

# INVESTIGAÇÃO OPERACIONAL

---

Dezembro 1986

Números 1/2

Volume 6

Publicação Científica da



Associação Portuguesa para o Desenvolvimento  
da Investigação Operacional.

# INVESTIGAÇÃO OPERACIONAL

Propriedade:

APDIO — Associação Portuguesa para o Desenvolvimento  
da Investigação Operacional

## ESTATUTO EDITORIAL

*«Investigação Operacional», órgão oficial da APDIO cobre uma larga gama de assuntos reflectindo assim a grande diversidade de profissões e interesses dos sócios da Associação, bem como as muitas áreas de aplicação da I. O. O seu objectivo primordial é promover a aplicação do método e técnicas da I. O. aos problemas da Sociedade Portuguesa.*

*A publicação acolhe contribuições nos campos da metodologia, técnicas, e áreas de aplicação e software de I. O. sendo no entanto dada prioridade a bons casos de estudo de carácter eminentemente prático.*

---

**Distribuição gratuita aos sócios da APDIO**

# INVESTIGAÇÃO OPERACIONAL

Volume 6 - nºs 1/2 - Dezembro 1986

Publicação semestral

Director : J.M. Pinto Paixão  
(Fac. Ciências - Universidade de Lisboa)

## Comissão Editorial

Mordecai Avriel	(Israel)	A. Simões Monteiro	(NORMA)
João A. Branco	(IST - Univ. T écn. Lisboa)	Mohamed Najim	(ENSIAS - Argélia)
Josep Casanovas	(UPC - Espanha)	J. Manuel Oliveira	(EFACEC)
J. Dias Coelho	(FE - Univ. Nova Lisboa)	Fernando Pacheco	(Univ. Católica)
Nuno Crato	(NORMA - Açores)	A. Gouvêa Portela	(IST - Univ. T écn. Lisboa)
J.A. Romão Eusébio	(CIMPOR)	M. Baptista Rodrigues	(Partex - CPS)
A. Sousa Ferraria	(Petrogal)	A. Guimarães Rodrigues	(Univ. Minho)
D. V. Gokhale	(Estados Unidos)	Bernard Roy	(LAMSADE - França)
J. Borges Gouveia	(FE - Univ. Porto)	C. Moreira da Silva	(FE - Univ. Porto)
R. Campos Guimarães	(FE - Univ. Porto)	L. Valadares Tavares	(IST - Univ. T écn. Lisboa)
Masao Iri	(TU - Japão)	Isabel H. Themido	(IST - Univ. T écn. Lisboa)
Joaquim J. Júdice	(FC - Univ. Coimbra)	B. Calafate Vasconcelos	(FE - Univ. Porto)
A. Rinnoy Kan	(EU - Holanda)	José M. Viegas	(IST - Univ. T écn. Lisboa)
Nelson Maculan	(UFRJ - Brasil)	Andres Weintraub	(UC - Chile)

A Revista "INVESTIGAÇÃO OPERACIONAL" está registada na Secretaria de Estado da Comunicação Social sob o nº108335.

Esta Revista é distribuída gratuitamente aos sócios da APDIO. As informações sobre inscrições na Associação, assim como a correspondência para a Revista devem ser enviadas para a sede da APDIO - Associação Portuguesa para o Desenvolvimento da Investigação Operacional - CESUR, Instituto Superior Técnico, Av. Rovisco Pais, 1000 Lisboa.

Este Volume foi subsidiado pela Junta Nacional de Investigação Científica e Tecnológica (JNICT) e pela Fundação Calouste Gulbenkian.

Para efeitos de dactilografia e composição, foram utilizados equipamentos gentilmente postos à disposição pelo CESUR (Instituto Superior Técnico), e pelo CEAUL (DEIOC- Faculdade de Ciências de Lisboa).

Assinatura : 3000\$00

## Nota do Editor

O presente Volume de 'Investigação Operacional' vem quebrar um longo interregno na publicação da nossa Revista, sendo o primeiro a sair após a tomada de posse da nova Direcção da APDIO. Pode-se apresentar algumas boas razões para justificar quase dois anos de ausência da 'IO', mas queremos desde já salientar o esforço do anterior Editor, José Viegas, para contrariar aquela situação e ao qual a saída deste Volume é, ainda, em boa parte devida.

Sem pretendermos ser muito exaustivos, poderemos começar por referir o reduzido número de artigos que chegam para publicação. E tal, é manifestamente contraditório em relação ao grande dinamismo que a 'comunidade portuguesa de Investigação Operacional' tem revelado nos últimos anos. Basta recordarmos o número e qualidade da participação nacional nos dois últimos EUROS realizados, respectivamente, em Bolonha e em Lisboa. Porque é, então, tão reduzida a contribuição para a Revista ?

Quanto a nós, é fácil identificar dois tipos de situações. Por um lado, os 'académicos' reconhecem o interesse da publicação de artigos de carácter científico mas procuram-no fazer, sobretudo, em revistas estrangeiras. Por outro lado, os 'homens de empresa' dificilmente encontram tempo para passar a escrito as suas experiências e resultados. A respeito destas situações típicas, permitam-me umas breves palavras.

Comecemos pelo caso da preferência de publicação em revistas estrangeiras. Tal pretensão é, a nosso ver, inteiramente compreensível por uma questão de maior prestígio por parte de alguns jornais bem estabelecidos e com possibilidade de uma mais vasta selecção. Pessoalmente, aceito que um artigo de autor português numa de três ou quatro revistas internacionais, é necessariamente de boa qualidade. Mas isto é muito diferente de dizer-se que todos os artigos saídos nessas revistas são de boa qualidade! Mais, a publicação na revista "Investigação Operacional" obedece aos mesmos requisitos que nas suas correspondentes internacionais, passando pelo crivo de 'referees', nacionais ou estrangeiros, boa parte dos quais exercem idênticas funções em revistas estrangeiras. De igual forma, a presente Comissão Editorial atesta bem da qualidade da Revista e do prestígio que será

possível grangear se os investigadores portugueses se decidirem a investir nela. O que aliás, é sempre bom referir, já acontece com alguns autores que ao submeterem os seus artigos escritos em língua inglesa demonstram acreditar na influência internacional do nosso jornal.

Relativamente às pessoas que têm desenvolvido aplicações a nível de empresa, compreendemos, de forma igual, as razões pelas quais pouco têm contribuído para a 'Investigação Operacional'. O que não significa que concordemos. De facto, um dos pontos fortes da disciplina científica que nos une reside na estreita relação (ainda que, em alguns casos, não seja imediatamente evidente), com muitos problemas da vida real. E, para o ilustrar, nada melhor que aqueles que já tenham passado por essa experiência. Mais, da análise quer dos pequenos quer dos grandes casos, poderemos todos beneficiar qualquer que seja a perspectiva com que trabalhamos no domínio da investigação operacional. Assim, deixo aqui expresso um apelo bem forte para que os 'homens de empresa' reconheçam a importância de um pequeno relato que seja sobre a sua experiência. Algo que descreva sumariamente o caso tratado, a metodologia de abordagem, as técnicas utilizadas, a estratégia de implementação, os resultados obtidos, as conclusões retiradas - será extremamente bem vindo e merecerá garantidamente de prazos mais curtos para publicação.

Repito que este Volume ainda não corresponde ao conteúdo tipo que desejamos para a nossa revista. No entanto, estou certo que muitos leitores juntarão à alegria de verem a IO cá fora novamente, o prazer e interesse na sua leitura. Quanto ao futuro, estou confiante em que a Revista beneficiará seguramente do dinamismo patente na APDIO e, em particular, do 3º Congresso de Investigação Operacional.

O Editor



José M. Pinto Paixão

SYSTEMIC APPROACHES IN THE PUBLIC POLICYMAKING PROCESS:  
A SYNOPTIC ASSESSMENT

Solomon A. Berahas and Mordecai Avriel\*

Faculty of Industrial Engineering and Management  
Technion - Israel Institute of Technology  
Haifa 32000, Israel

**ABSTRACT**

The resolution of complex sociotechnical issues involved in public policymaking requires the synergy of the analytical power of modern scientific methodologies with the political power that enables policies to be implemented. Whereas the former attempts to rationalize the public policymaking process, the latter ensures the political feasibility of the proposed policy actions. Systemic approaches can be helpful in integrating organized knowledge within the relevant political environment. In this paper three views of the

---

\*Dr. Solomon A. Berahas is presently Vice President of the Consumer Services Group - International of Citibank in New York. Professor Mordecai Avriel is Abraham Tulin Professor of Operations Research, Faculty of Industrial Engineering and Management, Technion, Israel Institute of Technology, Haifa, Israel.

policymaking process are presented, with emphasis on the particular problems and limitations of applying analytical methodologies. Systems analysis, disjointed incrementalism and a synthesis of these two systemic approaches are then discussed and assessed. The potential contributions of systemic approaches are indeed remarkable, yet their realization demands important changes in the policymaking process.

## 1. INTRODUCTION

Leonard Euler (1707-1783) once wrote in a philosophical comment that since the fabric of the world is the most perfect and was established by the wisest creator, nothing happens in this world in which some reason of maximum and minimum would not come to light. Today's political and social problems do not always demonstrate this inherent goodness, and beliefs in history's intrinsic benevolence are wearing down. While solutions to the problems are more and more hard to find, problems to be solved become more and more complex and urgent.

Many problems that arise in sociotechnical systems can be addressed by focusing knowledge in appropriate ways by the logical, quantitative and structural tools of modern science and technology. The craft that does this is called Systems Analysis: "...It brings to bear on sociotechnical problems the knowledge and methods of modern science and technology, in combination with concepts of social goals and equities, elements of judgement and taste and appropriate consideration of the larger contexts and uncertainties that inevitably attend such systems..."|24|. In this paper the role of this systemic approaches in the public policymaking process is examined. Our main purpose is to determine some



of their potential contributions in public policy formulation, evaluation and implementation processes, as well as to review the principal barriers in achieving these contributions.

In this following section three views of the public policymaking process are discussed. The main reasons for the difficulties and problems encountered when applying analytic methodologies in the public policymaking process are reviewed in the third section. Finally three approaches are proposed for more effective integration of scientific knowledge and methods in this process.

## **2. VIEWS OF THE PUBLIC POLICYMAKING PROCESS**

### **2.1 Understanding What Policy Is All About**

Policy can be understood as "a set of guide lines for human behavior" [29]. There are three primary functions of policy in terms of the purposeful activities and behavior involved: It (i) enables desired behavior to occur; (ii) inhibits undesired behavior; and (iii) regulates behavior to routine standards.

Policy has a temporal dimension since its enforcement and/or acceptance are not immediate, but usually require preparation and evaluation of options, persuasion and bargaining, preparation of detailed plans, and monitoring of specific actions. In other words, policy determines desired and plausible future conditions and required sequence of actions and decisions (i.e. plans) to realize them. The activities involved in formulating, disseminating, implementing and monitoring policy decisions constitute the policymaking process.

Policy is required for and made in every sector of human activities. Public policy is concerned with decisions whose purpose is "to promote the welfare of society as a whole" [26,p.257]. Some of the main areas of public policymaking are the following:

1. Economic development and management of natural resources.
2. Health, education and welfare .
3. Defense and foreign relations.
4. Internal and social relations.

Society encompasses different stakeholders or coalitions of stakeholders in different policy decisions: Politicians formulating or opposing a policy, interest and pressure groups, lobbies, and the general public (the "silent majority"). The attitudes of individual stakeholders towards a policy are determined by their views and opinions, their understanding of the policy's rationale, the behavior expected from them, and their relative benefits (or losses) from observing the provisions of the policy.

## **2.2 The Sequence of Activities: A Normative View of the Public Policymaking Process**

Public policymaking is a process [6;7;10;13] - that is, there exists a sequence of activities that must be carried out in order to develop and implement a policy. A possible sequence can be the following [4;5]:

1. Perception of the issue for which policy is required.

2. Establishment of objectives and criteria.
3. Generation of policy alternatives.
4. Forecasting the consequences of policy alternatives.
5. Assessment of policy effectiveness and efficiency.
6. Choice of a set of alternatives, and sensitivity analysis.
7. Implementation of chosen alternatives.
8. Evaluation of outcomes.

This sequence of activities is based on the concept of "comprehensive or synoptic rationality", which was formulated by Gershuni [12, p.295] as "...the ideal rational public policymaker obtains the best technical advice on the complete range of feasible policies, and of all the likely consequences of the implementation of each of them according to this society's preferences. In the process there are **experts**, who provide independent, objective, non-partisan information, and there are **politicians** who evaluate this information". One can trace the roots of this concept to the works of March and Simon [19, p.137], where the notion of decision-making rationality has been stated as follows: "[The decision maker] has laid out before him the whole set of alternatives from which he will choose his action ...to each alternative is attached a set of consequences ... At the outset the decision-maker has a "utility function" or a preference ordering that ranks all set alternatives from the most preferred to the least preferred ... the decision maker selects the alternative leading to the preferred set of consequences ...".

Many scholars [3;8;14;22] have expressed doubts whether comprehensive rationality can be achieved. Lindblom [17, pp.139-140] has summarized these doubts in his two basic objections: (i) no social welfare function exists; and (ii) information, communication, and the number and complexity of relations among policy variables limit human capacity for rational analysis.

In addition to these objections, Gershuni points out [12, p. 301] that in model of comprehensive rationality "the roles of the expert and the politician are strictly segregated". This unfortunately is often true, but nevertheless undesirable; experts and politicians should attempt to develop cooperative interfaces, sometimes even duplication. This is what Warfield and Dror call "correlation between knowledge and power". Finally, in the model of comprehensive rationality there is no explicit reference to the various stakeholders and to the political process, both of them being instead incorporated into the social welfare function.

Regardless of the objections to and limitations of the normative approach to public policymaking process, this approach assists in shaping a framework, called Policy Analysis, defined by Dror as follows [9, p.3] "An approach and methodology for design and identification of preferable alternatives in respect to complex policy issues. Policy analysis provides heuristic aid to better policymaking".

### **2.3 How Policy Is Actually Made: A Descriptive View of Public Policymaking Process**

As mentioned above, comprehensive rationality requires that policymakers consider all the effects, of all the alternatives on all concerned parties. This is an almost

impossible task. There is need to impose closure, or in other words to limit the problem and action spaces by one or more of the following procedures:

1. Some (higher order) effects of policy are less important and can therefore be disregarded.
2. Instead of attempting to find the most effective and efficient policies, decision-makers should be content with satisfying ones, that is suboptimal, but still acceptable policies.
3. Learning - that is, observation of effects and adjustment, is important to decision-makers.

One cannot help but notice the similarities between these procedures and the actual policymaking process. Not all options and effects are considered; political feasibility determines acceptable policies; and policymakers and constituencies learn from and adjust their actions (policies, electing politicians, etc.) to new realities. The important role of the political environment is indeed a leading factor in process. In reality, the political environment goes beyond the catalytic role reserved for it in the normative view of public policymaking. The structure of the political system, the relative power of the interest groups and lobbies involved, the different assumptions, resolutions and contention points, the coalitions, the local interests, the habits, prejudices, ambitions and rivalries, all these do not only facilitate or inhibit policies, but also determine desired and undesired policies: They actually do make policies. Quade [23, p. 269] remarks that "public officials ... must face the realities of politics ... If a politician does not produce or appear to produce what his constituents

demand, his time in the office may be short". It is these political realities, i.e. power status-quo and political feasibility that determine which policies and decisions are made in order to achieve some specific - and usually short-term-goals. The rationality of policy options and alternatives is a secondary factor. Such a view of the policymaking process allows a small (if any) role for policy analysis. Yet this role can be enhanced, and policy analysis can make significant contributions to policymaking.

#### **2.4 How Policy Should Be Made: A Prescriptive View of The Public Policymaking Process**

Whereas comprehensive rationality may not be practical because it is impossible to consider all the alternatives, a premature exclusion of desirable options and policies is undesirable. Yet political feasibility often forces policymakers to do so. Therefore, in a prescriptive view of public policymaking, i. e. in a policymaking strategy which stresses the the potential contributions of analytical approaches, the concept of comprehensive rationality must be replaced, and the basic features of the political environment must be included and taken into consideration. The basic requirements of such a strategy are:

1. Bounded or limited rationality, which recognizes that it is beyond human cognitive capacities to handle logistically all the knowledge and information available and to consider all the alternatives and options in a decision or policy situation.
2. Political feasibility, which recognizes that policies must conform to political realities.

3. Analytical power to minimize errors of:

- Accepting a "wrong" policy.
- Rejecting a "right" policy.
- Considering the "wrong" issues and problems.
- Producing a policy at the "wrong" time.

Concepts of such policymaking strategies have been proposed by Etzioni [11] and by Dror [9]. In these models there exists a basic distinction between policies and metapolicies, i. e. policies about the policymaking process. As seen in Exhibit 1, there are two stages of consideration [12]:

1. A preliminary comprehensive metapolicymaking that

- a. determines general policy objectives, values, criteria , etc;
- b. creates the necessary administrative structures and procedures for detailed policy formulation and evaluation;
- c. assesses information feedbacks and reconsiders policy objectives.

2. A detailed, specialized, disaggregated, proximate policymaking that

- a. chooses detailed courses of actions (i. e. policy formulation and implementation) that are politically feasible;

- b. reports back to the metapolicymaking structure on the attainability of general policy objectives and the outcomes of policy implementation.

This type of policymaking strategies attempts to integrate the political realities with the analytical power of modern scientific methodologies. Decision sciences, such as operations research and management science techniques supported by advanced computer software, statistics and probability theory, macro and microeconomics, along with the organized knowledge of classical sciences provide powerful tools for assisting decision-making in the political environment. The role of experts in these disciplines can be outlined as follows:

1. Experts can assist policymakers in structuring the problems facing them by providing objective information.
2. Experts use a variety of tools and theories, in addition to the tacit knowledge of the stakeholders, i. e. their judgement, experience and intuition.
3. Experts cannot and should not replace policymakers in the final choice of policy options.

Following these ideas, policy analysis can be defined as "any type of analysis that generates and presents information in such a way as to improve the basis for policymakers to exercise their judgement" [23, p. 4].



### 3. DIFFICULTIES IN RATIONALIZING THE PUBLIC POLICYMAKING PROCESS

#### 3.1 The Wicked Nature of Public Policy Issues

One of the main obstacles in any attempt to apply systematic methodologies in the public policymaking process emanates from the very nature of the issues this process deals with. Usually these issues involve many uncertainties, for which neither the possible policy alternatives nor their outcomes are clear and easy to formulate and evaluate. These issues cannot be clearly defined, and due to the lack of undisputable and objective definition of social equity, policies cannot be universally "correct" or "false". It makes no sense to talk about "optimal solutions" to these issues, since they rely on elusive political judgement for their resolution; they generally refuse to yield to formal analysis and research; and they invariably change. Social problems, according to Rittel and Webber [25], are inherently wicked, for the following reasons:

1. They cannot be definitively formulated, yet the choice of their formulation determines the nature of their resolution.
2. They have no definite start and end, since each problem can be considered as a symptom of another.
3. There is no ultimate test of a resolution to these problems.
4. When dealing with them, resolutions leave traces that cannot be undone.

5. Each one of these problems is essentially unique, therefore, requires specific and unique approaches to its resolution.
6. They cannot be detached from ideological and political beliefs.
7. They involve and affect many stakeholders with different interests and goals, while the responsibility and authority related to these problems are diffused to many decision-making centers.

Although these characteristics can be interpreted as inhibiting factors for applying analytic methodologies and approaches to this type of problems, one can argue the contrary: Precisely because of these characteristics systemic approaches are required.

### **3.2 Failures of the Analytic Methodologies**

Perhaps the primary reason for the failure of analytic methodologies, and mainly of operations research oriented approaches in the public sector is that optimization in this sector is often not relevant. The classical models of "homo economicus" in microanalyses, or of "social welfare function" in macroanalysis, have often failed to describe phenomena and to provide answers. Whereas in the past efficiency was sought as a remedy to problems, complexity, uncertainty and politics have forced analysts to relinquish this view. Yet no adequate substitute to efficiency has been found. Thus analysts have been left without an objective function. The idea of a social welfare function was abandoned because "social science has simply been unable to uncover a social welfare function that would

suggest which decisions would contribute to a societally best state" [25, p.128]. It is obvious though that planning cannot be separated from questions of social values, human effects and therefore from the political process. Another reason for the methodological failures lies in the lifespan of a solution. On the one hand there is the accelerating rate of changes as dramatized by Toffler [28], while on the other hand the optimality of solutions is generally not adaptive to changes. Ackoff [1, p.98] remarks that "the life of solutions to many critical social and organizational problems is shorter than the time required to find them". The limitations of the analytical methodologies are also related to some commonly observed pitfalls. Some of these are listed below:

- \* Belief that policy analysis can be a purely rational, coldly objective discipline.
- \* The lack of well-defined rules and procedures for applying organized knowledge to policy issues has resulted in ad-hoc approaches.
- \* The quality of data determines the quality of the decision. Policy issues are often characterized by low quality data and/or inability to collect data. Therefore, quite often analysis has to conform to the available data.
- \* Inability to cope analytically with uncertainties often results in their almost complete omission.

The great expectations held by practitioners for the role of operations research have been somewhat replaced by disappointment and criticism. Ackoff, himself an operations researcher, argues that the future of these methodologies

depends on the ability to perform radical changes in the client-analyst relationships on the involvement of stakeholders, and on the creation of new roles for these methodologies in the decision-making process.

### 3.3 Paradoxes of Planning in the Public Sector

Planning is the process of preparing a set of decisions for action in the future, directed at achieving desired goals. The failures of planning in the public sector are seldom peripheral or accidental; in most cases they are integral to the very nature of the issues involved, and the political process taking place. Therefore, using analytical approaches to rationalize the planning process can (i) lead to paradoxes and dilemmas (ii) uncover discrepancies and controversies, and (iii) finally result in policy failures.

It is important to realize that there exist basic differences between the problems encountered in, say, the optimal design and operation of a technological process or device, and the issues involved in a public policymaking process. In general it can be argued that there are very few analytic answers for public sector problems. Also, there is the dilemma between immediate action versus acquisition of evidence (data). Mitroff et al [21, p.538] remark that a policymaker faces problems in which there is a great need for the best available evidence, but at the same time, he is beset with extensive pressures to act both immediately and decisively. Thus "... the paradox is this: [he] is often required to act in order to uncover the evidence as to whether the action he took is the one he should have taken". Planning requires the existence of an objective, such as public equity or welfare of the stakeholders involved. Yet, as mentioned before, in public

policy it is often impossible to reach a consensus on the criteria according to which planning and policies will be carried out. Usually these criteria involve controversial and antithetical positions that are defended by interested groups. The lack of meaningful analytic answers to these issues does not permit a decisive resolution. Instead, policymakers have to resort to political bargaining and to second-best solutions. Finally, planners are often frustrated realizing that the resolution of an issue uncovers one or more additional problems which have to be dealt with. They know that they cannot expect to find universal answers to all problems, yet they are overwhelmed by the rigid interfaces and tightness of the problems they face.

#### 4. SYSTEMIC APPROACHES TO PUBLIC POLICYMAKING PROCESS

##### 4.1 The Role of Experts and Analysis

Analysis and decision-making in a public policy issue may involve several scientific disciplines and tools, and usually interdisciplinary efforts are required. For example, housing policy may involve architects and town planners, economists. Experts can provide considerable assistance both by applying scientific tools and methodologies of their disciplines, and by being involved in the following:

- \* Identification of those elements in which research efforts must be concentrated, in order to reduce the complexity of the issues to manageable proportions.
- \* Identification of inconsistencies in policy options.
- \* Reduction of uncertainties in the reference system.

\* Generation and formulation of policy alternatives.

The integration of scientific expertise with the tacit knowledge of the people involved in a public policy decision, requires systemic approaches to the public policymaking process. Three such approaches are briefly reviewed below.

#### 4.2 The Systems Analysis Approach

The theoretical basis of systems analysis can be traced back to works on a General Theory of Systems (|7|, |15|, |20|). Systems analysis takes a holistic view of the issues involved as they dynamically change in terms of objectives, structure and environment, and attempts to find best solutions, usually in terms of "economic rationality".

One can identify a sequence of steps or activities usually proposed as a normative description of the systems process. One such sequence is the following:

- Clarification of the problem.
- Identification of the objectives.
- Identification of measures of effectiveness.
- Identification of the relevant environment.
- Formulation of a formal representation of the problem (i. e. model).
- Collection of data.
- Generation of alternatives.

- Investigation of alternatives.
- Examination of sensitivities.
- Recommendations, conception of new problem areas.

The systems analysis approach recognizes the importance of the iterative nature of this process. Examination of alternatives and sensitivity analysis will yield new insights, which may affect the problem conception, the objectives and the reference system. Therefore, this is a continuous quest for improvement. One of the major contributions of systems analysis is the explicit and conscious search for objectives, a result of the basic definition of a system: A collection of items, people, information and activities having common objectives.

On the other hand, there are also adverse features: Quade and Miser [24] remark that systems analysis, like every other human endeavor is necessarily incomplete: Time, money and other resources place severe limitations on how thoroughly any topic can be studied. Also, systems analysis as an approach, can be misused by promoting preconceived ideas or policies, being an excuse for inaction and delay, or even producing misleading information. Policymakers often fear that extensive reliance on systems analysis will increase their dependence on the experts, thus reducing (giving up) valuable degrees.

#### **4.3 The Disjointed Incrementalism Approach**

As an alternative to systems analysis an approach was proposed by Lindblom [8; 17; 18], initially called "muddling through" and then more formally "disjointed incrementalism". In this approach the analysts seek the

remedial rather than the utopian objectives. They examine only those alternatives which differ incrementally from current policies and from each other and are politically feasible. Lindblom suggests that policy analysis and policymaking are serial processes, proceeding through long chains of political and analytical steps, with no sharp beginning or end, and no clear-cut boundaries. According to him, analysis is a tool for helping the policymaker by contributing to his bargaining power. In Lindblom's view decisions have to be made, very often without sufficient time to analyse all alternatives - even if this were practically possible. Thus the important thing is to decide, especially in those cases where the costs of analysis and delay are greater than the costs of error.

The disjointed incrementalism approach imposes closure on the problem and action spaces, by considering "political rationality". Archibald [2, p.6] amplifies this as follows: "The incrementalist feels he can ignore [alternatives and] consequences at will, because if those ignored should prove damaging to certain groups, such groups would press for new analyses and new decisions". In other words, politics in a pluralistic society defines both the objectives and the alternatives to be considered.

The parochial view adopted by the incrementalists' approach to policy analysis presents two rather antithetical points that advocate the need to integrate systems analysis and disjointed incrementalism. First, we argue for the latter approach, since "a policy is no better than its implementation, [which] suggests that analysts need to pay attention to the feasibility of a policy alternative at operating levels, as well as to its acceptability at decision-making [political] levels" [2, p.16]. Second, we argue for systems analysis because "analytic contributions [are often] weakened by



analysts paying too much attention to political feasibility" |2, p.16|. In other words, while incrementalism is more realistic, real progress is achieved through planned changes, new approaches, and an as comprehensive as possible consideration of the issues involved.

A final note about incrementalism is necessary to clarify a possible misunderstanding: incrementalism does not advocate ad-hoc decisions, but the ad-hoc selection of alternatives, to be omitted at a certain stage of the decision-making process. Systems analysis also recognizes the fact that some alternatives must be omitted, yet it attempts to make these omissions rationally or strategically, by always considering the overall objectives of the policy-makers.

#### 4.4 A Possible Synthesis of Systems Analysis and Disjointed Incrementalism

Three basic differences between these approaches can be cited:

1. Comparison of the cost of delay in policymaking due to comprehensive analysis on the one hand, and the costs of error due to lack of analysis on the other, could often determine the type of approach to be taken. For example the cost of potential errors in decisions concerned with nuclear energy are perceived by most analysts as very high. Therefore, systems analysis techniques have usually been applied. In public housing problems the opposite is often true.
2. Systems analysis views the issues in terms of "economic rationality" while incrementalism views them in terms of "political rationality".

3. Systems analysis usually deals with improving a client's decision-making ability, for improving social welfare. Incrementalists usually regard themselves as partisans of specific interest groups.

Nevertheless, these two approaches are compatible. A synthesis would require (i) the acceptance of the notion of political rationality and of the important role of analysis and (ii) organizational changes to overcome resistance to new policies and to increase the likelihood of programs being executed in a manner consistent with their purposes. In order to make such a synthesis plausible, a scenario of the political process is required (see Exhibit 2). Politicians do not have to possess expert knowledge, but they do have fixed positions to defend, a result of their political beliefs and of their responsibilities to their constituencies. In order to make policy, they choose from organized knowledge those facts and theories which promote their ideas and positions, and those which are beyond any doubt, and thus cannot be ignored or avoided. Their main contribution to the policymaking process beyond the definition of the policy theme, is the political power they can use in order to enable policies to occur and to coordinate the processes of policy-making and policy implementation.

## 5. SOME CONCLUSIONS

We have reviewed some ideas concerning the public policymaking process, its nature, the type of problems usually encountered, the approaches to resolving these problems, the contributions and limitations of policy analysis and the inherent paradoxes of planning. We may now question the potential value of policy analysis and the

related methodological approaches to the policy-making process.

All the limitations and pitfalls, as well as the reported failures in rationalizing the policymaking process, might frustrate and discourage both analysts and policymakers. They may feel being involved in futile exercises: Changes will happen if and only if they are politically feasible; problems are more wicked than known methodologies can deal with; rationality is not sufficient; the role of analysts in resolving conflicts during the various phases of the policymaking process is, at best, marginal. Why then bother with these? Liebman [16, p.108] gives an answer which may disappoint the dedicated analyst, but it nevertheless provides a direction and meaning to the efforts of the conscious practitioners: "... [analysis is] highly useful ... in illuminating the conflicts and generating a set of alternatives for further exploration. Using [analysis] in this fashion is philosophically different; it requires explicit recognition that the analyst's objective is the provision of intuition, insight, and understanding which supplements that of the decision-makers. Answers are useful only insofar they accomplish this goal". Nobody argues that this is easy: "Wicked problems would not be wicked if they were easy" [16, p.108]. Yet analysts can greatly contribute by adapting their tools and methodologies to the novel requirements of complex public policy issues. The task of policy analysis cannot be automated decisions and a totally planned future. By contrast, its major function is that of a map: An aid to better orientation which helps to avoid catastrophes, points out decision alternatives and their consequences, assists the analytical processes, but leaves the responsibility and authority for decisions to policymakers and politicians. In order to realize such a synergy it is necessary for the policymakers and politicians to learn

to trust scientific and methodological approaches. Yet, this can be only achieved if system analysts will be detached, as Samouilidis [27] remarks, from the "hard quantitative analysis" - which indeed is their most important competitive advantage - and attempt to propose flexible procedures that integrate organized knowledge, experience, intuition, and political realities.

### **Acknowledgements**

Sincere thanks are extended to Dr. J. Emmanuel Samouilidis for providing interesting comments and insights. Research was partially supported by the Fund for the Promotion of Research at the Technion.

### **REFERENCES**

1. ACKOFF, R.L., "The Future of Operational Research is Past", *Journal of Operational Research Society*, Vol. 30 No.2 (1979), pp.93-104.
2. ARCHIBALD, K. A., "Three Views of the Experts' Role in Policy Making", Rand Corporation, P-4292, California, January 1970.
3. ARROW, K.J., "Social Choice and Individual Values", John Wiley and Sons, New York, 1951.
4. AVRIEL, M., ARAD, N., KARNI, R., BREINER, R., "A Structured Approach to Resource Policymaking on a National Level", *Proceedings of Asia-Pacific Conference on Operational Research*, Singapore, November 1982.
5. BERAHAS, S.A., "The Development of a Rational Framework for Policy Modeling", Unpublished D. Sc.

Dissertation, Technion-Israel Institute of Technology, Haifa, Israel, May 1981.

6. BERAHAS, S.A., AVRIEL, M., "The Development of a Rational Framework for Policy Modeling", *International Journal of Policy Analysis and Information Systems*, Vol.6, No.2 (1982), pp. 155-177.
7. BERTALANFFY, L.V., "General Systems Theory", George Braziller, New York, 1968.
8. DAHL, R.A., LINDBLOM C.E., "Politics, Economics and Welfare", Harper, New York, 1953.
9. DROR, Y., "Ventures in Policy Analysis", American Elsevier, New York, 1968.
10. DROR, Y., "Design for Policy Sciences", American Elsevier, New York, 1971.
11. ETZIONI, A., "The Active Society", Free Press, New York, 1968.
12. GERSHUNI, J.I. "Policymaking and Rationality: A Reformulation", *Policy Science*, Vol. 9 (1978), pp. 295-316.
13. GREENBERGER, M., CRENSON, M. A., CRISEY, B.L., "Models in the Policy Process: Public Decision Making in the Computer Era", Russel Sage Foundation, New York, 1973.
14. HOOS, I., "Systems Analysis in Public Policy: A Critique", University of California Press, Berkeley, 1972.
15. KLIR, G.J., "An Approach to General Systems Theory", Van Nostrand, New York, 1969.

16. LIEBMAN, J.C., "Some Simple-Minded Observations on the Role of Models in Public Systems Decision-Making", *Interfaces*, Vol. 6, No. 4 August 1976), pp. 102-108.
17. LINDBLOM, C.D.H. "The Intelligence of Democracy: Decision Making Through Mutual Adjustment", Free Press, New York, 1965.
18. LINDBLOM, C.D.H. "The Policymaking Process", Prentice-Hall, New Jersey, 1968.
19. MARCH, J. G., SIMON, H.E., "Organizations", John Wiley and Sons, New York, 1958.
20. MESAROVIC, M.D., TAKAHARA, H., "General Systems Theory: Mathematical Foundations", Academic Press, New York, 1974.
21. MITROFF, I.I., EMSHOFF, J.R., KILMANN, R.H., "Assumptional Analysis: A Methodology for Strategic Problem Solving", *Management Science*, Vol, 25, No. 6 (1979), pp.583-593.
22. MOYNIHAN, D.P., "The Schism in Black America", *the Public Interest*, No. 27, Spring 1972.
23. QUADE, E.S., "Analysis for Public Decisions", American Elsevier, New York, 1976.
24. QUADE, E.S., MISER, H.J., "Handbook of Systems Analysis", To be published by I.I.A.S.A.
25. RITTEL, H.W.J, WEBBER, M.H., "Dilemmas in a General Theory of Planning", *Policy Science*, Vol. 4, No. 2 (1973), pp. 155-169.

- 26. STOKEY, E, ZECKHOUSER, R., "A Primer for Policy Analysis", W.W. Norton and Co., New York, 1978.
- 27. SAMOUILIDIS, J.F., "Systems Analysis for Policy Formulation", Joint Congress of the Hellenic Operational Research Society and the Greek Society for Management, Delphi, Greece, November 1982. (In Greek).
- 28. TOFFLER, A., "Future Shock", Random House, New York, 1970.
- 29. WARFIELD, J. N., "Societal Systems: Planning, Policy and Complexity", Jonh Wiley and Sons, New York, 1976.

- O -

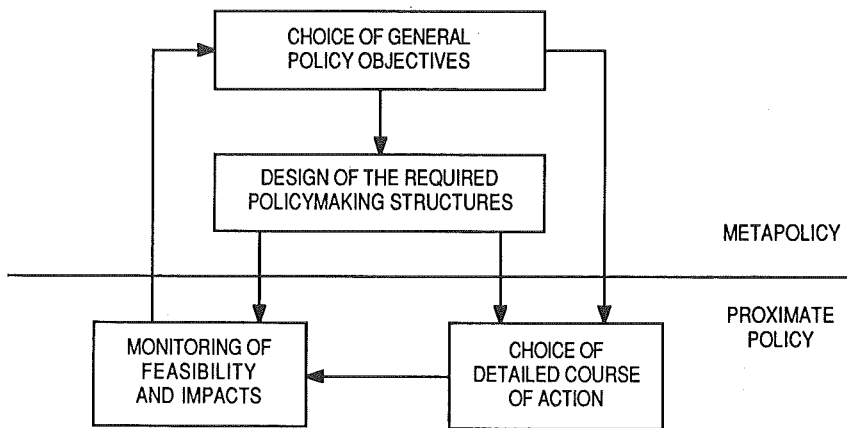


Exhibit 1: A model for a policymaking strategy. [12, p.311]

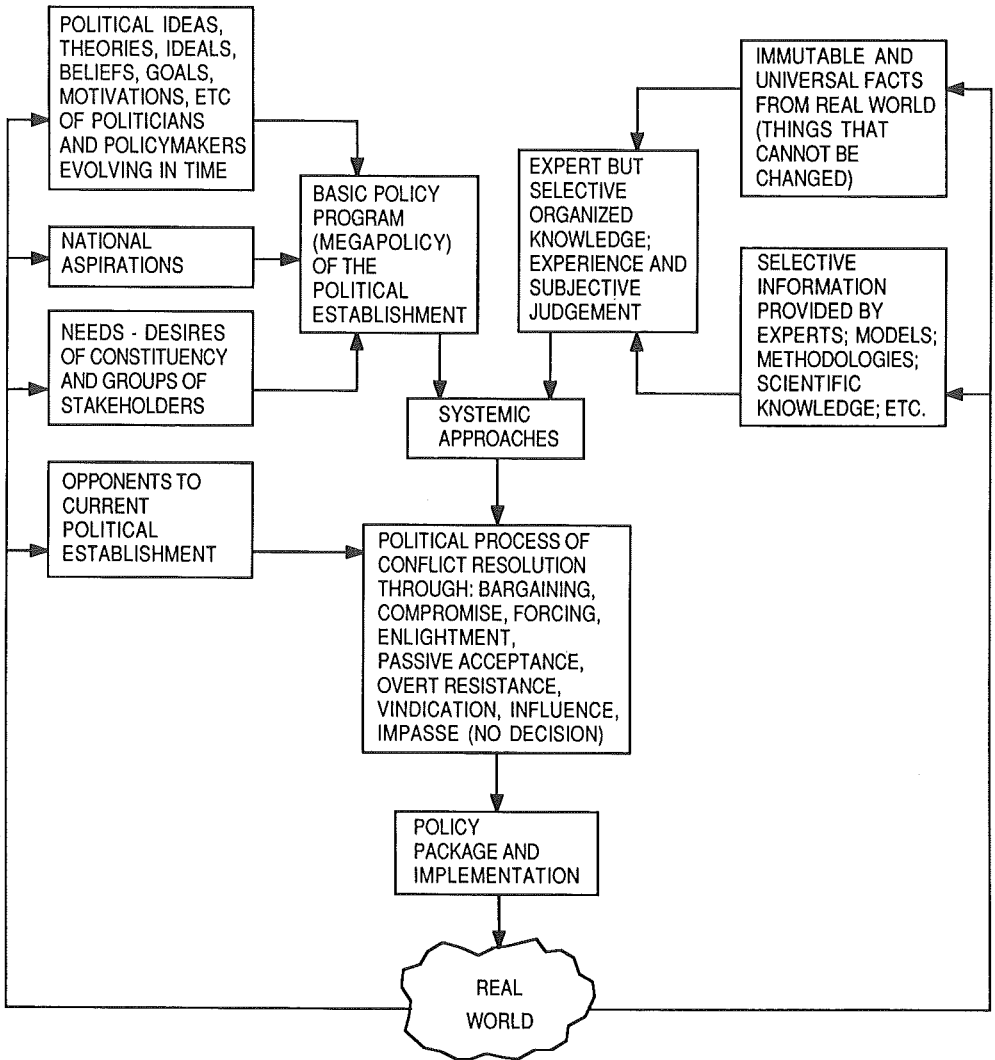


Exhibit 2: A plausible synthesis of systems analysis and disjointed incrementalism.



REDUCED INSTRUCTION SET COMPUTING: A TECHNOLOGICAL  
FORECAST FOR 1992 \*

Neal Bierbaum

Department of Electrical Engineering, Stanford University

Luis Cabral

Department of Economics, Stanford University

Anita Callahan and Paul Seawell

Department of Industrial Engineering, Stanford University

Most of the information presented in the paper was obtained through interviews with various people associated with RISC development. We are very grateful to all of them for the time spent with us. Comments by Professors R. Rosembloom and L. Tavares were also beneficial. Responsibility for any errors is obviously ours.

\* An earlier version of this paper was presented at the Seminar on Technology Assessment, Stanford University, March 1986.

## 1. Introduction

In attempting to determine the position of Reduced Instruction Set Computing (RISC) for the time period 1990-1992, it is necessary to ask two questions: (1) to what extent will RISC be accepted by manufacturers; and (2) to what extent will it be accepted by users. It is obvious that if manufacturers do not decide to pursue a RISC design philosophy with their computers, the acceptance of the users will be a moot question. On the other hand, if manufacturers do pursue a RISC strategy, and the users do not accept it as an alternative to conventional machines, the sales of RISC machines will be negligible. It will require the acceptance of Reduced Instruction Set Computing by both parties for it to be a viable option in 1990 and beyond.

In attempting to answer these questions, this analysis will estimate both the number of major companies manufacturing RISC machines, and the percentage of sales represented by RISC machines, in 1990-1992. The number of companies engaged in the manufacture of RISC machines is an estimate of industry interest in this technology, while the percentage of RISC machines sold will be indicative of the users' interest.

For reasons detailed below, the most likely candidates for Reduced Instruction Set Computing are the machines which are presently in the range from "superminis" down to and including microcomputers. It is this segment of the computer market on which this study will primarily concentrate.

## **2. Description of the Technology**

### **2.1 Definition of RISC**

The acronym RISC stands for "Reduced Instruction Set Computer". According to some experts we interviewed, the "R" should stand for "Rational" (in their company's case) or perhaps even "Religious" (for unnamed zealots). The "instruction set" refers to the commands that are each uniquely identified and individually handled by the computer's central processing unit (CPU). These commands involve actions such as adding two numbers, copying a number from one memory location to another, or getting the next instruction to be executed from a different location.

For the purposes of this paper it is not necessarily the mere size of the instruction set that qualifies a computer processor as RISC. The two primary characteristics of RISC processors are:

1. An instruction is completed almost every clock cycle. If pipelining is used, then it is very short (two or three levels).

2. The processor is completely contained on one or two very large scale integration (VLSI) chips.

### **2.2 History of RISC**

Processors of a conventional design generally have an extensive set of low level "machine" instructions—typically 250 to 400 separate instructions. Some of these instructions perform very complex actions and thus require some complex

circuitry and many computer cycles to perform. Much computer programming even through the 1970's was done in "assembly language" which meant that programmers had to directly program in these low level instructions. To these programmers, powerful instructions which individually accomplished several simple actions were desirable. Computer memory was expensive also, so these complex instructions helped to keep the computer programs small. But such processors are difficult to design and usually all instructions take multiple clock cycles to perform. Even simple instructions are slower because of the compromises made in design so that complex instructions can be handled.

By the late 1970's there was a strong trend toward the use of "high-level languages" such as FORTRAN, Pascal and C. These use much more complex instructions that a program called a "compiler" translates into the computer's machine instructions. Programs are much easier to write in a high-level language. They can be easily transferred to a different computer with a different set of machine instructions, recompiled on that machine, and run without major changes.

Studies in the mid 70's showed that programs which had been written in a high-level language and then compiled rarely used the complex machine instructions that cost so much in design complexity and speed to provide. Compilers could be developed that worked very efficiently with a much smaller instruction set. The advances in integrated circuit technology indicated that it would soon be possible to produce powerful processing units on single chips; a simple instruction set would make this task even more possible. These advances in IC technology also meant that computer memory capacity would become less and less expensive so that a longer program made up of larger number of simpler instructions would not be a very significant detriment.

IBM was among the first to realise the potential for a new kind of processor that used fewer, simpler instructions but could perform them very quickly. They began a quiet research effort into not only the processor but also a special optimizing compiler that would accompany it.

Berkeley and Stanford researchers also began to develop single chip RISC processors (Berkeley--the RISC1, Stanford--the MIPS). Other groups at both schools began complementary research into compilers so that each processor's instruction set design could be exactly matched to the needs of the compiler.

The first major public announcement of a RISC processor was made by the Berkeley research group in 1983. This announcement and accompanying claims for RISC began an intense debate about the advantages of this new approach. This was soon followed by Pyramid Corporation's commercial introduction of a computer which was claimed to be RISC. Although it possessed some characteristics of a RISC processor, it used many smaller scale integrated circuit chips to make up the processor. It did demonstrate one claim of RISC, though: it was faster than the benchmark standard DEC VAX 780 computer and cost only one half as much.

Rumors started of an intense development effort code-named "Spectrum" within Hewlett-Packard. Then H-P announced that it would fully adopt the RISC technology in its new computers. The introduction date for these computers was delayed, then delayed again. Finally, they were formally announced Feb 25, 1986 but the actual commercial introduction date was pushed back still further until late in 1986. H-P's chairman admitted that problems with software compatibility between the RISC machines and their present computers were the cause for the delay.

In January, 1986 IBM announced an engineering and scientific workstation, the PC-RT. This computer is both the first commercially available RISC processor-based workstation and the first IBM scientific/ engineering workstation.

### **2.3. Advantages of RISC**

The RISC design offers the promise of significantly faster program execution at a reduced cost.

RISC gains its speed in two ways. First, an instruction is completed every clock cycle rather than every four to sixteen cycles or more in a conventional processor. Second, because the entire processor is on one integrated circuit chip, signals between elements of the processor can travel much faster than would signals between processor elements on multiple chips.

RISC is less costly because of its single-chip, simpler design. A processor contained on a single chip is less expensive to manufacture than a processor made of many chips with complex circuit board fabrication and assembly costs. A RISC processor is also simpler and quicker to design than a conventional design. The long lead times and capital costs of development are reduced, according to one expert, by as much as one-half.

### **2.4 Disadvantages**

A RISC processor has some disadvantages when compared to a conventionally designed processor. First, the RISC processor does require more memory to hold a program than does a conventional processor. Second, the instruction sets of all RISC processors are significantly different from any computers now available. This means that any programs which were written directly in those instructions (instead of

high-level languages) are not usable. A great deal of software, especially business software, cannot be used. For users that already own this software, switching to a RISC based computer would be very costly. Emulators, programs which make one computer seem to act like another, can solve this problem—but they decrease performance significantly.

### **2.5. Most Likely Applications**

Not all computer applications are appropriate for RISC technology. For example, it is doubtful that mainframes and super-computers will incorporate RISC into their architectures for the following reasons:

(1) Central processing units form a relatively small percentage of the cost of a mainframe, so cost/performance considerations are not of major importance for this market.

(2) For many mainframe users (e.g. banks, airlines, brokerage houses), input/output speed is the limiting factor, rather than CPU speed.

(3) Because of a mainframe's size and complexity, there are many more architectural options available. Increases in speed can be done by several means, of which RISC is only one.

(4) There is a huge inventory of software written in lower-level, machine specific languages for mainframes.

The most appropriate applications of RISC should be in the range from "superminis" down to and including microcomputers. Within this range, the scientific and engineering market, with its nearly constant demand for ever-higher processing speed, seems to be the most promising segment.

### 3. Assessment of the Adoption of RISC Technology

#### 3.1. Parameters of Interest

Four major areas of interest were originally identified as being crucial in the analysis of the adoption of RISC technology: (1) Price/Performance Data; (2) Software Concerns, (3) Availability of Substitutions; and (4) Economic Conditions. Each of these areas will be discussed with regard to its potential impact on the future of Reduced Instruction Set Computing.

Price/Performance Data. As IBM discovered with the advent of products manufactured by Amdahl and other companies, many of the customers for computing power were interested in more than performance alone. Although not everyone was willing to forego the services offered by IBM in favor of products that "delivered more bang for the bucks", a substantial number were. It is this trend that the major developers of RISC technology are counting on continuing in the foreseeable future.

Based on information from several informants, today's manufacturers of RISC machines are capable of between three and eight times the performance of conventional (68020 based) machines for a ten to twenty percent premium. Some industry observers are predicting twenty times capabilities (as compared with the VAX) in 1990, with machines capable of thirty to forty times the capability of present equipment in development by then. It is also predicted (by the same sources) that a multi-processor RISC machine will be available with the abilities of a present day Cray supercomputer at several orders of magnitude less than the current price of a Cray. The stated goal of GaAs RISC technology



is fifty times the performance of today's VAX sometime in the 1990's.

It is the opinion of some industry observers that the question may not even be that of price/performance but that of performance alone. They believe that at least some of the scientists and engineers will select RISC machines simply for the increase in performance that will be available as compared with conventional machines, with price being a relatively minor consideration.

Software Concerns. In discussing the future of RISC technology at the outset of this project, two primary concerns about software were identified. The first was whether there would be an adequate source of software for these machines. (The slower than expected acceptance of Apple's Macintosh illustrates the pitfalls of software scarcity.) The other concern was the issue of software compatibility: if a company already has a large base of company-specific software, would the question of compatibility be a major force in the decision of whether or not to use RISC technology.

The people to whom we spoke with believed that neither of these issues were major concerns in the markets under consideration. RISC machines can accept programs written for other machines as long as the program is in a standard high-level language. Our sources stated that much of the RISC technology in the next few years would be directed at the scientific/engineering and the CAD/CAM users. Software for these products which are presently on the market is written in high-level languages and should be entirely portable to RISC machines. This is an indication that much of the software which will be required in the early 1990's is available now.

The present software which is not written in a higher level language can still be used with RISC technology through the use of emulators and translators. There is a performance loss with this approach. But if absolute performance is not the goal of the user, there are price/performance gains available which, although somewhat reduced, are still attractive.

Based on available information, it appears that the question of software availability/compatibility will not delay the acceptance of RISC technology. It is also evident that as more Reduced Instruction Set Computing machines are introduced into the market, more software will be generated both by the manufacturers and by independent software houses.

Availability of Substitutions. None of the sources contacted provided information regarding possible substitutes for RISC in the near future. IBM's RISC machine, in development since 1977, was introduced only last month—a time to market of nine years. Another local firm dedicated to manufacturing a RISC machine was started in 1981 and has yet to bring a machine to market. Based on precedents such as these, it seems likely that any substitution which could adversely affect the adoption of RISC technology in the time period 1990–1992 would have to be in development now. There is no indication of any such development currently under way.

Economic Conditions. There are three levels of economic activity in the time period of 1990–1992 which may have some impact on the total number of RISC machines purchased. The levels are: (1) the state of the computer industry; (2) the state of the national economy; and (3) the state of the international economy. This analysis assumes that

no major shocks will strike any of the three areas. Even if such shocks do occur, RISC machines' market share will probably not be affected, although the distribution of machines may be.

### **3.2. Methodology**

Several techniques were employed in an attempt to determine the position of RISC technology in the 1990s. The techniques used fall into two categories: data collection and data analysis.

Information was obtained for this analysis through a literature search of magazine and newspaper articles, and through interviews with various people associated with RISC development. Articles in such popular journals as the San Jose Mercury News, the Wall Street Journal and Business Week helped to identify the current players in RISC technology as well as providing an insight into the thoughts of some industry analysts regarding the future of RISC. Limited information regarding the projected performances and prices were also available from these sources. Technical journals such as IEEE Spectrum and IEEE Computer provided additional technical information on Reduced Instruction Set Technology.

Interviews were the most useful means of obtaining information on the potential market for 1990-1992. While some companies were willing to discuss their products, strategies, and goals, several others declined any significant discussion. These refusals were instructive as they provided some indication of perceived potential of the RISC industry. Companies which declined to participate in the study appeared to believe that the release of any information pertaining to their RISC activities would provide valuable information to competitors. This is consis-

tent with an estimate of a market for RISC machines which is significant but not vast.

Cross-impact matrices and scenarios were constructed to formally express the data and the impressions of the analysts. This led to the construction of a mathematical model to produce market forecasts.

### 3.3. Cross Impact Analysis

Figure 1 is a cross-impact matrix in which the relations among the main variables are stated in qualitative terms. This qualitative analysis forms the basis for the mathematical model. The rationale for the cross-impact matrix is as follows:

Initial Market Share: The early success or failure of the RISC machines offered by IBM (the PC-RT) and Hewlett-Packard (the Spectrum series) will strongly influence the amount of industry R&D effort. Several companies appear to be doing modest amounts of RISC development, waiting to see whether RISC will have a serious chance at significant market share. Initial sales of the IBM and HP machines will be closely watched and will be used as an indicator of future market potential. These early results will also influence software houses' decisions to produce suitable programs. Overall market penetration will depend quite strongly on initial market share.

R&D Effort: It is virtually axiomatic that further R&D will increase the speed/cost ratio. For reasons detailed in the technical section, RISC's relative speed/cost advantage over conventional architecture should increase with time depending on the amount of R&D effort—especially design and development effort—devoted to it.

	INITIAL MARKET SHARE	R&D EFFORT	SPEED-COST RATIO	SOFTW. COMPATIBIL. & AVAILAB.	MARKET PENETR.	AVAILABILITY OF SUBST FOR RISC
INITIAL MARKET SHARE		↑		↑	↑	
R&D EFFORT			↑			
SPEED-COST RATIO					↑	
SOFTWARE COMPATIBILITY & AVAILABILITY					↑	
MARKET PENETRATION	↑			↑	↑	↓
AVAILABILITY OF SUBST. FOR RISC					↓	

Figure 1 - Cross Impact Matrix

Speed/Cost Ratio: Since this is RISC's primary advantage, the correlation with market penetration is positive and strong.

Software Compatibility/Availability: Appropriate software, and a perception by users that compatibility is not a problem, is crucial if RISC is to expand beyond a very narrow market niche.

Market Penetration: Wide acceptance of this technology will spur further R&D efforts as more players enter the market. A larger user base will induce more software production, and will deter market entry by potential substitutes.

Availability of Substitutes: Given the lead times characteristic of computer development projects, any significant substitute for RISC would have to be well under way now if it is to be on the market by 1992. No such project is apparent. In the unlikely event that a substitute did appear, it would negatively affect market penetration.

### 3.4. A Mathematical Model

In this section, we present the mathematical model used to obtain numeric values for our assessment. The model is a stochastic simulation model, one in which the relations between variables are explained in a quantitative and dynamic way.

The structure of the model is described in broad terms by the flow chart in Figure 2(1). The mathematical equations that describe the relations indicated by the arrows are simple functional forms commonly used in econometric analysis. More specifically, the relations are as follows. The design effort in RISC architecture, defined as the percentage of the total computer architecture design budget affected to RISC projects, is proportional to the initial market share obtained by RISC computers (first arrow). The design effort on RISC architecture affects the speed/cost performance of RISC computers relative to that of conventional computers: the speed/cost ratio increases at a certain annual rate which depends on the design effort and the proximity to a theoretical maximum speed/cost ratio performance attainable.

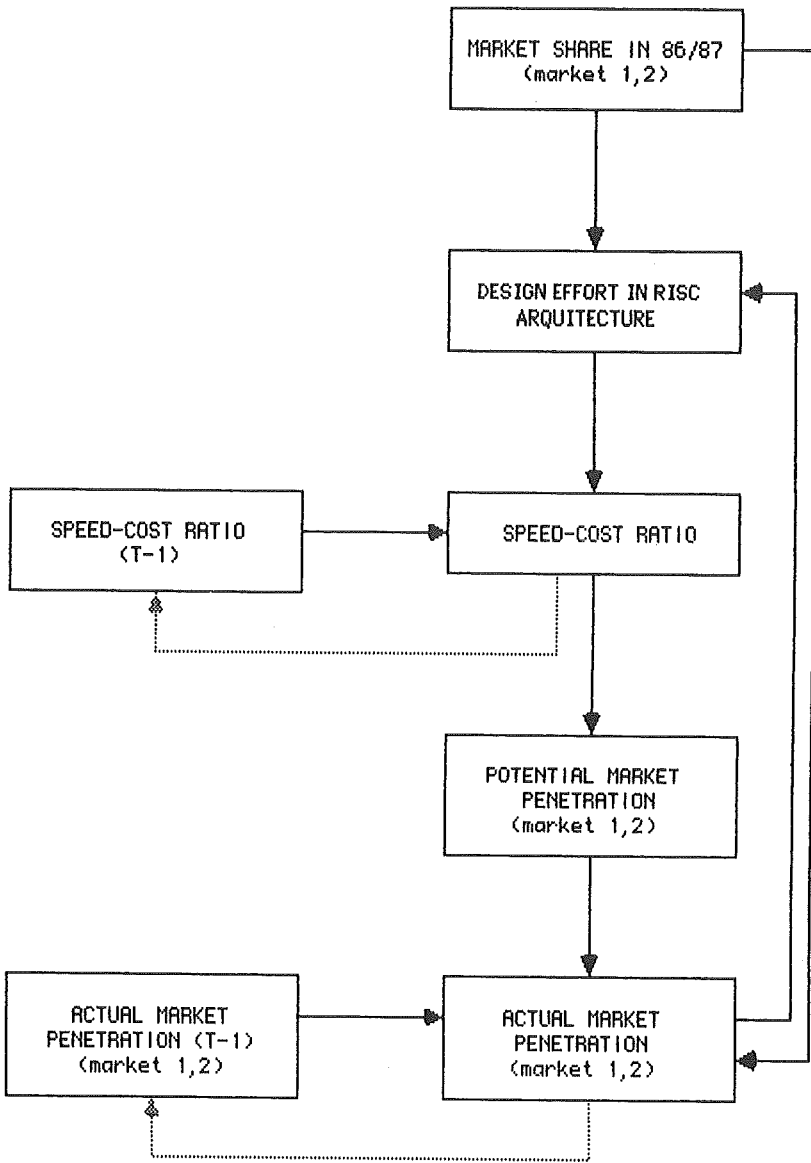


Figure 2 - Structure of the Mathematical Model

The speed/cost performance has in turn a positive effect on the potential market penetration of RISC computers.

Potential market penetration is the long-run penetration; it can also be interpreted as the market share that would be immediately achieved if there were no adjustment costs or any other factor of inertia in market demand. Given the diversity of consumer behavior relative to speed/cost performance, we divided the market initially considered - "supermini" computers and below, excluding embedded systems and toys - into two submarkets: Market 1 includes computers for scientific applications, real time usage, and other applications in which CPU speed is an important factor; Market 2 includes all other computers in the overall range considered(2). Although the functional form explaining the relation between speed/cost performance and potential market penetration is the same for both markets, the parameter reflecting the intensity of this demand varies.

In practice, we expect market penetration to adjust progressively to its potential. In this model, the adjustment of actual market penetration to its potential is described by an S-curve, which seems to be a good approximation for the adoption pattern of a new technology(3). The shape of this curve reflects the speed of adjustment in demand. Finally, market penetration has a feed-back effect on design effort. For simplicity, this value is set to equal the market share of RISC technology computers(4).

The values of the parameters used in the model are not always easy to interpret. For this reason, we performed a preliminary sensitivity analysis of the impact of each parameter on the values of the main model variables. Then we combined this analysis with expert opinion to construct



a base-case parameter set (5).

Using the base-case parameter set, we solved the model using the Monte-Carlo method, which consists in subjecting the model to a large number of simulated trials. In each trial, the values of the input variables are randomly generated. In our case, the input variables are the market share achieved by RISC computers in 1986-87 and the speed of adjustment of demand. Based on these values, we solve for the time-paths of the different variables using the relations previously described. Repeating this process a large number of times yields a family of time - paths for the most relevant variables. For example, Figure 3 shows the simulated time-paths for the variables "Potential Market Penetration" and "Actual Market Penetration" (1987-1995) obtained after 50 different trials. From this, it is possible to derive the probability functions for some important variables, the "output" variables (6).

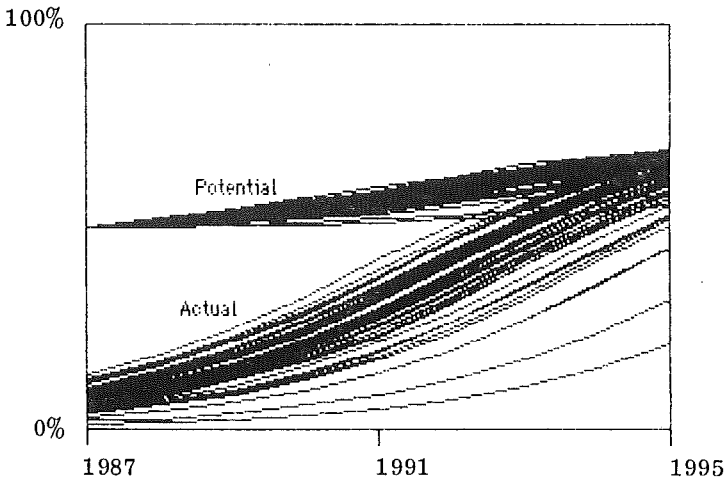


Fig 3: Potential and Actual Market Penetration: Results of 50 Stochastic Simulations with a Fixed Parameter Set.

We are mainly concerned with the distribution of the variable "Actual Market Penetration in 1992". One way of interpreting this function is to consider it as a cross-section of the graph in Figure 3 taken for 1992. The results presented in the next section refer to this function. It is important to note that a model like the one we used does not provide exact estimates of the "output" variables, but rather a probability function. We can, of course, use average values as point estimates; however, the most reasonable way of presenting the results - the one we will use in the next section - is by confidence intervals for the "output" variables.

### 3.5. Results and Analysis

The main results for the base-case can be found in Figure 4, the probability function for the actual market penetration of RISC architecture computers in 1992. In broad terms, these results mean that the penetration in the "scientific" market is likely to be between 10 and 40%, whereas the one in the "general" market will probably not exceed 5%. (Note that, for convenience, the x-axis is differently labeled in the second case). These results seem to be in accordance to the expectation that the "scientific applications" market is the one where RISC architecture may be more useful. However, the difference between the penetration in the two markets is significantly larger than what we expected from the potential market penetration alone. For a speed/cost ratio of four, potential market penetration is estimated to be 50% and 40% in Markets 1 and 2, respectively (see values of dem1 and dem2 presented in Appendix 2). The reason for this contrast is the difference of the speed of adjustment in demand, which is higher for Market 1. That is, we expect that in the

long-run the penetration of RISC computers will be high both in Market 1 and in Market 2. However, in the medium-run (i.e. five years from now) we expect the penetration in Market 1 to be substantially higher, due to a higher speed of adjustment in demand.

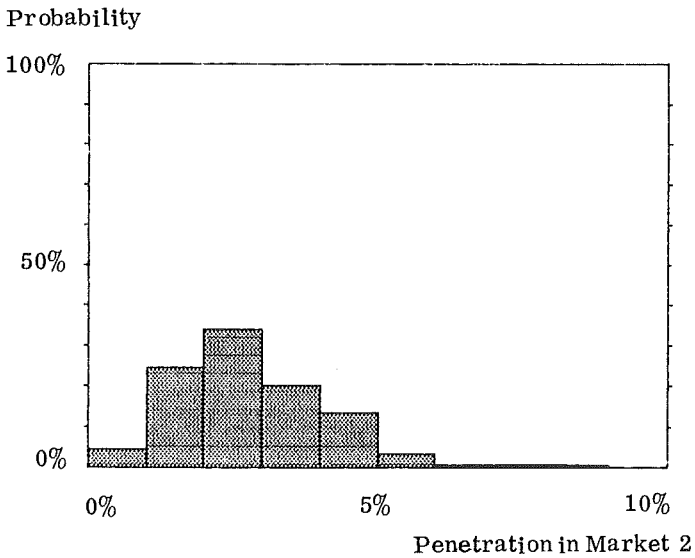
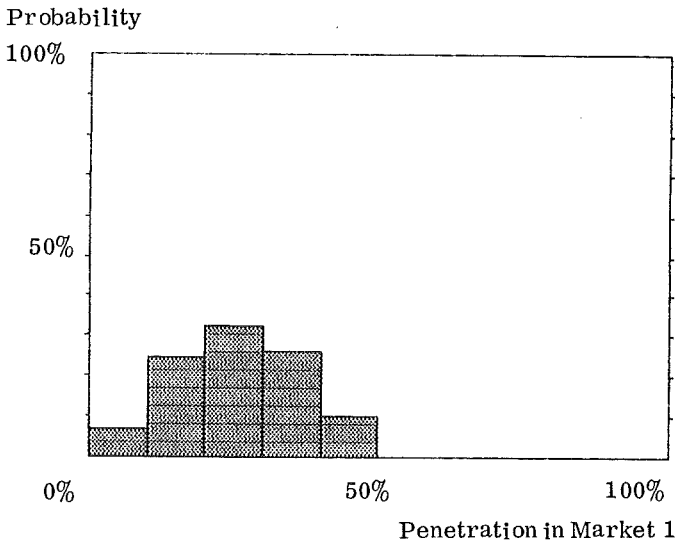


Fig. 4 - Market Penetration in 1992: Results for the Base Case

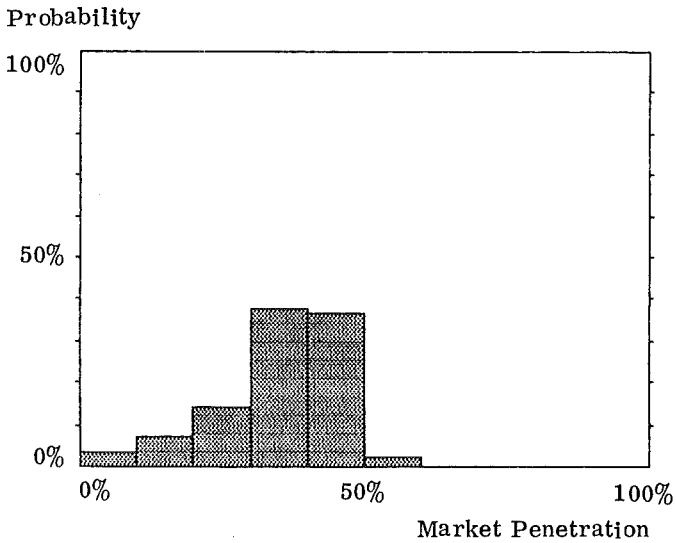
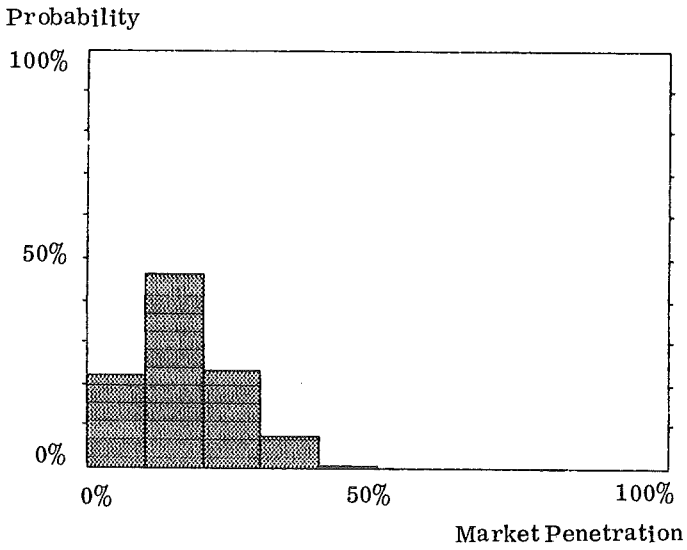


Figure 5 - Penetration in Market 1 in 1992  
 Sensitivity to the value of initial market penetration (1986/87)  
 Results for imp 1 = 5% and imp 1 = 20%  
 (Note): in the base-case, imp 1 = 10%

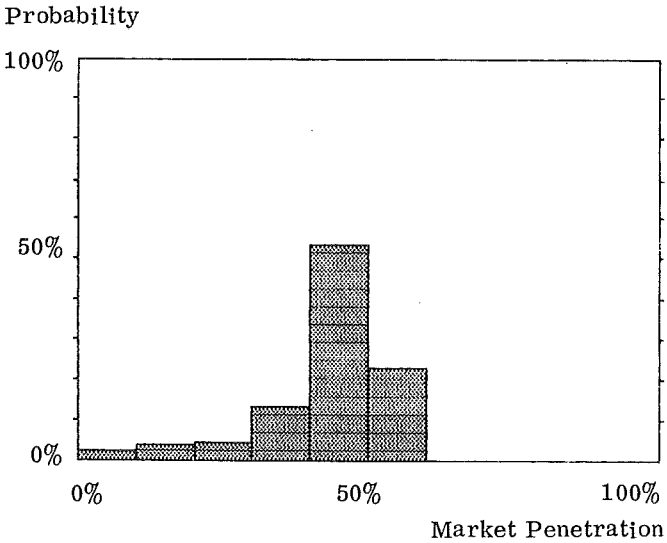
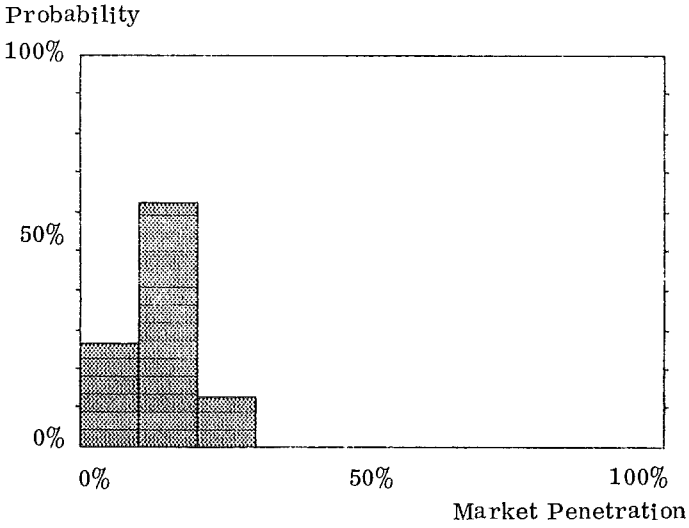


Fig. 6 - Penetration in Market 1 in 1992  
Sensitivity to the speed of adjustment in demand  
Results for  $sad\ 1 = 5$  and  $sad\ 1 = 2$   
(Note: in the base-case,  $sad\ 1 = 1$ )

In order to evaluate the sensitivity of the results to the value of the various parameters, additional simulations were made with different parameter values. From these simulations, we identified the speed of adjustment in demand and the initial market share as the most important factors in assessing the market penetration in 1992. The results of the sensitivity analysis for these key parameters are presented in Figure 5 (initial market penetration) and Figure 6 (speed of adjustment in demand). We consider only the case of Market 1, the market of greatest interest.

The fact that 1992 is approximately on the middle of the S-curve explains the strong dependence on the value of the speed of adjustment parameter: small changes in this parameter, which move the curve horizontally, may have a strong impact on the resulting values in the years where the curve is steeper. Putting in another way: even if it is possible to accurately forecast the long-run penetration of RISC computers, it is very difficult to anticipate the exact moment when the "jump" of that variable will occur. (By "jump" we mean the steep section of the S-curve). Therefore, medium-term forecasts, where medium-term is the range when the "jump" is expected to occur, are highly variable.

The marked dependence of the results on the initial market share is a well-established relation in the literature on diffusion of innovations: a small initial change may have a strong impact on the process of adoption, in particular on the speed with which adoption adjusts to its potential. In terms of the present model, this means that the success of the first RISC machines introduced in the market, namely the IBM RT and the HP Spectrum, is likely to be very influential on the future adoption of the RISC technology.

Based on these results and on expert opinion, we estimate that there will be five major competitors in the RISC market in 1992. No attempt is made to specifically identify these major players. There will, of course, be a larger number of companies with minor involvement in the market.

### 3.6. A Final Note

By the time this paper is being revised (February 1987), some important new facts about the market for RISC computers are known. In the first quarter of 1986, IBM introduced its first RISC machine, the IBM RT, specially designed for scientific applications. The computer is being well accepted by the market. On the other hand, the introduction of Hewlett-Packard's HP Spectrum, a computer of much wider application than the IBM RT, has been repeatedly delayed, apparently due to software compatibility problems. Based on this new information, we expect the penetration of RISC computers in Market 1 to be approximately as in Figure 4(a), while the penetration in Market 2 is likely to lie on the low half of the range depicted in Figure 4(b).

### Notes

- (1). For a more detailed description of the model, see Appendix 1.
- (2). We estimate the relative weights of Market 1 and Market 2 to be by 1992 20 and 80%, respectively.
- (3). See, for example, Rogers (1982).
- (4). On average, one expects this to be true.
- (5). The values of the base-case parameter set are presented in Appendix 2.
- (6). For more on simulation methodology and random numbers generation, see Porter (1980) and Payne (1982).

## References

Payne, J.A. (1982). Introduction to Simulation, New York: McGraw-Hill Book Company.

Porter, A.L. (1980). A Guidebook for Technology Assessment and Impact Analysis, New-York: North-Holland.

Rogers, E.M. (1982) The Diffusion of Innovations (3rd ed) New York: MacMillan Publishing Company.

## Appendix 1: Technical description of the model

General description: The purpose of the model is to assess the market share of RISC architecture computers in 1992, as a function of several parameters and previously generated random variables. Instead of point estimates, the model provides an approximate probability function for the results. Variables are measured in annual values and interrelated in a dynamic way.

The potential market initially considered - "supermini" computers and below, excluding embedded systems and toys - is divided into two submarkets: Market 1 includes computers for scientific applications, real time usage, and other applications in which CPU speed is an important factor; Market 2 includes all other computers in the overall range considered.

## Variables:

DES = percentage of total architecture design effort devoted to RISC technology;



SCR = speed-cost ratio for RISC technology computers (not CPU's), relative to the one of conventional technology computers (e.g. SCR=2 means that, for the same price, a RISC computer is twice as fast as a conventional one);

PMP<sub>i</sub> = potential market penetration in market i, i=1,2;

AMP<sub>i</sub> = actual market penetration in market i, i=1,2.

**Simulation range:** 1987-1992.

**Parameters:**

imp<sub>i</sub> = optimist forecast for the penetration of RISC computers in market i during 1986-87; (rigorously speaking, upper limit of a three-standard-deviation centered interval for the value of AMP<sub>i</sub><sub>1987</sub>, which is normally distributed;)

l<sub>rn</sub> = learning rate parameter; the higher l<sub>rn</sub>, the higher the rate of increase in SCR is; (to be precise, the SCR learning rate depends on l<sub>rn</sub>-times-DES, rather than l<sub>rn</sub> alone; hence, l<sub>rn</sub> reflects the learning rate in the case where all DES effort is devoted to RISC technology, i.e. in the case DES=1;)

m<sub>xs</sub> = maximum attainable value of SCR;

dem<sub>i</sub> = parameter characterizing the demand for speed-cost in market i, i=1,2; the higher dem, the more the market is responsive to speed/cost performance;

sad<sub>i</sub> = parameter characterizing the speed of adjustment in demand, for market i, i=1,2; to be more precise,

average value of the parameter reflecting the speed of adjustment in demand (the actual value is randomly generated according to a normal distribution); the higher sad, the more rapidly actual market penetration adjusts to potential market penetration;

SCR<sub>1987</sub>: although SCR is a variable, its initial value can be treated as a parameter, since it is not generated by the model but rather inputed (as any other parameter);

**Equations:**

$$GAP_t = GAP_{t-1} (1 - lrn \cdot R\&D_t) \quad (\text{auxiliary equation})$$

$$SCR_t = mxs - GAP_t$$

$$PMP_t = 1 - SCR_t^{-dem}$$

$$AMP_t = AMP_{t-1} \left\{ 1 + sad \cdot (PMP_t - AMP_t) \right\}$$

$$DES_t = AMP_{t-1}$$

The listing of the BASIC program used in solving this model may be found in Appendix 3.

## **Appendix 2: Values for the model parameters**

The base-case parameter values are the following:

mks1 = 10%, i.e., we expect the market share in the "scientific applications" market to be between 0 and 10% (average value of 5%) during the period 1986-87; similarly,

mks2=2%;

lrn=1; this means that it takes approximately four or five years to achieve 50% of the possible improvements in speed/cost ratio performance;

mxs = 6; this means that "in the long-run" RISC architecture has a 6-times better performance than conventional architecture. This value is substantially lower than those reported by different experts, for several reasons. First, the values reported are taken relative to the performance of contemporary conventional architecture computers (e.g. the VAX 780); it is likely, however, that the performance of conventional architecture will increase in the future. Second, some of the values include speed gains due to the adoption of GaAs chips; however, these do not correspond to net relative gains of RISC architecture, since GaAs chips may also be used in conventional machines. Third, many of the estimates are for CPU performance rather than computer performance. The relative advantage of RISC technology in speed performance is likely to be "diluted" at the level of computer performance, in which other factors besides CPU speed matter. Finally, one should take into account the normal "optimistic bias" often found in forecasts made by those who are more interested in the success of the technology.

dem1 = .5; this means that for SCR=4 potential market penetration is 50%;

dem2 = .4; for SCR=4, potential market penetration is approximately 40%; this lower level of dem is consistent with the idea that in non-scientific applications CPU speed is a less important factor;

sad1 = 1; this means that, on average it takes approximately four or five years for the actual demand to adjust to 50% of its potential;

sad2 = .5; the lead time is now approximately ten years; this value seems to be consistent with the historical evidence that hardware improvements tend to be adopted at a lower rate by the general purpose computer producers;

SCR<sub>1987</sub> = 3; according to the opinion of producers and some magazines, the first RISC architecture machines are expected to work four times faster than the corresponding conventional ones; however, its cost is also expected to be higher (10 to 29% higher); considering this and the natural "seller bias" in disclosing this sort of information, we think 3 is a reasonable value for SCR.

### Appendix 3: Listing of the BASIC Program Used to Solve the Mathematical Model

```
DIM p1(10), p2(10)
```

```
ns=500 '(number of simulations)
```

```
'Input parameters
scr0=3
mxs=6
lrn=1
imp1=1
imp2=02
w1=2
dem1=5
dem2=4
sad1m=1
sad2m=5

'Derived Parameters
w2=1-w1
gap0=mxs-scr0
sdm1=imp1/6
sdm2=imp2/6
sds1=sad1m/3
sds2=sad2m/3

FOR s=1 TO ns

scr=scr0
gap=gap0

'Random Variables Generation
x=RND(s)
y=RND(s)

amp1=imp1/2+sdm1*SQR(-2*LOG(x))*COS(6.28*y)
IF amp1<.01 THEN amp1=.01
x=RND(s)
y=RND(s)
amp2=imp2/2+sdm2*SQR(-2*LOG(x))*COS(6.28*y)
IF amp2<.001 THEN amp2=.001
```

```

x=RND(s)
y=RND(s)

sad1=(2* sad1m)/2+sds1*SQR(-2*LOG(X)*COS(6.28*y)
IF sad1 .001 THEN sad1=.001
x=RND(s)
y=RND(s)

sad2=(2*sad2m)/2+sds2+*SQR(-2*LOG(x))*COS(6.28*y)
IF sad .001 THEN sad2=.001

FOR t=1987 TO 1992

amp=w1*amp1+w2*amp2
rad=amp
gap=gap*(1-lrn*rad)
scr=mxs-gap
pmp1=1-1/scr^(dem1)
pmp2=1-1/scr^(dem2)
amp1=amp1*(1+sad1*(pmp1-amp1))
amp2=amp2*(1+sad2*(pmp2-amp2))

NEXT t

i1=INT(amp1*10)+1
p1(i1)=p1(i1)+1
i2=INT(amp2*100)+1
p2(i2)=p2(i2)+1

NEXT s

```

ANÁLISE DE ESTRANGULAMENTOS TECNOLÓGICOS

JOSÉ CAYOLLA

Siderurgia Nacional e Instituto Superior de  
Engenharia de Lisboa  
Praça do Junqueiro, n<sup>o</sup> 1-3<sup>o</sup>D - Carcavelos - 2775 PAREDE

Resumo

A identificação ordenada dos estrangulamentos tecnológicos de uma actividade industrial qualquer é sempre um problema prévio à pretensão de lhe aumentar a capacidade.

Apresenta-se um método geral de resolução deste problema que se fundamenta num modelo analógico hidráulico, o qual funciona por simples gravidade.

O método foi aplicado às fábricas da Siderurgia Nacional, no Seixal e na Maia, com vista à ampliação do Plano Siderúrgico Nacional (produtos longos) na sua versão relativa ao quinquénio 1976-1981.(\*).

-----  
(\*). Só agora é possível a publicação deste trabalho por motivos de confidencialidade.

## 1. INTRODUÇÃO

### 1.1 Considerações Genéricas

A SIDERURGIA NACIONAL, fundada em 1955 e cujo arranque industrial teve lugar em 1961, dispõe de uma fábrica no Seixal e de outra na Maia.

A fábrica do Seixal é uma "siderurgia integrada", no que toca ao fabrico dos chamados "produtos longos", (barras, cantoneiras, varão para betão, fio, carril), isto é, comporta todas as operações industriais unitárias, desde o minério de ferro ao produto acabado.

Quanto aos "produtos planos" (chapa fina, com diversos tipos de acabamento superficial), já assim não acontece, porque o produto final é obtido, por laminagem a frio, de um semi-produto importado, as bobinas, ou "coils".

A Fábrica da Maia não comporta alto forno, nem laminagem a frio de produtos planos mas, tão somente, uma instalação de forno eléctrico para a produção de aço líquido, um vazamento contínuo e um trem contínuo, para a laminagem de produtos longos.

Devido às diferenças de tecnologia e de matérias primas, já apontadas, os planos de fabrico são elaborados separadamente para produtos longos e planos, ambos tendo em comum, obviamente, a atenção, por um lado, às solicitações previsionais do mercado e, por outro lado, às capacidades de produção de cada uma das unidades industriais.

Em fins de 1976 o esquema fabril simplificado, isto é, apenas em termos de grandes operações, e o fluxo de massa,



em milhares de toneladas, correspondente ao plano de exploração elaborado para o ano de 1977, era o da Fig.1 no qual, topologicamente, a linha a traço e ponto separa as zonas correspondentes a FAB e FAM (1).

Acontecia, e já desde anteriormente, que as perspectivas do mercado nacional e internacional do aço apontavam para a previsão de, num horizonte económico de dez anos, a procura exceder largamente a capacidade de fabrico, tanto de produtos longos como de planos.

Aquelas perspectivas davam portanto crédito de viabilidade económica a uma larga ampliação das fábricas da SN, a qual foi decidida a nível governamental e inserida no chamado "Plano Siderúrgico Nacional" (PSN) (2). Este Plano incluía, não só a ampliação e beneficiação das instalações existentes, mas também novas instalações, desde um cais para navios mine-raleiros de grande porte até à fábrica de produtos planos, incluindo "chapa forte", para a indústria metalo-mecânica e a construção naval, a partir de aço líquido.

## 1.2 Definição do problema

O primeiro problema tecnológico levantado para a SN pelo referido PSN - em termos até de uma verdadeira questão prévia - era, obviamente, o levantamento das operações unitárias que constituem estrangulamentos tecnológicos quanto à obtenção de produtos acabados, longos e planos, e, bem assim, o seu ordenamento, desde o mais fortemente condicionante ao mais fracamente condicionante.

Devido às já referidas grandes diferenças de tecnologia entre os fabricos de longos e de planos, o problema dos estrangulamentos tecnológicos foi abordado em separado para

cada um daqueles tipos de produtos, tendo sido resolvido, facilmente e por um processo clássico, o dos produtos planos.

Restava o problema relativo ao dos produtos longos, cuja resolução foi o objectivo do presente trabalho.

A título introdutório e prévio, observa-se que desde logo se vê que o problema em causa pede uma abordagem especial do ponto de vista lógico, uma vez que, por exemplo, as equações de conservação da massa, verificando-se sempre, isto é, qualquer que seja a distribuição e ordem dos estrangulamentos tecnológicos, nada informam sobre esta matéria.

## 2. MODELO ANALÓGICO

### 2.1 Considerações introdutórias

O nível de actividade de uma operação industrial qualquer mede-se pela massa do produto acabado obtido por unidade de tempo, isto é, tem as dimensões físicas de um caudal mássico,  $(MT^{-1})$  (3).

Os princípios da Hidrodinâmica informam que num sistema constituído por um reservatório contendo um líquido que possa escoar, por simples gravidade, através de um tubo de diâmetro constante que se abra no fundo, a velocidade do líquido neste tubo - e, portanto, o caudal volúmico de saída - é proporcional à altura desde aquele fundo até à superfície livre do líquido. Para um líquido homogéneo, mas, de resto, qualquer, o que se acaba de dizer para o caudal volúmico vale para o caudal mássico de escoamento.

Estes princípios simples e bem conhecidos da Física permitem estabelecer uma analogia perfeita entre uma operação

industrial, funcionando a um certo nível de actividade, e o sistema hidráulico descrito, funcionando em regime estacionário, mantendo constante o nível do reservatório, mediante alimentação exterior da superfície livre do líquido, também por simples gravidade.

Ao nível máximo de actividade daquela operação, dito também "nível de saturação", corresponde, portanto, um certo nível de altura de líquido no reservatório análogo, o qual designaremos igualmente por nível de saturação, simbolizado por NST.

Claro que para a resolução do problema em causa, que é o ordenamento dos estrangulamentos tecnológicos inerentes a cada uma das operações unitárias do esquema da Fig. 1, é necessário, depois de fixada uma escala da qual decorra uma cómoda praticabilidade do modelo - por exemplo, tonelada-cm<sup>3</sup> e ano-minuto - que os reservatórios análogos das unidades tenham alturas superiores aos respectivos NST. Assim, a cada regime hidráulico estacionário de nível inferior ou igual ao NST corresponde um nível de actividade praticável na operação industrial análoga. Os regimes com nível superior a NST são os análogos de níveis de actividade da mesma operação, todavia somente possíveis depois de aumentar suficientemente a sua capacidade de produção.

Atendendo a que numa siderurgia - como, aliás, em quase todas as indústrias integradas - as operações são sequenciais, quer dizer, o produto de uma operação é carga da seguinte, torna-se óbvio, a partir dos princípios expostos, que se às grandes operações unitárias fizermos corresponder reservatórios - de paredes transparentes, por razões que adiante se tornarão claras - com conexões tubulares idênticas às da Fig.1, se obtém um sistema que pode ser hidraulicamente alimentado, por simples gravidade, a partir do reservatório análogo à primeira operação, que é o alto forno.

O esquema deste modelo analógico é o da Fig.2 na folha seguinte.

Antes, porém, de expor como é que este modelo permite resolver, em termos de extrema simplicidade, o problema do ordenamento dos ET, é necessário tecer algumas considerações preliminares, como segue.

a) Comparando os esquemas da Fig.1 e da Fig.2, nota-se que neste último se incluiu num único reservatório análogo TB+VC, isto porque VC está sempre saturado, devido a razões tecnológicas bem conhecidas. O mesmo se aplica a FE e LD+FE.

b) Para atender a que os rendimentos de transformação são todos inferiores a 1, cada um dos reservatórios análogos das unidades deve ter ainda, também no fundo, um segundo tubo de saída, com diâmetro correlacionado com o do "produto", e simulando, em termos de respeito pelo balanço mássico, a obtenção, marginal mas inevitável, de "outros" (OT): escórias, sucata, gases, lamas, quebras, etc..

c) No modelo descrito a variável de saída, LONGOS, é função, em FAB, de duas variáveis de entrada independentes: carga do alto forno e carga do forno eléctrico (CAF+CFE). Em FAM tem-se uma única variável de entrada, carga do FE. Além destas variáveis independentes, de entrada, haveria ainda que considerar uma variável de correlação FAB - FAM: a eventual transferência de bilhetes excedentários de FAB para o TAC (TC) de FAM (<sup>4</sup>). Essa transferência seria, evidente e facilmente, simulada por um tubo de saída lateral e horizontal, ligando o reservatório simulador de TAC (FAB) ao de TAC (FAM) e situado exactamente à altura correspondente ao NST de TAC (FAB).

d) Atendendo a que os FE são tecnologicamente mais simples e, conseqüentemente, mais fáceis de controlar do que o AF, a

abordagem do problema resulta muito simplificada - pela eliminação de duas variáveis independentes - se suposermos os FE sempre saturados (pela condicionante mais forte, que pode não ser, e não é, o próprio forno) o que, aliás, não implica qualquer quebra na generalidade e utilidade das deduções possíveis, porque é essa a situação real.

e) No que toca ao rigor e pormenor destas deduções, é óbvio que o modelo sugerido é susceptível de pormenorizações adicionais (agora não necessárias), por desdobramento dos análogos correspondentes às grandes unidades numa rede de análogos menores, cada um deles relacionado com os ET inerentes a sub-operações internas dessas mesmas unidades, os quais ET, globalmente, definem o nível de saturação da unidade a que pertencem no modelo da Fig. 2.

## 2.2 Funcionamento do modelo

Partindo do dispositivo hidráulico esquematizado na Fig. 2 em vazio e alimentando, por simples gravidade com o líquido homogéneo adoptado, o reservatório análogo do AF, os outros reservatórios são, conseqüentemente, também alimentados por simples gravidade, através dos respectivos tubos de interligação.

A alimentação deve ser a caudal lentamente crescente (regime quase-estacionário), por forma a garantir, por um lado, que não sobrevenha um extravasamento brusco e rápido do AF antes de se atingirem níveis informativos nos reservatórios análogos das outras unidades e, por outro lado, que os níveis em todos estes reservatórios subam lentamente.

O ordenamento dos ET fica então perfeita e simplesmente

definido pela seguinte observação: o ET mais condicionante é aquele em que no correspondente reservatório análogo primeiro se atinge o respectivo nível de saturação e assim por diante, até que o ET menos condicionante é o que corresponde ao último NST a ser atingido.<sup>(5)</sup>

### 2.3 Modelos alternativos

Definido o modelo capaz de resolver completamente o problema que se punha de ordenar os ET da SN, procedeu-se contudo, antes da sua concretização, a uma análise comparativa, em termos de custos - benefícios, de possíveis esquemas alternativos.

O primeiro que ocorreu, por ser o mais óbvio, é um modelo analógico eléctrico - rede de Kirchoff em regime não estacionário - em que os análogos dos caudais são intensidades de corrente, etc..

Esta alternativa foi logo excluída, por ser muito mais onerosa, sem nenhum benefício em contrapartida que a justificasse, já que o modelo nunca seria, nem de utilização frequente na SN nem de comercialização que interessasse a esta, por isso ser totalmente marginal, tanto a ela própria, SN, como ao problema concreto posto pelo PSN.

A segunda alternativa era constituída pela simples simulação do funcionamento do modelo em computador, dispensando portanto a sua construção, o que, desde logo, a definia como a mais vantajosa em termos comparativos de custos-benefícios.

Todavia, o facto de o computador disponível ser digital, em vez de analógico, tornava a simulação em causa difícil, relativamente ao funcionamento do modelo como já descrito-

-isto é, carga lentamente crescente de reservatórios vazios-  
-mas muito mais fácil em relação a um outro esquema de fun-  
-cionamento, fisicamente diferente, mas equivalente, do ponto  
de vista da informação lógica que fornece, o qual se descreve  
a seguir.

### 3. ANÁLISE LÓGICA

No quadro em anexo 2, "Planeamento de Produção a 5 Anos",  
todas as unidades foram colocadas ao respectivo nível máximo  
de produção, procedendo-se em seguida, segundo a lógica do  
modelo, à análise dos excessos, (ou faltas), de carga de cada  
unidade, isto é, à análise dos níveis que, nestas condições  
seriam observados em cada reservatório análogo do modelo, no  
fim do intervalo de tempo que, na escala escolhida, fosse o  
análogo de um ano de exploração.

Pondo de parte o ano de 1977 - não porque a análise que  
vai expor-se lhe não fosse aplicável, mas porque os respecti-  
vos Planos de Fabricação e Orçamento estavam já elaborados em  
termos definitivos - tem-se que as informações básicas conti-  
das nesse quadro são as das linhas 17, 22, 47, 48 e 78 (que  
aqui se reproduzem) por força das deduções que se passa a  
apresentar.

ANO	1978	1979	1980	1981
L17 BLTS VC	77 500	90 000	90 000	90 000 (t)
L47 EXCLG1	- 77 600	- 82 700	- 52 900	-
L48 EXCLG2	- 28 800	- 35 800	+ 800	-
L22 EXCBLTS1,2	+ 34 500	+ 42 900	+ 42 900	+ 84 900
L78 EXCBLTSP/FAM	-	-	-	+ 84 900

Quadro 1.

Para ganho de inteligibilidade, convém começar por esclarecer que o índice 1 em L40 e L22 corresponde ao nível "1" de actividade do AF, - equivalente a cerca de 1030t de gusa por dia útil de laboração (v. L34A do quadro) - o máximo então previsível.

Quanto ao índice 2 nas mesmas linhas L47 e L22 corresponde ele ao nível de actividade do AF - equivalente a cerca de 1180t de gusa por dia útil de laboração (v. L34B do quadro)-o qual saturava o órgão mais restritivo de RDA, que é o conjunto "nave de vazamento e pontes" (NV,TP) na Fig. 2.

O facto de em L22 serem idênticos os valores correspondentes aos dois índices 1 e 2 - e daí a notação EXCBLTS 1,2- -deve-se a uma razão totalmente diversa, a qual é serem os valores dessa linha correspondentes á saturação das unidades produtoras de billetes, i.e. TB+VC, quiçá por recurso a uma hipotética importação (cfr. L47 e L48 ou as equivalentes L51C e L51D do quadro em anexo 2).

Quanto à L17, correspondente á produção máxima previsível do VC em 1976, é sabido, por um lado, que para uma instalação deste tipo são exígieis, em princípio, valores nominais substancialmente superiores, da ordem das 120 000 t/ano, mesmo sem recurso a "vazamentos seguidos", ou em "carga contínua" mas, por outro lado, não é menos sabido que dificuldades concretas e bem conhecidas á data condicionavam fortemente o VC de FAB.

São precisamente estas condicionantes que explicam os números de L17, do quadro em anexo 2.

Feitas estas considerações introdutórias, passa-se á análise dedutiva das informações contidas nas 5 linhas do Quadro 1 primeiro em termos gerais que atendem apenas ao



sinal dos números desse quadro e, depois, aos valores concretos desses números.

Para simplificar a simbologia, escrever-se-á apenas TB, VC, TAC, etc., para representar as capacidades máximas de TB, VC, TAC, etc., em termos de produção, i.e. de caudal de saída no modelo analógico da Fig.2, no qual as setas marginais à direita indicam a correspondência dos níveis de actividade AF1 e AF2 com os de LD+FE, NV, PT, etc., sem qualquer preocupação de conteúdo quantitativo, isto é, atendendo apenas à ordenação dos níveis correspondentes. De facto é nesta ordenação que reside a maior riqueza de conteúdo lógico, por via do seguinte raciocínio, simples mas fundamental: se uma unidade saturada provoca "overload" na unidade imediatamente a jusante do esquema de fabrico isso significa que a capacidade desta é inferior á daquela; reciprocamente se a uma unidade saturada corresponde "underload" na unidade imediatamente a jusante isso significa que a capacidade desta é superior á daquela.

Para começar a utilizar este raciocínio a partir da simulação numérica que é o quadro em anexo deve notar-se que o Quadro 1 revela que em 1978 e 1979 a situação é da mesma natureza, pois que se tem

$$\text{EXBLTS} > 0 \quad (1)$$

$$\text{EXCLG1} < 0 \quad (2)$$

$$\text{EXCLG2} < 0 \quad (3)$$

Por força do raciocínio que se acaba de expôr, deduzem-se imediatamente as seguintes implicações lógicas:

$$(1) \quad \longleftrightarrow \quad \text{TAC} \quad \ll \quad (\text{TB} + \text{VC}) \quad (4)$$

$$(2) \quad \longleftrightarrow \quad \text{AF1} \quad = \quad (\text{NV, PT})_1 \quad < \quad (\text{TB} + \text{VC}) \quad (5)$$

$$(3) \quad \longleftrightarrow \quad \text{AF2} \quad = \quad (\text{NV, PT})_2 \quad < \quad (\text{TB} + \text{VC}) \quad (6)$$

Como se sabe que  $AF2 > AF1$ , conclui-se que fica apenas por esclarecer, para além de (4), (5) e (6), a relação entre  $AF1$  e TAC.

A ignorância quanto a este ponto representar-se-á simbolicamente por

$$AF1 \ ? \ TAC \quad (7)$$

Para resolver esta questão principiemos por fazer notar, por um lado, que a negatividade das relações (2) e (3) significa que há uma margem excedentária da capacidade do TB<sup>(6)</sup> relativamente à de TAC e, por outro lado, que a saturação dessa margem excedentária - por recurso a lingotes, de stock e a uma hipotética importação, (cfr. linhas 48A, B, C, D do quadro em anexo 2 - é que conduziu aos valores de EXCBLTS do Quadro 1 deste texto. Significa isto que, se não se utilizasse essa margem excedentária do TB, os valores de EXCBLTS sofreriam as variações

$$- \ \Delta_1(\text{EXBLTS}) \ \longleftrightarrow \ \text{EXCLG1} \ < \ 0 \quad (8)$$

$$- \ \Delta_2(\text{EXBLTS}) \ \longleftrightarrow \ \text{EXCLG2} \ < \ 0 \quad (9)$$

sendo, de acordo com o Quadro 1,

$$\Delta_1, \ \Delta_2 \ > \ 0$$

$$\Delta_1 \ > \ \Delta_2 \quad (10)$$

isto é, os novos valores  $\text{EXCBLTS}'_1$  e  $\text{EXCBLTS}'_2$ , correspondentes aos níveis de actividade do TB definidos pelo consumo dos LG vindos de (NV,PT) nas variantes 1 e 2, são calculáveis por

$$\text{EXCBLTS}^1 = \text{EXBLTS} - \triangle 1 \quad (11)$$

$$\text{EXCBLTS}^2 = \text{EXBLTS} - \triangle 2 \quad (12)$$

Para continuar a seguir o raciocínio fundamental, há agora que considerar, quanto a (11) e (12), as seguintes variantes

$$(11) > 0 \quad (13)$$

$$(11) < 0 \quad (14)$$

$$(12) \geq 0 \quad (15)$$

$$(12) < 0 \quad (16)$$

que, associadas duas a duas, esgotam todas as hipóteses possíveis:

$$(13, 15); (13, 16); (14, 15); (14, 16) \quad (17)$$

Todavia, a relação (10) mostra já que estas 4 hipóteses não são todas distintas, pois que, por força dela resulta que

$$(13) \longrightarrow (15) \quad (18)$$

sendo portanto

$$(13, 15) \longleftrightarrow (13) \quad (19)$$

e (13, 16) impossível.

As hipóteses (17) reduzem-se pois a

$$(13); (14, 15); (14, 16). \quad (20)$$

Ora, sempre por via do mesmo raciocínio, pode também

escrever-se, quanto à variante (13):

$$(13) \longleftrightarrow (NV, PT)1 = AF1 \gg TAC \quad (21)$$

o que significa que, nesta hipótese, fica assim definida a relação desconhecida em (7).

Atendendo a (4) e (6) pode finalmente escrever-se

$$(TB + VC) > AF2 = (NV, PT) > AF1 \gg TAC \quad (22). \\ (11) = TRFBLTS \gg 0$$

Para completar a ordenação quanto às grandes unidades contempladas no diagrama da Fig. 2 basta apenas definir a relação

$$(LD + FE) ? (TB + VC) \quad (23)$$

o que, sendo matéria, não de lógica, mas de simples cálculo numérico, se fará quando chegar a altura de ver em qual das hipóteses de (20) se enquadram as situações definidas pelos valores concretos (não só pelo sinal) dos números que constituem o Quadro 1 do presente texto.

Há agora que prosseguir a análise lógica considerando a 2<sup>a</sup> hipótese de (20), isto é (14, 15). Ora, utilizando relativamente a uma proposição lógica  $p$  a simbologia habitual " $\bar{p}$  = negação de  $p$ " tem-se

$$(14) = (\bar{13}) \quad (24)$$

donde, por (21),

$$(14) \longrightarrow AF1 < TAC \quad (25)$$

que resolve (7) em termos contraditórios de (21), como é forçoso.

Por outro lado

$$(15) \longrightarrow AF2 = (NV, PT) > TAC \quad (26),$$

o que significa que

$$(14, 15) \longrightarrow AF2 = (NV, PT) > TAC > AF1 \quad (27).$$

Atendendo a (6), tem-se finalmente

$$\begin{aligned} (LD+FB) ? (TB+VC) > AF2 = (NV, PT) > TAC > AF1 \\ TRFBLTS = 0 \end{aligned} \quad (28)$$

a interrogação sendo removível, tal como em (23), pelo cálculo numérico concreto.

Para esgotar a análise lógica falta apenas considerar a 3ª. e última hipótese de (20); isto é, (14, 16).

Como  $(14, 16) \subset (14)$  tem-se que permanece válida (25)

$$AF1 < TAC \quad (29)$$

e como

$$(16) = \tilde{(15)} \quad (30)$$

resulta de (26)

$$(16) \longrightarrow AF2 = (NV, PT) < TAC \quad (31).$$

Atendendo agora a (4), vem

$$(LD+FE) ? (TB+VC) > TAC > AF2 = (NV, PT) > AF1 \\ TRFBLTS = 0 \quad (32).$$

Esgotou-se assim a análise de todas as hipóteses em que podiam enquadrar-se as situações concretas nos anos de 1978 e 1979, pois que, como já se disse, quaisquer que sejam, elas verificam (1), (2) e (3).

Há, pois, que passar à situação diferente de 1980, a qual, pelo Quadro 1, se vê que satisfaz a

$$EXCBLTS > 0 \quad (33)$$

$$EXCLG1 < 0 \quad (34)$$

$$EXCLG2 > 0 \quad (35)$$

Ora,

$$(35) = \tilde{(3)}$$

$$\text{donde } (35) \rightarrow \tilde{(6)} = AF2 = (NV, PT) > (TB+VC)$$

Quanto a (33) e (34) são equivalentes a (1) e (2), mantendo portanto a validade de (4) e (5)

$$(TB + VC) > TAC \quad (4)$$

$$AF1 < (TB + VC) \quad (5).$$

Vê-se, pois, que, tal como antes, há que resolver (7)

$$AF1 ? TAC \quad (7).$$

Mas agora ao nível de actividade AF2 o TB está sobressaturado, como indica (35). Isto significa que em (9) é  $\Delta_2=0$

e em (12)

$$\text{EXCBLTS}^2 = \text{EXCBLTS} > 0,$$

o que obriga em (20) a excluir (14, 16).

Conclui-se portanto que em 1980 se verificaria uma das hipóteses já analisadas, (13) ou (14, 15), que conduziram aos resultados (22) e (28).

Finalmente, no que toca ao ano de 1981, o arranque previsto a 60% da capacidade PSN dos novos AF e LD disponibilizaria aço líquido suficiente para saturar VC1, VC2, (NV, PT) (ao nível que ainda tivesse este estrangulamento), as novas instalações de coils a quente e chapa forte e ainda, largamente, TAC (84 900 t, cfr. L22 do quadro 1) apesar de, nessa altura TAC se achar acrescentado de 240 000 t do novo trem contínuo TC2 (cfr. linha 7 do quadro em anexo). Nestes termos a situação era definida por

$$\begin{aligned} \text{AF} > (\text{LD} + \text{FE}) > (\text{NV}, \text{PT}) > (\text{TB} + \text{VC1}, 2) > \text{TAC} \\ \text{TRFBLTS} = (11) > 0 \end{aligned} \quad (36)$$

#### 4. ANÁLISE NUMÉRICA

Esgotada a análise lógica, restava ver, pelo cálculo numérico, qual das possíveis conclusões - (22), (28), (32) ou (36), depois de nelas devidamente inserida a resolução de (23) - se concretizava em cada ano.

1978

Aplicando o coeficiente de transformação  $\text{BLT/LG} = 0,9005$  (cfr. linha 14 do quadro em anexo) aos valores

concretos de EXCLG nas L47 e L48 do Quadro 1 tem-se, por (8) e (9),

$$\begin{aligned}\Delta_1 &= 0,9005 \times 77\ 600 = 69\ 879 \text{ t} \\ \text{EXCBLTS}^1 &= 34\ 500 - 69\ 879 = -35\ 379 \text{ t} < 0\end{aligned}$$

que se enquadram em (14), e

$$\begin{aligned}\Delta_2 &= 0,9005 \times 28\ 800 = 25\ 934 \text{ t} \\ \text{EXBLTS}^2 &= 34\ 500 - 25\ 934 = + 8\ 566 > 0\end{aligned}$$

que se enquadra em (15).

Logo está-se em (28). Para remover a interrogação entre (LD+FE) e (TB+VC) há que atender a que LD+FE  $\approx$  600 000 t de aço líquido.

Como o VC saturado absorve 88 000 t (cfr. linha 18 do quadro anexo), ter-se-iam disponíveis para lingotes, se não fosse o estrangulamento (NV,PT), 512 000 t de aço líquido, equivalentes a

$$512\ 000 \times 0,9708 = 497\ 050 \text{ t de LG}$$

o que excede as 455 300 t correspondentes à carga máxima do TB (cfr. L12 do quadro em anexo).

Logo (28) assume o seguinte aspecto final detalhado:

$$\begin{aligned}(\text{LD} + \text{FE}) > (\text{TB} + \text{VC}) > \text{AF2} = (\text{NV,PT}) > \text{TAC} > \text{AF1} \\ \text{TRFBLTS} &= 0\end{aligned}$$

Portanto a ordenação dos estrangulamentos e as respectivas prioridades de actuação para, removendo-os, aumentar o quantitativo possível de produtos acabados, era a inversa desta, ou seja,



1º AF1; 2º TAC; 3º (NV,PT); 4º AF2; 5º VC; 6º TB; 7º (LD+FE)

No que toca a FAM, sempre que não haja transferência de billetes de FAB a situação á clara

$$TAC > VC > FE$$

donde

$$1^\circ FE; 2^\circ VC; 3^\circ TAC$$

1979

$$\Delta_1 = 0,9005 \times 82\,700 = 74\,471 \text{ t}$$

$$EXCBLTS_1 = 42\,900 - 74\,471 \text{ t} = -31\,571 < 0 \longrightarrow (14)$$

$$\Delta_2 = 0,9005 \times 35\,800 = 32\,238$$

$$EXCBLTS_2 = 42\,900 - 32\,238 = +10\,662 > 0 \longrightarrow (15)$$

Logo vale (28), tal como no ano anterior.

A capacidade de LD+FE em aço líquido é, igualmente, de 600 000 t, das quais 510 000 disponíveis para 510 000 x 0,9708 = 495 108 t > 455 300 t de LG (carga máxima do TB).

Os estrangulamentos e respectivas prioridades de remoção apresentam-se, pois, ordenados exactamente como em 1978:

FAB: 1º AF1; 2º TAC; 3º (NV,PT); 4º AF2; 5º VC; 6º TB; 7º (LD+F1)

FAM: 1º FE; 2º VC; 3º TAC

1980

$$\Delta_1 = 0,9005 \times 52\,900 = 47\,636$$

$$EXCBLTS_1 = 42\,900 - 47\,636 = -4.736 < 0 \longrightarrow (14)$$

$$\Delta_2 = 0$$

$$\text{EXCBLTS}^2 = \text{EXCBLTS} = +42\ 900 > 0 \quad \longrightarrow (15)$$

A situação é ainda a mesma. Observa-se que o aumento substancial de  $\text{EXBLTS}^2$  relativamente ao ano anterior se deve, em grande parte, a um decréscimo de  $457\ 100 - 418\ 000 = 39\ 100$  t na capacidade de TAC, por coincidência das reparações periódicas do TC e TM (cfr. L11, 5 e 3 do quadro em anexo 2).

Consequentemente

FAB: 1º AF1; 2º TAC; 3º (NV,PT), 4º AF2; 5º VC; 6º TB; 7º(LD+FE)  
 FAM: 1º FE; 2º VC; 3º TAC

1981

Anteriormente considerações já feitas conduziram a (36), com dispensa de cálculos numéricos.

A ordenação é, portanto, como segue

FAB: 1º TAC; 2º VC1,2; 3º TB; 4º (NV,PT); 5º (LD+FE); 6º AF

TRFBLTS = 84 900 t.

Apesar deste valor ser elevado, não chegava para saturar o TAC = TC de FAM (cfr. L 57 do quadro em anexo), pelo que continuava a ter-se aí a ordenação

1º FE; 2º VC; 3º TAC

## 5. Conclusões

### 5.1 Ordenamento dos ET

1 - Antes do arranque das unidades do PSN, previsto em 1976 para Janeiro de 1981 e a 60% da respectiva capacidade, a ordenação dos estrangulamentos tecnológicos na Fábrica do Seixal era a seguinte:

1º AF1; 2º TAC; 3º (NV,PT); 4º AF2; 5º VC; 6º TB; 7º (LD+FE)

2 - Depois daquele arranque do PSN a ordenação passaria a ser

1º TAC; 2º VC1,2; 3º TB; 4º (NV,PT); 5º (LD+FE); 6º AF2

3 - Na Fábrica da Maia a ordenação era sempre

1º FE; 2º VC; 3º TAC (TC).

### 5.2 Benefícios económico-financeiros para a SN

Dentro da óptica do PSN, se os aumentos de capacidade das diversas unidades fabris da SN, nele previstos, fossem executados segundo as prioridades indicadas, por ordem decrescente, em 5.1, isso garantia a maximização da capacidade produtiva disponível durante o próprio intervalo de tempo necessário para executar os trabalhos de ampliação.

Como, sempre na óptica do PSN, estas maiores produções eram absorvíveis pelo mercado, maximizar a capacidade durante aquele intervalo de tempo equivaleria a maximizar as vendas e o respectivo resultado líquido durante o mesmo tempo.

## 6. PERSPECTIVAS FUTURAS DO MÉTODO

O método exposto é tão geral que transcende largamente o âmbito da SN e mesmo de qualquer siderurgia, sendo aplicável à identificação e ordenamento - com vista a definir prioridades em trabalhos de ampliação de capacidade - dos estrangulamentos tecnológicos de qualquer actividade, exigindo-se apenas que ela seja esquematizável por um conjunto de operações em sequência. (7)

-----  
(1) A simbologia, completa e por ordem alfabética, está em anexo 1.

-----  
(2) Posteriormente e "por força de profundas alterações que ocorreram na conjuntura internacional do aço e da baixa de procura deste produto no mercado nacional" o PSN foi objecto de sucessivas e grandes modificações, todas no sentido de reduzir a capacidade produtora a instalar, terminando por se confinar ao muito ao muito mais modesto "Plano de Reestruturação da Siderurgia Nacional" (PRSN), aprovado em Conselho de Ministros de 85.10.28 e em curso.

-----  
(3) É igualmente válido e equivalente o critério baseado no caudal mássico de carga tratada por unidade de tempo, uma vez que é sempre conhecido o rendimento mássico da operação. As unidades habituais na indústria são a tonelada para a massa e o ano para o tempo. Assim a Fig.1 explicita os níveis de actividade - segundo ambos os critérios, produto e carga-atingidos em 1977 nas operações unitárias fundamentais da SN.

-----  
(<sup>4</sup>) Zero no PE77, como se vê na Fig. 1.

-----  
(<sup>5</sup>) De passagem, note-se que a generalidade do modelo e do método exposto transcende largamente o âmbito de uma siderurgia integrada, já que eles são claramente aplicáveis a qualquer actividade esquematizável por um conjunto de operações em sequência.

-----  
(<sup>6</sup>) No conjunto TB + VC, VC está fora de causa, pois que, como já foi dito, as respectivas produções (L17 do quadro) são saturantes.

-----  
(<sup>7</sup>) A título de exemplo, refere-se que posteriormente, em 1983, o método foi aplicado com sucesso ao caso de um cliente da SN, grande fabricante de embalagens metálicas, que pretendia proceder a uma ampliação de sua própria fábrica.

## ANEXO 1

AF	alto forno
(A)1	grandeza "A" na variante 1, correspondente à produção no AF de cerca de 1 030 toneladas de gusa (GU) por dia de laboração (DUL).
(A)2	idem para a variante 2, correspondente à produção no AF de cerca de 1 180 t GU/DUL, a qual saturava a nave de vazamento e pontes.
(A)1,2	a grandeza "A" tem o mesmo valor nas variantes 1 e 2.
ACLD	aço líquido proveniente do processo "LD".
ACLFE	aço líquido proveniente de forno eléctrico.
BLTS	biletos
C	carga
CAP	capacidade de produção
CAR	carril
CHF	chapa forte
COILS	bobinas de chapa para produtos planos.
D	disponibilidade de
DD	dado por informação
DUL	dia útil de laboração
E	exploração
EST	estimativa
ET	estacionamento tecnológico
EXC	excedente de
FAB	fábrica da SN no Seixal
FAM	fábrica da SN na Maia
FE	forno eléctrico
GU	gusa
GTOT	grande total
H	hipótese
IMP	importação

I JAN	em 1 de Janeiro
L	linha do quadro anexo
LD	processo de fabrico do aço "Linz & Donawitz"
LG	lingotes
N	necessidade de
NST	nível de saturação
NV	nave de vazamento
OT	outros produtos
P	produção ou plano
P/	para
PE	plano de exploração
PPL	produtos planos
PSN	Plano Siderúrgico Nacional, na sua versão de 1976.
PT	pontes
RDA	redução e aciaria
ST	saturação
STK	stock
STR	"start", ordem de início para o programa do planeamento nu- mérico da produção.
TAC	trens acabadores
TB	trem de blocos
TC1	trem contínuo em 1976
TC2	trem contínuo previsto no PSN
TL	trem ligeiro
TM	trem médio
TOT	total
UST	unidades saturadas
VC1	vazamento contínuo em 1976
VC2	vazamento contínuo previsto no PSN
→	implicação lógica
(p,q)	produto lógico de p e q
⊃	abarcamento lógico
~	negação lógica
△	variação finita

**DIAGRAMA DE FABRICO DA SN (LONGOS)**

10<sup>3</sup>t (1977)

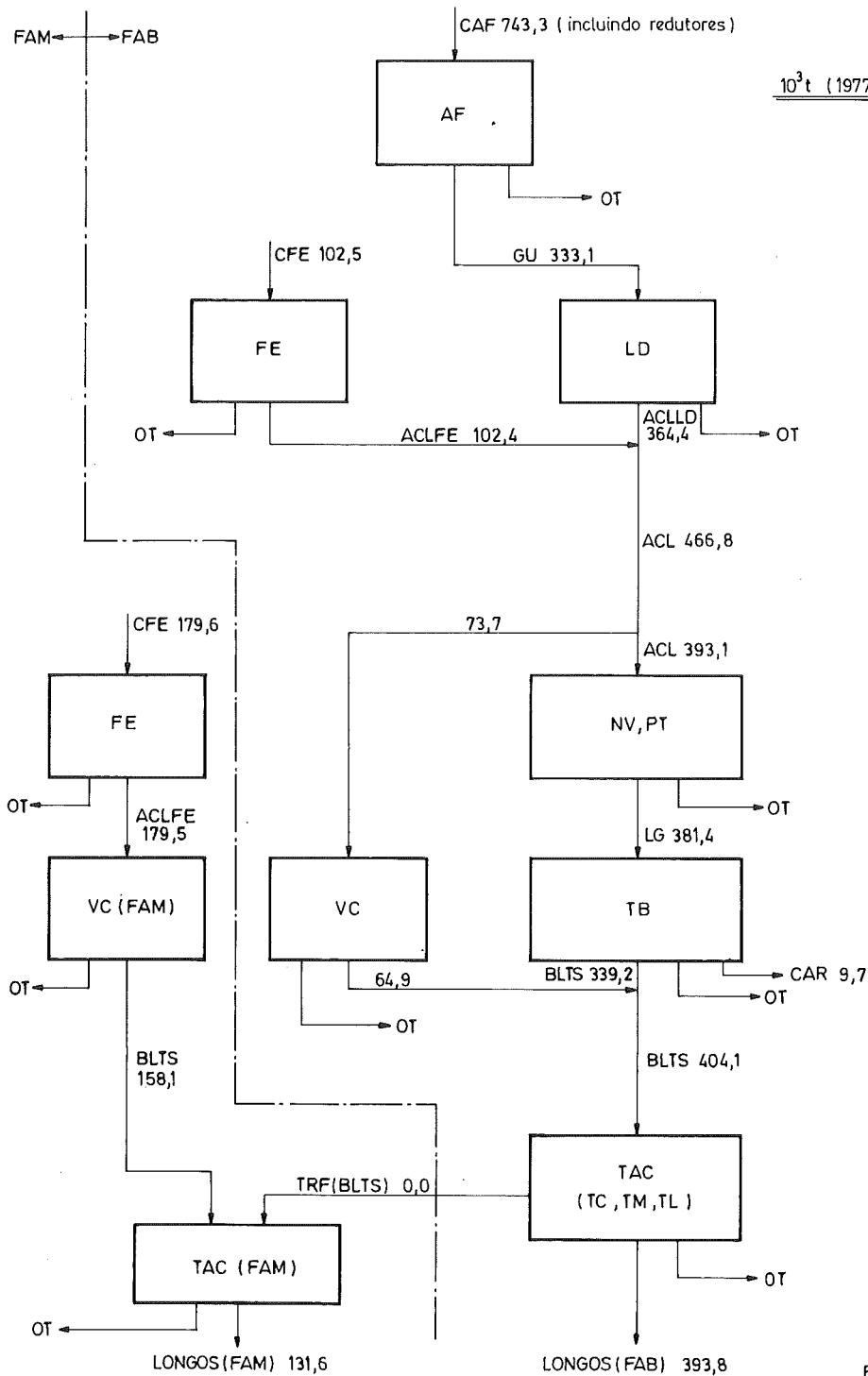


Fig. 1



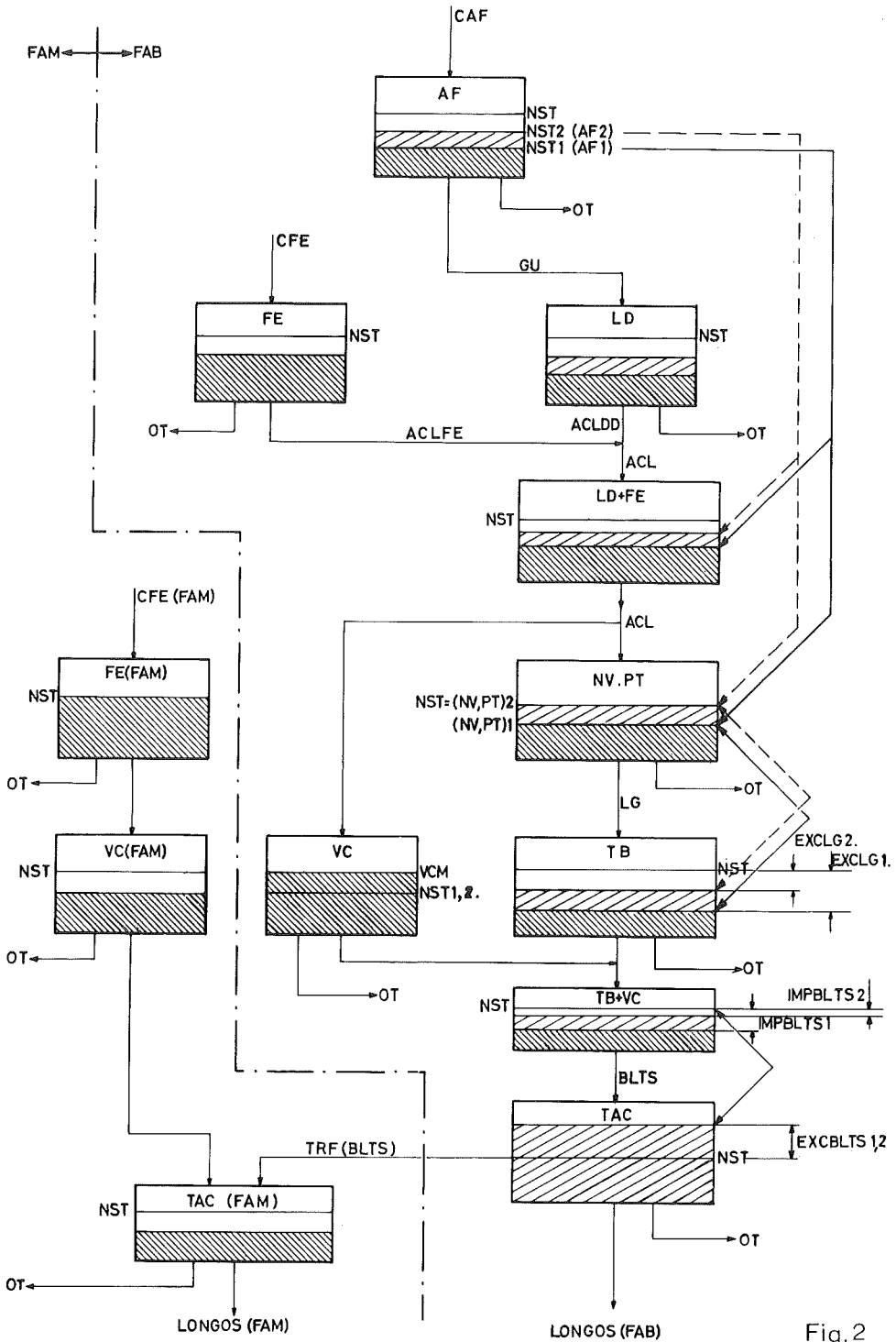


Fig.2

PLANEJAMENTO DA PRODUÇÃO A 5 ANOS

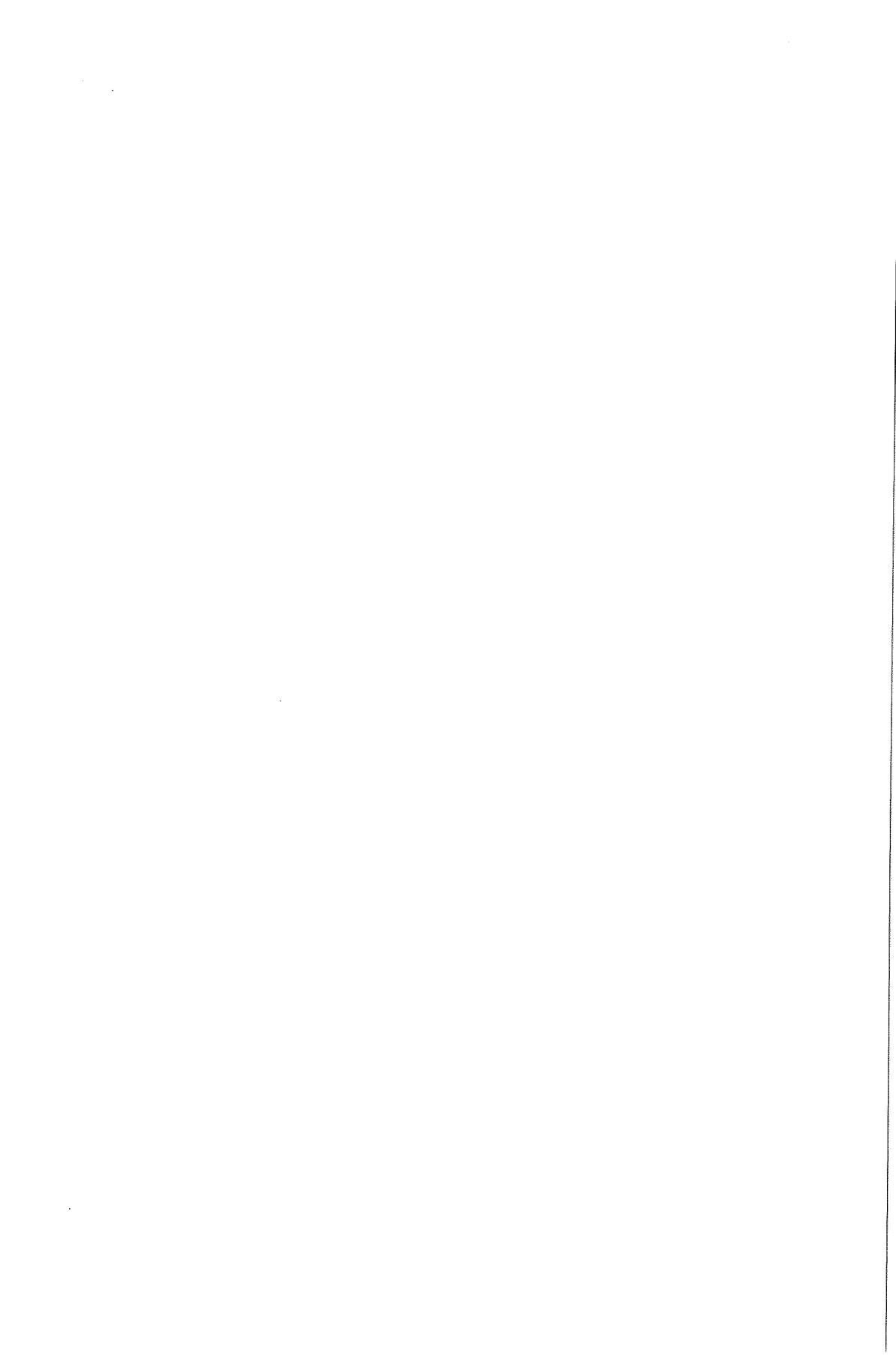
T	C	P	n = 1 1977		n = 2 1978		n = 3 1979		n = 4 1980		n = 5 1981		IST
			C	P	C	P	C	P	C	P	C	P	
1	TL	C	34.300	-	35.000	32.100	32.100	32.100	35.000	32.100	32.100	32.100	
2	P	P	30.000	-	31.200	28.600	28.600	28.600	31.200	28.600	28.600	28.600	
3	TM	C	81.700	-	78.000	85.000	85.000	85.000	78.000	85.000	85.000	85.000	
4	P	P	76.400	-	73.300	79.900	79.900	79.900	73.300	79.900	79.900	79.900	
5	TC1	C	304.800	-	340.000	340.000	340.000	340.000	305.000	340.000	340.000	340.000	
6	P	P	287.400	-	320.800	320.800	320.800	320.800	287.700	320.800	320.800	320.800	
7	TC2	C	-	-	425.300	429.300	429.300	429.300	392.200	429.300	429.300	429.300	
8	P	P	393.800	-	453.900	457.100	457.100	457.100	418.000	457.100	457.100	457.100	
9	TOT LONGOS	C	9.700	-	455.300	455.300	455.300	455.300	417.900	455.300	455.300	455.300	
10	CARRIL	C	14.700	-	410.000	410.000	410.000	410.000	370.900	410.000	410.000	410.000	
11	NEGLYS	C	339.600	-	455.300	455.300	455.300	455.300	411.900	455.300	455.300	455.300	
12	P	P	9.700	-	88.000	102.200	102.200	102.200	102.200	102.200	102.200	102.200	
13	C LOP/BLTIS	C	391.400	-	455.300	455.300	455.300	455.300	411.900	455.300	455.300	455.300	
14	P	P	73.700	-	88.000	102.200	102.200	102.200	102.200	102.200	102.200	102.200	
15	C LOP/CAR	C	64.900	-	88.000	102.200	102.200	102.200	102.200	102.200	102.200	102.200	
16	P	P	9.700	-	88.000	102.200	102.200	102.200	102.200	102.200	102.200	102.200	
17	NEGLTOT	C	391.400	-	455.300	455.300	455.300	455.300	411.900	455.300	455.300	455.300	
18	P	P	73.700	-	88.000	102.200	102.200	102.200	102.200	102.200	102.200	102.200	
19	VC1	C	64.900	-	88.000	102.200	102.200	102.200	102.200	102.200	102.200	102.200	
20	P	P	9.700	-	88.000	102.200	102.200	102.200	102.200	102.200	102.200	102.200	
21	PRLISTOT	C	405.500	-	487.500	500.000	500.000	500.000	460.900	500.000	500.000	500.000	
22	EXCRBIS 1, 2	C	16.500	-	16.500	16.500	16.500	16.500	16.500	16.500	16.500	16.500	
23	STABIS 1, 2	C	16.500	-	16.500	16.500	16.500	16.500	16.500	16.500	16.500	16.500	
24	WACLOP/P(VC1, VC2)	C	73.700	-	88.000	102.200	102.200	102.200	102.200	102.200	102.200	102.200	
25	WACLOP/LCP/CAR	C	16.500	-	16.500	16.500	16.500	16.500	16.500	16.500	16.500	16.500	
26	WACLOP/SUBTOT	C	90.200	-	88.000	102.200	102.200	102.200	102.200	102.200	102.200	102.200	
27	PACLOP2	C	364.400	-	357.700	366.700	366.700	366.700	352.700	366.700	366.700	366.700	
28	PACLOP PSN	C	415.000	-	408.000	415.000	415.000	415.000	408.000	415.000	415.000	415.000	
29	PACLOP TOT 1	C	364.400	-	357.700	366.700	366.700	366.700	352.700	366.700	366.700	366.700	
30	PACLOP TOT 2	C	415.000	-	408.000	415.000	415.000	415.000	408.000	415.000	415.000	415.000	
31	PACLOP2	C	364.400	-	357.700	366.700	366.700	366.700	352.700	366.700	366.700	366.700	
32	PACLOP2	C	415.000	-	408.000	415.000	415.000	415.000	408.000	415.000	415.000	415.000	
33	PACLOP2	C	102.400	-	123.000	123.000	123.000	123.000	123.000	123.000	123.000	123.000	
34	PACLOP2	C	466.800	-	466.800	466.800	466.800	466.800	466.800	466.800	466.800	466.800	
35	PACLOP2	C	517.400	-	517.400	517.400	517.400	517.400	517.400	517.400	517.400	517.400	
36	PACLOP2	C	331.600	-	325.500	333.700	333.700	333.700	333.700	333.700	333.700	333.700	
37	PACLOP2	C	337.700	-	371.300	371.300	371.300	371.300	371.300	371.300	371.300	371.300	
38	PACLOP2	C	99.400	-	115.900	115.900	115.900	115.900	115.900	115.900	115.900	115.900	
39	PACLOP2	C	274.200	-	269.700	264.500	264.500	264.500	269.700	264.500	264.500	264.500	
40	PACLOP2	C	324.800	-	320.000	312.800	312.800	312.800	320.000	312.800	312.800	312.800	
41	PACLOP2	C	300.800	-	349.700	349.700	349.700	349.700	349.700	349.700	349.700	349.700	
42	PACLOP2	C	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	
43	PACLOP2	C	267.300(PET7)	-	261.800	256.700	256.700	256.700	261.800	256.700	256.700	256.700	

INFORMAÇÃO E PROGRAMA DE CÁLCULO,

EXCEPTO EM 1977 EM QUE OS INFS. SÃO OS DO PE

70 (1)  $n \cdot 2K \cdot T^{-1} \cdot (1)_{n-2K} \cdot 0,9174 \cdot STR \cdot K=0$   
 (2)  $n \cdot 2K \cdot T^{-1} \cdot (1)_{n-2K} \cdot 0,89$   
 80 (3)  $n \cdot 2K \cdot (3)_{n-2K} \cdot 1 \cdot 0,9176 \cdot STR \cdot K=1$   
 (4)  $n \cdot (5)_{n-0,94}$   
 90 (5)  $n \cdot 4 \cdot 3K \cdot (5)_{n-3} \cdot 3K \cdot 0,8977 \cdot STR \cdot K=0$   
 (6)  $n \cdot (5)_{n-1,06}$   
 0,6 x CAPPSN  
 (8)  $(7) / 1,06$   
 (9)  $(2) \cdot (4) \cdot (6) \cdot (8)$  (TAC ST a partir 1978)  
 100 (11)  $(1) \cdot (3) \cdot (5) \cdot (7)$   
 (12)  $n \cdot 4 \cdot 3K \cdot (12)_{n-3} \cdot 3K \cdot 0,9047$  (edx 455000) STR K=0  
 (13)  $(10) / 0,6606$  (PE 77, 111 64)  
 (14)  $(12) \cdot 0,9005$  (PE 76, 111 712) (edx 410.000, FO)  
 110 (16)  $(12) \cdot (13)$   
 (18)  $(17) / 0,8810$  (PE 77, 11 22)  
 (19) - CAPPSN + 0,6  
 (20)  $(19) / 0,8810$  (E VC1)  
 (21)  $(14) \cdot (17) \cdot (19)$   
 (22)  $(21) \cdot (11)$  (para FIM es > 0)  
 (23)  $(18) \cdot (20)$   
 (24)  $(13) / 1,8945$  (PE 77, 111 64)  
 (25)  $(23) \cdot (24)$   
 (PE 77, 11 22,  
 (29)  $(26) \cdot (28)$   
 (35)  $(35) / (0,94 \cdot 0,96)$   
 (36)  $(35) \cdot (36)$   
 (37)  $(36) \cdot (37)$   
 (38)  $(36) \cdot (37) \cdot (38)$   
 (39)  $(36) \cdot (37) \cdot (38) \cdot (39)$   
 (40)  $(38) \cdot 0,94 \cdot 0,85$   
 (41)  $(39) \cdot 0,94 \cdot 0,85$   
 (42)  $(36) \cdot (37) \cdot (38) \cdot (39) \cdot 0,9708$  (PE 76, 11 39)

43	PILO 2	$(43) - (358) - (39) \times 0.9708$ ( )	315.300	310.500	303.500	296.800	339.400	
43A	PICEP/CAR	(43A) (113)	74.700(PET77)					
44	PIGEC	(44) (34.0)	89.400	115.900		115.900	115.900	
45	PIG TOT 1	(45) - (42) * (46.0) * (13)	381.400	377.700	372.600	359.000	455.300	
46	PIG TOT 2	(46) - (43) * (36.0) * (13)	429.400	476.500	419.500	412.700	455.300	
47	PIG LG 1	(47) - (45) - (15)	-10.000	-71.600	-82.700	-52.900		
48	PIG LG 2	(48) - (46) - (16)	38.600	-28.800	-35.800	800		
43A	STALG 1 JAN 1	$(48A)_n - (48A)_{n-1} + (47)_{n-1}$ (see > 0; - 0 see < 0)	59.000	5.070				
485	IMPLG 1	$(485)_n - ((47)_{n-1} + (48A)_{n-1})$ (see > 0; - 0 see < 0)		72.600	82.700	52.100		
48C	STALG 1 JAN 2	$(48C)_n - (48C)_{n-1} + (48A)_{n-1}$ (see > 0; - 0 see < 0)	+ 15.000	+ 52.000	+ 17.200			
48D	IMPLG 2	$(48D)_n - [(48)_{n-1} + (48C)_{n-1}]$ (see > 0; - 0 see < 0)		18.600				
49	PPPL	(49)	189.400	195.100	195.100	195.100	195.100	
50	ECODLSP/PPPL	(50)	209.400	202.300	202.300	202.300	202.300	
51	STKODLSP/PPPL	(51)	-209.400	-202.300	-202.300	-202.300	+ 213.500	
51A	STKODLSP JAN	$(51A)_n - (51)_{n-1} + (51A)_{n-1}$ (see > 0; - 0 see < 0)		60.000				
51B	IMPODLS	$(51B)_n - [(51)_{n-1} + (51A)_{n-1}]$ (see > 0; - 0 see < 0)	7	162.300	202.300	202.300		
51C	IMPLBLS 1	$(51C)_n \times 0.9005 - (52)_{n-1}$ (see > 0; - 0 see < 0; IMPLG 1 - 0)		31.600	31.600	4.700		
51D	IMPLBLS 2	$(51D)_n - (48D) \times 0.9005 - (22)_{n-1}$ (see > 0; - 0 see < 0; IMPLG 2 - 0)			26.200			
M.A.I.A.								
52	TC(MF-V) P	$C(52)_{n-2} \times 2 - (52)_{n-2} \times 0.897$ STRK = 1 (MA)	158.100	400.000	356.000	400.000	400.000	
53	DBLTSVC	(53)	131.600	377.400	338.500	377.400	377.400	
54	RLTS OF FAB 1, 2	(54) - (55) * (22) (see > 0; - 0 see < 0) (H 48 B, H 48 D)	146.000	212.000	212.000	212.000	212.000	
55	RLTS OF FAB 3	(55) - 0 (HSIC, HS10, 1, e, IMPLG=0)		34.500	42.900	42.900	84.900	
56	EXCBLS 1, 2	(56) - (54) * (55) - (52)	-12.100	-153.500	-103.900	-145.100	-103.100	
57	EXCBLS 3	(57) - (54) * (52)	-12.100	-188.000	-146.600	-188.000	-188.000	
58	STABLS 1 JAN 1, 2	$(58)_n - (58)_{n-1} + (57)_{n-1}$ (see > 0; - 0 see < 0)	12.000					
59	IMPLBLS 1, 2	$(60)_n - [(57)_{n-1} + (59)_{n-1}]$ (see > 0; - 0 see < 0)		+ 153.500	+ 103.900	+ 145.100	+ 103.100	
61	STABLS 1 JAN 3	(61) - (58) (see > 0; - 0 see < 0) (IMPLG=0)	12.100	+ 188.000	+ 146.800	+ 188.000	+ 188.000	
62	STABLS 1 JAN 3	(62) - (62) - (56)						
63	TC(HR - IMPLG - 0	$C(63) - (54) + (62) [\max. (52)]$	158.100	212.000	212.000	212.000	212.000	
64	TC(HR - IMPLG - 0	$P(64) - (63) / 1.06$	163.900	200.000	200.000	200.000	200.000	
T O T A L								
65	STOL LONGOS	(65) - (6)	495.800(PET77)	803.600	767.600	769.600	1,033.100	
66	IMPLG 1	(66) - (68B) ALT 1		172.600	82.700	52.100	52.100	
67	IMPLBLS FAN	(67) - (68B)		153.500	103.900	145.100	103.100	
68	IMPLBLS FAN 1	(68) - (51C) ALT 2		30.900	31.600	4.700		
69	IMPLBLS FAN 2	(69) - (51C) ALT 2		153.500	103.900	145.100	103.100	
70	IMPLBLS FAN 3	(70) - (68)		184.400	135.500	149.800	103.100	
71	IMPLBLS TOT	(71) - (69) + (70)		461.600(X11)	461.600(X11)	467.700(X11)	782.000(X11)	
72	TR (98132)	(72) - (46) - (48) - (17) - (19) + (22A)	0.9558	0.9389	0.9392	0.9383	0.9392	
73	LONGOS/RLTS (G094)	(73) - (31) (11)	383.800	392.100	399.700	387.800	655.700	F, VC
74	TOT LONGOS 1	$(11P+0) \times (74) - (71) \times (73)$ (see (71) > (11); - (9) see (71) > (11))	392.500	423.300	439.300	392.200	655.700	
75	TOT LONGOS 2	$(75) - (72) - (73)$ (see (72) < (11); - (9) see (72) > (11))	130.800	107.000	107.000	43.700	84.500	F, VC, NY, F+C
76	TOT LONGOS FAN 1	$(76) - (68) - (69) - (70)$ (IMPLG=0)		209.100	210.100	241.200	260.100	
77	TOT LONGOS FAN 2	(77) - (56A) + (68)					84.500	
78	EXCBLS 1 OF FAN	(78) - (71) (11) (see > 0; - 0 see < 0)	102.900	200.000	200.000	200.000	280.100	
79	TOT LONGOS FAN 1	(79) - (16) + (54) / 1.06	48.200	532.100	599.700	587.800	935.600	A F 1, VC 1
80	TOT LONGOS 1	(80) - (48) - (19)	493.600	633.400	633.400	633.400	935.600	F, VC, NY
81	TOT LONGOS 2	(81) - (75) + (77)						



A Problemática da Rejeição em Decisão Multicritério

Carlos António Bana e Costa

IST/CESUR - Av. Rovisco Pais 1000 Lisboa

**RESUMO**

O objectivo de fundo do artigo é a apresentação da "problemática da rejeição relativa", que o autor considera ser um tipo de formulação do problema multicritério, muito comum em situações reais de "apoio à tomada de decisão", suficientemente distinta das quatro "problemáticas de referência" definidas por Bernard Roy, na sua obra "Méthodologie multicritère d'Aide à la Decision", para dever ser também considerada como "de referência". Por forma a enquadrar a discussão, começa-se por uma resenha sucinta dos elementos teóricos de "Análise Multicritério" cujo conhecimento o autor entende ser fundamental para a compreensão dos pontos seguintes, tendo-se aproveitado a oportunidade para referenciar alguns dos textos mais significativos sobre os assuntos apresentados.

Para exemplificação da problemática proposta apresenta-se, de forma sintética, uma situação real de "apoio à decisão segundo critérios múltiplos" cujo estudo se insere num projecto de investigação em curso no CESUR.

## 1. DEFINIÇÃO DO PROBLEMA MULTICRITÉRIO

A formulação matemática clássica mais geral do problema multicritério de decisão pode ser assim apresentada (Szidarovszky et al, 1986):

$$\begin{array}{l} \text{"maximizar" } g_j(x) \text{ com } j = 1, \dots, n \\ \text{sujeito a } \underline{x} \in X \end{array}$$

em que  $g_j(x)$  é o vector das funções objectivo  $g_1(x), \dots, g_n(x)$ ,  $\underline{x}$  o vector das variáveis de decisão e  $X$  o conjunto das soluções possíveis.

De acordo com esta formulação, o problema é basicamente caracterizado pela presença de vários objectivos/critérios de decisão, normalmente conflituosos entre si, no sentido em que uma melhoria num deles pode ser acompanhada por um decréscimo de performance segundo algum ou alguns dos outros. Trata-se pois de um problema "mal definido", o que é traduzido na fórmulação geral pela "maximização" de um vector (Zionts, 1985). Na literatura aparece muitas vezes referido como "problema da maximização vectorial" (Hwang e Masud, 1979). Não é em geral um problema de optimização, por na maioria dos casos práticos não ser possível maximizar em simultâneo todos os vários objectivos presentes (dada a sua conflituosidade), consistindo a "resolução" do problema na busca da solução de melhor compromisso.

Note-se, no entanto, que, embora a situação mais geral seja a da procura da melhor solução, outras formulações do problema, em termos de objecto do processo de decisão, podem ser encontradas e definidas (ver ponto 3) - como seja a ordenação das soluções possíveis, para a qual não se adopta necessariamente o mesmo procedimento que para a busca da melhor solução.

O conjunto  $X$  das soluções possíveis pode ser definido como um conjunto explícito de  $q$  restrições  $f_i(\underline{x})$ :

$$X = \{ \underline{x}: x \in R^p, f_i(\underline{x}) \leq 0, i=1, \dots, q \}$$

Estaremos nesse caso perante um "problema contínuo", que é comum designar por "problema de programação matemática multi-objectivos (Zionts, 1985), com um número infinito de acções (alternativas de decisão) definidas implicitamente através das restrições.

Por outro lado, quando estamos perante um número finito (e pequeno) de soluções (acções) possíveis, sendo  $X$  definido de forma extensiva ( $X = A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ , com  $m$  finito), estaremos perante um "problema discreto", muitas vezes designado por problema de decisão segundo atributos múltiplos (Hwang and Yoon, 1981).

## 2. BREVE INTRODUÇÃO À ABORDAGEM DE "SUBORDINAÇÃO"

Desde que Bernard Roy e os seus colaboradores introduziram o Método ELECTRE I - Élimination et Choix Traduisant la Réalité - (Buffet et al, 1967; Roy, 1968), muitos métodos (de abordagem do problema) multicritério da família "subordinação" (tradução livre do termo francês "surclassement") têm vindo a ser desenvolvidos (Siskos et al, 1984), fundamentalmente na Europa.

Ao contrário da escola "clássica" norte-americana da Teoria da Utilidade segundo Múltiplos Atributos (Multiattribute Utility Theory - MAUT) (Keeney e Raiffa, 1976; Fishburn, 1970), a abordagem "subordinação" não tem como objectivo fundamental obter, a todo o custo, uma comparação binária

entre todas as acções presentes num problema multicritério, admitindo como possível a existência de situações de incomparabilidade entre pares de acções.

Por outro lado, não se assume necessariamente a transitividade das relações de preferência (estrita) e de indiferença, admitindo-se muito realisticamente a possibilidade de existência de situações de intransitividade das preferências. O "paradoxo de Condorcet" (Condorcet, 1785) e "exemplo da chávina de café" de Luce (Luce, 1956) têm de facto muito sentido prático (ver, a propósito, Sharlig, 1985).

De um ponto de vista compreensivo uma relação de "subordinação"  $S$  é definida do modo seguinte (Roy, 1973):

Dadas duas acções  $a$  e  $b$ ,  $aSb$  ( $a$  "subordina"  $b$ ), tendo em conta toda a família de critérios, se o valor das performances parciais  $g_1(a), \dots, g_n(a)$  e  $g_1(b), \dots, g_n(b)$  fornecem argumentos suficientemente fortes para considerar como verdadeira no sistema de preferências do decisor a seguinte afirmação:

" $a$ , tendo em conta toda a família ( $F$ ) de critérios, é pelo menos tão boa como  $b$ ".

$S$  não é uma relação necessariamente transitiva e completa, modelando apenas a parte segura das preferências (Siskos et al, 1984), estabelecendo assim em  $A$  uma ordenação (normalmente) parcial.

Obviamente, se  $a$  domina  $b$  ( $a \Delta b$ ), então  $a$  subordina  $b$  ( $aSb$ ), isto é: "A construção de uma relação de subordinação envolve um enriquecimento da relação de dominância, que é em geral uma relação pobre, por forma a facilitar o solucionar de um problema de decisão" (Roy e Vincke, 1981).



Para além da construção de uma (S) ou várias ( $S_1 \subset S_2 \subset \dots$ ) relações de subordinação, os métodos multicritério de apoio à tomada de decisão que seguem esta abordagem diferem ainda na forma como exploram a relação ou relações de subordinação construídas.

Cada uma das duas fases de construção e exploração de S varia e deve ser tratada de acordo com a problemática de decisão em causa e com o caso particular em consideração.

### 3. A PROBLEMÁTICA DA REJEIÇÃO RELATIVA

#### 3.1. As 4 Problemáticas de Referência Definidas por Roy

Relativamente a um conjunto A de acções (não necessariamente estável), Roy distingue 4 formulações básicas (a que chama "problemáticas de referência") para um problema de decisão (Roy, 1985, cap. 6):

PROBLEMÁTICA DA ESCOLHA - (P. $\alpha$ ) - o apoio à decisão tem em vista a escolha de uma só "melhor" acção (de entre as de A), pela selecção de um subconjunto  $A'$  de A, tão restrito quanto possível, tal que:

- qualquer que seja a acção pertencente a  $A \setminus A'$  existe sempre uma acção de  $A'$  que, para o decisor, lhe é estritamente preferível;
- ou, que seja constituído por acções que o decisor considera suficientemente satisfatórias para abandonar as de  $A \setminus A'$  - isto é, o abandono das acções de  $A \setminus A'$  decorre da escolha de  $A'$ .

PROBLEMÁTICA DA AFECTAÇÃO (OU SEGMENTAÇÃO) - ( $P.\beta$ ) - o apoio à decisão tem em vista a afectação de cada acção de A a uma e uma só de várias categorias exclusivas, definidas intrinsecamente através da explicitação "à priori" de condições de pertença. O resultado do processo de apoio à decisão será, assim, uma segmentação de A em vários subconjuntos disjuntos  $A_1, A_2, \dots$  (categorias).

Contrariamente a  $P.\alpha$  em que as acções são avaliadas pela comparação dos seus méritos e desvantagens relativos, na problemática  $P.\beta$  cada acção é "classificada" de per si, por "mérito absoluto", sendo incluída na categoria cujas condições de pertença verifica.

PROBLEMÁTICA DA ORDENAÇÃO - ( $P.\gamma$ ) - quando o apoio à decisão tem em vista a ordenação (completa ou parcial) das acções de A por ordem decrescente de preferência, isto é, a explicitação em A de classes de equivalência ordenadas, tão pequenas quanto possível, e agrupando cada classe acções consideradas equivalentes.

Contrariamente às categorias de  $P.\beta$ , em  $P.\gamma$  a ordenação é feita em termos relativos, por comparação entre si das acções da A, e não através de uma definição à priori de características das várias classes.

De entre os métodos que se baseiam na abordagem "subordinação" distingue-se, a título exemplificativo, que o ELECTRE I é aplicável quando se está perante uma problemática do tipo  $P.\alpha$ , enquanto o método ELECTRE II (Roy e Bertier, 1973) foi concebido para abordar problemas em que o objectivo do decisor é a ordenação das acções (Problemática  $P.\gamma$ ). A chamada "segmentação tricotómica (Roy, 1981; Moscarola, 1977) é um caso particular de  $P.\beta$  (ver Roy, 1985, ponto 11.3).

PROBLEMÁTICA DA DESCRIÇÃO - (P.δ) - o apoio à decisão tem apenas em vista uma descrição das acções de A, e/ou das suas consequências, de uma forma sistemática e formalizada, por forma a ajudar o decisor a melhor compreender, conhecer e diferenciar as várias acções, nas suas consequências (características próprias).

Naturalmente que, com o progressivo desenvolvimento do processo de apoio à decisão, sucessivas formulações podem ser adoptadas.

As quatro problemáticas expostas são por Roy consideradas de referência, no sentido em que, "relativamente a uma fase de estudo, a problemática adoptada pode corresponder:

- a uma das 4 problemáticas de referência ou a uma forma restrita de uma delas (...);
- a uma combinação das problemáticas  $P.\alpha$ ,  $P.\beta$ ,  $P.\gamma$  fazendo intervir em sequência duas delas (...);
- a uma problemática mista, isto é, não redutível a um dos esquemas simples descritos nos dois casos precedentes".  
(Roy, 1985, ponto 6.2.1)

### 3.2.1. Introdução da Problemática da Rejeição Relativa

Existem no entanto, em minha opinião, situações reais de decisão para os quais a problemática a adoptar não se enquadra em qualquer dos casos acima descritos. Refiro-me concretamente às situações em que o objectivo do decisor é a rejeição de algumas das acções de A.

Proponho assim neste artigo a introdução de uma 5<sup>a</sup> problemática de referência, adiante designada por  $P.\theta$ , tal que:

PROBLEMÁTICA DA REJEIÇÃO RELATIVA - ( $P.\theta$ ) - consiste em pôr o problema em termos de rejeição de uma ou várias acções de  $A$ , isto é, em orientar a investigação com vista a destacar um subconjunto  $A''$  de  $A$  de acções a rejeitar (abandonar), se fôr caso disso de dimensão tão próxima quanto possível de uma pré-definida pelo decisor.

As acções a incluir em  $A''$  serão determinadas por um processo de rejeição directo, e não indirectamente, como em  $P.\alpha$ , em que o abandono das acções de  $A \setminus A'$  é justificado pela escolha de  $A'$ . Assim,  $A \setminus A''$  não é necessariamente coincidente com  $A'$ , uma vez que não se põe em  $P.\theta$  o problema em termos da escolha da "melhor acção".

Por outro lado, como a análise não é feita por referência a condições de aceitação/rejeição a priori estabelecidos, mas por comparação entre si das acções de  $A$ , a formulação do problema não pode ser considerada do tipo  $P.$ .

Refira-se que, no entanto,  $P.\theta$  é naturalmente antecedida, na maioria dos casos, por uma fase de estudo em que a problemática em questão é do tipo  $P.\beta$ , correspondente a uma fase do processo em que o problema se põe em termos de rejeição absoluta, através da definição de uma partição de  $A$  em duas categorias definidas por limiares de aceitação/rejeição a priori definidos, sendo, aqui sim, a problemática em questão do tipo  $P.\beta$  - a problemática de segmentação dicotómica do tipo aceitação/rejeição aparece como um caso particular de  $P.\beta$ , sendo as duas categorias: "acções consideradas boas e devendo ser aceites", "acções julgadas más e devendo ser recusadas" (Jacquet-Lagrèze, 1983).

### 3.2.2. Exemplificação

Por forma a ilustrar o conceito de "problemática da rejeição relativa", introduzido em 3.2.1, considere-se a situação a seguir sumariamente descrita, construída a partir de uma situação real mais ampla de apoio à tomada de decisão desenvolvida no âmbito do CESUR.

A entidade pública, adiante designada por EP, lançou um concurso público de pré-qualificação de candidatos à realização de uma empreitada de âmbito nacional.

O objectivo da Administração da EP (decisor) é nesta fase a pré-qualificação de quatro das onze candidaturas concorrentes, as quais passarão à fase seguinte de apresentação de propostas. Para tal, a Administração da EP nomeou uma Comissão Técnica interna encarregue de proceder à avaliação das candidaturas, com o apoio da equipa externa de analistas.

De acordo com a Comissão, foram definidas condições de aceitação/rejeição absoluta, que levaram à eliminação inicial de quatro das candidaturas (exemplo de problemática de segmentação dicotómica, caso particular de P. $\beta$ ).

Das restantes sete acções potenciais, três "terão" de ser eliminadas por mérito relativo (caso de problemática de rejeição relativa - P. $\theta$ ).

O problema põe-se então em termos da explicitação de um sub-conjunto A' (de A) das acções a abandonar, de dimensão tão perto quanto possível de três, isto é, dos candidatos que, juntamente com os quatro inicialmente eliminados, não passarão à fase posterior de apresentação de propostas. O processo de rejeição basear-se-á necessariamente na comparação entre si das sete acções de A.

Para tal construiu-se uma relação binária  $T$ , definida em  $A$  (relação de rejeição) tal que: Dadas duas acções  $a$  e  $b$ ,  $a T b$  se e só se os valores das performances parciais  $g_1(a), \dots, g_n(a)$  e  $g_1(b), \dots, g_n(b)$  fornecerem argumentos suficientemente fortes para considerar como verdadeira, no sistema de preferências do decisor, a seguinte afirmação:

$a$ , tendo em conta toda a família de critérios, não deve ser rejeitada antes de  $b$ .

$T$  estabelece assim em  $A$  precedências relativas de rejeição entre pares de acções.

É óbvio que se  $a$  domina  $b$  ( $a \Delta b$ ), então  $a T b$ . Além disso a relação  $T$  é pelo menos tão rica como a relação de "subordinação" uma vez que os argumentos necessários a considerar como verdadeira a afirmação " $a$  não deve ser rejeitada antes de  $b$ " não são tão restritivos como os necessários a validar a afirmação " $a$  é pelo menos tão boa como  $b$ ".

A relação  $T$  construída para abordar o problema atrás apresentado permitiu chegar ao "grafo de rejeição" da figura 1.

O processo de rejeição consiste agora em ir eliminando sucessivamente as acções sobre os quais incidem setas e a partir das quais não saem setas, isto é, de acordo com as precedências binárias definidas em  $A$  pela relação  $T$ .

O grafo da figura 1 mostra que a primeira acção a rejeitar é  $a_6$ , uma vez que dela não nasce qualquer seta. Após a rejeição de  $a_6$  o grafo reduz-se ao da figura 2, que mostra que as próximas acções a excluir serão  $a_1$  e  $a_7$  (sem distinção entre elas visto serem incomparáveis segundo  $T$ , isto é,  $a T b$  e  $b T a$ ).

Assim, o sub-conjunto  $A''$  de  $A$ , constituído pelas três

acções a rejeitar, será formado pelas acções  $a_1$ ,  $a_6$  e  $a_7$ . Logo:

A  $A'' = \{a_2, a_3, a_4, a_5\}$  - acções que passam à fase de apresentação de propostas

Repare-se que a continuação do processo de rejeição após a eliminação de  $a_6$ ,  $a_1$  e  $a_7$  (grafo da figura 3), conduziria a eliminar sucessivamente  $a_3$  e  $a_5$ , altura em que o processo pararia obrigatoriamente por não ser possível distinguir entre  $a_2$  e  $a_4$ .

T estabelece assim em A uma ordenação parcial ascendente.

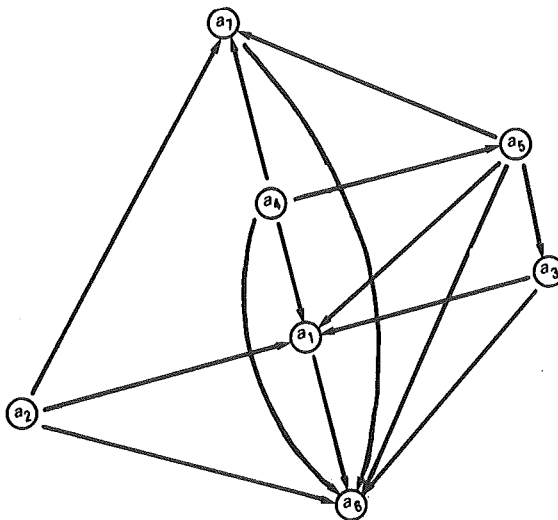


FIG. 1 - GRAFO DE REJEIÇÃO

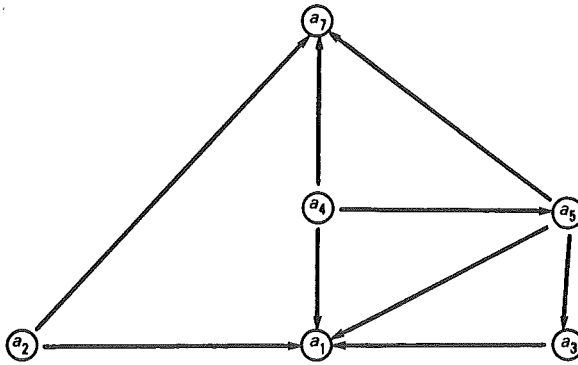


FIG. 2 - GRAFO APÓS PRIMEIRA EXCLUSÃO

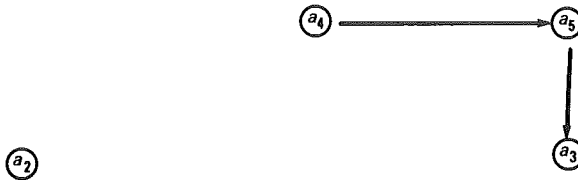


FIG. 3 - CONTINUAÇÃO DO PROCESSO DE REJEIÇÃO

**REFERÊNCIAS:**

- Buffet, P., Grémy, J.P. e Marc, M. - "Peut on choisir en tenant compte de critères multiples?: une méthode (Electre) et trois applications", *Révue METRA* 6(2), 1967 (pp. 283-316).
- Condorcet, Marquis de - *Essai sur l'Application de l'Analyse à la Probabilité des Décisions Rendues à la Pluralité des Voix*, Paris, 1785.
- Fishburn, P.C. - *Utility Theory for Decision Making*, Wiley, New York, 1970.



- Hwang, C.L. e Masud, A.S.M. - **Multiple Objective Decision Making - Methods and Applications: A State-of-the-Art Survey**, Lecture Notes in Economic and Mathematical Systems Vol. 164, Springer, New York, 1979.
- Hwang, C.L. e Yoon, K. - **Multiple Attribute Decision Making, Methods and Applications: A State-of-the-Art Survey**, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, Vol. 186, Springer, New York, 1981.
- Jacquet-Lagrèze, E. - "Concepts et modeles en analyse multicritère", in E. Jacquet-Lagrèze e J. Siskos (eds), **Méthode de Décision Multicritère**, Editions Hommes et Techniques, Paris, 1983 (pp. 7-38).
- Keeney, R. e Raiffa, H. - **Decisions with Multiple Objectives: Preferences and Value Tradeoffs**, Wiley, New York, 1976.
- Luce, R.D. - "Semiorders and a theory of utility discrimination", **Econometrica**, vol. 24, 1956 (pp. 178-191).
- Moscarola, J. - "Multicriteria decision aid: two applications in education management", **Cahiers du Lamsade**, n.11, Université de Paris-Dauphine, 1977.
- Roy, B. - "Classement et choix en présence de points de vue multiples (la méthode ELECTRE)", **Revue Française d'Informatique e de Recherche Opérationnelle**, n. 8, 1968 (pp. 57-75).
- Roy, B. - "How outranking relation helps multiple criteria decision making", in J.L. Cochrane and M. Zeleny (eds) **Multiple Criteria Decision Making**, University of South-Caroline Press, Columbia, SC, 1973 (pp 179-201).
- Roy, B. - "A multicriteria analysis for trichotomic segmentation problems", in P. Nijkamp and J. Spronk(eds), **Multiple Criteria Analysis: Operational methods**, Gower, Aldershot, 1981 (pp. 245-257).
- Roy, B. - **Méthodologie Multicritère d'Aide à la Décision**, Economica, Paris, 1985.
- Roy, B. e Bertier, P. - "La méthode ELECTRE II: une application au média-planning", **OR** 72, M. Moss (ed), North

- Holland, 1973 (pp. 291-302).
- Roy, B. e Vincke, Ph. - "Multicriteria analysis: survey and new directions", *European Journal of Operational Research*, vol. 8, no. 3, 1981 (pp.207-218).
- Scharlig, A. - *Décider sur Plusieurs Critères - Panorama de 1<sup>er</sup> Aide à la Decision Multicritère*, Press Polytechniques Romandes, 1985.
- Siskos, J., Wascher, G. e Winkels, H.M. - "Outranking approaches versus MAUT in MCDM", *European Journal of Operational Research*, vol. 16, 1984 (pp. 270-271).
- Szidarovszky, F., Gershon, M.E. e Duckstein, L. - *Techniques for Multiobjective Decision Making in Systems Management*, ELSEVIER, Amsterdam, 1986.
- Zionts, S. - "Multiple criteria mathematical programming: an overview and several approaches", in G.Fandel e J.Spronk (eds) *Multiple Criteria Decision Methods and Applications*, Springer, New York, 1985 (pp. 85-128).

A NOTE ON TWO EQUIVALENT BI-OBJECTIVE MODELS FOR THE  
DESIGN AND ON-LINE CONTROL OF A PARKING SYSTEM

Luiz Flavio Autran Monteiro Gomes\*

Department of Industrial Engineering, Pontifical Catholic  
University of Rio de Janeiro, CEP 22453, Brazil

**Abstract**

It is shown that two bi-objective model formulations to tackle the problem of assigning users to car parks through a system of differentiated parking permits can be derived so as to lead to the same compromise solution between minimizing walking distances and minimizing parking expenses, given that the probabilities of finding a parking space are also taken into account.

In a recent paper the author has presented a bi-objective combined stochastic-mathematical programming model formulation for tackling the problem of assigning users to car parks through a system of differentiated parking permits (Gomes, 1986).

\* At the same time this paper was written the author was a Visiting Professor at the Institute für Strassen-und Verkehrswesen of Universität Stuttgart.

The model is as follows:

Maximize

$$Z = \sum_k \sum_j \sum_i \frac{u_i - D_{ijk}}{C_{ik}} \cdot p_i \cdot X_{ijk}$$

subject to

$$\begin{aligned} \sum_k X_{ijk} &\geq B_{ij} && \text{for } i = 1, 2, \dots, \ell \text{ and} \\ & && j = 1, 2, \dots, m; \\ \sum_j X_{ijk} &= A_{ik} && \text{for } i = 1, 2, \dots, \ell \text{ and} \\ & && j = 1, 2, \dots, n; \\ X_{ijk} &\geq 0 && \forall (i, j, k) \end{aligned}$$

In this model the objective function is random, since it depends on the probabilities (i.e. the  $p_i$ 's) that users of different types will bring their cars on a day. Every  $A_{ik}$ , i.e. the number of permits issued to users of type  $i$  in the  $k$ th car park, is also random; each  $A_{ik}$  is computed by relying not only on each probability  $p_i$ , but also on characteristics of the stochastic process which consists of how parking vacancies are utilized throughout the analysis period (e.g. a day). That is, therefore, a dynamic parking permit assignment model.

In the present note we will initially concentrate our attention on the static version of a related and apparently similar linear programming formulation which is shown below (1):

---

(1) All mathematical symbols employed are defined at the end of the present paper.

**I Minimize**

$$Z_1 = \sum_k \sum_j \sum_i C_{ijk} \cdot p_i \cdot X_{ijk}$$

and

$$Z_2 = \sum_k \sum_j \sum_i D_{ijk} \cdot p_i \cdot X_{ijk}$$

subject to

$$\sum_k X_{ijk} \geq B_{ij} \quad \text{for } i = 1, 2, \dots, l \text{ and } j = 1, 2, \dots, m;$$

$$\sum_j \sum_i X_{ijk} = A_k \quad \text{for } k = 1, 2, \dots, n;$$

$$X_{ijk} \geq 0 \quad \forall (i, j, k)$$

It is interesting to note that essentially the same bi-objective function has been used by the author and his collaborators, although an explicitly single-objective formulation (Gomes, 1972; Gomes and Gomes, 1980; Gomes and Gomes, 1982; Gomes and Aör, 1983; Aör and Gomes, 1984; Aör and Gomes, 1985).

The equivalently static version of that more recent (i.e. 1986) mixed model approach is as follows, assuming that  $C$  will never be equal to zero:

## II Maximize

$$Z = \sum_k \sum_j \sum_i \frac{v - D_{ijk}}{C_{ik}} \cdot p_i \cdot X_{ijk}$$

subject to

$$\sum_k X_{ijk} \geq B_{ij} \quad \text{for } i = 1, 2, \dots, \ell \quad \text{and} \\ j = 1, 2, \dots, m;$$

$$\sum_j X_{ijk} = A_{ik} \quad \text{for } i = 1, 2, \dots, \ell \quad \text{and} \\ k = 1, 2, \dots, n; \quad (2)$$

$$X_{ijk} \geq 0 \quad \forall \quad (i, j, k)$$

in which every vacancy is assigned a single user throughout the analysis period.

As it was early shown, that second, implicitly single-objective function can be utilized within a cost-effective-ness framework for evaluating changes in existing parking systems or for ranking alternative new systems (Gomes, 1972).

Since both models I and II search for a compromising solution between minimizing walking distances and minimizing parking expenses, one should expect that the objective functions are identical. Indeed, the objective function of model II leads to the following:

2) By making use of  $A_k = \sum_i A_{ik}$  that second set of constraints becomes

$$\sum_j \sum_i X_{ijk} = A_k \quad \text{for } i = 1, 2, \dots, \ell \quad \text{and} \\ k = 1, 2, \dots, n.$$

$$\text{Maximize } Z = \sum_k \sum_j \sum_i \frac{P_i \cdot X_{ijk}}{C_{ik}} - \sum_k \sum_j \sum_i \frac{D_{jk} \cdot P_i \cdot X_{ijk}}{C_{ik}}$$

or, which is the same,

$$\text{Maximize } Z' = \sum_k \sum_j \sum_i \frac{P_i \cdot X_{ijk}}{C_{ik}} \quad \text{and minimize } Z'' = \sum_k \sum_j \sum_i \frac{D_{jk} \cdot P_i \cdot X_{ijk}}{C_{ik}}$$

It is therefore expectable that, given the common set of constraints, the two games below are equivalent, for the same constraint set:

Game I

$$\text{Minimize } \sum_j \sum_k \sum_i C_{ik} \cdot P_i \cdot X_{ijk}$$

$$\text{Minimize } \sum_k \sum_j \sum_i D_{jk} \cdot P_i \cdot X_{ijk}$$

Game II

$$\text{Maximize } \sum_j \sum_k \sum_i \frac{P_i \cdot X_{ijk}}{C_{ik}}$$

$$\text{Minimize } \sum_k \sum_j \sum_i \frac{D_{jk} \cdot P_i \cdot X_{ijk}}{C_{ik}}$$

It is easy to verify that those two games are associated to the two following compatible overall utility functions  $F_I$  and  $F_{II}$ :

$$\text{Game I} \Leftrightarrow F_I = -W_1 \sum_k \sum_j \sum_i C_{ik} \cdot P_i \cdot X_{ijk} - W_2 \sum_k \sum_j \sum_i D_{jk} \cdot P_i \cdot X_{ijk}$$

$$\text{and Game II} \Leftrightarrow F_{II} = Y \cdot \sum_k \sum_j \sum_i \frac{P_i \cdot X_{ijk}}{C_{ik}} - Y \sum_k \sum_j \sum_i \frac{D_{jk} \cdot P_i \cdot X_{ijk}}{C_{ik}}$$

where the units attached to the positive constants  $W_1$ ,  $W_2$ , and  $Y$  are as follows:

$$W_1 \Leftrightarrow \frac{1}{\text{monetary unit}} \cdot (\text{unit of satisfaction})$$

$$W_2 \Leftrightarrow \frac{1}{\text{distance unit}} \cdot (\text{unit of satisfaction})$$

$$\text{and } Y \Leftrightarrow \frac{\text{monetary unit}}{\text{distance unit}} \cdot (\text{unit of satisfaction})$$

It can also be seen that the same level of overall satisfaction cannot always be achieved by indistinctly making use of  $F_I$  and  $F_{II}$ . Indeed, if one considers the particular case in which  $C_{ik} = \text{a constant } \theta$ , one has:

$$F_I = - W_1 \cdot \theta \sum_{kji} \sum \sum p_i \cdot X_{ijk} - W_2 \sum_{kji} \sum \sum D_{jk} \cdot p_i \cdot X_{ijk}$$

and

$$F_{II} = Y \cdot \theta \cdot \frac{1}{\theta} \sum_{kji} \sum \sum p_i \cdot X_{ijk} - Y \cdot \frac{1}{\theta} \sum_{kji} \sum \sum D_{jk} \cdot p_i \cdot X_{ijk}$$

According to those two last particular equations,

$$F_I = F_{II} \text{ only when } \theta = - \frac{W_2}{W_1} \cdot Y. \text{ In other words, given the}$$

subjective weights  $W_1$  and  $W_2$  as well as  $Y$ , every user would be paid an equal amount equal to  $\theta$  to park in a specific car park such that the total walking distance is minimized. In this particular and, most of the time, imaginary context,  $\theta$  can be thought of as a monetary incentive to contribute for minimizing the total walking distance.

In applications, however, the issue of the identity of  $F_I$  and  $F_{II}$  is not really a material one, and the decision between models I and II shall be made on the basis of the computational efficiency of available computer programs. Those same considerations can be easily extended to the dynamic versions of both models as well as to a multicriteria approach to the problem, such as the one developed at the University of Texas (Phillips, 1985).



REFERENCES

- Gomes, L.F.A.M. (1972) Um modelo para planejamento de áreas de estacionamento, Publicação n.579, Instituto de Pesquisas Rodoviárias, Rio de Janeiro.
- Gomes, L.F.A.M. and Gomes, A.C.S. (1980) "Equilíbrio demanda-performance na alocação de vagas de estacionamento", *Ciência e Cultura*, 32 (12), 1683-1691.
- Gomes, L.F.A.M. and Aör, A.S.P. (1983) "Optimização do sistema de estacionamento no campus da PUC/RJ", *Ciência e Cultura*, 35(5), 644-652.
- Aör, A.S.P. and Gomes, L.F.A.M. (1984) "Análise probabilística de um sistema de estacionamento", *Investigação Operacional*, 4(1).
- Aör, A.S.P. and Gomes, L.F.A.M. (1985) "Uma análise dinâmica para alocação de vagas de estacionamento", *Ciência e Cultura*, 37(8), 1311-1318.
- Gomes, L.F.A.M. (1986) "An Operations Research approach to the optimal control of parking systems", *Foundations of Control Engineering*, vol. 11, nº1, 1986.
- Phillips, N.V. (1985) " An application of multicriteria optimization to assignment university personnel to parking lots", paper presented at ORSA/TIMS 1985.

Gomes, L.F.A.M. and Gomes A.C.S. (1982) "Alocação de permissões para estacionamento: um modelo de programação linear", *Pesquisa Operacional*, +(1).

### NOTATION

- $i$  type of parking permit or type of car park user
- $j$  destination of a car park user
- $k$  car park
- $\ell$  total number of types of parking permits ( $i=1,2,\dots,\ell$ )
- $m$  total number of destinations for car park users  
( $j=1,2,\dots,m$ )
- $n$  total number of car parks ( $k=1,2,\dots,n$ )
- $C_{ik}$  parking tariff for  $i$  type user in the  $k_{th}$  car park
- $B_{ij}$  number of  $i$  users having destination  $j$
- $A_k$  number of parking permits issued for the  $k_{th}$  car park
- $D_{jk}$  distance between the  $j_{th}$  destination and the  $k_{th}$  car park
- $A_{ik}$  number of permits issued type  $i$  users in the  $k_{th}$  car park

- $X_{ijk}$  number of persons having permit type  $i$ , destination  $j$ , and permit for the  $k_{th}$  car park
- $\bar{c}$  a value at least equal to the maximum value for  $D_{jk}$
- $P_i$  probability that a user of type  $i$  will bring his or her car on a day
- $W_1$  weight assigned to parking tariff
- $W_2$  weight assigned to distance walked from car park to destination



DIRECT METHODS FOR THE SOLUTION OF  
LINEAR COMPLEMENTARITY PROBLEMS  
WITH SYMMETRIC POSITIVE SEMI-DEFINITE MATRICES

J. J. JUDICE

Departamento de Matemática  
Universidade de Coimbra  
Coimbra - Portugal

F. M. PIRES

Departamento de Engenharia Civil  
Universidade do Porto  
Porto - Portugal

ABSTRACT

In this paper we present an implementation of the main principal pivoting (PP) methods - Keller, Murty, Graves - for the Linear Complementarity Problem (LCP) with symmetric positive definite (SPD) and symmetric positive semi-definite (SPSD) sparse matrices without any special structure. We also describe an extension and implementation of these methods for the GLCP, a slightly more general linear complementarity problem that occurs quite frequently in applications.

This paper also includes a comparative computational

study of the PP methods on the solution of some medium and large scale LCPs and GLCPs with sparse SPD and SPSD matrices. This study shows that Murty's method is the most efficient algorithm for SPD matrices and Keller's method is usually superior to Graves method for SPSD matrices.

## 1 - Introduction

The linear Complementarity Problem (LCP) consists of finding vectors  $z \in \mathbb{R}^n$  and  $w \in \mathbb{R}^n$  such that,

$$w = q + Mz, \quad z \geq 0, \quad w \geq 0, \quad z^T w = 0 \quad (1)$$

where  $q$  is a given real  $n$ -vector,  $M$  is a given  $n$  by  $n$  real matrix and  $T$  represents transposition. This problem has been extensively studied for the last twenty years in both theoretical and algorithmic aspects. A vast number of applications of the LCP has been proposed and in many cases the matrix  $M$  is symmetric positive definite (SPD) or positive semi-definite (SPSD). These include the solution of partial differential equations arising in Dirichlet problems with obstacles [13] or free boundary value problems, such as the journal bearing [5] and the elastic beam bending [37] problems. Optimal Control Problems [6] and Linear Least Squares [19] are another two sources of applications of LCPs with SPD and SPSD matrices. A large number of applications of LCPs with these classes of matrices have also been proposed in elastoplastic analysis of structures [24, 29], portfolio selection problems [27, 29] and spatial equilibrium models [30].

If the matrix  $M$  is SPD or SPSD then the LCP stated by (1) represents the Kuhn-Tucker conditions [17] for the convex quadratic program

$$\begin{aligned} &\text{Minimize } q^T z + \frac{1}{2} z^T Mz && (2) \\ &\text{subject } z \geq 0 \end{aligned}$$

whence the problems (1) and (2) are equivalent. The LCP is also quite important in the solution of convex quadratic programs with inequality and equality constraints and separable objective function [21]. Quadratic programs with nonseparable objective function can also be reduced to LCPs with SPD or SPSD matrices by using duality [15, 25, 38] or penalty function theory [21]. Finally LCPs with such matrices also occur in the solution of nonlinear programs by SQP algorithms [12].

In most of the uses of the LCPs with SPD or SPSD matrices, the matrix M is sparse without special structure. This has increased the use of iterative methods for the solution of such problems [6, 21, 38]. In this paper we study the applicability of direct methods on these LCPs.

In a large number of the applications referred above, the LCP occurs as the optimality conditions of the quadratic program (2). In some of these applications a number of variables of the quadratic program may have no sign restriction. The Kuhn-Tucker optimality conditions take then the following form

$$\begin{array}{l} w = q + Mz \\ z_i \geq \ell_i, \quad \ell_i \in \{-\infty, 0\} \\ w_i \geq 0 \\ z_i > \ell_i \Rightarrow w_i = 0 \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{l} w = q + Mz \\ z_i \geq \ell_i, \quad \ell_i \in \{-\infty, 0\} \\ w_i \geq 0 \\ z_i > \ell_i \Rightarrow w_i = 0 \end{array}} \right\} i=1, \dots, n$$

This slightly more general linear complementary problem is denoted by GLCP and is also studied in this paper.

The most well-known direct methods for the LCP, which can be used when  $M$  is SPD or SPSD, are the variable-dimension method of Van der Heyden [35], Lemke's method [20], Cottle and Dantzig method [4] and the so-called principal pivoting methods. This last type of algorithms only uses principal pivot operations [34] and can be implemented in such a way that the symmetry of the matrix is fully exploited [27]. Among these algorithms, the Bard-type method of Murty [23] for SPD matrices and the methods of Keller [16] and Craves [14] for SPD and SPSD matrices should be distinguished. Van der Heyden's method can not be used for SPSD matrices and for SPD matrices reduces to Murty's method. The methods of Lemke and Cottle and Dantzig use nonprincipal pivot operations, whence their implementations cannot fully exploit the symmetry of the matrix  $M$ . Hence they are not recommended for LCPs with SPD or SPSD matrices. On the other hand there exist principal versions of the last two methods [3, 22], but they are fairly more complicated than the other principal pivoting methods and are not considered in this study.

In this paper we propose an implementation for the principal pivoting methods referred above, extend these methods to the GLCP and present a comparative study of their behavior on a number of test problems with medium and large scale sparse LCPs and GLCPs. The implementations of the algorithms and their extensions are essentially based on the last developments on the solution of linear equations with sparse SPD matrices [11] and updating techniques based on Bennet's algorithm [1] for sparse matrices [18]. Since both the LCP and GLCP are invariant under principal rearrangements, then we solve a permuted



LCP, where the ordering for the rows and columns is obtained by one of the ordering algorithms for sparse matrices [11]. For a general SPD or SPSD matrix, it is usually accepted that the minimum degree algorithm [11, chapter 5] is the most effective procedure to reduce the fill-in during the decomposition procedure [7]. Hence we choose this algorithm to find an ordering for the rows and columns of the LCP or GLCP. As in [27] our implementation requires in each iteration the  $LDL^T$  decomposition of a principal submatrix of  $M$  (the matrix  $D$  is stored as a real vector and the matrix  $L$  is stored by columns as a sparse strictly lower triangular matrix). It is necessary the use of techniques to update the decomposition when a row and a column are added or deleted from the principal submatrix. In our implementation it is proposed that these updates are performed according to the ordering achieved by the minimum-degree algorithm. Despite Bennet's algorithm may have some problems with rounding-errors for ill-conditioned matrices [9], such drawbacks are not so relevant for sparse matrices and we choose this algorithm incorporated in a more general updating procedure to be described later.

The computational study of the efficiency of the principal pivoting methods indicate that Murty's method is the most efficient for SPD matrices and Keller's method is more efficient than Graves' method for SPSD matrices. These results are quite interesting only because Murty's method has been totally forgotten in the solution of LCPs by direct methods. If the matrix  $M$  is strictly diagonally dominant ( $SDD_+$ ), then Graves' method can be implemented in a more efficient way, according to the recent results presented in [28]. Our experience with symmetric  $SDD_+$  shows that even in this case Murty's method is the most efficient method and Keller's method is in general superior to Graves' method.

The organization of the paper is as follows. In section 2 a short revision of some concepts, which are necessary for the implementation of the methods, is given. The three principal pivoting methods are briefly described in section 3. In section 4 we describe our implementation of the principal pivoting methods for SPD and SPSD sparse matrices without special structure. The extension of the methods to the GLCP is presented in section 5. Finally a computational study of the efficiency of the three methods is described in the last section.

## 2 - Some concepts of linear complementarity and positive semi-definite matrices

In this section we briefly present some properties of the linear complementarity problems and PD and PSD matrices, which are important to understand the remaining sections of this paper.

The GLCP is invariant under principal permutations, since for any permutation matrix  $P$ ,  $w=q+Mz$  is equivalent to

$$Pw = Pq + (PMP^T) Pz \quad (4)$$

whereby  $(\bar{z}, \bar{w})$  is a solution of GLCP (3) if and only if  $(P\bar{z}, P\bar{w})$  is a solution of the permuted GLCP.

If  $n$  is the order of the matrix  $M$ , then we can consider a partition  $\{I, J\}$  of the set  $\{1, \dots, n\}$ , where  $I$  and  $J$  are defined by

$$I = \{i: \ell_i = -\infty\} \quad , \quad J = \{i: \ell_i = 0\} \quad (5)$$

and there exists a permutation matrix  $P$  such that

$$P^T_{MP} = \begin{bmatrix} M_{II} & M_{IJ} \\ M_{JI} & M_{JJ} \end{bmatrix} \tag{6}$$

Since  $z_i > \lambda_i$  for  $i \in I$ , then  $w_i = 0$  for all  $i \in I$  and the GCLP can be rewritten in the following form

$$\begin{aligned} 0 &= q_I + M_{II} z_I + M_{IJ} z_J \\ w_J &= q_J + M_{JI} z_I + M_{JJ} z_J \end{aligned} \tag{7}$$

$$z_J \geq 0, \quad w_J \geq 0$$

$$z_J^T w_J = 0 \tag{8}$$

Hence for  $I = \phi$  ( $J = \phi$ ) the GCLP reduces to a LCP (system of equations). In the GCLP we should distinguish the linear constraints (7) and the complementary constraint (8), which is equivalent to

$$z_i w_i = 0, \quad i \in J \tag{9}$$

As in linear programming, a solution  $(z, w)$  that satisfies the constraints (7) is called feasible. The GLCP is Feasible if there exists at least a feasible solution and is Infeasible otherwise. A solution  $(z, w)$  is called Complementary if it satisfies the relationship (9). Therefore a solution to the GCLP is a Complementary Feasible solution.

In this paper we study the direct methods for the LCP and GLCP with symmetric PD and PSD matrices. The classes PD and PSD are defined by the following equivalences

$$\begin{aligned}
 M \in \text{PD} &\iff x^T M x > 0 \quad \text{for all } x \neq 0 \\
 M \in \text{PSD} &\iff x^T M x \geq 0 \quad \text{for all } x
 \end{aligned}
 \tag{10}$$

A matrix  $M$  is SPD or SPSD if it is symmetric PD or PSD respectively.

The matrices PD and PSD have a large number of properties which can be found in a number of papers and books. Next, we present some properties of these matrices, which are important in the next sections of this paper (their proofs can be found in [34] and [10]).

- (P1)  $M \in \text{PD} \ (M \in \text{PSD}) \implies m_{ii} > 0 \ (m_{ii} \geq 0)$  for all  $i$
- (P2)  $M \in \text{PSD}$  and  $m_{ii} = 0 \implies m_{ij} = -m_{ji}$  for all  $j$
- (P3)  $M \in \text{PD} \ (M \in \text{PSD}) \implies M_{LL} \in \text{PD} \ (M_{LL} \in \text{PSD})$  for all  $L \in \{1, \dots, n\}$
- (P4)  $M \in \text{SPSD}$  and  $M$  is nonsingular  $\implies M \in \text{SPD}$

We can conclude from these properties that only a singular SPSD matrix may have zero diagonal elements. But if there exists an  $i \in \{1, \dots, n\}$  such that  $m_{ii} = 0$ , then by (P2) all the elements in the column and row  $i$  are zero and two cases may occur, which are referred below.

(i) If  $q_i = 0$  and  $i \in I$  or  $q_i \geq 0$  and  $i \in J$ , then both the row and column  $i$  may be disregarded and a GLCP of dimension  $(n-1)$  is obtained.

(ii) If  $q_i \neq 0$  and  $i \notin I$  or  $q_i < 0$  and  $i \in J$ , then GLCP is infeasible and has no solution

From this discussion we can conclude that if the matrix  $M$  is SPSD, then either the GLCP is infeasible or can always be reduced to a GLCP such that the diagonal elements of its matrix are positive. This property, together with the invariance from the GLCP under principal permutations of rows and columns, allow the use of ordering algorithms for sparse SPD and SPSD matrices in the implementation of direct methods for the LCP and GLCP, as it is described in section 4.

As in linear programming, the direct methods for the LCP and GLCP are based on pivot operations. Given a system

$$Ax = b \tag{11}$$

where  $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $x \in \mathbb{R}^m$ ,  $b \in \mathbb{R}^n$  and  $m > n$  and a basic solution of Basis  $B$ , we can write (11) in the form

$$w = q + Mz \tag{12}$$

where  $q = B^{-1}b$ ,  $M = -B^{-1}N$ ,  $A = B:N$  and  $w, z$  are the basic and nonbasic variables of the solution. A Pivot Operation consists of interchanging a basic variable (leaving variable)  $w_r$  and a nonbasic variable (entering variable)  $z_s$  and obtain an equivalent system. To do this, the element  $m_{rs}$  has to be nonzero and is called the Pivot of the operation. If  $m=2n$ , that is, if  $M$  is a square matrix and the pivot is a diagonal element of  $M$ , then the pivot operation is called Principal. This last type of operation can be generalized for pivots which are principal submatrices of  $M$ . If we write the system (12) in the form

$$\begin{array}{l}
 w_F = \\
 w_S =
 \end{array}
 \begin{array}{|c|cc|}
 \hline
 & 1 & z_F & z_S \\
 \hline
 & q_F & M_{FF} & M_{FS} \\
 \hline
 & q_S & M_{SF} & M_{SS} \\
 \hline
 \end{array}
 \tag{13}$$

then a Principal Pivot Operation with pivot  $M_{FF}$  changes the nonbasic variables  $z_F$  with the basic variables  $w_F$ , such that another equivalent system is obtained. To do this, the matrix  $M_{FF}$  has to be nonsingular. Writing the new system in the form

$$\begin{array}{l}
 z_F = \\
 w_S =
 \end{array}
 \begin{array}{|c|cc|}
 \hline
 & 1 & w_F & z_S \\
 \hline
 & \bar{q}_F & \bar{M}_{FF} & \bar{M}_{FS} \\
 \hline
 & \bar{q}_S & \bar{M}_{SF} & \bar{M}_{SS} \\
 \hline
 \end{array}
 \tag{14}$$

then the vectors and matrices of the systems (13) and (14) are related by the following equalities

$$\begin{aligned}
 \bar{M}_{FF} &= M_{FF}^{-1}, \quad \bar{M}_{SF} = M_{SF} M_{FF}^{-1}, \quad \bar{M}_{FS} = -M_{FF}^{-1} M_{FS}, \quad \bar{q}_F = -M_{FF}^{-1} q_F \\
 \bar{M}_{SS} &= M_{SS} - M_{SF} M_{FF}^{-1} M_{FS}, \quad \bar{q}_S = q_S - M_{SF} M_{FF}^{-1} q_F
 \end{aligned}
 \tag{15}$$

The matrix  $\bar{M}$  defined by the equalities (15) is called a Principal Transform of  $M$  and its principal submatrix  $\bar{M}_{SS}$  is named Schur Complement of  $M_{FF}$  on  $M$   $|2|$  and is denoted by  $(M|M_{FF})$ .

The matrices PD and PSD are invariant under principal pivot operations [3] but the symmetry is not preserved under these operations. However, Schur Complements of symmetric matrices are also symmetric, whence these matrices are SPD or SPSD if M belongs to these classes. These results are presented below.

$$(P5) \quad M \in PD (M \in PSD) \implies \bar{M} \in PD (\bar{M} \in PSD)$$

$$(P6) \quad M \in SPD \implies (M | M_{FF}) \in SPD \text{ for all } F$$

$$M \in SPSD \text{ and } M_{FF} \text{ is nonsingular} \implies (M | M_{FF}) \in SPSD .$$

It is obvious that the principal pivot operations maintain the complementarity of the basic solutions. This property, together with (P5) and (P6), make these operations highly recommendable for the solution of the LCP and GLCP with SPD and SPSD matrices. Methods based on this type of operations are called Principal Pivoting Algorithms and are described in the next sections of this paper.

### 3 - Principal Pivoting Methods For the LCP

In this section we describe the three principal pivoting methods, which can solve the LCP when the matrix is SPD or SPSD. Consider again the LCP

$$w = q + Mz, \quad z \geq 0, \quad w \geq 0, \quad z^T w = 0 \tag{16}$$

where  $q \in R^n$  and  $M \in R^{n \times n}$ . If  $q \geq 0$  then  $(w=q, z=0)$  is a solution of the LCP. Otherwise this basic solution is a complementary infeasible solution. The three principal pivoting methods start with such solution and, by using principal pivot operations, try to achieve a feasible solution for the LCP. Since all the basic solutions used by the algorithms are complementary, then the first feasible solution is a solution of the LCP. The algorithms differ in

the way to get the feasible solution (or showing that none exists) and are presented below

(i) Murty's Bard-type method for SPD matrices [23]

Since only principal pivot operations are performed, then in each iteration the basic variables  $\bar{w}$  and nonbasic variables  $\bar{z}$  of the corresponding basic solution are related by

$$\bar{w} = \bar{q} + \bar{M}\bar{z} \tag{17}$$

where  $\bar{M}$  is a principal transform of  $M$  and  $(\bar{w}, \bar{z})$  is a permutation of  $(w, z)$ . If  $\bar{q} \geq 0$  then the basic solution  $(\bar{w}=\bar{q}, \bar{z}=0)$  is a solution to the LCP. Otherwise, a principal pivot operation is performed with pivot  $\bar{m}_{rr}$ , where  $r$  satisfies

$$r = \min \{i : \bar{q}_i < 0\} \tag{18}$$

From properties (P5) and (P1) this operation is always possible if  $M \in \text{SPD}$ . Murty's method terminates in a finite number of iterations with a solution of the LCP [23].

Our computational experience showed that the number of iterations to achieve a solution is reduced, if we substitute the criterion (18) by

$$\bar{q}_r = \min \{\bar{q}_i : \bar{q}_i < 0\} \tag{19}$$

where in case of ties,  $r$  is the first index which satisfies (19). Despite there is no proof for termination in a finite number of iterations, we always find a solution of the LCP in all test problems, as is shown in the last section.



(ii) Graves' method for SPD and SPSD matrices [14]

In this algorithm a parameter  $\lambda \geq 0$  and a vector  $p \geq 0$  are introduced to get a system of the form

$$w = q + \lambda p + Mz, \quad z \geq 0, \quad w \geq 0, \quad z^T w = 0 \tag{20}$$

For certain value  $\lambda^0 > 0$  of  $\lambda$ , the problem (20) has a basic solution ( $w = q + \lambda^0 p, z = 0$ ) and in each iteration of the algorithm ( $\bar{w} = \bar{q} + \lambda \bar{p}, \bar{z} = 0$ ) is a solution of (20). Furthermore the value of  $\lambda$  is nondecreasing and decreases in the nondegenerate cases. To achieve this, there are criteria for the pivot selection, that lead either to a solution of the LCP (that is, a solution of (20) with  $\bar{\lambda} = 0$ ) or to a conclusion that the LCP is infeasible. Each iteration of the algorithm consists of the three steps that are presented below.

Step 1- Determine  $r$  by

$$\bar{\lambda} = -\frac{\bar{q}_r}{\bar{p}_r} = \min \left\{ -\frac{\bar{q}_i}{\bar{p}_i} : \bar{q}_i < 0 \right\} \tag{21}$$

where  $r$  is the first index that satisfies (21) in case of ties. If  $r$  does not exist ( $\bar{\lambda} = 0$ ), ( $\bar{w} = \bar{q}, \bar{z} = 0$ ) is a solution of the LCP and stop.

Step 2 - If  $\bar{m}_{rr} = 0$  go to Step 3. Otherwise perform a principal pivot operation with pivot  $m_{rr}$  and perform a new iteration.

Step 3 - If  $\bar{m}_{ir} \geq 0$  for all  $i$ , LCP is infeasible and stop. Otherwise find  $s$  by

$$\frac{\bar{q}_s + \bar{\lambda} \bar{p}_s}{-\bar{m}_{sr}} = \min \left\{ \frac{\bar{q}_i + \bar{\lambda} \bar{p}_i}{-\bar{m}_{ir}}; \bar{m}_{ir} < 0 \right\} \quad (22)$$

and perform a principal pivot operation with pivot

$$\begin{bmatrix} \bar{m}_{rr} & \bar{m}_{rs} \\ \bar{m}_{sr} & \bar{m}_{ss} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\bar{m}_{sr} \\ \bar{m}_{sr} & \bar{m}_{ss} \end{bmatrix} \quad (23)$$

Perform a new iteration.

Note that the equality (23) is a consequence of (P5) and (P2) and  $\bar{m}_{r1} \geq 0$  by (P1) and (P5). When  $M \in \text{SPD}$  then the algorithm only uses Steps 1 and 2 and terminates with a solution of the LCP, while two possible terminations can occur when  $M \in \text{SPSD}$  but  $M \notin \text{SPD}$ . [14].

(iii) Keller's method for SPD and SPSD matrices [16].

This algorithm is a quadratic programming method that solves the LCP by solving its equivalent QP. The method is easily described by introducing the concept of Bisymmetric Matrix [16]. A square matrix  $M$  of order  $n$  is Bisymmetric if there exists a partition  $\{F, S\}$  of  $\{1, \dots, n\}$  such that

$$P^T M P = \begin{bmatrix} M_{FF} & M_{FS} \\ M_{SF} & M_{SS} \end{bmatrix} \quad (24)$$

with  $M_{FF}$  and  $M_{SS}$  symmetric matrices,  $M_{SF} = -M_{FS}^T$  and  $P$  a permutation matrix.

In each iteration of Keller's method, the matrix  $\bar{M}$  is bisymmetric and  $\bar{q}_F \geq 0$ . So, if  $\bar{q}_S \geq 0$  then  $(\bar{w} = \bar{q}, \bar{z} = 0)$  is a solution of the LCP. Otherwise a pivot selection is made for a pivot  $\bar{m}$ . If such a pivot can not be found, then the LCP is infeasible. Otherwise, a principal pivot operation with pivot  $\bar{m}$  is performed and a new solution satisfying the same requirements is obtained. The sets  $F$  and  $S$  are updated by this operation as follows

$$\begin{aligned} \ell \in F &\Rightarrow F = F - \{\ell\}, \quad S = S \cup \{\ell\} \\ \ell \in S &\Rightarrow F = F \cup \{\ell\}, \quad S = S - \{\ell\} \end{aligned} \tag{25}$$

As in Graves method, each iteration of Keller's method consists of three steps that are presented below.

Step 1 - Find  $r$  by

$$\bar{q}_r = \min \{ \bar{q}_i : \bar{q}_i < 0, i \in S \} \tag{26}$$

If  $r$  does not exist  $(\bar{w} = \bar{q}, \bar{z} = 0)$  is a solution of the LCP and stop. Otherwise go to Step 2.

Step 2 - Compute

$$\theta_1 = \begin{cases} -\frac{\bar{q}_r}{\bar{m}_{rr}} & \text{if } \bar{m}_{rr} > 0 \\ +\infty & \text{if } \bar{m}_{rr} = 0 \end{cases} \tag{27}$$

and

$$\theta_2 = \begin{cases} \frac{\bar{q}_S}{-\bar{m}_{sr}} = \min \left\{ \frac{\bar{q}_j}{-\bar{m}_{jr}} : \bar{m}_{jr} < 0, j \in F \right\} \\ +\infty & \text{if } F = \emptyset \text{ or } \bar{m}_{jr} > 0 \text{ for all } j \in F \end{cases} \tag{28}$$

If  $\theta_1 = \theta_2 = +\infty$ , then LCP is infeasible and stop. Otherwise go to Step 3.

Step 3 - if  $\theta_1 \leq \theta_2$  ( $\theta_1 > \theta_2$ ) perform a principal pivot operation with pivot  $\bar{m}_{rr}(\bar{m}_{ss})$  and perform a new iteration starting in Step 1 ( Step 2 ).

Like Graves' method, the algorithm can only terminate with infeasibility in the case of M SPSD. In fact, if  $M \in \text{SPSD}$  then  $\theta_1 < +\infty$  by (P1) and (P5). Finally note that Keller's method is equivalent to Fletcher - Jackson method [8] if strategy zero is chosen in this latter algorithm.

#### 4 - IMPLEMENTATION OF PRINCIPAL PIVOTING METHODS

Since only principal pivot operations are performed by each one of the algorithms, then each iteration of the methods of Murty and Keller has associated a tableau of the form (14), where  $\bar{q}$  and  $\bar{M}$  are given by (15). The set F corresponds to the z variables that are basic in that iteration and coincides with the description of Keller's method. In Graves method there is still the column  $\bar{p}$  of  $\bar{\lambda}$  to consider, which satisfies.

From (15) and (29), we can conclude that all the necessary information in each iteration of the methods can be obtained by using the original matrix M and solving systems of equations with the matrix  $M_{FF}$ , which is SPD by (P3) and (P4). The computational work in each iteration of the methods is given below.

$$\bar{P}_F = -M_{FF}^{-1} P_F, \quad \bar{P}_S = P_S - M_{SF} M_{FF}^{-1} P_F \quad (29)$$

Murty's method :

<p>Solve <math>M_{FF} x = -q_F \rightarrow \bar{q}_F</math></p> <p>Compute <math>\bar{q}_S = q_S + M_{SF} \bar{q}_F</math></p>	(30)
--	------

Keller's method :

<p>Solve <math>\left\{ \begin{array}{l} M_{FF} x = -q_F \rightarrow \bar{q}_F \\ M_{FF} y = -M_{Fr} \rightarrow \bar{M}_{Fr} \end{array} \right.</math></p> <p>Compute <math>\left\{ \begin{array}{l} \bar{q}_S = q_S + M_{SF} \bar{q}_F \\ \bar{m}_{rr} = m_{rr} + M_{Fr}^T \bar{M}_{Fr} \end{array} \right.</math></p>	(31)
--	------

Graves' method

<p>Solve <math>\left\{ \begin{array}{l} M_{FF} x = -q_F \rightarrow \bar{q}_F \\ M_{FF} y = -P_F \rightarrow \bar{P}_F \end{array} \right.</math></p> <p>Compute <math>\left\{ \begin{array}{l} \bar{q}_S = q_S + M_{SF} \bar{q}_F \\ \bar{P}_S = P_S + M_{SF} \bar{P}_F \end{array} \right.</math></p> <p>and if <math>M \in \text{SPSD}</math>, <math>M \notin \text{SPD}</math> and <math>r \notin F</math></p> <p>Solve <math>M_{FF} z = -M_{Fr} \rightarrow \bar{M}_{Fr}</math></p> <p>Compute <math>\bar{m}_{rr} = m_{rr} + M_{Fr}^T \bar{M}_{Fr}</math></p>	(32)
--	------

To implement these three methods it is necessary to know the set  $F$  in each iteration. This is easy, since initially  $F = \phi$  and each iteration consists of updating the set  $F$  by adding or deleting elements. In fact, each simple principal pivot operation corresponds to an update of the form (25). Furthermore if in Graves' method a double principal pivot operation is performed with pivot given by (23), then by (P4) and (P6) we have  $r \in S$  and  $s \in F$  and this operation consists of the following updating

$$F = F - \{s\} \cup \{r\} \tag{33}$$

We also note that in this latter case  $\bar{m}_{ir} = 0$  for all  $i \in S$ , whereby we can add  $i \in F$  to the criterion (22) and we only need to calculate the elements  $\bar{m}_{ir}$  with  $i \in F$ .

In each iteration of each one of the three methods it is necessary to solve at least a system with matrix  $M_{FF}$ . Since this matrix is SPD by (P3) and (P4), then we can write

$$M_{FF} = LDL^T \tag{34}$$

where  $L$  is a lower triangular matrix with all diagonal elements equal to one and  $D$  is a diagonal matrix with positive diagonal elements  $|7|$ . Since in each pivot operation the set  $F$  changes by at least one element, then such an operation consists of updating the  $LDL^T$  decomposition of the matrix  $M_{FF} \in SPD$ , when a column and a row are deleted or added. There are stable processes to do this task which are presented below.

- (i) Add a row and a column to a matrix  $A \in SPD$

Let

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & A_3^T \\ A_3 & A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 & \\ & E \quad L_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{D}_1 & \\ & D_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_1^T & E^T \\ & L_2^T \end{bmatrix} \quad (35)$$

and

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} A_1 & b & A_3^T \\ b^T & \alpha & c^T \\ A_3 & c & A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{L}_1 & & \\ & 1 & \\ \bar{E} & \bar{c} & \bar{L}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{D}_1 & & \\ & \bar{\alpha} & \\ & & \bar{D}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{L}_1^T & \bar{b} & \bar{E}^T \\ & 1 & \bar{c}^T \\ & & \bar{L}_2^T \end{bmatrix} \quad (36)$$

To get the  $LDL^T$  decomposition of  $\bar{A}$  we need to obtain  $\bar{L}_1, \bar{D}, \bar{b}, \bar{E}, \bar{c}, \bar{\alpha}, \bar{L}_2$  and  $\bar{D}_2$ . Performing the products in the right-hand sides of the equalities (35) and (36) and by the unicity of the LDL decomposition of the submatrix  $A_1 \in SPD$ , we get

$$\bar{L}_1 = L_1 \quad , \quad \bar{D}_1 = D_1 \quad , \quad \bar{E} = E \quad (37)$$

$$L_1 D_1 \bar{b} = b, \quad \bar{\alpha} = \alpha - \bar{b}^T D_1 \bar{b}, \quad \bar{c} = \frac{1}{\alpha} (c - E D_1 \bar{b}) \quad (38)$$

$$\bar{L}_2 \bar{D}_2 \bar{L}_2^T = L_2 D_2 L_2^T - \alpha \bar{c} \bar{c}^T \quad (39)$$

Hence the matrices  $L_1, D$  and  $E$  remain unaltered. Furthermore, from (38) we get the following process to compute  $\bar{b}, \bar{c}$  and  $\bar{\alpha}$

Solve the system

$$L_1 x = b$$

$$\bar{\alpha} = \alpha - x D_1^{-1} x$$

Compute

$$\bar{c} = \frac{1}{\alpha} (c - E x)$$

$$\bar{b} = D_1^{-1} x$$

(40)

Bennett's algorithm [1] can be used to obtain the matrices  $\bar{L}_2$  and  $\bar{D}_2$ . We note that this procedure is not necessary if the row and column to add are the last row and column of the updated matrix  $M_{FF}$ .

(ii) Delete a row and a column from a matrix  $\bar{A} \in \text{SPD}$ .

Suppose that the matrix  $\bar{A}$  has a  $\text{LDL}^T$  decomposition given by (36) and we want to obtain the matrices  $L_1, D_1, E, D_2$  and  $L_2$  of the  $\text{LDL}^T$  decomposition of the matrix  $A$  given by (35). From (37) and (39) we conclude that the matrices  $\bar{L}_1, \bar{D}_1$  and  $\bar{E}$  remain unaltered and we only have to get the  $\text{LDL}^T$  decomposition of the matrix

$$\bar{L}_2 \bar{D}_2 \bar{L}_2^T + \bar{\alpha} \bar{c} \bar{c}^T \quad (41)$$

which can be done by using Bennett's algorithm. We note that no computational work has to be done, if the row and column to be deleted are the last row and column of  $\bar{A}$ .

As we referred in the introduction, the purpose of this paper is to study the efficiency of direct methods to solve LCPs and GCLPs with sparse SPD and SPSD matrices of medium and large dimensions. In section 2 we showed that these linear complementarity problems are invariant under principal permutations of rows and columns and we can consider that all the diagonal elements of the matrix  $M$  are positive without loss of generality. These two properties allow the use of an ordering algorithm [11] for the rows and columns of the matrix  $M$ . According to [7] we use the minimum-degree algorithm [11, chapter 5] for this purpose. After the so-called symbolic phase, a data structure for the matrices  $L$  and  $D$  is constructed [11, chapter 5]. These matrices are not computed, since only  $\text{LDL}^T$  decompositions of principal submatrices of  $M$  are needed in each iteration.



Hence we do not recommend the use of the compressed scheme referred in [11, chapter 5] and our data structures do not use that scheme.

If the ordering given by the minimum-degree algorithm is followed in the different updatings of the  $LDL^T$  decompositions of the matrices  $M_{FF}$ , then we are sure that we have storage space for all L and D matrices which are constructed during the whole process. Each updating consists of modifying the elements of the data structure corresponding to the column that are active in this procedure. Hence, we have designed a static scheme for the implementation of the principal pivoting methods, which needs a primary storage space given by

$$\text{stor} = 2*n + 3*nonz + nfill \tag{42}$$

where nonz is the number of nonzero elements strictly below the diagonal of M and nfill represents the fill-in which would occur in the lower triangular part of the permuted matrix, if the  $LDL^T$  decomposition of this matrix was performed. We also note that despite M being a symmetric matrix, we store it as an unsymmetric matrix. In fact, since sparse matrices are stored by rows or by columns (in our implementation we choose the second type) then computing products matrix \* vector, solving systems  $M_{FF}x = -M_{Fr}$  and updating the  $LDL^T$  decompositions become faster processes if M is stored as an unsymmetric matrix by columns. The value of stor given by (42) is a consequence of this type of implementation.

If we do not previously choose an ordering for the rows and columns of the matrix M and we perform the updatings without assuming any ordering, then the matrix L becomes

dense after a small number of iterations. This implies that the use of the more dispendious data structures for sparse matrices are totally unjustifiable. Hence it is necessary to perform periodically the so-called Reinversions [32], which consist of computing the  $LDL^T$  decompositions by using an Analyse and a factor [7]. The need of performing reinversions quite often implies an increase on the computational work. Hence it is highly recommendable to update  $LDL^T$  decompositions of the matrices  $M_{FF}$  according to a previously ordering, which is obtained by the minimum-degree algorithm.

We can also use a dynamic process to store the matrices  $L$  and  $D$  of the  $LDL^T$  decompositions of  $M_{FF}$ . This scheme may have some advantage if the dimensions of all the matrices  $M_{FF}$  are quite small. In fact, in the dynamic processes it is necessary to fix a maximum limit  $NM$  for the storage space and whenever this value is exceeded the so-called garbage collections come into operation [26, chapter 2]. For this scheme to be more useful, it is necessary that  $NM$  is much smaller than  $(nonz+nfill)$ . However the process of storing real elements in these dynamic schemes [26, chapter 2], [32] leads to a quite often use of garbage collections. Since this last procedure is quite dispendious [26, chapter 2], we think that our static process performs better for general sparse matrices.

Hence we recommend an implementation of the three principal pivoting methods based in the following aspects.

i) Use the minimum-degree algorithm and consequently symbolic phase to find an ordering and construct a data structure for the matrices  $L$  and  $D$  of the  $LDL^T$  decomposition of the matrix  $M$  (the numerical values of these matrices are not computed [11, chapter 5]).

ii) Perform the updatings of the  $LDL^T$  decompositions of the matrices  $M_{FF}$  accordingly to the ordering obtained in each updating consist as modifying the elements as data structure corresponding to de column that are active in this procedure (i).

iii) Use the version of Bennett's algorithm for sparse matrices which is described in [18], whenever such algorithm is necessary.

iv) Solve the systems involving matrices  $M_{FF}$  (two triangular systems) using the data structures with the matrices  $L$  and  $D$  of the  $LDL^T$  decompositions accordingly to the processes described in [11].

v) Use the data structure of the matrix  $M$  to compute the products matrix \* vector, which are necessary in the implementation of the methods. We suggest [31, chapter 7] for an explanation of how these products are performed.

Following these indications and according to the computational work per iteration of each one of the algorithms (given by (30), (31) and (32)), we produced a code for all these three principal pivoting methods. In section 6 we present an computational comparison of the efficiency of the three algorithms on some test problems. We should add that according to (30), (31) and (32), Murty's method is the algorithm that requires less computational effort per iteration and Graves' method is the most dispendious. However these theoretical conclusions can not be definite, since we know nothing about the number of iterations that each algorithm requires to solve a particular problem. Furthermore the set  $F$  is not the same for the three algorithms, since the criteria for the choice of the entering and leaving variables are different in each one of the methods.

**5- Extension of the Principal Pivoting Methods to the GLCP**

Consider the GLCP (7) - (8). If we introduce the artificial variables  $w_I$  ( $w_I = 0$ ) and we change these basic variables with the nonbasic variables  $z_I$ , then the solution of the GLCP remains solving the LCP with matrix  $(M|M_{II})$  and at the same time updating the values of the unrestricted variables  $z_I$ . This process is only possible if the matrix  $M_{II}$  is nonsingular. Concerning to the implementation described in the previous section, this process directly amount to set inically  $F=I$  and compute the LDL decomposition of the matrix  $M_{II}$ , according to the ordering obtained by the minimum-degree algorithm for the matrix  $M$ . After this initial step, the methods are implemented as before, with the small alteration that the rows  $i \in I$  are not considered in the different criteria for choice of the entering and leaving variables.

If the matrix  $M_{II}$  is singular ( $M_{II} \not\in \text{SPD}$ ) then that process is not possible. In this case  $M_{II}$  has the form

$$M_{II} = \begin{bmatrix} M_{KK} & b & M_{KH} \\ b^T & \alpha & c^T \\ M_{HK} & c & M_{HH} \end{bmatrix} \begin{matrix} + \text{row } t \\ \\ + \\ \text{column } t \end{matrix} \quad (43)$$

where  $K$  and  $L$  are two subsets of  $I$  such that  $|K \cup L| = |I| - 1$  ( $|X|$  represents the number of elements of the set  $X$ ) and

$$M_{KK} = L_1 D_1 L_1^T, \quad \alpha - b^T M_{KK}^{-1} b = 0 \quad (44)$$

with  $L_1$  a lower triangular matrix and  $D_1$  a diagonal matrix as before. If we write  $q = (q_K, \beta, q_L)^T$  then the components  $q_k$  and  $\beta$  in this iteration are given by

$$L_1 D_1 L_1^T \bar{q}_K = -q_K, \quad \bar{\beta} = \beta + b^T \bar{q}_K \tag{45}$$

If  $\bar{\beta} = 0$  then both the row and column  $t$  are not considered in the set  $F$  and the process to obtain the  $LDL^T$  decomposition of  $M_{II}$  carries on to the following row and column of  $M_{II}$  in the ordering given by the minimum-degree algorithm. If  $\bar{\beta} \neq 0$  then GLCP is infeasible and we stop. Therefore, if  $M_{II}$  is a singular matrix, then either GLCP is infeasible or we get the  $LDL^T$  decomposition of a principal submatrix  $M_{FF}$  of  $M_{II}$ , which is the starting point for the use of the principal pivoting methods.

Hence the difference between the LCP and GLCP is that for the LCP we have initially  $F = \emptyset$  and for the GLCP  $\emptyset \neq F \subseteq I$  and the  $LDL^T$  decomposition of the matrix  $M_{FF}$  has to be found. The initial process for the GLCP can terminate with an indication of the infeasibility of the problem. Furthermore for the GLCP, the rows and columns  $i \in I$  are not considered in the criteria for the choice of the entering and leaving variables in the subsequent iterations.

### 6- A Comparative Computational Study of the Principal Pivoting Methods

In this section we present a computational investigation of the three principal pivoting methods, whose descriptions and implementations are presented in the previous sections. To do this, some LCPs and GLCPs taken from the literature were tested. These test problems are presented below.

(i) TP1 - LCP and GLCP taken from elastoplastic analysis of structures [24].

(ii) TP2, TP3, TP4, TP5 - LCPs and GLCPs randomly generated by Stewart's technique described in [38].

(iii) TP6, TP7, TP8 - LCPs which occur in portfolio selection models and are randomly generated by the techniques described in [27]. If  $n$  and  $m$  are the parameters defined in that paper then

$$\text{TP6} - n=200, m=5; \text{TP7} - n=200, m=20; \text{TP8} - n=600, m=2$$

In all these eight test problems the matrices are SPD and sparse. We also considered three LCPs and GLCPs with sparse SPSD matrices, which were randomly generated by Stewart's technique described in [38].

The characteristics of the test problems and the results of the experiments performed on their solutions by the three principal pivoting methods are presented in tables 1, 2 and 3. Murty's method was only tested with SPD matrices, whereby is only referred in tables 1 and 2. In our experiments we used two versions of Murty's method, which differ in the choice of the entering variable. We denote by MURTY 1 and MURTY 2 the versions of Murty's method which use the criteria (18) and (19) respectively. After a number of experiments we concluded that for Graves method the choice of the vector  $p$  such that  $p_i = 1$  for all  $i$  is in general the most satisfactory, whence we chose  $p=(1, \dots, 1)^T$  in our experiments. For the GLCP we defined the vector  $p$  such that

$$p_i = 0, \quad i \in I \quad \text{and} \quad p_i = 1, \quad i \in J \quad (46)$$

All the experiments were performed in a CDC CYBER 720 of the University of Porto. In the tables which contain the results of the experiments, there are some parameters that deserve some explanation and are presented below.

$n$  = dimension of the problem = order of the matrix  $M$

$\text{nonzer}$  = number of nonzero elements of  $M = 2*\text{nonz}+n$ , where  $\text{nonz}$  is the number of nonzeros of  $M$  strictly below the diagonal.

$\text{stor}$  = total primary storage space given by (42)

$\text{rsm}$  = relative sparsity of  $M = \frac{\text{nonzer}}{n}$

$\text{NI}$  = number of simple pivot operations (a double pivot operation is considered as two simple pivot operations) = number of updatings of  $\text{LDL}^T$  decompositions.

$\text{NO}$  = number of multiplications/divisions

$T$  = CPU time in seconds

PROBLEM	n	nonzer	stor	rsm		MURTY 1	MURTY 2	KELLER	GRAVES
TP1	484	9920	18468	20.5	NI	530	328	346	350
					$NO \times 10^{-6}$	3.5	1.9	2.8	3.5
					T	222.	142.	179.	187.
TP2	600	11442	17463	19.1	NI	558	300	304	310
					$NO \times 10^{-6}$	1.6	0.89	1.1	1.8
					T	127.	75.	91.	103.
TP3	800	10920	16780	13.7	NI	658	408	444	418
					$NO \times 10^{-6}$	1.9	1.2	2.6	1.8
					T	161.	113.	164.	141.
TP4	1000	16382	25021	16.4	NI	926	546	546	582
					$NO \times 10^{-6}$	4.4	2.6	3.5	5.4
					T	354.	218.	273.	314.
TP5	1500	9824	14486	6.5	NI	1005	783	785	819
					$NO \times 10^{-6}$	2.7	2.2	3.1	4.7
					T	300.	263.	334.	364.
TP6	200	1922	3035	9.6	NI	112	98	98	98
					$NO \times 10^{-4}$	3.1	5.2	5.6	11.6
					T	4.2	5.3	5.8	7.7
TP7	200	8012	16083	40	NI	174	104	104	116
					$NO \times 10^{-5}$	5.5	4.	5.2	7.4
					T	35.4	25.6	32.3	37.2
TP8	600	9278	14535	16.5	NI	301	279	279	291
					$NO \times 10^{-5}$	2.9	7.7	8.4	17.8
					T	33.1	60.4	64.9	97.5

Table 1 - LCPs with SPD matrices



PROBLEM	n	nonzer	stor	rsm		MURTY 1	MURTY 2	KELLER	GRAVES
TP1	484	9920	18468	20.5	NI	239	177	177	173
					NO*10 <sup>-6</sup>	2.7	2.	3.1	3.4
					T	187.	134.	187.	189.
TP2	600	11442	17463	19.1	NI	521	277	279	287
					NO*10 <sup>-6</sup>	1.7	0.91	1.2	1.8
					T	143.	75.	92.	106.
TP3	800	10920	16780	13.7	NI	413	281	283	287
					NO*10 <sup>-6</sup>	2.5	1.7	2.5	3.1
					T	202.	145.	190.	204.
TP4	1000	16382	25021	16.4	NI	724	476	476	494
					NO*10 <sup>-6</sup>	4.8	3.2	4.6	6.3
					T	387.	263.	336.	376.

Table 2 - GLCPs with SPD matrices

PROBLEM	n	nonzer	stor	rsm		LCP		GLCP	
						KELLER	GRAVES	KELLER	GRAVES
TP9	300	5470	8355	18.2	NI	225	243	108	118
					NO*10 <sup>-6</sup>	0.66	1.2	0.52	0.95
					T	49.	69.	37.	52.
TP10	500	8224	12586	16.4	NI	293	297	189	193
					NO*10 <sup>-6</sup>	1.0	1.8	1.1	2.0
					T	80.	103.	78.	100.
TP11	600	11518	17577	19.2	NI	562	572	462	470
					NO*10 <sup>-6</sup>	3.	6.2	2.7	5.5
					T	318.	451.	277.	400.

Table 3 - LCPs and GLCPs with SPSD matrices

From the results presented in tables 1 and 2 we can conclude that the version of Murty's method that uses the criterion (19) is in general the most efficient algorithm for SPD matrices. Keller's method is usually superior to Graves' method. Method MURTY 1 is usually the worst in number of iterations. However, since the computational work per iteration is very small, then it is competitive with the other methods. If there are very few deletions from the set  $F$  during the whole procedure, then Bennett's algorithm is almost never used and the version MURTY 1 might be superior to even the other version of Murty's method. This is particularly evident in the problems TP6 and TP8. On the other hand table 3 shows that Keller's method is usually superior to Graves' method for SPSD matrices.

Recently, Pang and Chandrasekaran [28] showed that if  $M$  is a strictly diagonally dominant with positive diagonal elements ( $M \in \text{SDD}_+$ ), then by a special choice of the vector  $p$  it is possible to state that there are no deletions in Graves' method. This makes possible to implement the method by a more efficient process [28]. If the matrix  $M$  is also symmetric, then it is SPD [33] and we can compare this new version of Graves' method (denoted by GRAVES 2) with the methods of Murty and Keller. To do this, we constructed some problems with symmetric  $\text{SDD}_+$  matrices by a technique similar to Stewart's (problems TP12, TP13, and TP14). In these three problems the matrix  $M$  is block diagonal. We also constructed three other randomly generated problems with no structure at all and we denoted these problems by TP15, TP16 and TP17. The characteristics of these test problems and the results of the comparative study are presented in table 4.

The results presented in table 4 confirm those referred before, that is, that Murty's method with criterion (19) is

PROBLEM	n	nonzer	stor	rsm		MURTY 2	KELLER	GRAVES 2
TP12	500	3090	4914	6.1	NI	255	255	255
					NO*10 <sup>-5</sup>	1.9	2.0	3.1
					T	27.9	33.2	39.8
TP13	800	4904	7298	8.1	NI	385	385	385
					NO*10 <sup>-5</sup>	4.3	4.4	7.5
					T	68.9	74.2	95.
TP14	1000	4098	6822	4.1	NI	455	455	455
					NO*10 <sup>-5</sup>	4.3	4.4	10.9
					T	79.7	95.6	118.3
TP15	600	3980	28487	6.6	NI	297	297	297
					NO*10 <sup>-5</sup>	11.4	15.4	12.4
					T	86.7	113.7	94.7
TP16	800	3614	18978	4.5	NI	389	389	389
					NO*10 <sup>-5</sup>	5.8	6.7	10.4
					T	70.7	87.6	94.4
TP17	1000	3486	11472	3.5	NI	465	465	465
					NO*10 <sup>-5</sup>	4.2	4.3	12.7
					T	78.9	95.6	116.5

Table 4 - LCPs with symmetric SDD<sub>+</sub> matrices

the most efficient method for SPD sparse matrices and Keller's method is usually superior to the modified Graves' method.

The computational study presented in tables 1, 2, 3 and 4 indicate that the execution time for solving LCPs and GLCPs by the principal pivoting methods depends on the number of updatings (compare the two versions of Murty's method), the relative sparsity (compare problems TP6 and TP7) and the fill-in that occurs in the updatings, which

can be seen by the value of stor. The reduction of the fill-in is usually achieved by the use of ordering algorithms such as those described in [11]. These algorithms are heuristic and the minimum-degree algorithm is considered the most efficient for reducing the fill-in for sparse SPD or SPSD matrices without any special structure [7]. However the use of this algorithm and subsequent symbolic phase to construct the static data structure require a certain amount of time, which is proportional to the value of stor as is shown in table 5. In that table, TO and TS represent the CPU time in seconds for ordering the rows and columns and for performing the symbolic phase, respectively.

Problem	TO	TS	Problem	TO	TS	Problem	TO	TS
TP1	14.6	1.4	TP7	12.9	1.6	TP13	5.9	0.5
TP2	11.9	0.9	TP8	24.4	0.9	TP14	6.6	0.5
TP3	10.	0.9	TP9	5.3	0.4	TP15	60.	6.6
TP4	16.3	1.2	TP10	7.5	0.6	TP16	28.2	3.4
TP5	18.4	0.9	TP11	12.4	0.9	TP17	14.2	1.5
TP6	1.7	0.2	TP12	2.9	0.3			

Table 5 - CPU time in seconds for ordering and symbolic phase

The use of the minimum-degree algorithm is not so recommendable for LCPs and GLCPs whose matrices have special structures, where the use of dissection, band or envelope faster techniques [11] seem more advisable. In these cases the data structure for the implementation of the methods are not exactly the same. An example of this type of LCPs are those which occur in the discretization of ordinary differential equations by finite-differences or finite elements [5,6]. These matrices have a band structure with

very few or no zeros inside the band. Since these matrices are stored by using rectangular arrays, that contain all the elements inside the band [11, chapter 4], then our implementation does not seem the most recommendable in this case. However, in order to get some more experience with real problems, we solved three LCPs (TP18, TP19, TP20), taken from [6], whose matrices are tridiagonal and symmetric  $SDD_+$ . The results of these experiences are presented in table 6 and confirm those referred before for the other  $SDD_+$  matrices.

Method	Problem TP18 - n=500			Problem TP19 - n=800			Problem TP20 - n=1000		
	NI	$NO \cdot 10^{-5}$	T	NI	$NO \cdot 10^{-5}$	T	NI	$NO \cdot 10^{-5}$	T
MURTY 2	251	0.95	21.1	412	2.53	54.8	507	3.85	95.6
KELLER	251	0.96	25.7	412	2.54	67.	505	3.8	90.1
GRAVES 2	249	2.8	29.	410	7.3	75.8	499	11.2	116.3

Table 6 - LCPs with tridiagonal symmetric  $SDD_+$  matrices.

As a conclusion of this comparative study we can say that Murty's method is usually the most efficient method for solving LCPs or GLCPs with sparse SPD matrices. The efficiency of Murty's method can be improved if it is possible to solve a less number of systems. This can be achieved by having in each iteration more than one entering (and leaving) variables. This modification is possible if the matrix M of the LCP or GLCP is a Minkowski matrix (see [5]). In fact, substantial savings in execution time are achieved if in each iteration all the basic variables such that  $\bar{q}_i < 0$  are leaving variables. This is shown in [5] for tridiagonal matrices and our experience showed that we usually solve LCPs and GLCPs in less than 5% of the

execution time by incorporating such modifications in Murty's method. We are currently doing research on designing rules based on this idea for SPD matrices which are not Minkowski. Our computational experience with such criteria has been quite encouraging but it is still soon to get any final conclusions.

Murty's method can also solve LCPs and GLCPs with unsymmetric P-matrices [23], whereby it can be used for such problems with unsymmetric  $SDD_+$  matrices. For these matrices it is not necessary to permute rows and columns for stability purposes [36, chapter 4]. So it seems that a similar implementation of Murty's method can be done for  $SDD_+$  matrices, which uses LU decompositions of the matrices  $M_{FF}$  and updating procedures for the LU decomposition of these matrices. This is currently under investigation.

#### REFERENCES

- [1] J.M.Bennett, Triangular factores of modified matrices, *Numerisch Mathematik* 7 (1965) 217-221.
- [2] R.W.Cottle, Manifestations of the Schur Complement, *Linear Algebra and its Applications* 8 (1974) 189-211.
- [3] R.W.Cottle, The principal pivoting method of quadratic programming, in "Mathematics of decision sciences", edited by G.B.Dantzig and A.F.Veinott Jr., American Mathematical Society, Providence, 1968, pp. 144-162.
- [4] R.W. Cottle and G.B. Dantzig, Complementary pivot theory of mathematical programmmg, in "Mathematics of decisions sciences", edited by G.B. Dantzig and A.F.

Veinott Jr. American Mathematical Society, Providence, 1968 pp. 55-73.

|5| C.W. Cryer, The efficient solution of linear complementarity problems of tridiagonal Minkowski matrices, ACM Transactions on Mathematical Software 9 (1983) 199-214

|6| R.S. Dembo and U. Tulowitzski, On the minimization of quadratic functions subject to box constraints, Technical Report, Department of Computer Science of Yale University, 1983.

|7| I.S. Duff, Direct methods for solving sparse systems of linear equations, SIAM Journal Scientific Statistical Computing 5 (1984) 605-619.

|8| R. Fletcher and M. P. Jackson, Minimization of a quadratic function of many variables subject only to upper and lower bounds, Journal Institute Mathematics and Applications 14 (1974) 159-174.

|9| R. Fletcher and M.J.D.Powell, On the modification of LDL factorizations, Mathematics of Computation 28 (1974) 1067-1087.

|10| M. Frank and P.Wolfe, An algorithm for quadratic programming, Naval Research Logistics Quarterly 3 (1956) 95-110.

|11| A. George and J.W.H.Liu, Computer solution of large sparse positive definitive systems, Prentice-Hall, Inc, Englewood Cliffs, New Jersey, 1981.

|12| P.E.Gill, W. Murray and M.H.Writgh, Practical Optimization, Academic Press, New York, 1981.

|13| R.Glowinski, Finite elements and variational inequalities, MRC Technical Report 1885, Mathematics Research Center, University of Wisconsin-Madison.

|14| R.L.Graves, A principal pivoting simplex algorithm for linear and quadratic programming, Operations Research 15 (19678) 482-494

|15| C. S. Ha, An algorithm for structural, large-scale quadratic programming problems, MRC Technical Report 2276, Mathematics Research Center, University of Winconsin-Madison, 1981

|16| E.L.Keller, The general quadratic optimization problem, Mathematical Programming 5 (1973) 311-337

|17| H.Kuhn and W. Tucker, Nonlinear Programming, in "Second Beckerley Symposium in Mathematical Statistics and Probability", edited by J.Neyman, University of California Press, California, 1951 pp.80-90.

|18| K.H.Law, Sparse matrix factor modification in structural reanalysis, International Journal for Numerical Methods in Engineering 21 (1985) 37-63.

|19| C.L.Lawson and R.J.Hanson, Solving least squares problems, Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, New Jersey, 1974.

|20| C. E. Lemke, On complementarity pivot theory, in "Mathematics of decision sciences", edited by G.B.Dantzig and A.F.Veinott Jr, American Mathematical Society, Providence, 1968, pp95-113

|21| Y.Y.Lin and J.S.Pang, Iterative methods for large



convex quadratic programmes: a survey, Technical Report, School of Management, University of Texas at Dallas, 1985.

[22] S.R.McCammon, On complementary pivoting, Ph D thesis, Rensselear Politechnic Institute, Troy, New York, 1970.

[23] K.G.Murty, Note on a Bard-type scheme for solving the complementary problem, *Opsearch* 8 (1971) 201-208

[24] A.S.Neves, A.M.Faustino, F.M.Pires and J.J.Judice, Elastoplastic analysis of structures and linear complementary, in "Or Models on Microcomputers", edited by J.D.Coelho and L.V.T.Tavares, North-Holland, Amsterdam, 1986.

[25] D.P. O'Leary, Sparse quadratic programming without updating, Technical Report 1200, Computer Science Department, University of Maryland, 1982.

[26] O. Osterby and Z. Zlatev, Direct methods for sparse matrices, *Lecture Notes in Computer Science*, 157, Springer-Verlag, Berlin, 1983.

[27] J.S.Pang, A new and efficient algorithm for a class of portfolio selection problems, *Operations Research* 28 (1980) 754-767.

[28] J.S.Pang and R. Chandrasekaran, Linear complementary problems solvable by a polynomial bounded pivoting algorithm, *Mathematical Programming Study* 25 (1985) 13-27.

[29] J.S.Pang, I.Kaneko, and W.P.Hallman, On the solution of some (parametric) linear complementary problems

with applications to portfolio analysis, structural engineering and graduation, *Mathematical Programming* 16 (1979) 325-347.

|30| J.S.Pang and S.C.Lee, A parametric linear complementary technique for the computation of equilibrium prices in a single commodity spatial model, *Mathematical Programming* 20 (1981) 81-102.

|31| S.Pissanetzky, *Sparse matrix technology*, Academic Press, New York, 1984.

|32| J.K.Reid, A sparsity-exploiting variant of Bartels-Golub decomposition for linear programming bases, *Mathematical Programming* 24 (1982) 55-69

|33| O.Taussky, A recurring theorem on determinants, *American Mathematical Monthly* 56 (1949) 672-674

|34| A.W.Tucker, *Pivotal algebra*, Lecture notes by T.D.Parsons, Department of Mathematics, Princeton University, 1965.

|35| L.Van der Hayden, A variable dimension algorithm for the linear complementarity problem, *Mathematical Programming* 19 (1980) 328-346.

|36| B.Wendroff, *Theoretical numerical analysis*, Academic Press, New York, 1966

|37| D.R.Westbrook, Contact problems for the elastic beam, *Computers and Structures* 15 (1982) 473-479.

|38| E.K.Yang and J.W.Tolle, A class of methods for solving large convex quadratic programs subject to box constraints, Working Paper, Management Sciences Department, University of Massachusetts at Boston, 1985.

## DETERMINAÇÃO DO MÍNIMO GLOBAL EM PROBLEMAS DE SÍNTESE DE ESTRUTURAS

L. M. C. Simões

Professor Auxiliar, Departamento de Engenharia Civil, Universidade de Coimbra (Portugal)

### Resumo

Neste artigo são descritas duas estratégias que permitem a obtenção do óptimo global de estruturas calculadas para um consumo mínimo de material. São apresentados, pela primeira vez, em problemas de optimização de estruturas, exemplos de comportamento não convexo deste programa bilinear. Indicam-se duas versões da primeira metodologia, do tipo "branch and bound" (B & B). A segunda, que corresponde a um desenvolvimento original, é do tipo "cutting plane" (plano de corte), deduzida a partir de uma generalização do algoritmo de Benders, que é resolúvel por códigos para programas lineares mistos. Se a escolha das secções se limitar a um conjunto discreto de alternativas, verifica-se uma convergência mais rápida para o mínimo global, num número finito de passos.

### 1. Introdução

No 25º ano a seguir ao trabalho publicado por Schmidt na segunda Conferência em Métodos de Computação Electrónica [16], pode dizer-se que as técnicas de programação matemática tiveram um lugar privilegiado no desenvolvimento de novas metodologias para o cálculo estrutural auxiliado por computadores. Entre as aplicações mais correntes, refere-se a determinação do peso mínimo de uma estrutura de topologia constante. A literatura específica é tão numerosa que se poderá remeter o leitor para a recolha bibliográfica [19].

Os métodos que têm sido apresentados mais frequentemente para solucionar esses problemas podem ser catalogados em duas categorias: critério de optimalidade e programação matemática. O primeiro é baseado na minimização do Lagrangeano e o outro decorre da aplicação de métodos de optimização não-linear.

De um modo geral, aceita-se que qualquer das alternativas possui falhas devidas à natureza não-linear e não-convexa do problema. Não é possível garantir que o mínimo local, fornecido por métodos que assentam num comportamento convexo, é também o mínimo global.

A determinação do volume mínimo de uma treliça que se comporta de uma forma elástica é um exemplo desses problemas. Contudo, como na literatura não existem referências relativas ao comportamento não-convexo deste tipo de estruturas, este trabalho foi iniciado com a apresentação de situações em que se verifica a não convexidade do domínio, em síntese de estruturas.

Foram escolhidas duas das estratégias mais apropriadas à optimização não-convexa. O método de B&B, que permite a convergência para o mínimo global, pode ser aplicado à solução de problemas com variáveis separáveis (por exemplo, as funções de uma variável e o produto destas). Este algoritmo é competitivo, dado que em cada nó se resolve um programa linear. São resolvidos problemas por esta metodologia e apresentados alguns resultados da experiência computacional do autor.

Em alternativa, propõe-se uma generalização do algoritmo de Benders em que são utilizadas funções duais em lugar de variáveis duais. Deduz-se um programa "master" que é equivalente ao programa matemático do peso mínimo. O "master" é um programa linear misto (variáveis reais e 0-1), que se pode resolver de um modo eficiente. O desenvolvimento apresentado é original, sendo complementado com um exemplo de aplicação.

## 2. Exemplos de comportamentos não-convexos em programas bilineares de optimização de estruturas

Os exemplos a seguir indicados servem para ilustrar alguns dos problemas que surgem, quando se pretende efectuar a síntese de estruturas que se comportam de um modo elástico.

### 2.1. Cálculo de uma grelha

A grelha representada na figura 1 é constituída por vigas "sandwich" ortogonais e suporta um carregamento perpendicular ao seu plano.

Supondo que a geometria da estrutura é conhecida, incluindo o número de vigas, comprimento dos vãos e condições de apoio, as restrições vão estar relacionadas com as tensões por flexão no nó B (provocadas pelos momentos  $m_1$  e  $m_3$ ) e tensões por flexão nas secções críticas entre os nós AB e BC (provocadas pelos momentos  $m_2$  e  $m_4$ , respectivamente).

Pretende-se calcular a área das secções  $y_1$  e  $y_2$ , de modo a minimizar o volume da grelha, isto é:

$$\min l_1 y_1 + l_2 y_2 \quad (1)$$

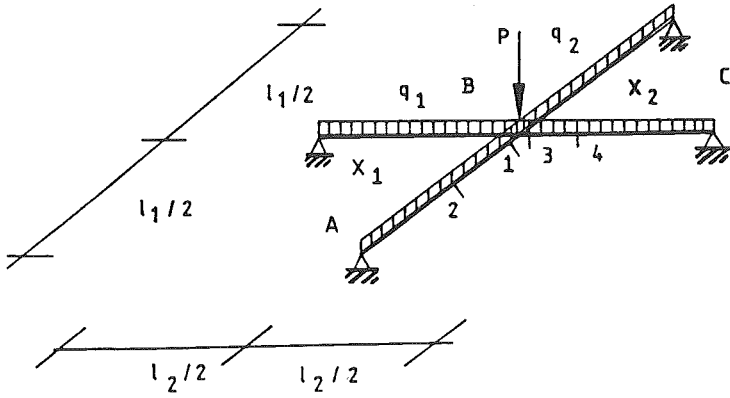


Fig. 1 - Grelha.

onde  $l_1$  e  $l_2$  são os comprimentos das vigas que se cruzam perpendicularmente. Variando simplesmente  $y_1$  e  $y_2$ , de modo a representar o domínio admissível da grelha, indicam-se a seguir duas situações em que o comportamento é não convexo.

1º CASO

Supõe-se a actuar em toda a grelha, uma carga uniformemente distribuída  $q_1 = 0.8 = q_2$ , sendo a carga pontual  $P$  nula.

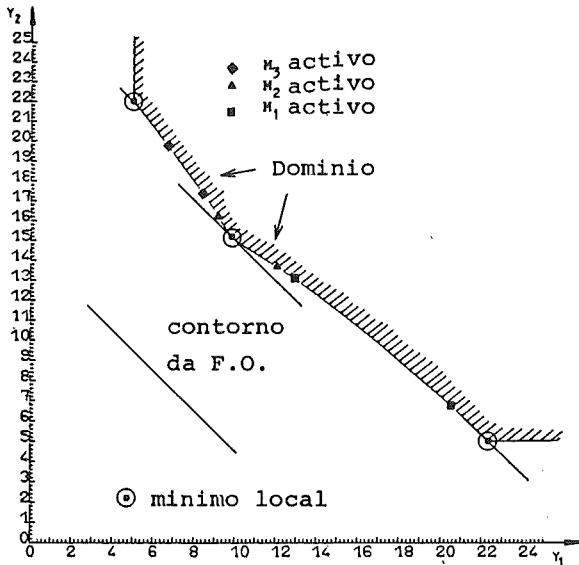


Fig. 2 - Domínio da grelha para o 1º caso.

Os comprimentos das vigas são  $l_1 = 30$  e  $l_2 = 31$ . Considera-se que quer os momentos estáticos  $w_j$ , quer os momentos de inércia  $I_j$  são directamente proporcionais à área das secções, ou seja:

$$w_j = 0,5 y_j \quad ; \quad I_j = 0,3 y_j \quad ; \quad j = 1,2 \quad (2)$$

O problema daí resultante possui os três óptimos locais indicados na figura 2.

2º CASO

Considera-se outra situação de carregamento a que corresponde uma carga uniformemente distribuída  $q_1 = 1,2 = q_2$  e uma carga concentrada  $P = 25,0$

Os comprimentos das vigas passam a ser  $l_1 = 21$ . e  $l_2 = 24$ . As novas relações que ligam as características geométricas das secções são:

$$w_j = 5 \cdot y_j \quad ; \quad I_j = 25 \cdot y_j \quad (3)$$

Nestas condições seriam apenas obtidos os dois mínimos locais representados na figura 3.

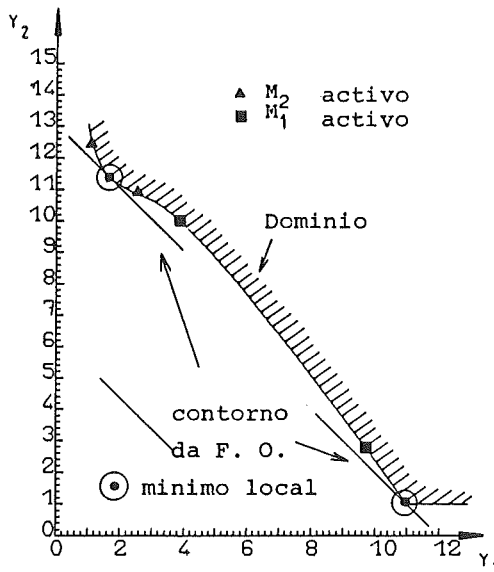


Fig. 3 - Domínio da grelha para o 2º caso.

2.2. Minimização do peso de uma treliça com dez barras

O segundo exemplo diz respeito à minimização da treliça hiperstática da figura 4 que está sujeita à acção de duas cargas verticais. Limitando as tensões admissíveis a  $s_j = + 2.5$ , os deslocamentos máximos  $d_i = + 3.5$  e para um vector das cargas nodais  $\lambda$  igual a:

$$\lambda^T = [0. 0. 0. -10. 0. 0. 0. -10.]$$

Para manter a topologia da estrutura, impõe-se um limite inferior na área das barras  $a_j$  de 0.1

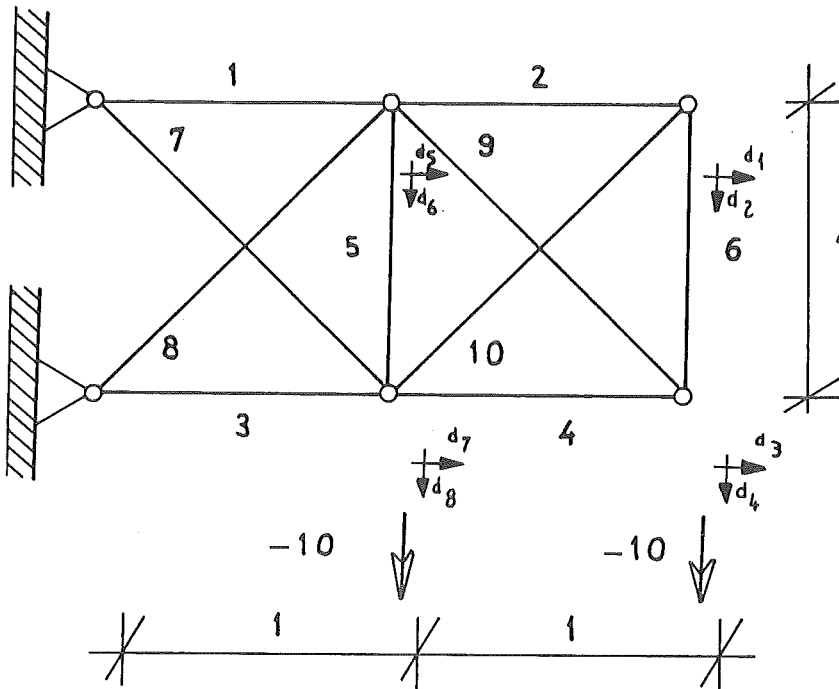


Fig. 4 - Treliça de dez barras.

Obtêm-se duas soluções óptimas a seguir indicadas:

OF = 219.93

a	48.7	0.1	35.6	24.1	0.1	1.2	9.4	34.3	34.1	0.1
s	0.4	-0.3	-0.6	-0.4	2.2	0.0	2.9	-0.8	0.8	0.7
d	0.2	-3.5	-1.0	-3.5	0.4	-1.3	-0.6	-3.5		

$$OF = 223.34$$

a	48.7	0.1	38.1	23.3	0.1	0.1	13.7	33.1	33.0	0.1
s	0.4	0.0	-0.5	-0.4	1.3	0.0	2.0	-0.9	0.9	0.0
d	0.4	-3.5	-1.0	-3.5	0.4	-1.3	-0.5	-2.6		

Qualquer destes pontos é uma solução das equações de Kuhn-Tucker e corresponde a um conjunto específico de multiplicadores de Lagrange. Ambos minimizam localmente o volume da estrutura. Qualquer direcção que ligue estas soluções possuirá, pelo menos, um ponto fora do domínio do problema, ou então um volume superior ao mínimo local.

### 3. Métodos de "branch and bound"

Em face da existência de mínimos locais nos problemas de optimização com restrições bilineares, é necessário desenvolver métodos de programação matemática adaptados a esse tipo de comportamento não-convexo. A estratégia B & B converge para o mínimo global dado que o domínio inicial, não-convexo, é substituído por uma sequência de domínios convexos que se intersectam (utilizam-se para isso funções convexas, que subestimam as funções não-convexas do problema inicial). Como se sabe, se um programa matemático tiver uma função objectivo convexa e um domínio convexo, qualquer solução local é também a global.

Os dois ingredientes principais desta metodologia são uma árvore combinatória (cujos nós vão sendo definidos) e limites superiores e inferiores associados a cada nó da árvore. Nestas condições é possível eliminar um grande número de soluções possíveis sem ser necessário calculá-las.

Tratando-se de um algoritmo de enumeração implícita, a sua eficiência pode ser bastante melhorada se se partir de uma boa solução inicial, pertencente ao domínio do problema (que fornece um limite superior adequado).

Pode-se eliminar uma solução parcial em cada uma das situações seguintes:

1. Chega-se a uma solução que pertence ao domínio do problema inicial;
2. O subprograma em que se utilizam subestimativas, não tem solução;
3. Não é possível encontrar uma solução nesse domínio com um peso inferior ao da estrutura utilizada como limite superior.

Se uma solução parcial for eliminada, isto significa que todas as continuações desse nó foram enumeradas de um modo implícito (e por esse motivo não é necessário enumerá-las explicitamente). O algoritmo termina quando o último nó for eliminado; o óptimo global corresponde à estrutura que dá o menor limite superior.

Tem de se assegurar que nenhum dos nós é estudado mais de uma vez, ou omitido no cálculo, sendo necessário varrer a árvore combinatória.



**3.1. Transformação de funções factoráveis em subestimativas convexas**

As expressões bilineares do tipo:

$$p x + q y + k x y \tag{4}$$

são casos particulares do tipo de programas que envolvem funções factoráveis.

Como a subestimativa convexa de uma expressão linear é ela própria, é necessário determinar a envolvente dos termos em que surgem produtos de variáveis. Considere-se a função  $f(x,y) = x y$  definida entre os limites:

$$a \leq x \leq b \quad ; \quad c \leq y \leq d \tag{5}$$

Nos semi-espacos em que as variáveis são todas não-negativas, os valores da função nos cantos do domínio coincidem com a subestimativa. Como são suficientes três pontos para definir um plano em 3-D, a função é subestimada por um de dois planos que se intersectam, segundo uma recta determinada a partir dos cantos que correspondem a valores intermédios da função bilinear. Toma-se para subestimativa convexa a coordenada  $z$  no plano mais próximo da expressão factorável:

$$z_1 = c x + a y - a c \tag{6}$$

$$z_2 = d x + b y - b d \tag{7}$$

$$z = \max \{ z_1 , z_2 \} \leq f(x,y) = x y \tag{8}$$

De um modo semelhante para sobrestimativas côncavas, consideram-se dois planos que se intersectam segundo uma recta determinada a partir dos cantos a que correspondem os valores mais elevado e mais baixo da função bilinear. Tira-se a coordenada no plano mais próximo da função inicial:

$$z_1^0 = d x + a y - a d \tag{9}$$

$$z_2^0 = c x + b y - b c \tag{10}$$

$$z^0 = \min \{ z_1^0 , z_2^0 \} \geq f(x,y) = x y \tag{11}$$

Note-se que têm que adaptar-se estas aproximações quando se consideram os outros quadrantes. De realçar que a função subestimativa  $z$  (e sobrestimativa  $z^0$ ) não é diferenciável em todos os pontos do seu domínio. É contudo possível ultrapassar esse obstáculo através da construção de um

programa linear (PL) equivalente. A maneira mais simples de o fazer consiste em adicionar algumas restrições e variáveis. O programa matemático:

$$\min c^T x \tag{12}$$

$$\text{sa } Ax \geq b \tag{13}$$

$$f^T x + \max \{ g_1^T x, g_2^T x \} \leq h \tag{14}$$

$$p^T x + \min \{ q_1^T x, q_2^T x \} \geq r \tag{15}$$

é pois equivalente ao PL :

$$\min c^T x \tag{16}$$

$$\text{sa } Dx \geq e \tag{17}$$

$$f^T x + u \leq h \tag{18}$$

$$p^T x + v \geq r \tag{19}$$

$$u \geq g_1^T x \quad u \geq g_2^T x \tag{20}$$

$$v \leq q_1^T x \quad v \leq q_2^T x \tag{21}$$

Esta formulação não é a única possível. Recomenda-se a introdução de mais variáveis quando aparecer o mesmo termo não-diferenciável em várias restrições.

Se as relações em que entram termos bilineares forem igualdades, como é o caso das equações de equilíbrio no método dos deslocamentos, essas equações devem ser substituídas pelo par de inequações equivalentes. Isto conduz a um grande aumento do número de variáveis e restrições. Pode-se contudo demonstrar que nos problemas de otimização de estruturas uma dessas inequações é sempre não-activa, pelo que não é necessário considerá-la, o que reduz de um modo significativo a dimensão de cada PL.

### 3.2. Sequência de fora para dentro

É apresentado a seguir o algoritmo de Soland [18] para restrições separáveis, que foi adaptado pelo autor às funções subestimativas convexas acima descritas.

Na primeira iteração, considera-se o programa linear ( $P_p$ ), cujas restrições são as subestimativas convexas que substituem as restrições do programa bilinear. A solução  $x^p$  de ( $P_p$ ) é um limite inferior do óptimo que se pretende determinar.

$$\min c^T x \tag{22}$$

$$\text{sa } Ax \geq b \tag{23}$$

$$l_p \leq x \leq L_p \tag{24}$$

Se  $x^P$  não pertencer ao domínio do problema bilinear inicial, tem de se restringir o domínio do problema, de modo a ser obtida uma solução que se encontre no domínio do programa bilinear.  $(P_p)$  é pois substituído por um conjunto de subproblemas definidos de entre os limites do problema inicial, dado que existe uma solução óptima  $x^*$  para pelo menos um dos problemas  $j \in WP$ . Calculando as soluções de todos os subproblemas daí resultantes, seja:

$$x^S = \min_{j \in WP} c^T x^j \quad (25)$$

Se  $x^S$  for uma solução que não pertence ao domínio do programa bilinear, vai-se substituir um dos problemas correspondendo a um subdomínio de  $WP$  por um conjunto de subproblemas. Então, faz-se  $p = p + 1$ . O problema  $s$  é substituído pelo conjunto  $WP$ , de modo que  $WP = (WP^{p-1} - \{s\}) \cup WS$  contenha uma solução óptima do problema inicial para pelo menos um dos programas  $WP$ .

Para cada  $j \in WP$ , ou  $x^j$  não pertence ao domínio do programa bilinear, ou  $c^T x^j > c^T x^*$ . Isto significa que se realizou algum progresso para a solução final.

A árvore combinatoria vai ter um dos seus nós identificado pelo subproblema  $j$  e os problemas que substituem  $j$  no conjunto  $WP$  estão nas extremidades dos ramos que partem para baixo desse nó. Em qualquer situação intermédia, no decurso da resolução do problema, pode-se identificar o conjunto  $WP$  como sendo o conjunto de nós que constituem folhas da árvore.

Cada nó depende do limite superior  $v$ , determinado pela solução até aí encontrada de mínimo volume. Qualquer folha cujo limite inferior seja estritamente inferior a  $v$  está activa. Se isso não acontecer, corta-se esse nó, o qual nunca mais é considerado nas iterações seguintes do algoritmo. Prossegue-se esta metodologia até que cada folha seja cortada.

Além disso, é necessário definir (de um modo heurístico) uma regra de refinamento, que permita dividir os limites das variáveis que vão originar os novos subproblemas: Escolhe-se o índice  $i$  da variável que maximiza a diferença entre o termo bilinear e a subestimativa convexa na restrição que mais violaria as restrições do programa bilinear usando  $x^S$ . O intervalo  $[l_i, L_i]$  é pois subdividido nos intervalos  $[l_i, x_i]$  e  $[x_i, L_i]$ .

Deste modo, logo que se escolhe um nó para ramificar, a partição do seu domínio só depende da solução do subproblema onde surgem as subestimativas convexas, não estando relacionado com outras partições ao mesmo nível da árvore. Este procedimento corresponde a uma forma mais fraca do teorema de convergência, dado que não é obrigatório completar as partições dos intervalos no mesmo nível da árvore, reduzindo assim o número total de subproblemas que vai ser necessário resolver.

3.3. Aplicação

O problema matemático seguinte possui restrições bilineares e é semelhante à determinação do volume mínimo de treliças (as variáveis  $x$  e  $y$  representam áreas das secções e tensões nas barras, respectivamente):

$$\begin{aligned} \min \quad & x_1 + x_2 + x_3 \\ \text{sa} \quad & x_1 x_4 + x_3 x_6 = 0 \\ & 3 x_1 x_4 + 1.2 x_2 x_5 - x_3 x_6 = 10 \\ & 5 x_4 + x_5 + x_6 \leq 2.5 \\ & .1 \leq x_1 \leq 5. ; .1 \leq x_2 \leq 5. ; .1 \leq x_3 \leq 5. \\ & 0. \leq x_4 \leq 2.5 ; 0. \leq x_5 \leq 2.5 ; -2.5 \leq x_6 \leq 0. \end{aligned}$$

Este problema possui três mínimos locais:

OF	x					
3.53	0.1	3.33	0.1	0.0	2.5	0.0
3.60	0.5	3.0	0.1	0.5	2.5	-2.5
3.60	2.5	0.1	1.0	1.0	0.0	-2.5

Para representar este problema não convexo graficamente, não é possível ir além de duas equações a três incógnitas sem se ser colocado dentro de um subespaço do problema. A figura 5 representa uma perspectiva onde são imprimidos todos os valores da função objectivo abaixo de um dado nível.

Substituindo as funções factoráveis pelas suas subestimativas convexas (dado que a determinação das envolventes das funções lineares é trivial), obtém-se (na formulação mais extensa) um PL com 10 variáveis e 15 inequações. Qualquer dos nós da árvore combinatória é definido pelos limites nas variáveis  $x_1$  a  $x_6$ . Na árvore combinatória da figura 6, estão representados os resultados da estratégia B & B, utilizando uma regra de refinamento fraca e uma ramificação do tipo alargado (escolher em primeiro lugar o limite inferior mais baixo).

3.4. Experiência de computação

Foram utilizadas outras subestimativas convexas [17], que conduziram por vezes a problemas cuja dimensão é menor. Contudo, o número de subproblemas que seria necessário resolver cresce de uma forma significativa, em virtude dessas aproximações serem mais grosseiras.

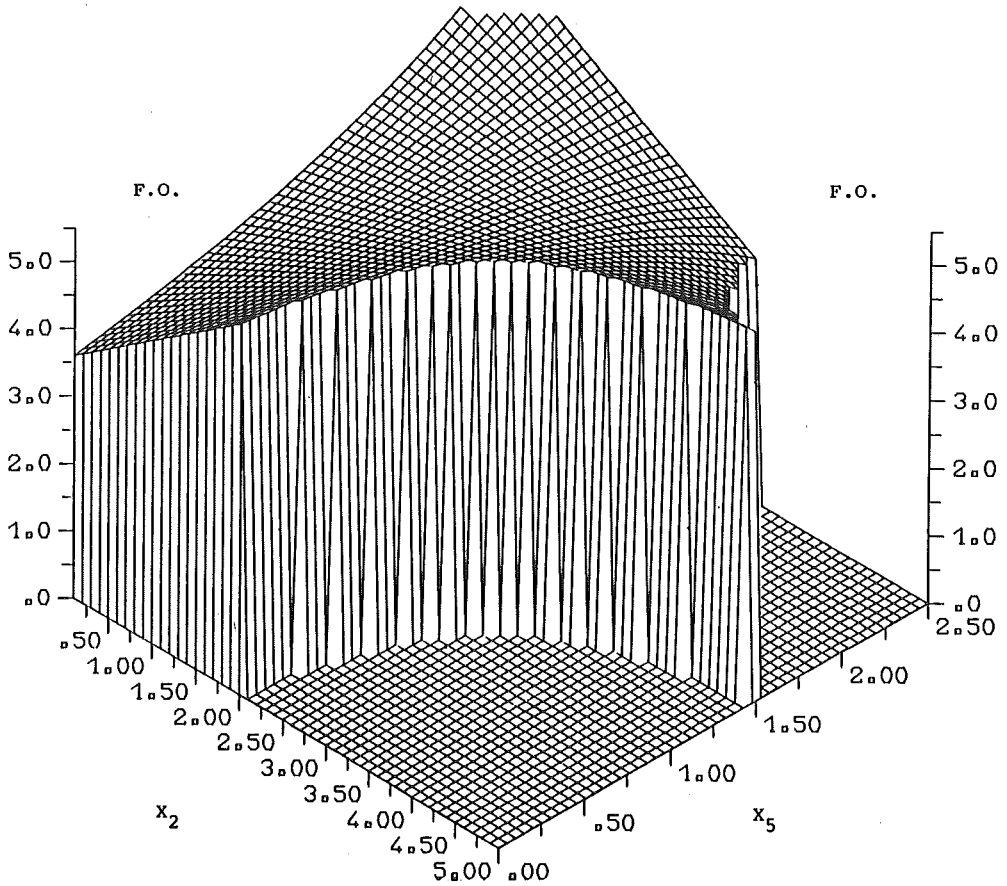


Fig. 5 - Gráfico para diversos valores de  $x_2$  e  $x_5$  mantendo  $x_6$  constante.

Nesse trabalho foram igualmente abordados outros tipos de exploração da árvore combinatória. Utilizou-se uma estratégia alternativa, que consistia em escolher sempre o nó direito do nível inferior até se chegar a um nó que seria eliminado; voltava-se atrás na árvore e prosseguia-se, utilizando a mesma regra até serem percorridos os nós remanescentes. Esta estratégia (oposta à que consiste na escolha do nó associado à subestimativa cuja função objectivo é mais baixa), embora reduzisse o espaço de armazenagem necessário, iria aumentar o número de programas lineares que seria necessário resolver entre 30 e 35%.

A regra de ramificação que é seguida para subdividir o intervalo da variável, cuja aproximação mais se afasta do valor real, tem uma influência mais marcante. Se o intervalo for dividido ao meio, em lugar de se utilizar a informação do programa que utiliza subestimativas convexas, o número de problemas necessário para obter o mínimo global crescerá entre 70 e 80%.

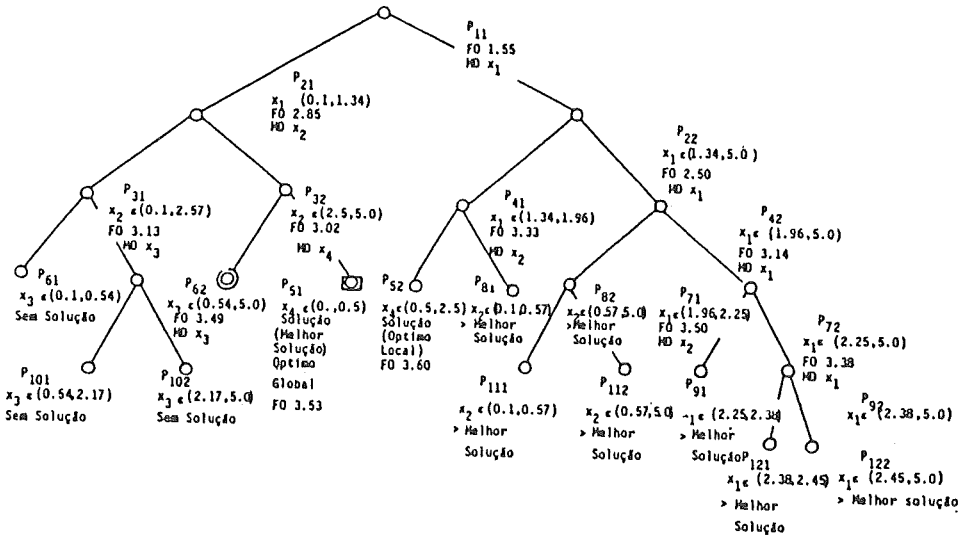


Fig. 6 - Arvore combinatoria correspondente à seqüência de fora para dentro.

### 3.5. Seqüência de dentro para fora

Um algoritmo alternativo de B & B que foi inicialmente desenvolvido por Reeves [14] para o tipo de programação em que, quer a função objectivo, quer as restrições presentes, são quadráticas pode ser igualmente aplicável a problemas nos quais as restrições e/ou a função objectivo são redutíveis a formas factoráveis. Cada iteração vai ser efectuada sobre um subintervalo do domínio inicial, dado pelos limites nos valores das variáveis.

Basicamente este algoritmo é constituído por três passos:

No primeiro passo de cada iteração determina-se um ponto base a partir se efectuam as operações de "branch and bound". Os óptimos locais de programas convexos que determinam o volume mínimo são valores que asseguram à partida melhores resultados, embora seja possível iniciar o algoritmo em pontos que não sejam mínimos locais (ou mesmo pertencentes ao domínio do problema com restrições bilineares). Quando se utiliza este tipo de algoritmo como verificação do

resultado obtido pela aplicação de métodos convexos, o mínimo local encontrado é um ponto de partida ideal.

Logo que seja especificado um ponto de partida, no segundo passo elimina-se o intervalo que o rodeia. Se o ponto  $x^V$ , onde  $V$  representa o número de iterações do algoritmo, pertencer ao domínio do programa bilinear, elimina-se o intervalo para o qual  $x^V$  é a solução global do programa de otimização em que se utilizam as subestimativas convexas. Este segundo passo consiste em três operações:

1. Divide-se o intervalo considerado em subintervalos que rodeiam o ponto base.
2. Define-se uma região em cada subintervalo para a qual o ponto de partida é também o mínimo global do problema inicial.
3. Obtém-se um intervalo de eliminação a partir da união das regiões eliminadas dos subintervalos individuais.

No caso de se partir de um valor de  $x^V$ , que não pertença ao domínio do programa inicial, define-se um intervalo para o qual o PL obtido utilizando subestimativas convexas (LCE) não possui qualquer solução; esse intervalo é igualmente eliminado.

No último passo do algoritmo, procede-se ao B & B. As regiões que ainda não foram eliminadas são divididas em subintervalos e para cada um destes resolve-se um LCE. Os limites inferiores daí resultantes, são comparados com o valor do limite superior mais baixo  $v$  que percente ao domínio do programa bilinear e são eliminados, caso o igualem ou excedam. Se ainda restar algum subconjunto do domínio inicial do problema inicia-se nova iteração, tomando um ponto base situado dentro do intervalo não eliminado.

Na figura 7 estão representadas as duas estratégias B & B descritas.

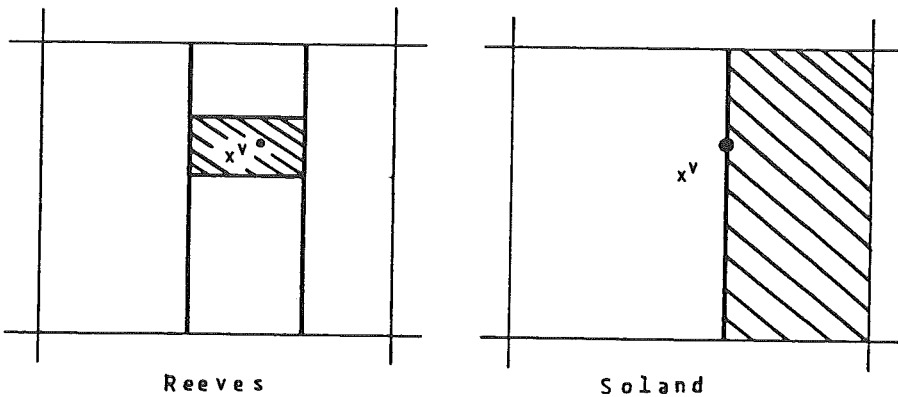


Fig. 7 - Estratégias de Reeves e Soland.

O critério de paragem, que permite a verificação do mínimo global para valores limites fixados, requer que a solução  $x^V$  dada pelo LCE nesse intervalo esteja também no domínio do programa

bilinear. Isto implica, atendendo às subestimativas convexas donde se partiu, que o valor óptimo das variáveis de decisão se encontra num ponto extremo.

### 3.6. Aplicação

Nesta secção aplica-se o método de Reeves como verificação do volume mínimo de uma treliça de três barras, obtido por rotinas de programação convexa. Considera-se a treliça de três barras representada na figura 8 e que está sujeita a duas condições alternativas de carregamento. Supõe-se que as variáveis de decisão (áreas das secções), podem variar de uma forma contínua.

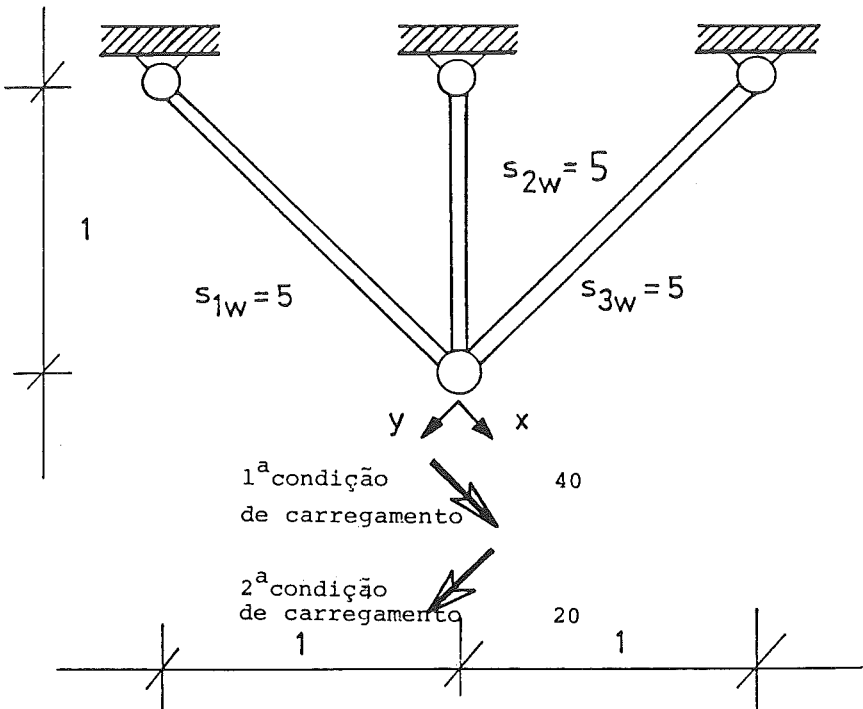


Fig. 8 - Treliça de três barras sujeita a duas condições alternativas de carregamento.



Utilizando o método dos deslocamentos, pode escrever-se o programa:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sqrt{2} a_1 + a_2 + \sqrt{2} a_3 \\ \text{sa} \quad & (\sqrt{2}/2) a_1 d_1^1 + 1/2 a_2 (d_1^1 + d_2^1) = 40. \\ & 1/2 a_2 (d_1^1 + d_2^1) + (\sqrt{2}/2) a_3 d_2^1 = 0. \\ & (\sqrt{2}/2) a_1 d_1^2 + 1/2 a_2 (d_1^2 + d_2^2) = 0. \\ & 1/2 a_2 (d_1^2 + d_2^2) + (\sqrt{2}/2) a_3 d_2^2 = 20. \\ & 0 \leq (\sqrt{2}/2) d_1^1 \leq 5 \quad ; \quad -5 \leq (\sqrt{2}/2) d_1^2 \leq 0 \\ & 0 \leq (\sqrt{2}/2) (d_1^1 + d_2^1) \leq 5 \quad ; \quad 0 \leq (\sqrt{2}/2) (d_1^2 + d_2^2) \leq 5 \\ & -5 \leq (\sqrt{2}/2) d_2^1 \leq 0 \quad ; \quad 0 \leq (\sqrt{2}/2) d_2^2 \leq 5 \\ & 1. \leq a_1 \leq 11. \quad ; \quad 1. \leq a_2 \leq 4. \quad ; \quad 1. \leq a_3 \leq 5 \end{aligned}$$

Depois de aproximar os termos não-convexos com as envolventes convexas dadas para funções factoráveis e estabelecendo para um dos limites do domínio os valores óptimos das variáveis de decisão no LCE daí resultante, tem-se para  $V = 1$ :

### 1º PASSO

O valor óptimo vai ser

$$\text{OF} = 15.969 \quad ; \quad a_1 = 7.024 \quad ; \quad a_2 = 2.138 \quad ; \quad a_3 = 2.756$$

### 2º PASSO

Em primeiro lugar, tenta-se eliminar todo o domínio de  $a_j$ , i.e.:  $[a_{j1}, a_{ju}]$  para tantos valores de  $j$  quantos seja possível. A intenção deste procedimento é saber se é ou não possível reduzir as operações de B & B do 3º PASSO, de modo a minimizar o número total de LCE. Limita-se a violação máxima das restrições pertencentes ao programa bilinear e eliminam-se os pontos que pertençam a este com um volume superior ao mínimo local. O intervalo de eliminação é obtido depois de se resolverem 8 LCE duas vezes.

O intervalo de eliminação será:

$$e_l^1 = [5.69 \ 1.85 \ 2.22] \quad ; \quad e_u^1 = [7.97 \ 2.54 \ 3.14]$$

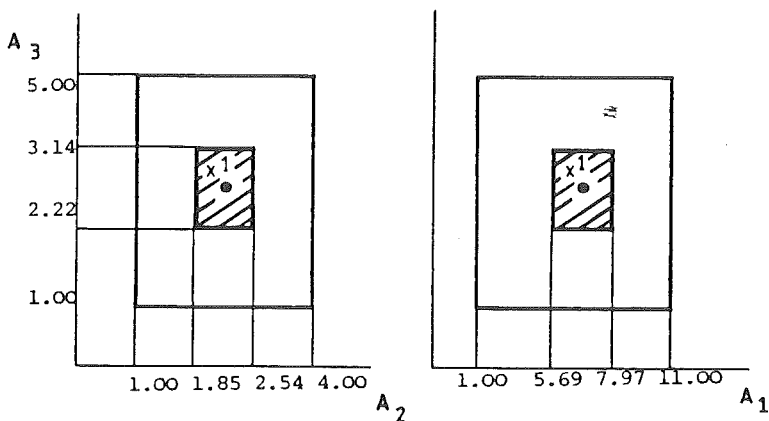


Fig. 9 - Intervalo de eliminação no 2º passo,  $V = 1$ .

3º PASSO

Em seguida toma-se a região remanescente depois de ser removido o intervalo de eliminação e efectua-se a sua partição em  $3 \times 2 = 6$  regiões. Podem ser eliminados os subintervalos 1,2,5 e 6 (1 e 5, porque o LCE não tem solução nos domínios respectivos; 2 e 6, porque as soluções dos LCE excedem o valor do mínimo local).

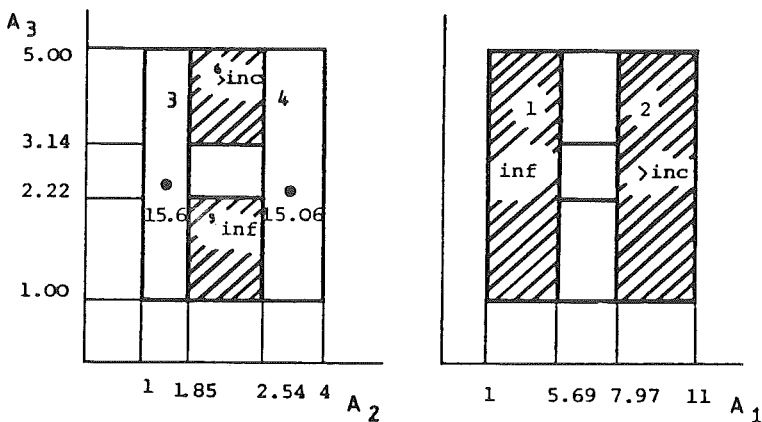


Fig. 10 - Intervalo de eliminação no 3º passo,  $V = 1$ .

Na iteração seguinte do algoritmo,  $V = 2$ , parte-se para o intervalo 4 a que corresponde o limite inferior mais baixo. Como o ponto base não pertence ao domínio do problema, o procedimento é simplificado. Não é necessário proceder a qualquer subdivisão e só se considera um intervalo. O algoritmo prosseguiria, terminando após 8 ciclos que compreenderiam 78 LCE.

### 3.7. Discussão

Muitas vezes em problemas de optimização de treliças, o óptimo que é encontrado por rotinas de programação convexa é o óptimo global. A sequência de dentro para fora serve como processo de verificação, em que se estabelece se esse mínimo é global ou se é possível encontrar um valor melhor. Além disso, tomar como ponto de partida um mínimo local aumenta a possibilidade de os problemas que utilizam subestimativas convexas não terem solução, ou de a solução obtida exceder o valor do mínimo local.

Do ponto de vista teórico, o número de subintervalos de eliminação definidos à volta do ponto base (no 2º Passo do algoritmo) cresce exponencialmente com o número de variáveis, o que constitui uma grande desvantagem desta metodologia. Um factor que tende a diminuir a importância deste argumento é que à medida que aumentam as dimensões do problema, aumenta também a possibilidade de não ser necessário explorar grande parte destes subintervalos. Outro aspecto negativo deste algoritmo, tem a ver com a determinação do intervalo a eliminar, que rodeia o ponto base. Este intervalo é obtido por tentativas, o que significa que os subproblemas (cujo número cresce, em potencial, exponencialmente) têm de ser resolvidos mais do que uma vez.

## 4. Método da Decomposição de Recursos

O algoritmo da decomposição de recursos de Benders tem sido até agora utilizado para resolver problemas convexas e parcialmente convexas (eg: [7]) que envolvam dois tipos de variáveis. Tem uma interpretação em termos económicos, vendo os multiplicadores de Lagrange como preços sombra de uma estratégia de decomposição que não é totalmente descentralizada. O órgão central produz as decisões finais atribuindo pesos óptimos às propostas de cada um dos subsistemas, tendo sempre em atenção as ofertas anteriores.

Se o conjunto de variáveis  $y$  na minimização com restrições bilineares for fixado, o problema nas variáveis  $x$  daí resultante é bastante simples. Embora o problema inicial seja não-convexo considerando simultaneamente as variáveis  $x$  e  $y$ , mantendo  $y$  constante ter-se-á um problema linear em termos de  $x$  para resolver. A ideia fundamental, que permite ao problema (P) :

$$\min c^T y \quad (26)$$

$$\text{sa } g_i^T x + x^T H_i y \geq b_i \quad ; \quad i = 1, \dots, m \quad (27)$$

$$0 \leq y \leq y_{\max} \quad \text{ie: } y \in Y \quad (28)$$

$$x_l \leq x \leq x_u \quad \text{ie: } x \in X \quad (29)$$

ser visto no espaço das variáveis  $x$  é o conceito de projecção:

$$\min v(x) \tag{30}$$

$$\text{sa } x \in X \cap V \tag{31}$$

onde

$$v(x) = \text{infimum } c^T y \tag{32}$$

$$\text{sa } g_i^T x + x^T H_i y - b_i \geq 0 \tag{32}$$

$$0 \leq y \leq y_{\max} \tag{33}$$

e se tem:

$$V = \{x: g_i^T x + x^T H_i y - b_i \geq 0 \text{ para } y \in Y\} \tag{34}$$

Note-se que  $v(x)$  é o óptimo de (P) , mantendo  $x$  fixo. Determinar  $v(x)$  é conseqüentemente muito mais fácil do que resolver o programa com restrições bilineares.

Considere-se ( $P(\underline{x})$ ) o problema de optimização:

$$\min c^T y \tag{35}$$

$$\text{sa } g_i^T x + x^T H_i y - b_i \geq 0 \quad ; \quad i = 1, \dots, m \tag{36}$$

$$0 \leq y \leq y_{\max} \tag{37}$$

O conjunto  $V$  consiste nos valores de  $x$  para os quais ( $P(\underline{x})$ )pertence ao domínio do problema e a intersecção  $X \cap V$  é a projecção do domínio do problema (P) no espaço dos  $X$ . Como a função  $v$  e o conjunto  $V$  só são conhecidos de um modo implícito através das suas definições, torna-se difícil utilizar o conceito de projecção do problema como forma de o resolver.

Para ultrapassar esta dificuldade utiliza-se um método de plano de corte que permita construir aproximações para  $v$  e  $V$ . A ideia base consiste na utilização da dualidade existente na programação linear aplicada a  $v$  e  $V$ , depois de projectar o problema inicial.

Resolve-se o problema "master" daí resultante, através de um processo de relaxação, o qual vai gerar aproximações a  $v$  e  $V$  convergindo o processo para o óptimo global. Assim, determinam-se os multiplicadores de Lagrange para ( $P(\underline{x})$ ) correspondentes a diversos valores de  $x$  e que vão sendo obtidos sucessivamente, adicionando-se tantos planos de corte ao programa "master" relaxado quantos os necessários até satisfazer o critério de convergencia.

#### 4.1. Formulação do problema "master"

O programa "master" (PM) que é equivalente a (P) é deduzido à custa de três teoremas.

- (A) Projectar (P) sobre  $x$  daí resultando  $(P(\underline{x}))$ .
- (B) Invocar a representação dual de  $V$  em termos do conjunto de regiões que o contem.
- (C) Invocar a representação dual de  $v$  em termos do ínfimo do conjunto de funções que o dominam.

Manipulando estes resultados obtem-se o PM a seguir indicado:

$$\min \eta \quad (38)$$

$$\text{sa} \quad \eta - \sum_{i=1,m} u_i^s (b_i - g_i^T x) + \sum_{j=1,n} [-c_j + \sum_{i=1,m} u_i^s (x^T H_{ij})_j]^+ y_{j\max} \geq 0 \quad (39)$$

$$- \sum_{i=1,m} u_i^c (b_i - g_i^T x) + \sum_{j=1,n} [\sum_{i=1,m} u_i^c (x^T H_{ij})_j]^+ y_{j\max} \geq 0 \quad (40)$$

$$\sum_{i=1,m} u_i^c = 1 \quad ; \quad u_i^s \geq 0 \quad ; \quad u_i^c \geq 0 \quad (41)$$

onde  $u_i^c$  e  $u_i^s$  são multiplicadores de Lagrange correspondentes às funções de corte e apoio, respectivamente.

O PM tem apenas interesse teórico, já que possui um número enorme de restrições. No entanto, pode ser resolvido através de uma sequencia de subproblemas: em cada iteração é resolvida uma versão relaxada do PM, que contém apenas algumas das restrições dos tipos (39) e (40).

Testa-se a solução  $(\eta, \underline{x})$  a fim de se verificar se pertence ou não ao domínio do problema, sendo para isso resolvido o subproblema  $(P(\underline{x}))$  ou o seu dual. Acrescentam-se então novos cortes ou funções de suporte, até que se chegue a uma solução final que satisfaça o critério de convergência. Quer as funções de apoio, quer as de corte definem uma região linear côncava, consistindo cada programa "master" relaxado (PMR) da minimização sobre uma região linear côncava (ie: programação não-convexa), do tipo representado na figura 11. Os termos  $[f^T x + e]^+$  que representam disjunções, quer nas funções de apoio quer nas funções de corte, podem ser linearizados através das variáveis binárias  $\delta$ , de modo a transformar cada PMR num programa linear misto (com variáveis reais e 0-1). Tomando para limite inferior e superior da expressão dentro de parêntesis  $L$  e  $U$ , respectivamente,

$$L \leq f^T x + e \leq U \quad (42)$$

$$0 \leq \delta \leq 1 \quad (43)$$

e introduzindo a variável  $r$ , tem-se que  $[f^T x + e]^+$  é equivalente a:

$$r \leq \delta U \quad ; \quad r \leq (\delta - 1) L + (f^T x + e) \tag{44}$$

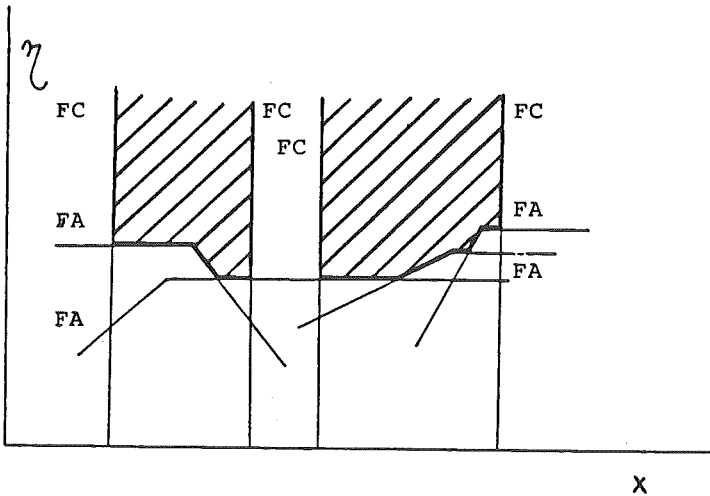


Fig. 11 - Interpretação física do domínio do programa "master".

Em alternativa a esta operação, que transforma o PMR num programa linear misto, pode reduzir-se este a um programa de complementaridade linear. Para isso introduzem-se duas variáveis  $r$  e  $q$  e a condição de complementaridade  $r^T q = 0$ , correspondentes a termo do tipo  $[f^T x + e]^+$ . Estas novas variáveis estão relacionadas do seguinte modo:

$$q = r - f^T x - e \tag{45}$$

Por este processo, reduz-se o número de restrições e evita-se a utilização de variáveis binárias. Para aplicar a extensão do método de Benders à optimização de treliças, é necessário que cada variável  $y_j$  esteja situada no semi-espaco não-negativo, o que obriga a que  $x$  represente o vector das tensões.

Contudo, numa treliça, uma barra pode estar sujeita a compressões ou tracções, mas não a esses dois esforços em simultâneo. Restringe-se a variação das tensões em cada membro ao semi-espaco que é não-positivo, se o membro estiver comprimido e positivo, se estiver traccionado. A expressão:

$$[u^T H x_j - c]_j^+ y_{jmax} \quad ; \quad 0 \leq y_j \leq y_{jmax} \tag{46}$$

pode ser transformada em:

$$[(u^T H x_j - c)_j (y_{jmin} + y_{jmax})]^+ \quad ; \quad y_{jmin} \leq y_j \leq y_{jmax} \quad (47)$$

onde  $x$  e  $y$  representam as variáveis de decisão e de estado, respectivamente, e se tem  $y_{jmin}$  ou  $y_{jmax}$  nulo.

#### 4.2. Algoritmo de convergência rápida para optimização de estruturas

Os esforços internos numa estrutura hiperstática são função das secções das peças. Uma treliça com comportamento elástico, possui como característica a invariância do vector das tensões/deslocamentos: se todas as áreas forem multiplicadas por um factor de escala  $\rho$  positivo e para que as forças dos membros permaneçam constantes, é necessário multiplicar as tensões nos membros por  $1/\rho$ ; dado que os deslocamentos nodais são uma combinação linear das tensões nos membros, seriam também multiplicados por  $1/\rho$ .

Tendo em atenção estas propriedades, é possível deduzir uma versão simplificada do algoritmo de decomposição de recursos. Fixando o conjunto  $x$  das áreas, é possível determinar de uma forma única o vector das tensões que lhe corresponderia por inversão das equações de equilíbrio. Se as tensões/deslocamentos forem todas inferiores aos seus valores máximos seria possível aumentá-las ( $0 < \rho < 1$ ), de modo a reduzir o volume da peça até que aquelas encontrem a fronteira do seu domínio. Caso contrário, isto é, se as tensões/deslocamentos forem superiores aos seus valores máximos (em valor absoluto), as variáveis de decisão teriam de ser multiplicadas por  $\rho > 1$  de modo a reduzir as tensões/deslocamentos resultantes serem admissíveis. Deste modo, o vector das áreas  $\rho \cdot x$  tem pelo menos um dos seus membros sujeito a uma tensão admissível extrema, ou um deslocamento máximo/mínimo.

Cada PMR vai fornecer um limite inferior, que em cada iteração se aproxima do resultado final. Por esse motivo, as variáveis de estado que correspondem às áreas obtidas pelos PMR estão fora do domínio do problema. Esse conjunto de áreas permite obter um limite inferior  $l^T x$  e a partir destes valores determinar um factor de escala  $\rho > 1$ . Isto acontece até que o valor de  $x$  obtido pelo PMR seja o óptimo global do problema.

Pode então calcular-se o raio dual associado ao vector  $x$ , multiplicando por  $\rho$  as variáveis duais que correspondem às equações bilineares de equilíbrio e mantendo constantes os multiplicadores ligados às restantes restrições lineares activas.

Destas considerações resulta o program (ARC):

$$\min \eta = \mathbf{1}^T \mathbf{x} \quad (48)$$

$$\text{sa} \quad -\sum_{i=1,m} u_i^e b_i + \sum_{j=1,n} \{[\sum_{i=1,m} u_i^e (\mathbf{x}^T \mathbf{H}_i + f_i)]_j (y_{jl} + y_{ju})\}^+ \geq 0 \quad (49)$$

$$\mathbf{x} \in \mathbf{X} \quad ; \quad e = 1, \dots, e_f \quad (50)$$

que se pode converter do mesmo modo, quer num programa linear misto (com variáveis reais e binárias), quer num programa de complementaridade linear.

#### 4.3. Aplicação ao cálculo de treliças cujas secções são escolhidas de entre um conjunto finito de peças

O algoritmo descrito no parágrafo anterior é facilmente convertível à resolução de problemas de síntese de estruturas em que as variáveis de decisão assumam valores discretos. Em cada iteração é resolvido um programa linear misto (com variáveis reais e binárias) (ARD).

A natureza de cada problema faz com que a solução de cada ARD multiplicada por  $\rho$  não constitua uma solução do problema inicial; por esse motivo não tem sentido desenvolver um critério de terminação que se baseie na aproximação dada pelo limite superior do problema. Deve-se contudo realçar que, pelo facto das secções das peças serem escolhidas de entre um conjunto finito de alternativas, se garante a convergência de ARD para o óptimo global num número finito de passos. Este programa é muito mais eficiente do que ARC, em que não é possível garantir que a convergência seja finita, em virtude de todas as variáveis relacionadas com o comportamento da estrutura serem contínuas.

A treliça de três barras que foi resolvida atrás, vai servir para mostrar como funciona este método de plano de corte. Se se considerar que os membros diferem entre si de um valor constante e o custo é proporcional à área das secções, torna-se apenas necessário introduzir a restrição que obriga a que  $a_1$ ,  $a_2$  e  $a_3$  sejam variáveis inteiras.

Fazendo no programa "master" relaxado:

$$x_1 = a_1 ; x_2 = a_2 ; x_3 = a_3$$

representar as variáveis de decisão (áreas) e,

$$y_1 = d_1^1 ; y_2 = d_2^1 ; y_3 = d_1^2 ; y_4 = d_2^2$$

os deslocamentos correspondentes, tem-se:



## INICIALIZAÇÃO DO ALGORITMO:

Faz-se  $UB = +\infty$ ,  $LB = 3.828$  (que corresponde a  $a_1 = a_2 = a_3 = 1$ )

e  $\epsilon = 0.000$  (em virtude de se terminar com a solução exacta).

De  $d^k = K^{-1} \lambda^k$  ( $k = 1, 2$ ) tem-se:

$$d^1 = [40. \ -16.6]^T ; d^2 = [-8.3 \ 20.]^T$$

Para determinar um conjunto de deslocamentos nodais pertencente ao domínio do problema, conclui-se que fazendo  $\rho = 5.657$  aumentaria as áreas até que o conjunto de tensões ficasse dentro dos limites permitidos no problema. Isto significa que o membro 1 teria uma tensão de tracção máxima quando se applicava à estrutura a primeira condição de carregamento.

A restrição  $e_f = 1$  é construída, fazendo:

$$u^1 = [1. \ -0.414 \ 0. \ 0. \ \sqrt{2} \ 0. \ 0. \ 0. \ 0. \ 0.]^T$$

$$x^T H_1 = [(\sqrt{2}/2x_1 + 1/2x_2) \ 1/2x_2 \ 0. \ 0.]$$

$$x^T H_2 = [1/2x_2 \ (\sqrt{2}/2x_3 + 1/2x_2) \ 0. \ 0.]$$

$$x^T H_3 = [0. \ 0. \ (\sqrt{2}/2x_1 + 1/2x_2) \ 1/2x_2]$$

$$x^T H_4 = [0. \ 0. \ 1/2x_2 \ (\sqrt{2}/2x_3 + 1/2x_2)]$$

$$f_5 = [-\sqrt{2}/2 \ 0. \ 0. \ 0.]$$

$$f_6 = [-\sqrt{2}/2 \ -\sqrt{2}/2 \ 0. \ 0.]$$

$$f_7 = [0. \ -\sqrt{2}/2 \ 0. \ 0.]$$

$$f_8 = [0. \ 0. \ -\sqrt{2}/2 \ 0.]$$

$$f_9 = [0. \ 0. \ -\sqrt{2}/2 \ -\sqrt{2}/2]$$

$$f_{10} = [0. \ 0. \ 0. \ -\sqrt{2}/2]$$

$$b^T = [40. \ 0. \ 0. \ 20. \ -5. \ -5. \ 5. \ 5. \ -5. \ -5.]$$

Chega-se à desigualdade que corta a solução inicial:

$$-40. + 5\sqrt{2} + [\sqrt{2}/2 x_1 + 1/2 x_2 - 0.414 1/2 x_2 - \sqrt{2} \sqrt{2}/2]^+ 5\sqrt{2} \\ + [1/2 a_2 - 0.414 (\sqrt{2}/2 x_3 + 1/2 x_2)]^+ (-5\sqrt{2}) \geq 0$$

i.e.:

$$-32.929 + (5x_1 + 2.071x_2 - 7.071)^+ + (-2.071x_2 + 2.071x_3)^+ \geq 0$$

Linearizando a restrição, quer introduzindo variáveis binárias, quer por adição de variáveis reais e impondo a condição de complementaridade, a solução do programa "master" relaxado,  $\eta = LB$  é 13.728 :

$$x_1 = 8 \ ; \ x_2 = 1 \ ; \ x_3 = 1$$

Invertendo as relações de equilíbrio, obtem-se:

$$d^1 = [6.724 \ -2.784]^T \ ; \ d^2 = [-1.392 \ 17.148]^T$$

concluindo-se que  $\rho = 2.42$  , para mobilizar o limite superior do deslocamento  $d_2^2$  . O vector relativo aos multiplicadores de Lagrange para  $e_f = 2$  vai ser:

$$u = [0. \ 0. \ -0.07 \ 0.857 \ 0. \ 0. \ 0. \ 0. \ 0. \ 2.]^T$$

Sendo a nova restrição:

$$20.(-0.857) + 5\sqrt{2} + \{[-0.07(1/2x_2 + \sqrt{2}/2x_1) + 0.857 1/2x_2] (-5\sqrt{2})\}^+ \\ + [-0.07 1/2x_2 + 0.857(1/2 x_2 + \sqrt{2}/2 x_3) - 2\sqrt{2}] (-5\sqrt{2})^+ \geq 0$$

ou:

$$-10.069 + [0.35x_1 - 2.784x_2]^+ + [4.235x_3 - 2.784x_2 - 7.071]^+ \geq 0$$

O programa ARD tem por solução  $\eta = LB = 16.142$  e

$$x_1 = 7 \ ; \ x_2 = 2 \ ; \ x_3 = 3$$

o parâmetro  $\rho = 1.005$  , correspondente ao limite superior em  $d_1^1$  . Vai ser portanto acrescentada uma nova restrição ao ARD.

O algoritmo termina após a 4ª iteração (a que correspondem 4 planos de corte no ARD), para a qual  $\eta = LB = 16.728$  correspondendo a:

$$x_1 = 7 \ ; \ x_2 = 4 \ ; \ x_3 = 2$$

de modo que  $\rho = 0.996 < 1$  , donde  $UB = 16.728 = LB$  .

#### 4.4. Discussão

Para se resolver o problema que surge por relaxação do "master" em cada iteração, pode utilizar-se o método da decomposição de Benders convencional, que teria a vantagem de reduzir sensivelmente a metade o número de variáveis envolvidas em cada RMP. Além disso, por se resolver em cada iteração um programa interrelacionado com o RMP das iterações anteriores, é conveniente tirar partido dessas soluções. A introdução de novos cortes é feita introduzindo pequenas alterações no problema da iteração anterior e utilizando a capacidade de reoptimizar. Deste modo, reduz-se o tempo de computação em relação ao que seria necessário para resolver todos os RMP, independentemente uns dos outros.

#### 5. Conclusões

Muitas vezes, quando se resolve um problema de síntese de treliças com comportamento elástico linear e cujas secções podem variar de um modo contínuo, o resultado obtido utilizando um algoritmo de programação convexa coincide com o mínimo global. Por esse motivo as metodologias apresentadas neste artigo servem de técnicas para verificar os resultados obtidos. É possível ao utilizador controlar de um modo interactivo as aplicações destas técnicas que requerem mais tempo de computação (e espaço de memória) do que qualquer algoritmo que forneça mínimos locais.

A introdução de restrições que condicionam a escolha da secção a um conjunto discreto, o que é aliás a situação real no projecto, aumenta a competitividade destes métodos de programação não-convexa. Em qualquer destas estratégias é possível garantir a convergência para o mínimo global num número finito de iterações.

#### Referências

- [1] Bartholomew, P. (1979), "Dual Bound used for Monitoring Structural Optimization Problems", *Engineering Optimization*, **4**, 45-50.
- [2] Batt, J. R. and Gellin, S. (1985), "Rapid Reanalysis by the Force Method", *Comp. Meth. in Appl. Mech. and Engng.*, **53**, 105-117.
- [3] Belegundu, A. D. and Arora, J. S. (1985), "A Study of MP methods for Structural Optimization", *Int. J. Num. Meth. Engng.*, **21**, 1583-1623.
- [4] Cottle, R.W., Gianessi, F. and Lions, J.L. (1980), *Variational Inequalities and Complementarity Problems*, J.Wiley.
- [5] Fisher, M. (1981), "The Lagrangian Relaxation for solving IP Problems", *Management Science*, **20**, 1-18.

- [6] Fuchs, M. (1980), "Linearized Homogeneous constraints in structural design", *Int. J. Mech. Sci.*, 22, 33-40.
- [7] Geoffrion, A. M. and Graves, G. W. (1974), "Multicommodity Distribution Systems Design by Bender's Decomposition" *Management Science*, 20, 822-844.
- [8] Geoffrion, A. M. (1977), "How can Specialized Discrete and Convex Optimization Methods be married", *Annals of Discrete Mathematics*, 1, 205-220.
- [9] Imai, K. and Shoji, M. (1981), "Minimum Cost Design of Framed Structures by the Mini-max Dual Method", *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 17, 213-229.
- [10] Kanarachos, A., Makris, P. and Koch, M. (1985), "Localization of Multi-constrained Optima and Avoidance of Local Optima in Structural Optimization Problems", *Comp. Meth. in Appl. Mech. and Engng.*, 51, 79-106.
- [11] Kaneko, I. and Maier, G. (1981), "Optimum Design of Plastic Structures under Displacement Constraints", *Comp. Meth. in Appl. Mech. and Engng.*, 27, 369-391.
- [12] Kovacs, L. B. (1980), "Combinatorial Methods of Discrete Programming", *Akademiai Kiado, Budapest*.
- [13] MacCormick, G.P. (1979), "Future directions in Mathematical Programming" in *NATO-ASI on Engineering Plasticity - University of Waterloo 1977*, Cohn, M. Z. and Maier, G. (Ed.), Pergamon Press.
- [14] Reeves, G. R. (1973), "Global Optimization in Nonconvex All Quadratic Programming", *Management Science* 17.
- [15] Saglam, M. R. (1981), "Computer Oriented Algorithms for Solving Problems with Discrete Programming Techniques" in *NATO-ASI on Optimization of Distributed Parameter Structures-Iowa City 1980*, Haug, E.J. and Cea, J. (Ed.), Sijthoff and Noordhoff.
- [16] Schmit, L.A. and Mallett, R. A. (1963), "Structural Synthesis and Design Parameter Hierarchy", *J. Struct. Div., Proc. ASCE*, 89, 269-299.
- [17] Simões, L.M.C. (1982), "Exhaustive Search for the Global Optimum of Least Volume Structures", Ph. D. Thesis, University of London.
- [18] Soland, R.M. (1971), "Algorithm for Separable Nonconvex Programming Problem: Nonconvex Constraints", *Management Science*, 17, 759-773.
- [19] Venkaya, V. B. (1978), "Structures Optimization: a Review and some Recommendations", *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 13, 203-228.
- [20] Wolsey, L. A. (1980), "Heuristic Analysis, Linear Programming and Branch and Bound", *Math. Programming Study*, 13, 121-134.
- [21] Yates, D. F., Templeman, A. B. and Boffey, T. B. (1982), "The complexity of Procedures for Determining the Minimum Weight of Trusses with Discrete Members", *Int. J. Solids Struct.*, 18, 487-495.

**EURO WORKING GROUP ON PROJECT MANAGEMENT  
AND SCHEDULING**



**FIRST INTERNATIONAL WORKSHOP  
ON  
PROJECT MANAGEMENT AND SCHEDULING  
(PMS)**

LISBON, 11-13 JULY 88

---

● **OBJECTIVES**

Presentation and discussion of modern PMS theoretical and software tools.

● **CHAIRMEN**

S. Elmagraby (USA) and L. Valadares Tavares (Portugal)

● **SPONSORSHIP**

IFORS, EURO (WG on PMS), College and Engineering Management of TIMS (COLEM), Division on Engineering Management of IEEE, the Project Management Institute and the International Bureau for Informatics (IBI).

● **ORGANIZATION**

— Registration Fee: U.S. \$ 65

— Deadline for abstracts: Feb. 20, 1988

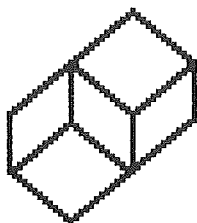
— Further information: Prof. L. Valadares Tavares,

Chairman of the Organization Committee — APDIO - CESUR - IST,

Av. Rovisco Pais, 1000 LISBON

Tel. (351 1) 80 74 55 - Telex: 63423 ISTUTL P

---



**MULTIPLE CRITERIA DECISION AID  
METHODS, APPLICATIONS AND SOFTWARE**  
THE THIRD INTERNATIONAL SUMMER SCHOOL  
PORTUGAL 16-30 July, 1988

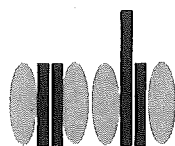
The Third International Summer School on MCDA will take place in Portugal, between 16 and 30 July, 1988.

The aim of the School is to give a state-of-the-art overview of multiple criteria decision methods, applications and software — a special attention will be given to the developments on micro-computers. The course is addressed to beginning researchers in such fields as computer science, operational research and management science and to staff members in Government and Industry involved in planning and decision making environments. A degree (or its equivalent) in Engineering, Mathematics, Computer Science, Physics or Economics is required. Basic knowledge on multiple criteria decision methods is not necessary.

This third Summer School on MCDA has the same objectives as the first (Sicily, 1983) and the second (Namur, 1985) ones. It is not only intended to fulfill an apparent educational need but also to bring together fully qualified researchers in the different branches of MCDA, in order to stimulate the discussion on unifying principles and general assumptions underlying the various MCDA approaches.

Contacts have been established with potential lectures and specialists. Till now the following persons have accepted to cooperate: D. Bouyssou, J. P. Brans, J. Climaco, J. Dier, G. Fandel, E. Jacquet-Lagrèze, M. T. Jelassi, G. Kersten, A. Ostanello, B. Roy, J. Spronk, R. Steuer, L. V. Tavares, D. Vanderpooten, Ph. Vincke, S. Zionts.

Conditions of participation and more detailed informations concerning the School can be requested to Carlos A. Bana e Costa (President of the Organization Committee) — IST/CESUR, Av. Rovisco Pais, 1000 Lisboa) —, who will accept registrations of participants till April 1988.



Associação Portuguesa para o Desenvolvimento  
da Investigação Operacional.

## **1.º CICLO DE FORMAÇÃO**

**PREVISÃO E STOCKS • PRODUÇÃO • DISTRIBUIÇÃO**

**LISBOA - 1987**

**26 - 28 Outubro • 9 - 11 Novembro • 9 - 11 Dezembro**

## **PROGRAMA DOS CURSOS**

---

### **PREVISÃO E GESTÃO DE STOCKS (26 a 28 de Outubro de 1987)**

Métodos de previsão a curto prazo  
Caracterização probabilística da procura  
Políticas e parâmetros de gestão  
Gestão agregada de artigos  
Aplicações informáticas

### **GESTÃO DA PRODUÇÃO (9 a 11 de Novembro de 1987)**

Estratégias e estruturas produtivas  
Planeamento da produção  
Integração da produção  
Aplicações informáticas

### **DISTRIBUIÇÃO (9 a 11 de Dezembro de 1987)**

Localização de instalações  
Circuitos de distribuição  
Programação de frotas  
Aplicações informáticas

Os cursos têm carácter intensivo, durante três dias consecutivos, das 9 às 17 horas, incluindo os almoços que são utilizados para prolongar informalmente a discussão dos temas em estudo.

## **INSCRIÇÕES**

---

Os interessados poderão inscrever-se num ou mais cursos do ciclo, fazendo chegar a ficha de inscrição anexa até 14 dias antes do início do curso, ou do primeiro dos cursos em que se inscreve, acompanhada do pagamento respectivo. A admissão está limitada a trinta participantes, tendo prioridade as inscrições nos três cursos do ciclo.

Os custos de inscrição, incluindo almoços e documentação, são os seguintes:



- 1 curso 40 mil escudos
- 2 cursos 70 mil escudos
- 3 cursos 90 mil escudos

Os sócios da APDIO, individuais ou colectivos, têm 20 % de desconto.

Os pagamentos por cheque ou vale do correio devem ser endereçados a APDIO – Associação Portuguesa para o Desenvolvimento da Investigação Operacional.

## **OBJECTIVO DO CICLO**

---

Stocks, produção e distribuição incluem-se nos sectores com maiores efeitos nos custos industriais, sendo por isso áreas preferenciais na busca de economias. Porém, a sua gestão é complexa devido à necessidade de conjugar uma grande variedade de recursos, de forma eficaz, para se atingirem os objectivos empresariais.

A Investigação Operacional tem desenvolvido um conjunto de instrumentos que ajudam o gestor a analisar os problemas e a encontrar as soluções adequadas. A generalização dos meios informáticos veio potenciar a sua aplicação. Com o presente programa de formação, a APDIO pretende divulgar esses instrumentos no meio empresarial, associando-se ao esforço comum para o progresso económico do País.

O ciclo de formação destina-se aos quadros técnicos envolvidos na gestão das operações industriais. Os cursos têm um cariz acentuadamente prático, com aplicações informáticas, sem prejuízo das considerações teóricas indispensáveis para uma correcta utilização. Cada curso é autónomo, embora o seu conjunto aborde um bloco de problemas que estão naturalmente interligados.

## **APDIO**

---

A Associação Portuguesa para o Desenvolvimento da Investigação Operacional é uma sociedade científica que congrega a comunidade portuguesa interessada em Investigação Operacional.

Foi fundada em 1979 e é membro nacional da Federação Internacional das Sociedades de Investigação Operacional (**IFORS** – International Federation of Operational Research Societies) e da Federação Internacional de Controlo Automático (**IFAC** – International Federation of Automatic Control).

A **APDIO** tem cerca de 250 membros e realiza regularmente várias actividades, de entre as quais se destacam a organização de conferências nacionais (de dois em dois anos), simpósios e conferências internacionais («XXI Journées Européennes sur l'Aide à la Décision Multicritère» (28-29 de Mar. de 85), «OR Models on Microcomputers» (25-27 de Set. de 85), «IFAC85 on Systems Analysis Applied to Water and Related Land Resources» (2-4 de Out.), «EURO VIII, 8 th European Conference on Operational Research» (16-19 de Set. de 86) — a publicação de uma revista científica (com artigos de investigação e sobre o estudo de casos reais), a distribuição de um jornal de índole informativa e a criação e apoio a equipas que se dedicam ao estudo de problemas sectoriais, tais como os grupos de «Optimização», «Sistemas Industriais», «Transportes», «Automação e Controlo Ótimo» e «Sistemas Regionais».

A **APDIO** tem também desenvolvido ampla actividade a nível internacional, tendo estado envolvida na criação de uma associação Latino-Americana (**ALIO**) de sociedades pertencentes à **IFORS**.

## INFORMAÇÕES

---

Os pedidos de informação poderão ser dirigidos

### **APDIO**

**Associação Portuguesa para o Desenvolvimento da Investigação Operacional**

IST – CESUR  
Av. Rovisco Pais  
1000 LISBOA  
Tel. 80 74 55  
Telex 63423 IST UT LP



## ÍNDICE

Nota do Editor .....	3
<i>S. Berahas &amp; M. Avriel</i> Systemic approaches in the public policymaking process: A synoptic assessment ...	5
<i>N. Bierbaum, L. Cabral, A. Callahan &amp; P. Seawell</i> Reduced instruction set computing: A technological forecast for 1992 .....	31
<i>J. Cayolla</i> Análise de estrangulamentos tecnológicos .....	61
<i>C. Bana e Costa</i> A problemática da rejeição em decisão multicritério .....	91
<i>L. Monteiro Gomes</i> A note on two equivalent bi-objective models for the design and on-line control of a parking system .....	105
<i>J. J. Júdice &amp; F. M. Pires</i> Direct methods for the solution of linear complementarity problems with symmetric positive semi-definite matrices .....	115
<i>L. M. Simões</i> Determinação do mínimo global em problemas de síntese de estruturas .....	153
Anúncios .....	179



Associação Portuguesa para o Desenvolvimento  
da Investigação Operacional.