.999<br>c=.022<br>obj=.006           |
| 3      | Hartley[16]<br>(1961)          | $y=a+b \exp(c \cdot x)$   | a=580.0<br>b=-180<br>c=-.16<br>obj=30000                 | a=523.3<br>b=-157<br>c=-.1996<br>obj=13000        |
| 4      | Box e Hunter[16]<br>(1965)     | $y=a \cdot c \cdot x^2 / (1+a \cdot x^2+b \cdot x^2)$   | a=10.39<br>b=48.83<br>c=0.74<br>obj=.0365                | a=3.13<br>b=15.16<br>c=0.78<br>obj=.00004         |
| 5      | Meyer e Roth[16]<br>(1972)     | $y=a \cdot \exp[b/(c+x)]$   | a=0.02<br>b=4000.0<br>c=250.0<br>obj=1.7*10 <sup>9</sup> | a=0.0056<br>b=6181.4<br>c=345.2<br>obj=.68        |
| 6      | Pereyra[16]<br>(1976)          | $y=b \cdot \sin(a \cdot x) + c$   | a=0.9<br>b=0.9<br>c=0.1<br>obj=.016                      | a=1.0<br>b=1.0<br>c=0.0<br>obj=0.0                |
| 7      | Meyer e Roth[16]<br>(1972)     | $y=c \cdot [\exp(-a \cdot x^2) + \exp(-b \cdot x^2)]$   | a=12.0<br>b=1.0<br>c=25.0<br>obj=216                     | a=14.3<br>b=1.5<br>c=20.1<br>obj=0.0              |
| 8      | Rosenbrock[16]<br>(1960)       | $y=100 \cdot (b-a^2)^2 + (1-a)^2$   | a=-1.2<br>b=1.0<br>obj=24.2                              | a=1.0<br>b=1.0<br>obj=0.0                         |
| 9      | Colville[16]<br>(1968)         | $y=100 \cdot (a^2-b)^2 + (a-1)^2 + (c-1)^2 + 90 \cdot (c^2-d)^2 + 10 \cdot 1 \cdot ((b-1)^2 + (d-1)^2) + 19.8 \cdot (b-1) \cdot (d-1)$  | a=-3.0<br>b=-1.0<br>c=-3.0<br>d=-1.0                     | a=1.0<br>b=1.0<br>c=1.0<br>d=1.0                  |
| 10     | Miele e Cantrell[16]<br>(1969) | $y=(\exp(a)-b)^4 + 100 \cdot (b-c)^6 + (\tan(c-d))^4 + a^8$   | a=1.0<br>b=2.0<br>c=2.0<br>d=2.0<br>obj=1.26618          | a=0.0<br>b=1.0<br>c=1.0<br>d=1.0<br>obj=0.0       |
| 11     | Powell[16]<br>(1962)           | $y=(a+10b)^2 + 5(c-d)^2 + (b-2c)^4 + 10(a-d)^4$   | a=3.0<br>b=-1.0<br>c=0.0<br>d=1.0<br>obj=215             | a=0.0<br>b=0.0<br>c=0.0<br>d=0.0<br>obj=0.0       |
| 12     | Powell[16]<br>(1963)           | $y=100 \cdot ((c-10)^2 + (r-1)^2) + c^2$<br>$r=(a^2+b^2)^{.5}$<br>$\theta=1/(2\pi) \cdot \text{tg}^{-1}(b/a)$ , a>0<br>$\theta=1/(2\pi) \cdot \text{tg}^{-1}(b/a) + .5$ , a<0 | a=-1.0<br>b=0.0<br>c=0.0<br>obj=2500                     | a=1.0<br>b=0.0<br>c=0.0<br>obj=0.0                |
| 13     | Dixon[16]<br>(1973)            | $y=(1-x_2)^2 + (1-x_1)^2 + \{\sum(x_1-x_{1+i})^2, i=1,9\}$  | $X^0=[-2, \dots, -2]^T$<br>obj=342                       | $X^0=[1, \dots, 1]^T$<br>obj=0.0                  |

Tabela 1-A - (Cont)

| FUNÇÃO | AUTOR                                    | FUNÇÃO DE TESTE  | VALORES INICIAIS                          | OPTIMIZAÇÃO (autor)                      |
|--------|--|--|---|--|
| 14     | Powell [16] (1966)                       | $y = a^4 + a \cdot b + (1+b)^2$  | a=0.0<br>b=0.0<br>obj=1.0                 | a=.696<br>b=-1.35<br>obj=-.582           |
| 15     | Kuester e Mize [18] (1973) (maximização) | $y = 3803.84 + 138.08a + 232.92b - 123.08a^2 - 203.64b^2 - 182.25a \cdot b$<br>.1!a!2.5<br>.1!b!2.0  | a=2.5<br>b=2.0<br>obj=2119.82             | a=.2056<br>b=.48<br>obj=3873.92          |
| 16     | Luus e Jaakola [3] (1973)                | $y = c \cdot w f_1 + d \cdot w g_1$<br>b=50-a<br>f1=1.4609+.1586a+.00145a <sup>2</sup><br>g1=.8008+.2031b+.000916b <sup>2</sup><br>f2=1.5742+.1631a+.001358a <sup>2</sup><br>g2=.7266+.2256b+.000778b <sup>2</sup><br>18!a!30<br>14!b!25<br>0!c!1<br>0!d!1<br>(1-c)*f2+(1-d)*g2!10 | a=25<br>b=25<br>c=1<br>d=1<br>obj=12.7892 | a=30<br>b=20<br>c=0<br>d=.58<br>obj=3.05 |

Tabela 1-B - Dados auxiliares para as funções de teste

| FUNÇÃO | DADOS PARA AS FUNÇÕES DE TESTE  |
|--------|---|
| 1      | x : 1.0 5.0 10.0 15.0 20.0 25.0 30.0 35.0 40.0 50.0<br>-----<br>y : 15.5+1.2*exp(.02*x)                               |
| 2      | x : 1.0 5.0 10.0 15.0 20.0 25.0 30.0 35.0 40.0 50.0<br>-----<br>y : 16.7 16.8 16.9 17.1 17.2 17.4 17.6 17.9 18.1 18.7 |
| 3      | x : -5 -3 1 3 5 -1<br>-----<br>y : 127 151 421 460 426 379  |
| 4      | x1: 1.0 2.0 1.0 2.0 0.1<br>-----<br>x2: 1.0 1.0 2.0 2.0 0.0<br>-----<br>y : .125 .219 .076 .126 .186                  |

Tabela 1-B - (Cont)

| FUNÇÃO | DADOS PARA AS FUNÇÕES DE TESTE |                                      |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |      |      |      |
|--------|--------------------------------|--------------------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|------|------|------|
| 5      | x :                            | 50                                   | 55    | 60    | 65    | 70    | 75    | 80    | 85    | 90    | 95    | 100   |       |      |      |      |
|        | y :                            | 34780                                | 28610 | 23650 | 19630 | 16370 | 13720 | 11540 | 9744  | 8261  | 7030  | 6005  |       |      |      |      |
|        |                                | 105                                  | 110   | 115   | 120   | 125   |       |       |       |       |       |       |       |      |      |      |
|        |                                | 5147                                 | 4427  | 3820  | 3307  | 2872  |       |       |       |       |       |       |       |      |      |      |
| 6      | x :                            | 0, 105                               | 0, 25 | 0, 4  | 0, 55 | 0, 7  | 0, 9  | 1, 1  | 1, 25 | 1, 35 | 1, 45 | 1, 55 | 1, 57 | 1, 6 |      |      |
|        | y :                            | sin(x)                               |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |      |      |      |
| 7      | x1:                            | 0, 0                                 | 0, 6  | 0, 6  | 1, 4  | 2, 6  | 3, 2  | 0, 8  | 1, 6  | 2, 6  | 4, 0  | 1, 2  | 2, 0  | 4, 6 | 3, 2 | 1, 6 |
|        | x2:                            | 0, 0                                 | 0, 4  | 1, 0  | 1, 4  | 1, 4  | 1, 6  | 2, 0  | 2, 2  | 2, 2  | 2, 2  | 2, 6  | 2, 6  | 2, 8 | 3, 0 | 3, 2 |
|        | y :                            | 20. 1*(exp(-14. 3*x1)+exp(-1. 5*x2)) |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |      |      |      |
|        |                                | 4, 2                                 | 2, 0  | 3, 2  | 2, 8  | 4, 2  | 5, 4  | 5, 6  | 3, 2  |       |       |       |       |      |      |      |
|        |                                | 3, 4                                 | 3, 8  | 3, 8  | 4, 2  | 4, 2  | 4, 4  | 4, 8  | 5, 0  |       |       |       |       |      |      |      |
|        |                                | 20. 1*(exp(-14. 3*x1)+exp(-1. 5*x2)) |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |      |      |      |

Tabela 2 - Análise comparativa dos algoritmos de Luus e Jaakola (LJ) e Luus e Jaakola modificado (LJ<sub>mod</sub>)

| Função Nº | LJ                         |               | LJ <sub>mod</sub>           |              |
|-----------|----------------------------|---------------|-----------------------------|--------------|
| 5         | a=0, 010457                | obj=3738, 78  | a=5, 87062*10 <sup>-3</sup> | obj=106, 337 |
|           | b=5673, 26                 |               | b=6143, 50                  |              |
|           | c=327, 763                 | t=86, 5'      | c=343, 947                  | t=86, 0'     |
| 15        | a=0, 205033                | obj=3873, 92  | a=0, 205620                 | obj=3873, 92 |
|           | b=0, 480193                | t=9, 7'       | b=0, 479742                 | t=9, 0'      |
| 16        | a=28, 4262                 | obj=3, 074346 | a=29, 9750                  | obj=3, 05267 |
|           | b=21, 57                   |               | b=20, 0250                  |              |
|           | c=8, 2310*10 <sup>-7</sup> |               | c=1, 19783*10 <sup>-3</sup> |              |
|           | d=0, 547973                | t=14, 6'      | d=0, 581384                 | t=16, 0'     |

Tabela 3 - Resultados comparativos de algoritmos

| Função | LMOD (MAC)  | FR (MAC)   | Função | LMOD (MAC)   |
|--------|---|--|--------|--|
| 1      | a=15, 5591<br>b=1, 14530<br>c=.0205963                  | obj=7, 130*10 <sup>-5</sup><br>t=31, 0''<br>a=15, 5002<br>b=1, 19998<br>c=.020000                | 10     | a=5, 7580*10 <sup>-3</sup><br>b=1, 00591<br>c=1, 00805<br>d=1, 00805   |
| 2      | a=15, 8905<br>b=.804675<br>c=.0252115                   | obj=7, 750*10 <sup>-3</sup><br>t=31, 0''<br>a=15, 6731<br>b=.999381<br>c=.022219                 | 11     | a=-.0120329<br>b=.00160283<br>c=-.0144531<br>d=-.0143047   |
| 3      | a=523, 310<br>b=-156, 948<br>c=-.199671                 | obj=1, 539*10 <sup>4</sup><br>t=19, 0''<br>a=523, 307<br>b=-156, 950<br>c=-.1996653              | 12     | a=1, 00000<br>b=4, 22014*10 <sup>-7</sup><br>c=5, 11057*10 <sup>-6</sup>   |
| 4      | a=3, 14124<br>b=15, 1628<br>c=.778241                   | obj=4, 360*10 <sup>-5</sup><br>t=16, 0''<br>a=3, 14002<br>b=15, 1594<br>c=.778450                | 13     | k1=.999750<br>k2=.999966<br>k3=.999963<br>k4=1, 00021<br>k5=.999803<br>k6=1, 00016<br>k7=.999964<br>k8=.999907<br>k9=.999960<br>k10=1, 00023 |
| 5      | a=5, 87062*10 <sup>-3</sup><br>b=6143, 50<br>c=343, 947 | obj=106, 337<br>t=86, 0''<br>a=5, 60980*10 <sup>-3</sup><br>b=6181, 315<br>c=345, 2226           | 14     | a=.695860<br>b=-1, 34798<br>c=9, 0''   |
| 6      | a=.999974<br>b=.999970<br>c=3, 40000*10 <sup>-5</sup>   | obj=1, 500*10 <sup>-9</sup><br>t=36, 0''<br>a=1, 00000<br>b=.999999<br>c=3, 938*10 <sup>-7</sup> | 15     | a=.205620<br>b=.479742<br>c=9, 0''   |
| 7      | a=13, 3995<br>b=1, 50024<br>c=20, 0999                  | obj=7, 800*10 <sup>-6</sup><br>t=75, 0''<br>a=14, 29915<br>b=1, 50000<br>c=20, 1000              | 16     | a=29, 9750<br>b=20, 0250<br>c=1, 19783*10 <sup>-3</sup><br>d=.581394   |
| 8      | a=.999955<br>b=.999916                                  | obj=4, 500*10 <sup>-9</sup><br>t=9, 0''  |        | obj=3, 05267<br>t=16, 0''  |
| 9      | a=.999996<br>b=.999997<br>c=1, 00000<br>d=1, 00000      | obj=1, 380*10 <sup>-10</sup><br>t=20, 0''  |        |  |

# RESOLUÇÃO DUM PROBLEMA DE TRANSPORTES QUE MINIMIZA O CUSTO TOTAL E A DURAÇÃO DE TRANSPORTE

Mário S. Rosa

Departamento de Matemática  
Universidade de Coimbra

## Resumo

Associado a um grafo bipartido considera-se um problema de transportes com dois objectivos: primeiro o de minimizar o custo total de transporte e segundo o de minimizar a duração desse transporte. Reduz-se este problema a um tipo "goal programming", para o qual se obtém uma solução pela aplicação do clássico algoritmo de transportes.

## Abstract

For a bipartite graph a transportation problem with two objectives has been studied. The primary is to minimize the total cost and the secondary is to minimize the duration of transportation. The problem is reduced to a goal programming-type problem for which a solution is obtained by the standard transportation algorithm.

**Keywords:** Transportation Problem, Linear and Goal Programming.

## 1. Introdução

O problema da minimização do custo total de transporte é um problema cujo estudo é conhecido de há muito. Mais recentemente o problema da minimização da duração de transporte tem sido estudado por vários autores, entre os quais salientamos os trabalhos de Hammer<sup>1</sup>, Garfinkel e Rao<sup>2</sup> e Szwarc<sup>3</sup>. Este trabalho apresenta uma unificação daqueles dois problemas num único. Consideramos um problema de transportes com dois objectivos: em primeiro lugar o de minimizar o custo total de transporte e em segundo lugar o de minimizar a duração desse transporte. Este problema de dois objectivos reduz-se a um do tipo "goal-programming" que produz uma solução através da aplicação do clássico algoritmo de transportes.

## 2. Formulação do problema

Sejam  $n$  origens  $O_i$  e  $m$  destinos  $d_j$ ,  $a_i$  quantidade disponível na origem  $i$  ( $i=1,2,\dots,n$ ) e  $b_j$  quantidade requerida no destino  $j$  ( $j=1,2,\dots,m$ ), com  $\sum_i a_i = \sum_j b_j$  (sem perda de generalidade), e admitamos que é possível o transporte de qualquer origem para qualquer destino. Além disso admitamos que a duração de transporte de  $O_i$  para  $d_j$  não depende da quantidade a transportar.

Sejam:  $t_{ij}$  o tempo de transporte da mercadoria,  $c_{ij}$  o respectivo custo

unitário de transporte e  $x_{ij}$  o número de unidades a transportar de  $O_i$  para  $d_j$ ,  $v(i,j)$ .

A formulação matemática do problema é a seguinte:

Determinar  $x_{ij}$ ,  $i=1, \dots, n$ ;  $j=1, \dots, m$  que

$$19) \text{ Minimizar } Z_0 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m c_{ij} x_{ij} \quad (1)$$

$$29) \text{ Minimizar } t = \max_{(i,j)} \{t_{ij} : x_{ij} > 0\} \quad (2)$$

s.a.

$$\sum_{j=1}^m x_{ij} = a_i, \quad i=1, \dots, n \quad (3)$$

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} = b_j, \quad j=1, \dots, m \quad (4)$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad v(i,j) \quad (5).$$

### 3. Técnica de resolução

Como a f.o. dada em (2) é não linear, o problema é um problema não linear.

Indicaremos a seguir uma técnica para obtenção duma solução para o mesmo. Para o efeito, vamos reduzir este problema a um problema do tipo "goal-programming". Para isso, particionemos o conjunto dos tempos  $\{t_{ij}; v(i,j)\}$  em subconjuntos  $T_k$  do seguinte modo:

- cada  $T_k$  é constituído de elementos  $t_{ij}$ , todos com o mesmo valor.
- $T_1$  contem os  $t_{ij}$  de maior valor,  $T_2$  contém os  $t_{ij}$  de maior valor seguinte e assim sucessivamente até  $T_q$  que conterá os  $t_{ij}$  de valor mais baixo.

Seguidamente atribuíamos coeficientes de prioridade  $P_0, P_1, \dots, P_q$  respectivamente a  $Z_0, \sum_{T_1} x_{ij}, \dots, \sum_{T_q} x_{ij}$ , em que:

- $\sum_{T_k} x_{ij}$  é a soma dos  $x_{ij}$  a transportar de  $O_i$  para  $d_j$  associados aos  $t_{ij}$  pertencentes a  $T_k$ , ( $k=1, 2, \dots, q$ ).
- Os coeficientes  $P_k$  satisfazem às relações seguintes:

$$P_k \gg P_{k+1} \quad (k=0, 1, 2, \dots, q-1) \quad (6)$$

( $P_k$  é muito maior que  $P_{k+1}$ ).

Estamos agora em condições de formular o problema alternativo de cuja solução óptima se extrairá a solução desejada para o problema original. O problema alternativo é o seguinte:

$$\min Z = P_0 Z_0 + \sum_{k=1}^q P_k \left( \sum_{T_k} x_{ij} \right) \quad (1')$$

$$\text{s.a.} \quad \sum_{j=1}^m x_{ij} = a_i, \quad i=1, 2, \dots, n \quad (2')$$

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} = b_j, \quad j=1,2,\dots,m \quad (3')$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad \forall(i,j) \quad (4')$$

Note-se que o problema dado é equivalente ao problema alternativo, uma vez que minimizando  $Z$  em (1') determina-se  $x_{ij} \geq 0$  ( $\forall i,j$ ) para os quais o custo e a duração de transporte são mínimos, de acordo com as prioridades estabelecidas acima para os  $x_{ij}$ . De facto, quando minimizamos  $Z$  dado por (1') o custo total de transporte  $Z_o = \sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij}$  é minimizado na sua máxima extensão possível, a seguir sê-lo-ã a soma  $\sum_{T_1} x_{ij}$ , associada aos  $t_{ij} \in T_1$ , depois  $\sum_{T_2} x_{ij}$ , etc. até  $\sum_{T_q} x_{ij}$ .

Deste modo, o custo total de transporte para a solução desejada é dada pelo coeficiente de  $P_o(Z_o)$ , na expressão (1') após a minimização. Além disso, sendo

$$P_r = \max_{1 \leq k \leq q} \{P_k : \sum_{T_k} x_{ij}^* > 0\}$$

após a minimização de  $Z$  em (1'), então a duração de transporte  $t^*$  para a solução desejada é dada pelo valor comum dos  $t_{ij} \in T_r$ .

Este problema alternativo é um problema do tipo "goal-programming" cuja solução facilmente se obtém pelos métodos clássicos de programação linear aplicados a problemas de transporte.

#### 4. Exemplo numérico

Consideremos o exemplo simples com  $n=3, m=4$  e em que  $a_i = 5, i=1,2,3, b_1=1, b_2=6, b_3=2, b_4=6$  e ainda

$$C = (c_{ij}) = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 7 & 3 \\ 4 & 2 & 1 & 5 \\ 3 & 5 & 2 & 3 \end{bmatrix} \text{ e } T = (t_{ij}) = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Assim, vem:

$$T_1 = \{t_{24}\}, \quad T_2 = \{t_{13}\}, \quad T_3 = \{t_{12}, t_{21}, t_{33}\}$$

$$T_4 = \{t_{11}, t_{22}, t_{32}, t_{34}\}, \quad T_5 = \{t_{14}, t_{23}, t_{31}\}; \quad q=5$$

seleccionando  $P_o, P_1, P_2, P_3, P_4, P_5$  de acordo com (6), o problema alternativo a resolver é o seguinte

$$\begin{aligned} \min Z = P_o & \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^4 c_{ij} x_{ij} + \sum_{k=1}^5 P_k (\sum_{T_k} x_{ij}) \\ & \sum_{j=1}^4 x_{ij} = a_i, \quad i=1,2,3 \\ & \sum_{i=1}^3 x_{ij} = b_j, \quad j=1,2,3,4 \\ & x_{ij} \geq 0, \quad \forall(i,j). \end{aligned}$$

Para os dados do problema resultará a tabela de 'custos':

$$\begin{bmatrix} 4P_o + P_4 & 5P_o + P_3 & 7P_o + P_2 & 3P_o + P_5 \\ 4P_o + P_3 & 2P_o + P_4 & P_o + P_5 & 5P_o + P_1 \\ 3P_o + P_5 & 5P_o + P_4 & 2P_o + P_3 & 3P_o + P_4 \end{bmatrix},$$

e a solução ótima  $X^* = \{x_{ij}^*\}$  obtida é a seguinte:

| $a_i \backslash b_j$ | 1 | 6 | 2 | 6 |
|----------------------|---|---|---|---|
| 5                    |   |   |   | 5 |
| 5                    |   | 5 |   |   |
| 5                    | 1 | 1 | 2 | 1 |

←  $\{x_{ij}^*\}$

Deste modo o custo total de transporte para aquela solução vale  $Z_o^* = 40$ . Além disso, sendo

$$P_3 = \max_{1 \leq k < 5} \{P_k : \sum_{T_k} x_{ij}^* > 0\},$$

então a duração de transporte,  $t^*$ , para a solução encontrada é dada pelo valor comum dos  $t_{ij} \in T_3$ ,  $t^* = 3$ .

#### Referências

1. Hammer, P.L. - Time minimizing transportation problems, NRLQ, 18, 478-490 (1971).
2. Garfinkel, R.S. and Rao, M.R., - The bottleneck transportation problem, NRLQ, 18, 465-472 (1971).
3. Szwarc, W., - Some remarks on time transportation problems, NLRQ, 18, 473-485 (1971).



## GERAÇÃO DE TOPOLOGIAS DA REDE DE SUPORTE AO SISTEMA MHS

Helena Lourenço

D.E.I.O.C.  
Faculdade de Ciências de Lisboa  
Av. 24 de Julho, 134-5º  
1300 Lisboa

### Resumo

Pretendendo-se criar uma rede de suporte a um sistema de comunicação de mensagens (MHS-"Message Handling System"), surge a necessidade da escolha física dos centros (ou nós) de comutação de mensagens desse sistema, designados por MTAs ("Message Transfer Agent"). Os MTAs serão escolhidos no conjunto dos Centros de Grupo de Redes (CGR) do Sistema Nacional de Telecomunicações, a partir do conhecimento da matriz de custos de transmissão e/ou da matriz de distâncias entre os CGRs.

Este problema foi formulado como problema da p-mediana de um grafo. Para a sua resolução foi implementada a heurística de Teitz e Bart, que permite a obtenção de diversas topologias para a rede. Estas contribuirão para uma melhor decisão sobre a escolha do número de MTAs, a sua localização e a ligação dos MTAs escolhidos.

**Keywords:** p-mediana, localização, sistema MHS.

### Abstract

When creating a support network for message communication (MHS-Message Handling System) there arises the problem of choosing the physical location for the switching centers of the message system.

A message switching center, called MTA (Message Transfer Agent) in the case of the MHS system, can be either a computer or simply a piece of software.

The available data consists of:

- a list of the possible locations for the message switching nodes which, in our case, correspond to the "Centros de Grupo de Redes" (CGR's, Network Group Centers) of the National Telecommunication System;
- the expected number of users associated with each CGR;
- the cost of transmission between the CGR's for each channel;
- eventually, the matrix of distances between the CGR's.

The problem was formulated as a p-median location problem and, for its resolution, a heuristic method presented by Teitz and Bart was implemented. That allows the obtaining of various topologies for the network, contributing to a better decision on the following:

- the choice of a reasonable number of MTA's in the CGR set and the corresponding physical location;
- the assignment of each CGR to the MTA's;
- eventually, the global transmission costs associated with the solution.

**Keywords:** location, heuristics, networks/graphs.

## 1. Introdução

Pretendendo-se criar uma rede de suporte a um sistema de comunicação de mensagens (MHS—"Message Handling System"), surge a necessidade da escolha da localização física dos centros (ou nós) de comutação de mensagens desse sistema.

Um centro de comutação de mensagens pode ser um computador dedicado ou simplesmente "software" de aplicação e tem a designação MTA ("Message Transfer Agent", no caso do sistema MHS).

Os dados disponíveis (ou possíveis de adquirir) são:

- lista de possíveis nós de comutação de mensagens, que correspondem aos Centros de Grupos de Redes (CGRs) do Sistema Nacional de Telecomunicações (SNT);
- número expectável de utilizadores associados a cada CGR;
- matriz de custos de transmissão entre os CGRs, por canal de transmissão;
- eventualmente, a matriz das distâncias entre os CGRs.

O objectivo é obter diversas topologias para a rede, que contribuirão para uma melhor decisão do seguinte:

- escolha de um número razoável de MTAs e a sua localização física a partir do conjunto de CGRs;
- qual a atribuição de CGRs aos MTAs escolhidos;
- eventualmente, custos globais de transmissão associados à solução encontrada.

O problema é, então, basicamente um problema de localização dos nós de comutação [1] [3], que consiste em determinar:

- o número de nós de comutação;
  - a sua localização;
  - a afectação de terminais aos nós de comutação seleccionados;
- baseando-se nos possíveis dados:
- num conjunto de nós candidatos à colocação de um nó de comutação;
  - localização dos terminais e custo da ligação dos terminais aos candidatos a nós de comutação;
  - tráfego gerado por cada terminal;
  - capacidade dos nós de comutação (caso existam).

Para resolver este problema foram encontradas diversas abordagens e para o caso específico em estudo adoptou-se o problema da p-mediana de um grafo, devido às características do problema, sendo este apresentado no próximo parágrafo.

Para a sua resolução foi implementada a Heurística de Teitz e Bart, descrita no parágrafo 3.

Em anexo, apresenta-se algumas informações importantes do problema em causa:

6.1 O sistema MHS. O que é?

6.2 Mapas de alguns resultados obtidos.

## 2. O problema da p-mediana de um grafo

O problema consiste [2]:

Dados:

- (i) o conjunto de possíveis nós de comutação  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  (designados por vértices).
- (ii) matriz de custos entre os vértices  $D = [d_{ij}]$ .

- (iii) o número de nós de comutação a instalar ( $p$ ).
- (iv) o peso de cada vértice ( $v_j, j = 1, 2, \dots, n$ ).

Objectivo: pretende-se escolher os  $p$  nós e determinar a afectação dos vértices aos  $p$  nós de comutação de forma a minimizar os custos.

No caso do sistema MHS:

- (i) os vértices correspondem aos CGRs;
- (ii)  $D$  é a matriz de custos de transmissão;
- (iii) este valor  $p$  que indica o número de nós de comutação a instalar pode ser um valor dado como aceitável. No entanto, mais tarde se verá que tem interesse resolver este problema para valores de  $p$  que vão de  $p_1$  a  $p_2$ , sendo  $p_1$  e  $p_2$  os limites inferiores e superiores, respectivamente, do número de nós de comutação a instalar;
- (iv) o peso  $v_j$  corresponde ao número expectável de utilizadores associados a cada CGR;
- (v) ao ter como objectivo minimizar os custos, significa que se pretende escolher os  $p$  nós tal que a soma do custo de transmissão de cada vértice aos nós de comutação vezes o peso do vértice é mínima.

O problema pode ser formulado como um problema de programação inteira, ou seja:

$$y_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se o vértice } x_j \text{ está afecto ao vértice } x_i; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Notar que,  $y_{ii} = 1$  se o vértice  $x_i$  está na  $p$ -mediana, ou seja é um nó de comutação. Formulação do problema [ P ]:

$$\min Z = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n v_j d_{ij} y_{ij}$$

sujeito a:

$$\sum_{i=1}^n y_{ij} = 1, \quad j = 1, \dots, n \tag{1}$$

$$\sum_{i=1}^n y_{ii} = p, \tag{2}$$

$$y_{ij} \leq y_{ii}, \quad i, j = 1, \dots, n \tag{3}$$

$$y_{ij} = 0 \text{ ou } 1, \quad i, j = 1, \dots, n \tag{4}$$

- (1) garante que cada vértice  $x_j$  só está afecto a um e um só vértice  $x_i$  da  $p$ -mediana (vértice onde se irá colocar um nó de comutação).
- (2) garante que existem  $p$  vértices na  $p$ -mediana.
- (3) garante que cada vértice só está afecto a um vértice da  $p$ -mediana.

Então a solução óptima é:

$$\bar{X}_p = \{x_i : y_{ii} = 1\}$$

e  $x_j$  está afecto a  $x_i$  se  $y_{ij} = 1$ .

Se obtivermos a relaxação linear de P, [  $\bar{P}$  ], pode-se facilmente resolver o problema, no entanto, não existe a garantia de se obter a solução óptima, pois a solução óptima de [  $\bar{P}$  ] não será necessariamente inteira.

A heurística apresentada, descrita por Teitz e Bart [2], é eficiente e as soluções obtidas por esta encontram-se, usualmente, muito perto da solução óptima. No entanto, a solução óptima não é garantida.

### 3. Heurística de Teitz e Bart

Defina-se:

$$d(X_p, x_j) = \min_{x_i \in X_p} d_{ij}$$

Seja:

$$\sigma(X_p) = \sum_{x_j \in X} v_j d(X_p, x_j)$$

O objectivo é determinar:

$$\bar{X}_p = \min_{X_p \subseteq X} \sigma(X_p)$$

Para se obter a solução óptima seria então necessário determinar todos os subconjuntos de  $X$  com  $p$  vértices, calcular o seu custo e escolher o de menor custo para a  $p$ -mediana.

O número de subconjuntos, quando temos  $n$  vértices, seria  $\binom{n}{p}$ . É evidente que para problemas de grandes dimensões a obtenção destes subconjuntos consome muito tempo computacional.

A ideia básica da heurística é construir alguns destes subconjuntos, calcular o seu custo e escolher o de menor custo.

Descrição da heurística: Seja  $S$  um conjunto de  $p$  vértices.

1. Escolher o conjunto  $S$  de  $p$  vértices para tomar a aproximação inicial para a  $p$ -mediana. Todos os outros vértices pertencem ao conjunto  $UT$  ("untried").
2. Seleccionar um vértice  $x_j \in UT$  e para cada vértice  $x_i \in S$  calcular  $\Delta_{ij}$  (redução ao substituir  $x_i$  por  $x_j$ ) ou seja,

$$\Delta_{ij} = \sigma(S) - \sigma(S \cup \{x_j\} - \{x_i\})$$

3. encontrar  $i_o$ :

$$\Delta_{i_o, j} = \max_{x_i \in S} [\Delta_{ij}]$$

- i) se  $\Delta_{i_o, j} \leq 0$  então  $x_j \in T$  ("Tried") e ir para 2.
- ii) se  $\Delta_{i_o, j} > 0$  então:

$$S \leftarrow S \cup \{x_j\} - \{x_{i_o}\}$$

$$x_j \in T, \quad \text{ir para 2.}$$

4. Repetir os passos 2. e 3. até todos os vértices em  $UT$  pertencerem a  $T$  (referente a um ciclo). Se durante o último ciclo nenhum vértice foi substituído no passo 3.(ii), ir para 5. . Senão, se alguma substituição foi feita, chamar todos os vértices  $\notin S$  "untried" ( $\in UT$ ) e voltar ao passo 2. .
5. Stop.

É de notar que a escolha do  $S$  inicial é importante. Existem várias formas de inicializar o  $S$ :

- escolher os  $p$  primeiros vértices;
- aleatoriamente;
- escolher os  $p$  vértices com maior peso.

Optou-se pelo último critério, ou seja o  $S$  inicial vai ser constituído pelos  $p$  vértices a que corresponde maior peso  $v_j$ . A razão desta escolha é o interesse em colocar os nós de comutação em zonas de elevado número de prováveis utilizadores. Além disso, irá provocar que o custo do  $S$  inicial já seja relativamente baixo.

No problema estudado o valor de  $p$  é considerado um dado. No entanto, pode-se não conhecer o número de nós de comutação a instalar, mas é admissível que se conheça um limite inferior  $p_1$  e um limite superior  $p_2$  para esse número. Estes valores poderão ser estimados baseados no número de utilizadores que pretendem aceder à rede e no orçamento para a instalação da rede, respectivamente.

Pode-se, então, resolver o problema usando a heurística descrita de  $p = p_1, p_1 + 1, \dots, p_2$  e no final obter os vários cenários e respectivos custos. Notar que, no problema real em causa não se procura uma solução óptima final mas a obtenção de cenários que irão contribuir para a decisão final.

#### 4. Conclusões

A heurística foi utilizada para 3 tipos de dados diferentes correspondentes ao número de utilizadores previstos para 3 anos diferentes: 1989, 1991 e 1995 a 2000. A matriz de custos (C) utilizada é igual para os 3 tipos de dados pois não se prevêem grandes variações para esta matriz, ou seja os custos podem mudar nos próximos anos, mas se isso acontecer terão uma variação proporcional ( $kC$ , onde  $k$  é uma constante). Determinou-se, para cada um dos exemplos, a  $p$ -mediana para  $p = 1$  a 6.

Após a resolução dos 3 exemplos pode-se salientar que os MTAs escolhidos estavam situados nos seguintes locais:

| valor de $p$ : | locais:                                     |
|----------------|---|
| 1              | Lisboa                                      |
| 2              | Lisboa, Porto                               |
| 3              | Lisboa, Porto, Coimbra                      |
| 4              | Lisboa, Porto, Coimbra, Faro                |
| 5              | Lisboa, Porto, Coimbra, Faro, Braga         |
| 6              | Lisboa, Porto, Coimbra, Faro, Braga, Aveiro |

A afectação dos CGRs aos MTAs escolhidos não variou ao longo dos anos. Alguns resultados das ligações resultados são apresentados em mapas na secção 6. (anexo 6.2).

#### 5. Bibliografia

- [1] Helena Lourenço, "Algoritmos para o projecto de redes de comunicação de dados", Parte I e II, Relatório de Estágio, DEIOC Faculdade de Ciências de Lisboa, 1987.
- [2] Christofides N., "Graph theory", Academic Press, 1975.
- [3] Hakimi S. L., "Optimum distribution of switching centres in a communications networks and some related graph theoretical problems", Operations Research, vol.13, 1965, pp.462.

#### 6. Anexos

##### 6.1 O sistema MHS. O que é?

É um sistema "store-and-forward", que flexibiliza as conversões de protocolos, sinalizações, de formatos, de débitos binários, etc., entre os vários terminais, possibilitando assim a comunicação entre os terminais de Telex, Teletex, Videotex, Telecópia e, de modo geral, terminais com ou sem 'inteligência', bem como o interfuncionamento de sistemas incompatíveis de "electronic mail".

Os utilizadores deste serviço passarão assim, a dispôr de facilidades de comunicação de texto, superiores ao Telex. Os preços de utilização deste serviço serão expectavelmente inferiores aos do Telex pelo que a troca de informação escrita entre empresas poderá assumir um papel cada vez mais relevante na comunicação profissional.

Algumas das características dos novos serviços de comunicação de texto apoiados numa infraestrutura MHS são:

- mensagens de características mistas - alfanuméricas/gráficas;
- rapidez na troca de mensagens;
- acesso internacional;
- acesso aos serviços independentemente da situação geográfica do utilizador;
- entrega de mensagens na ausência do receptor;
- capacidade de difusão directa ou pré-programada para diferentes horários de emissão.









## O PROBLEMA DOS K TRAJECTOS MAIS CURTOS

Maria Emília Costa

Departamento de Matemática  
Universidade de Coimbra  
300-Coimbra-Portugal

### Resumo

O problema dos  $k$  trajectos mais curtos é normalmente considerado em duas versões diferentes: a primeira consiste na determinação dos  $k$  caminhos mais curtos e a segunda na determinação dos  $k$  trajectos mais curtos, quer eles contenham ou não ciclos. Para abordar as duas versões do problema, neste trabalho, faz-se uma descrição sumária de alguns algoritmos, como por exemplo, o de Hoffman e Pavley (posteriormente melhorado por Dreyfus), o de Yen (algoritmo clássico para a determinação dos  $k$  caminhos mais curtos), o de Shier (generalização do algoritmo de Yen para a determinação do caminho mais curto) e o de Martins (baseado em princípios totalmente diferentes dos restantes).

### Abstract

The problem of the  $k$  shortest paths is generally considered in two different versions: the first one is the determination of the  $k$  shortest loopless paths and the second one is the determination of the  $k$  shortest paths, either they have cycles or not. In order that we may occupy ourselves with the two versions of the problem, in this work a concise description of some algorithm is made, as, for instance, that of Hoffman and Pavley (improved afterwards by Dreyfus), that of Yen (classical algorithm for the determination of the  $k$  shortest loopless path), that of Shier (generalization of the Yen algorithm for the determination of the shortest loopless path) and that of Martins (based in principles completely different from the remainder).

**Keywords:** Rede, trajecto, caminho, ciclo.

### 1. INTRODUÇÃO

Problemas relacionados com certos sistemas físicos, tais como os que podem ser representados por redes de transporte, de comunicação ou de distribuição, exigem muitas vezes o conhecimento de soluções de alternativa à solução óptima. Por exemplo, na entrega de mensagens por parte dos meios de comunicação numa rede de serviço, quando alguns troços estão temporariamente obstruídos ou parcialmente destruídos. Problemas nos quais, um dado conjunto de condições é difícil de incorporar directamente no modelo, podem também ser "resolvidos" com o conhecimento de soluções de alternativa à solução óptima. Deste modo em alguns problemas concretos de optimização é útil a determinação das  $K$  melhores soluções ( $K > 1$ ). Note-se ainda que, em muitos casos, o valor de  $K$  não é conhecido "à priori", sendo pois necessário determinar as soluções por ordem não crescente ou não decrescente do valor da função objectivo, conforme o problema seja uma minimização ou uma maximização.

## 2. BREVES NOÇÕES DE TEORIA DOS GRAFOS

Seja  $(N, a)$  uma rede orientada (ou simplesmente rede) constituída por um par de conjuntos finitos  $N$  e  $a$ , onde  $N = \{1, 2, \dots, n\}$  e  $a = \{(i, j) / i \neq j, i, j \in N\}$ . Os elementos de  $N$  são designados por *vértices* ou *nodos* e os elementos de  $a$  são designados por *arcos*. Relativamente ao arco  $(i, j) \in a$ , chama-se vértice *antecessor* a  $i \in N$  e vértice *sucessor* a  $j \in N$ . Sem perda de generalidade admite-se a não existência de 'loops' em  $(N, a)$ , ou seja, de arcos do tipo  $(i, i)$  com  $i \in N$ , bem como a não existência de mais do que um arco entre cada par de vértices.

Um *trajecto* do vértice  $i \in N$  para o vértice  $j \in N$  em  $(N, a)$ , é uma sucessão ordenada constituída alternadamente por vértices e arcos, da forma

$$(i = i_1, (i_1, i_2), i_2, \dots, i_{r-1}, (i_{r-1}, i_r), i_r = j)$$

e tal que  $(i_k, i_{k+1}) \in a$ , qualquer que seja  $k \in \{1, \dots, r-1\}$ .

Um trajecto é dito *elementar* (ou *caminho*) se e só se os seus vértices forem todos distintos, com possível excepção do primeiro e do último. Quando o 1º vértice coincide com o último, o caminho chama-se *ciclo*. Note-se que todo o caminho é um trajecto e que todo o trajecto pode conter um ou mais ciclos, cada um deles envolvendo um ou mais dos seus vértices.

3. O PROBLEMA DOS  $K$  TRAJECTOS MAIS CURTOS

Sejam  $O$  e  $D$  dois dados vértices não coincidentes de  $(N, a)$ . Designe-se por  $T$  o conjunto dos trajectos de  $O$  para  $D$  em  $(N, a)$  e por  $C$  o conjunto dos caminhos que se definem entre o mesmo par de vértices. Note-se que das definições de caminho e trajecto é imediato que  $C \subset T$ .

Seja  $d_{ij}$  um número real associado ao arco  $(i, j) \in a$  e cujo sentido físico pode ser diverso: distância de  $i$  para  $j$ , custo por utilização do arco  $(i, j)$ , etc... No que se segue,  $d_{ij}$  dir-se-á comprimento do arco  $(i, j)$ , independentemente do facto de poder ser um número real negativo.

Consideremos a função

$$d : T \longrightarrow \mathbb{R} : t \longrightarrow d(t) = \sum_t d_{ij}$$

que a todo o trajecto  $t$  que se define do vértice  $O$  para o vértice  $D$ , atribui um valor real  $d(t)$  que representa o seu comprimento.

O problema da determinação das  $K$  melhores soluções que nos propomos abordar, tem por base o problema do trajecto mais curto. Este problema consiste na selecção, de entre todos os elementos de  $T$ , de um trajecto  $t^*$  de comprimento mínimo, isto é, de um trajecto  $t^*$  tal que

$$d(t^*) = \sum_{t^*} d_{ij} < d(t) = \sum_t d_{ij}, \forall t \in T$$

No entanto, na determinação das  $K$  melhores soluções, tanto se podem considerar unicamente caminhos como utilizar a noção geral de trajecto o que dá origem a dois tipos distintos de problemas. Não obstante, designar-se-á por problema dos  $K$  trajectos mais curtos, o problema genérico que engloba simultaneamente

os dois tipos de abordagens. Assim, sendo  $K > 1$  um número inteiro eventualmente dado, a determinação de um conjunto

$$T_K = \{t^1, \dots, t^K\} \subset T$$

por forma a que:

- (a)  $d(t^i) < d(t^{i+1})$  ,  $\forall i \in \{1, \dots, K-1\}$
- (b)  $d(t) > d(t^K)$  ,  $\forall t \in T - T_K$
- (c)  $t^i$  seja determinado imediatamente antes de

$$t^{i+1} , \forall i \in \{1, \dots, K-1\}$$

constitui o objectivo do problema dos  $K$  trajectos mais curtos.

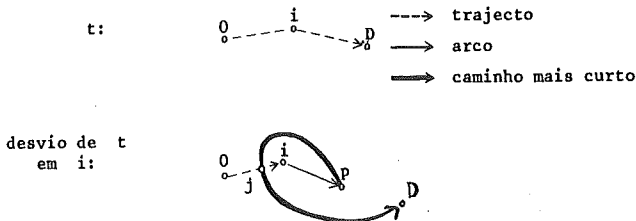
#### 4. DESCRIÇÃO SUMÁRIA DE ALGUNS ALGORITMOS

Muitos são os autores que se têm dedicado ao estudo deste problema, propondo algoritmos para a sua resolução e procurando desenvolver técnicas que contribuam para uma maior eficiência desses mesmos algoritmos.

O trabalho pioneiro parece dever-se a Hoffman e Pavley [1] que, em 1959, propuseram um algoritmo para determinar os  $K$  trajectos mais curtos entre um dado par de vértices (O e D) quando os comprimentos associados aos arcos da rede são positivos. Este algoritmo baseia-se no conceito de *desvio* de um trajecto  $t$  num dado vértice  $i \in N$  (*vértice desvio*), que se define como sendo um trajecto com a mesma origem e destino de  $t$  e constituído

- por um trajecto coincidente com o subtrajecto de  $t$  desde a sua origem até ao vértice  $i \in N$ , seguido de um arco  $(i,p) \in a$  (*arco desvio*) que não pertence a  $t$ ,
- pelo caminho mais curto desde  $p$  até D.

Graficamente ter-se-á:



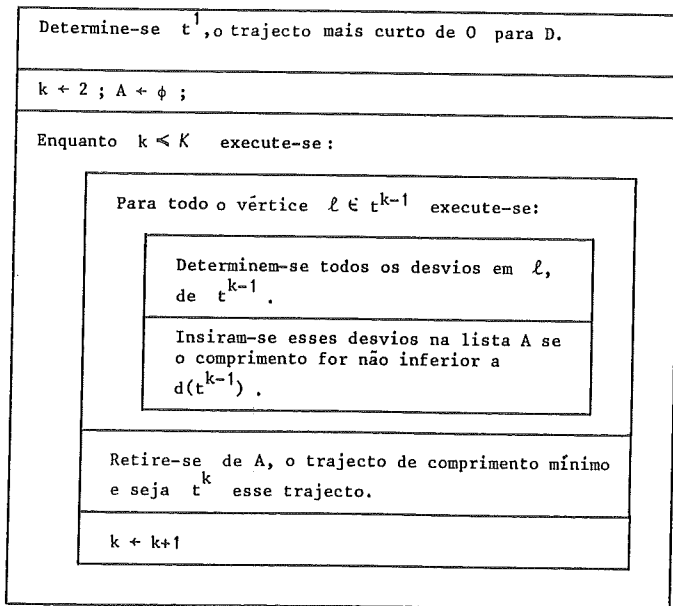
Claramente, todo o trajecto  $t' \in T$  que não é de comprimento mínimo, é um desvio de um trajecto  $t \in T$  tal que  $d(t) < d(t')$ ; caso contrário,  $t'$  é único ou é um desvio de um outro trajecto de comprimento mínimo. Consequentemente, Hoffman consi-

dera  $t^k$  como sendo um desvio de um trajecto  $t^m$ , com  $m < k-1$ , num determinado vértice  $i \in t^m$ , qualquer que seja  $k < K$ .

Segundo este princípio o  $k$ -ésimo trajecto mais curto  $t^k \in \mathcal{T}(k < K)$ , é o trajecto de menor comprimento no conjunto de todos os desvios do  $(k-1)$ -ésimo trajecto mais curto,  $t^{k-1} \in \mathcal{T}$ , e no conjunto dos desvios não minimais (desvios de  $t^j, j < k-1$ , cujos comprimentos são não inferiores ao comprimento de  $t^{k-1}$ ).

Baseado nestes conceitos pode estabelecer-se o seguinte algoritmo.

ALGORITMO DE HOFFMAN



Dez anos mais tarde, Dreyfus [2] modificou este algoritmo visando a determinação dos  $K$  trajectos mais curtos de qualquer vértice  $i \in N$ , diferente de  $D$ , para o destino  $D$ . No algoritmo que propõe, Dreyfus utiliza a técnica de equações funcionais da programação dinâmica baseada na seguinte generalização do princípio de optimalidade: "O  $k$ -ésimo trajecto óptimo é constituído por  $m$ -ésimos subtrajectos óptimos,  $t_j^m$ , por forma que, para cada vértice  $j \in N$ ,  $m$  é um valor qualquer inteiro pertencente a  $\{1, \dots, k\}$ ".

Assim, designando por  $t_i^k$  o  $k$ -ésimo trajecto mais curto de  $i \in N$  até  $D$  e por  $n(i, j, k)$  o número de trajectos  $t_i^m$ , com  $m < k$ , para os quais  $(i, j) \in a$  é o arco inicial, obtém-se a fórmula

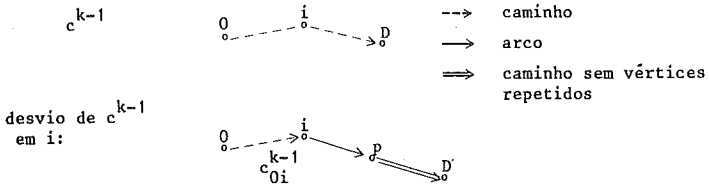
$$d(t_i^k) = \left\{ \min_{j \neq i} d_{ij} + d(t_j^{n(i, j, k)+1}) \mid \begin{array}{l} i, j = 1, \dots, |N| \\ k = 2, 3, \dots \end{array} \right\}.$$

Por forma a ultrapassar as dificuldades inerentes à utilização destas equações funcionais, os arcos são testados por ordem crescente do número de arcos que constituem o caminho mais curto de  $i \in N$  até D. Observe-se que para  $j \in N$  minimizante,  $n(i,j,k) = n(i,j,k-1) + 1$  e para todos os restantes vértices  $n(i,j,k) = n(i,j,k-1)$ . Inicialmente  $n(i,j,1)$  assume o valor 1 ou 0 conforme  $(i,j) \in a$  pertence ou não ao caminho mais curto.

Foi no entanto com Yen [3], que se avançou bastante na resolução do problema. De facto, em 1971, Yen propôs uma nova definição de *desvio*, eliminando os trajectos não elementares e tendo como objectivo a determinação dos K-caminhos mais curtos desde um dado vértice origem O até um dado vértice destino D. Na definição de Yen, desvio em  $i \in N$  do  $(k-1)$ -ésimo caminho mais curto,  $c^{k-1}$ , de O até D, é um caminho com a mesma origem e destino de  $c^{k-1}$  e constituído

- por um caminho que coincide com  $c^{k-1}$  desde o vértice O até ao vértice  $i \in N$ , seguido de um arco  $(i,p) \in a$  (*arco desvio*) que não pertence a nenhum dos  $m$ -ésimos caminhos mais curtos ( $m < k-1$ ) coincidentes com  $c^{k-1}$  de O até  $i \in N - c_{0i}^{k-1}$ ,
- pelo caminho mais curto de  $p \in N$  para D, que se pode determinar evitando os vértices existentes na parte inicial do desvio.

Graficamente ter-se-á:

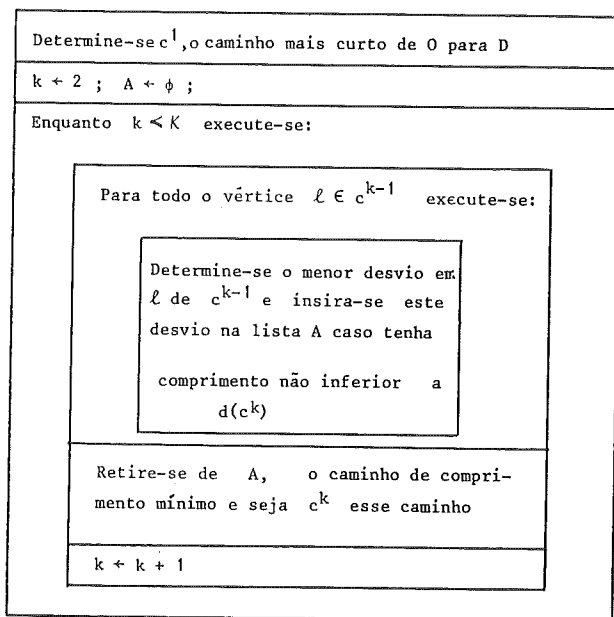


Utilizando no princípio de Hoffman, a noção de desvio proposta por Yen, obtém-se o seguinte algoritmo.

|  |
|--|
| Determine-se $c^1$ , o caminho mais curto de O para D  |
| $k \leftarrow 2$ ; $A \leftarrow \phi$ ;   |
| Enquanto $k \leq K$ execute-se:  |
| Determinem-se todos os desvios de $c^{k-1}$ e insiram-se estes na lista A caso o comprimento for não inferior a $d(c^{k-1})$ . |
| Retire-se de A, o caminho de comprimento mínimo e seja $c^k$ esse caminho.   |
| $k \leftarrow k + 1$   |

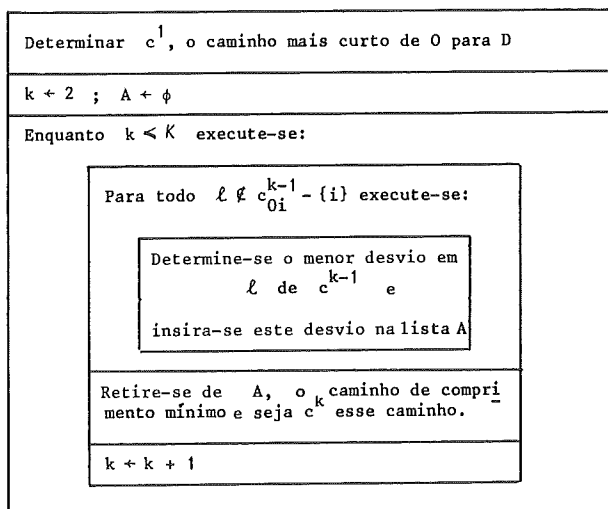
Note-se que para determinar  $c^k$ , basta comparar o menor dos desvios de  $c^{k-1}$  em cada vértice desvio  $i \in N$ , com os restantes desvios não minimais; não é pois necessário determinar todos os desvios de  $c^{k-1}$ . Assim, usando um algoritmo para a determinação do caminho mais curto do vértice  $i \in N$  até  $D$ , eliminando alguns arcos deste caminho e obrigando à passagem por um dado subconjunto de vértices da rede, obtém-se o desvio de  $c^{k-1}$  em  $i \in N$  de comprimento mínimo. Introduzindo esta alteração no algoritmo anterior estabelece-se o algoritmo de Yen.

ALGORITMO DE YEN



Segundo Lawler [4] este algoritmo pode ser melhorado; de facto, ao considerar-se indiscriminadamente os vértices no caminho  $c^{k-1}$ , corre-se o risco de repetições. Para o evitar, suponha-se que  $c^{k-1}$  é o  $(k-1)$ -ésimo caminho mais curto que contém o subcaminho de  $O$  até um vértice específico  $i \in N$ ,  $c_{0i}^{k-1}$  (considera-se  $c^{k-1}$  desvio de um  $c^m$ , em  $i \in N$ ). Então, na determinação do  $k$ -ésimo caminho mais curto, tomam-se os menores desvios em  $l \notin c_{0i}^{k-1}$ . Resulta pois o seguinte algoritmo:

ALGORITMO DE YEN  
(Versão de Lawler)



Note-se ainda que  $c^k$  é o menor dos caminhos mais curtos determinados em subconjuntos,  $P_\ell^{k-1}$ , com  $\ell \notin c_{0i}^{k-1}$  e  $\ell \neq i$ , que constituem a partição de  $T = \{c^1, \dots, c^{k-1}\}$  e definidos por todos os caminhos que incluem os arcos do subcaminho de 0 até  $\ell$ ,  $c_{0\ell}^{k-1}$ , que coincide com  $c^{k-1}$  e excluem os arcos  $(\ell, p)$  pertencentes a  $c^m$ ,  $m < k-1$  que possuam o mesmo subcaminho  $c_{0\ell}^{k-1}$ .

Este procedimento pode então ser visualizado graficamente como sendo uma pesquisa "quase exaustiva" no conjunto dos caminhos de 0 até D feita de um modo particular.

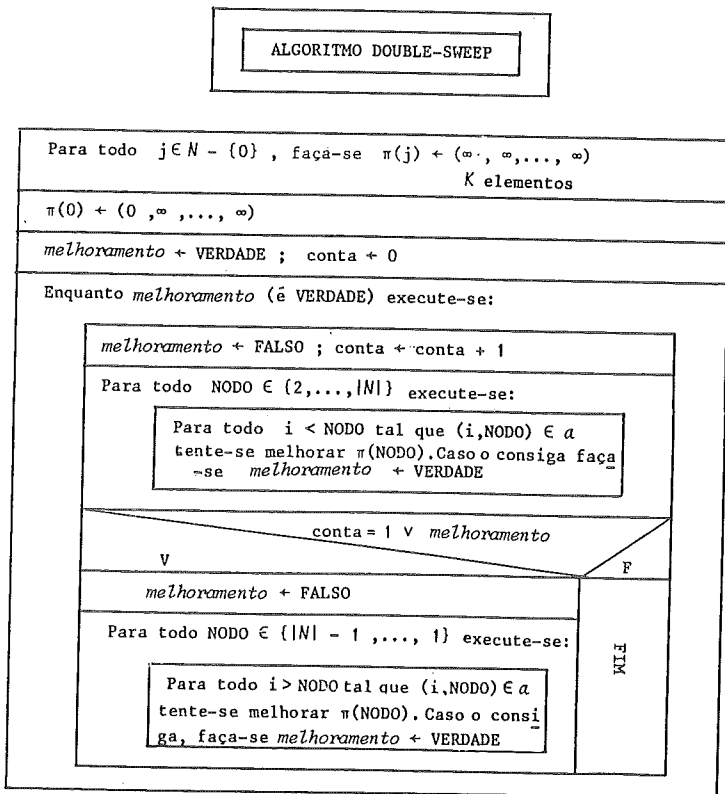
Para pequenos valores de  $K$ , Shier [5] propôs um método para calcular os  $K$  comprimentos distintos dos trajectos mais curtos e que se baseia na generalização dos algoritmos mais eficientes para o problema do trajecto mais curto.

A diferença essencial entre o algoritmo para o problema do trajecto mais curto escolhido e a sua generalização, a utilização de  $K$ -uplos associados a cada vértice,  $\pi(i) = (d(t_{0i}^1), d(t_{0i}^2), \dots, d(t_{0i}^K))$ , em vez do valor real  $\pi_i = d(t_{0i}^1)$  (maiorante para o comprimento do trajecto mais curto de 0 até  $i \in N$ ).

De um modo semelhante ao proposto por J. Gilson e C. Witzgall [6] relativamente à classificação dos algoritmos para o problema do trajecto mais curto, Shier considera duas categorias de algoritmos (os do tipo "label-setting" e os do tipo "label correcting"), diferenciando-se nestas, pela ordem em que são testados os arcos.

De entre todas as generalizações propostas por Shier, a que na prática se tem mostrado mais eficaz é o algoritmo "Double-Sweep" [7], principalmente para redes completas ou de alta densidade (isto é, redes com uma grande percentagem de arcos em relação ao número de vértices). Trata-se da generalização do clássico algoritmo de Yen para a determinação do trajecto mais curto, no qual a lista dos arcos é

percorrida alternadamente do primeiro para o último e deste para o primeiro, até que deixe de haver alteração nos K-uplos associados a cada um dos vértices.



Note-se que  $\pi(NODO)$  é melhorado se e só se  $\exists_{r, k \in \{1, \dots, K\}} : d(t_{0i}^k) + d_{iNODO} < d(t_{0 NODO}^r)$ .

Uma das vantagens dos métodos propostos por Shier, é que estes utilizam somente o comprimento de cada trajecto, não sendo necessário o esforço computacional que advém de manter em memória os arcos que constituem esses trajectos.

Com uma filosofia um pouco diferente das abordagens feitas, em 1982, Martins [8] propôs um algoritmo para a determinação dos K-trajectos mais curtos entre um dado par de vértices 0 e D de uma dada rede orientada.

A ideia base deste algoritmo consiste num procedimento para excluir um dado trajecto de uma rede por forma a que não se forme qualquer outro trajecto nem que mais nenhum seja todavia excluído. Com este procedimento [8] origina-se uma nova rede  $(N^*, a^*)$  onde todos os trajectos excepto o excluído podem ser determinados. Através de uma bem definida correspondência entre  $N^*$  e  $N$  (e consequentemente entre  $a^*$  e  $a$ ), a qualquer caminho  $c^*$  definido em  $(N^*, a^*)$  pode fazer-se corresponder um e um só trajecto em  $(N, a)$ . O processo é repetido K-1 vezes, iniciando-se como a determinação do caminho mais curto e sua consequente exclusão da rede original.



## ALGORITMO MARTINS

$$k \leftarrow 1, N_1 \leftarrow N, a_1 \leftarrow a$$

 Enquanto  $k \leq K$  e  $\exists$  um caminho em  $(N_k, a_k)$ 

 Determine-se  $c^*$ , o caminho mais curto em  $(N_k, a_k)$ 
 $t^k \leftarrow$  correspondente de  $c^*$  em  $(N, a)$ 

 Elimine-se  $c^*$  de  $(N_k, a_k)$ 
 $k \leftarrow k + 1$ 

## 5. OBSERVAÇÕES FINAIS

Da abordagem sucinta de alguns dos algoritmos existentes para a resolução do problema dos  $K$  trajectos mais curtos, concluímos que estes se podem dividir em três grande classes:

A - Algoritmos baseados num conceito de desvio

Hoffman e Dreyfus [trajectos] e Yen [caminhos]

B - Generalizações de algoritmos para o problema do caminho mais curto

Shier

C - Algoritmo de exclusão do melhor

Martins

De certo modo existe uma relação entre os algoritmos de classes distintas, o que nem é de estranhar dado que se propõem resolver o mesmo problema! Tal será assunto de um outro trabalho, onde se abordará ainda as dificuldades que surgem na co dificação dos algoritmos que na prática se têm mostrado mais eficientes.

## REFERENCES

- [1] - W. HOFFMAN e R. PAVLEY, "A method for the solution of the Nth best path problem", J. Assoc. Comp. Mach 6 (1959), 506-514.
- [2] - S.E. DREYFUS, "An appraisal of some shortest-path algorithms", Operations Research, 17 (1969), 395-412.
- [3] - JIM Y. Yen, "Shortest path network problems", Mathematical Systemas in Economics, 18.
- [4] - E.L. LAWLER, "Combinatorial Optimization: Networks and Matroids", (Holt, Rinehart and Winston, New York, 1976).
- [5] - D.R. SHIER, "On algorithms for finding the shortest paths in a network", Networks, vol. 9 (1979), 195-214.
- [6] - J. GILSINN e C.WITZGALL, "A performance comparison of labeling algorithms for calculating shortest path trees", NBS Technical Note 772, U.S. Dept. of Commerce, 1973.
- [7] - D.R. SHIER, "Computational experience with an algorithm for finding the K shortest paths in a Network", Journal of research of the National Bureau of Standards - B. Mathematical Sciences, vol. 78B, N3, (1974).
- [8] - ERNESTO Q.V. MARTINS, "An algorithm for ranking paths that may contain cycles", European Journal of Operational Research, 18, 123-130,(1984).

\*~\*~\*



## ÍNDICE

|   |    |
|---|----|
| Nota do Editor.....   | 3  |
| <i>F. C. Ferreira &amp; P. N. Silva</i><br>Modelo estocástico de simulação de fogos florestais.....   | 5  |
| <i>R. Correia, P. Monteiro &amp; O. Martins</i><br>Gestão da produção de um complexo industrial: simulação e optimização.....   | 13 |
| <i>V. Miranda &amp; M. Matos</i><br>Determinação de diagramas de carga imprecisos úteis ao planeamento de energia eléctrica.....  | 25 |
| <i>C. H. Antunes, J. N. Clímaco, P. N. Nordeste, J. B. Diogo &amp; J. F. Craveirinha</i><br>Um modelo para o planeamento interactivo de redes telefónicas rurais.....               | 33 |
| <i>J. M. Bento &amp; A. C. Fernandes</i><br>Estratégias de desenvolvimento local na área do parque natural do Alvão<br>visão retrospectiva com recurso a matrizes de transição..... | 45 |
| <i>B. C. Vasconcelos</i><br>Racionalização do reaprovisionamento de stocks em revisão periódica.....  | 55 |
| <i>R. Salcedo, M. J. Gonçalves, J. Chorão, J. Bastos &amp; S. F. de Azevedo</i><br>Dois algoritmos robustos para optimização não-linear.....  | 63 |
| <i>M. S. Rosa</i><br>Resolução dum problema de transportes que minimiza o custo total e a duração<br>de transporte.....   | 75 |
| <i>H. Lourenço</i><br>Geração de topologias da rede de suporte ao sistema MHS.....  | 79 |
| <i>M. E. Costa</i><br>O problema dos k trajectos mais curtos.....   | 87 |



Associação Portuguesa para o Desenvolvimento  
da Investigação Operacional.

CÉSUR - Instituto Superior Técnico - Avenida Rovisco Pais  
1000 Lisboa - Telef. 80 74 55