

# INVESTIGAÇÃO OPERACIONAL

---

JULHO 1984

NÚMERO 1

VOLUME 4

Publicação Científica da



Associação Portuguesa para o Desenvolvimento  
da Investigação Operacional.

# INVESTIGAÇÃO OPERACIONAL

Propriedade:

APDIO — Associação Portuguesa para o Desenvolvimento  
da Investigação Operacional

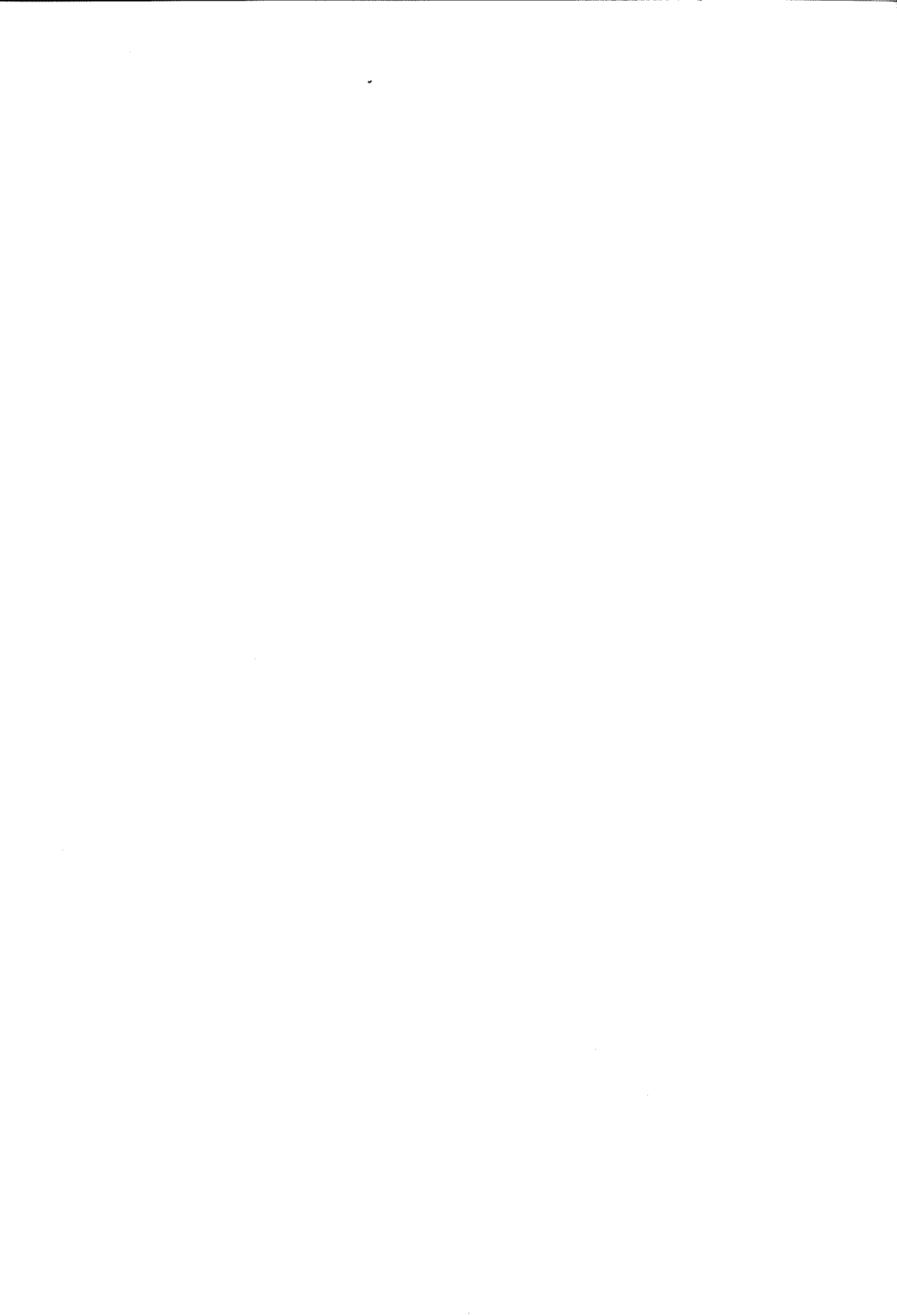
## ESTATUTO EDITORIAL

*«Investigação Operacional», órgão oficial da APDIO cobre uma larga gama de assuntos reflectindo assim a grande diversidade de profissões e interesses dos sócios da Associação, bem como as muitas áreas de aplicação da I. O. O seu objectivo primordial é promover a aplicação do método e técnicas da I.O. aos problemas da Sociedade Portuguesa.*

*A publicação acolhe contribuições nos campos da metodologia, técnicas, e áreas de aplicação e software de I. O. sendo no entanto dada prioridade a bons casos de estudo de carácter eminentemente prático.*

---

Distribuição gratuita aos sócios da APDIO



## ÍNDICE

	pg.
. EDITORIAL .....	1
. UTILIDADE EM MODELOS DE PREVISÃO Bernardo C. Vasconcelos .....	6
. THE MANAGEMENT OF O.R. PROJECTS W. H. Swann .....	25
. ANÁLISE PROBABILÍSTICA DE UM SISTEMA DE ESTACIONA- MENTO António S. P. Aor e Luis Flávio A. M. Gomes .....	46
. COMPUTATIONAL COMPLEXITY OF DISCRETE OPTIMIZATION PROBLEMS J. K. Lenstra and A. H. G. Rinnooy Kan .....	66
. RESUMOS EM PORTUGUES .....	105
. ABSTRACTS IN ENGLISH .....	108



Associação Portuguesa para o Desenvolvimento  
da Investigação Operacional.

CÉSUR – Instituto Superior Técnico – Avenida Rovisco Pais  
1000 Lisboa – Telef. 807455

# INVESTIGAÇÃO OPERACIONAL

PUBLICAÇÃO SEMESTRAL

VOLUME 4 - Nº 1 JULHO 1984

Número Avulso 1.500\$00

EDITOR: JOSÉ MANUEL VIEGAS

## COMISSÃO EDITORIAL

Dr. Paulo Bárcia (EDP)	Prof. Guimarães Rodrigues (U. Minho)
Engº. João Caraça	Prof. Mário Rosa (U. Coimbra)
Prof. Dias Coelho (UNL)	Prof. Luís Valadares Tavares (IST, CESUR)
Prof. Rui Campos Guimarães (FEUP)	Engº. Eduardo Zúquete (CP)
Prof. Fernando de Jesus (ISE)	Prof. Nelson Maculan Filho (Brasil-CPPE/UFRJ)
Engº. A. Máximo (NAVELINK)	Prof. K. Brian Haley (Reino Unido)
Engº. Rui Barbesti Nápoles (LISNAVE)	Prof. Robert Machol (Estados Unidos)
Prof. Valente de Oliveira (FEUP, CPRN)	Prof. Bruno Martinoli (Itália)
Prof. Gouveia Portela (IST, EGF)	Prof. M. Najim (Marrocos)
Cte. Cervaens Rodrigues (CIOA)	Prof. Ioánnis A. Pappás (Grécia)

Este Número foi subsidiado pela Junta Nacional de Investigação Científica e Tecnológica. A Revista "Investigação Operacional" está registada na Secretaria de Estado da Comunicação Social sob o nº 108 335.

Esta Revista é distribuída gratuitamente aos sócios da APDIO. As informações sobre inscrições na Associação, assim como correspondência para a Revista, devem ser enviadas para a sede da APDIO - Associação Portuguesa para o Desenvolvimento da Investigação Operacional - CESUR, Instituto Superior Técnico, Av. Rovisco Pais, 1000 LISBOA.



## INVESTIGAÇÃO OPERACIONAL

Investigação Operacional  
Vol.4 - N.1 - Julho 1984

### EDITORIAL

"Investigação Operacional" muda de cara e de corpo a partir deste número. Pretende-se com estas mudanças não só alterar a imagem da nossa revista, mas também, e de forma concordante, alargar os objectivos que com ela a APDIO pretende ver alcançados.

Com efeito a APDIO é já hoje uma Associação científica sólida e com uma actividade regular e multi-facetada, de que os Grupos de Especialidade e as Conferências e Seminários internacionais que estão a ser organizados representam duas das frentes mais evidentes. A política editorial da APDIO deverá naturalmente acompanhar e contribuir para o amadurecimento da Associação, adaptando-se a essa maior riqueza de actividades e procurando aumentar a contribuição da revista "Investigação Operacional" para a formação e actualização científica dos sócios.

Neste sentido, e com o objectivo de garantir uma maior rapidez na divulgação das notícias importantes para os sócios, relativamente a iniciativas da própria Associação ou de outras (particularmente reuniões internacionais), decidiu-se criar um BOLETIM APDIO, de que já foi distribuído o primeiro número, e para o qual serão canalizadas todas essas informações. O BOLETIM não terá uma periodicidade rígida, sendo a sua publicação feita em função da quantidade

e urgência das notícias em stock. Na fase actual da Associação é previsível a publicação de cinco a seis números por ano.

Será nomeadamente através deste BOLETIM que se deverão fazer todas as comunicações aos sócios (a menos que estatutariamente devam ser de outro modo, como no caso das convocatórias de Assembleia Geral), particularmente as respeitantes às actividades dos Grupos de Especialidade. A razão de ser deste princípio tem a ver com o peso crescente que as despesas de correio vêm tomando no total do orçamento da APDIO e o desejo de, sem prejudicar a eficácia das comunicações, conter esse aumento.

Deverão por isso os geradores de notícias a divulgar enviá-las para a sede da APDIO com pedido de publicação no BOLETIM com uma antecedência de mês e meio a dois meses sobre a data limite de divulgação, sem o que a APDIO não poderá comprometer-se a suportar as despesas de tal divulgação.

Quanto à revista "INVESTIGAÇÃO OPERACIONAL" propriamente dita, a periodicidade irá diminuir, passando a ser semestral, por já não ter qualquer função de divulgação de notícias. Esta diminuição de frequência de publicação irá permitir uma melhor selecção dos artigos a publicar, além de uma melhor qualidade gráfica, sem aumento dos custos. Para essa melhoria de qualidade gráfica irão também contribuir, espera-se, a composição dos textos em computador e o novo formato da revista.

Dado que os subsídios oficiais à APDIO e à revista foram sensivelmente diminuídos, também no que diz respeito à re-



vista foi necessário minimizar os custos de produção: a nova dimensão corresponde ao aproveitamento máximo do papel, e o envio postal de dois números por ano em vez de quatro permite poupar uma parte substancial das despesas de correio.

A dimensão da revista será próxima das cem páginas por número, e a natureza dos artigos a publicar terá em atenção fundamentalmente a existência de diversos públicos leitores, com procuras de diferente caracterização. Esta divisão do conjunto de leitores em diferentes públicos é naturalmente artificial e susceptível de crítica mas poderá contribuir para a clarificação do que devam a ser os artigos que mais interessa publicar. Assim, temos as seguintes classes:

- a) Comunidade científica nacional produtora de artigos orientados para as metodologias e técnicas da Investigação Operacional. A revista deverá naturalmente acolher com particular interesse a produção científica nacional, como forma de contribuir para a divulgação desse trabalho e estimular a sua continuidade. É sobretudo do trabalho desta comunidade que depende o Desenvolvimento da Investigação Operacional que esta Associação pretende promover.
- b) Comunidade técnica nacional, sobretudo consumidora de artigos orientados para aplicações práticas. Uma consulta da lista de sócios da nossa Associação revela com efeito uma percentagem significativa de sócios (individuais e colectivos) dos quais tem havido pequena produção de artigos quer para a revista quer para os Congressos, mas que provavelmente serão consumidores ávidos de artigos que possam conter ideias e métodos aplicáveis nos respectivos domínios profissionais.

Deveremos pois cobrir esta procura através da publicação de artigos que dêem conta de experiências práticas, sempre que possível em contextos relevantes para a realidade nacional. Haverá aqui naturalmente um papel importante a desempenhar pelos Grupos de Especialidade, através do estímulo aos seus membros para que apresentem artigos para publicação na revista.

- c) Comunidade estudantil nacional na área da Investigação Operacional, quer a nível de graduação quer de pós-graduação. As dificuldades financeiras de muitas bibliotecas universitárias tornam particularmente difícil uma cobertura bibliográfica eficaz, dado o número e custo das publicações internacionais neste domínios. Não tendo ilusões quanto à possibilidade de cobrir totalmente essa lacuna, parece-nos no entanto possível dar uma contribuição significativa através da publicação de artigos de "survey" de determinadas áreas de problemas ou técnicas.

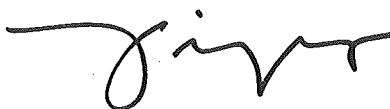
A partir destes artigos (que contêm sempre extensas listas de referências bibliográficas) será muito mais fácil ao estudante optar pelo que lhe é mais relevante para o aprofundar do seu estudo. No caso destes artigos procuraremos sempre a melhor cobertura possível, recorrendo sempre que tal se mostre conveniente à utilização de artigos já publicados em fontes de mais difícil acesso no nosso país, uma vez obtida a autorização dos autores e editores anteriores, ou mesmo ao convite directo de produção de um artigo de "survey" a um autor.

- d) Membros de outras sociedades de Investigação Operacional

com as quais a APDIO mantém intercâmbio de publicações, e leitores estrangeiros em geral. Neste caso, e dada a heterogeneidade desta classe, a característica fundamental dos artigos de interesse não será a sua natureza (prática, teoria ou divulgação), mas o facto de a língua de publicação ser por eles legível. Assim, "Investigação Operacional" publicará artigos em Inglês, Espanhol e Francês, além de Português.

Conscientes de que não é fácil a tarefa de produzir uma revista numa comunidade científica da dimensão e localização da nossa, mas de que essa missão é fundamental para a sobrevivência e desenvolvimento dessa própria comunidade, a todos os sócios da APDIO pedimos desde já apoio através, quer da produção directa de novos artigos, quer da contribuição com sugestões ou críticas à nova orientação editorial da APDIO.

O Editor



José Manuel Viegas

UM CRITERIO DE UTILIDADE EM MODELOS DE PREVISÃO PARA  
STOCKS

Bernardo C. Vasconcelos  
Dep. Engenharia Mecânica (GEIN)  
R. dos Bragas,  
4099 PORTO CODEX

## RESUMO

Inúmeros problemas de decisão requerem modelos de previsão. Em geral há diferentes modelos possíveis e o utilizador terá que escolher o que lhe pareça mais adaptado para a aplicação em vista. Habitualmente, a precisão do modelo é uma das qualidades destacadas para essa escolha. Contudo, não é a precisão em si que interessa ao gestor, mas a utilidade dessa precisão na aplicação em causa. No presente artigo, analisa-se o caso da precisão da procura em gestão de stocks e estabelece-se a relação entre precisão e custo da incerteza propondo-se que a diminuição conseguida para esse custo seja a medida da utilidade da precisão.

## 1. INTRODUÇÃO

Os modelos de previsão quantitativa continuam a ser um dos assuntos apetecidos dos investigadores como se vê pela frequência relativamente elevada com o que o tema aparece nas revistas e conferências da área da Investigação Operacional. Desde o "state of the art" feito em (Fildes, 1979) alguns

progressos foram feitos, mas sobretudo em termos de aperfeiçoamento estatístico de modelos já reconhecidos. Continua por isso a ter actualidade a afirmação então feita por esse autor de que embora o utilizador esteja interessado principalmente na eficiência económica dos modelos, os teóricos têm estado muito mais preocupados com a sua eficiência estatística. Neste contexto, a eficiência estatística diz respeito ao grau de precisão das previsões; a eficiência económica relaciona-se com os benefícios que o modelo permite obter.

A eficiência estatística tem um preço, o da maior complexidade do modelo que acarreta maiores custos de programação, manutenção e processamento de computador. Adicionalmente, implica maiores dificuldades para o utilizador em dominar o modelo e com ele inter-actuar (poderá haver modelos simultaneamente complexos e pouco precisos, mas esses não merecem consideração). O preço da eficiência estatística deverá ser compensado por uma maior eficiência económica mas, para que isso seja assegurado, é necessário estabelecer a relação entre os dois tipos de eficiência. Tal relação permitirá valorizar os aperfeiçoamentos estatísticos (referidos por Fildes) do ponto de vista do utilizador que assim terá facilitada a tarefa de escolha.

Para introduzir o problema admitiremos, sem perda de generalidade, que o utilizador dispõe de um modelo de previsão relativamente simples e que está a considerar a substituição desse modelo por outro mais elaborado de que espera obter maior precisão. Terá então de optar entre simplicidade e precisão: para isso necessita de saber qual o valor da precisão adicional do segundo modelo relativamente ao primeiro. O valor da precisão depende naturalmente do objectivo das previsões já que estas não serão um fim em

si mas apenas uma informação. Será aqui analisado um caso de previsões para gestão de stocks, estabelecendo-se relações entre critérios económicos e critérios estatísticos.

A previsão da procura para gestão de stocks, especialmente em artigos de rotação elevada, é aliás uma situação excelente para apreciar o compromisso "simplicidade-precisão". Com efeito, os requisitos são frequentemente de previsões a curto prazo a partir de séries cronológicas, para o que existe uma enorme variedade de modelos aceitáveis, desde as médias móveis aos modelos ARIMA, numa escala de complexidade quase contínua. No que respeita à precisão, a hierarquia é menos clara visto estar muito dependente da configuração particular da série utilizada no ensaio. No entanto, para uma dada aplicação ou conjunto de aplicações é possível estabelecer um escalonamento. Não se ignora que este escalonamento levanta sempre a questão da "robustez", isto é, de saber se as diferenças de comportamento são fortuitas ou permanentes, se a hierarquia estabelecida irá ou não permanecer no futuro; e em relação aos stocks, se a hierarquia estabelecida com base numa amostra de artigos permanecerá a mesma para a generalidade da população. Tais hesitações serão pragmáticamente ignoradas no presente trabalho que se concentrará na questão seguinte:

"Qual o valor económico da precisão estatística na previsão da procura para gestão de stocks?"

A análise aqui efectuada conduzirá à definição de um critério económico para escolha do modelo de previsão do "nível" da procura. O desenvolvimento matemático será feito para as práticas de reaprovisionamento em revisão contínua e em revisão periódica, embora a abordagem permaneça

válida para outros casos. Os resultados serão explorados para situações em que os erros de previsão seguem uma distribuição normal, uma hipótese muito frequente, aceitável quando os artigos não são de baixa rotação.

## 2. CUSTOS DA INCERTEZA

Os modelos de gestão de stocks consideram vários tipos de custo. Aqui interessa considerar apenas os custos associados com a incerteza da procura, incerteza que se vai reflectir na constituição do stock de segurança. Tais custos são tradicionalmente designados por "custos de posse" e "custos de penúria", referindo-se os primeiros aos custos do capital investido em stock e à manutenção deste, e os segundos aos prejuízos derivados de uma procura que não é satisfeita imediatamente.

Nos regimes de reaprovisionamento em revisão periódica e em revisão contínua, os custos acima referidos, relativos a um ciclo de reaprovisionamento, podem ser expressos matematicamente por:

$$\text{Custo de posse, por ciclo, } H = h \int_0^M (M-y) dF \quad (1.a)$$

$$\text{Custo de penúria, por ciclo, } R = \int_M^\infty r(y-M) dF \quad (1.b)$$

$$\text{Custo da incerteza, por ciclo, } C = H + R \quad (1.c)$$

em que

$y$  = procura do artigo, em unidades físicas, durante o período de risco;

$F$  = distribuição cumulativa da procura,  $F(Y) = \text{prob}(y < Y)$ ;

$M$  = nível de controlo de reaprovisionamento;

$h$  = custo de posse por unidade física e por ciclo médio de reaprovisionamento (abreviadamente taxa de posse);

$r$  = custo de penúria por cada unidade física procurada e não satisfeita imediatamente (abreviadamente, taxa de penúria).

De notar que as expressões (1) são aplicáveis tanto à revisão periódica como à revisão contínua mediante uma ligeira adaptação de convenções. Assim, numa prática de revisão contínua,  $y$  será no "prazo de entrega", enquanto que na revisão periódica o período de risco para a decisão é o "prazo de entrega mais o período de revisão".

Relativamente a  $M$ , será o "nível de encomenda" em revisão contínua e o "nível de preenchimento" em revisão periódica. Repare-se que em ambos os casos  $M$  se refere ao stock nominal, isto é, o stock em mão mais as encomendas pendentes. Finalmente não deve ser ignorado que as expressões acima pressupõem algumas simplificações (Taylor e Oke, 1976).

Consideremos agora que o gestor dispõe de um modelo de previsão e sejam

$\hat{y}$  = previsão da procura no período de risco;

$e = y - \hat{y}$ , o erro de previsão correspondente.



Note-se que, fixado o modelo de previsão,  $\hat{y}$  é uma variável determinística resultante dos dados passados pelo que

$$F(y) = F(\hat{y} + e) = G(e)$$

traduz a possibilidade de passar da distribuição da variável aleatória "procura" para a distribuição da variável aleatória "erro de previsão".

As expressões (1), através de conveniente mudança de variáveis transformam-se em

$$H = h \cdot \int_{-\infty}^m (m - e) \cdot dG \quad (3a)$$

Note-se que o limite  $-\infty$  resulta da possibilidade teórica de ser  $\hat{y} = \infty$ )

$$R = r \cdot \int_m^{\infty} (e - m) \cdot dG \quad (3b)$$

$$\text{sendo } m = M - \hat{y} \quad (3c)$$

Admitindo que se pretende a minimização dos custos, viria

$$\text{Min } C = H + R \quad (4a)$$

$$\text{donde } dC/dm = 0 \quad (4b)$$

conduziria a

$$h \cdot \int_{-\infty}^m dG = r \cdot \int_m^{\infty} dG \quad (4c)$$

ou

$$G(m) = r/(h + r) \quad (4d)$$

As expressões (4) determinam  $m_0$ , isto é, o valor ótimo para  $m$ . E a Fig.1 ilustra o significado de  $m_0$  no contexto da distribuição dos erros. Note-se de passagem que se espera que, na figura,

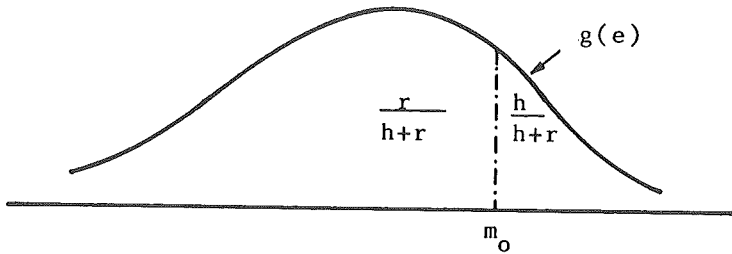


Fig.1

a área de probabilidade à direita de  $m_0$  seja inferior à área da esquerda pois  $r \geq h$  (de contrário não deveria haver stock). O valor ótimo de  $m_0$  conduz ao valor mínimo do custo que viria dado por

$$C_0 = -h \int_{-\infty}^{m_0} e \cdot dG + R \int_{m_0}^{\infty} e \cdot dG \quad (5)$$

Os modelos probabilísticos de gestão de stocks pressupõem a possibilidade de determinar a distribuição da procura. Repare-se, porém, que do ponto de vista do gestor de stocks é a distribuição dos erros que verdadeiramente interessa. Com efeito, o gestor decide em função das previsões e, nesta perspectiva, o êxito dessa decisão dependerá em grande parte:

- i) Da escolha de um modelo capaz de estimar convenientemente a procura;
- ii) Da capacidade de determinar a distribuição dos erros de previsão, sejam esses erros causados pela flutuação da procura ou pela insuficiência do modelo.

Estes dois aspectos correspondem a duas fases distintas de estimação embora se inter-relacionem e possam mesmo ser contemplados num único modelo. Efectivamente, podemos ter uma procura de perfil relativamente estável e no entanto haver erros de previsão consideráveis por se adoptar um modelo de previsão demasiado elementar (por exemplo, não contemplar a sazonalidade quando esta exista). Se, porém, tal modelo for adoptado, será necessário estimar a distribuição desses erros; e nada impede que para isso se utilize um outro modelo, eventualmente, até mais elaborado que o primeiro.

Pode, contudo, demonstrar-se que os custos da incerteza são mais sensíveis às imprecisões da procura do que às imprecisões nas estimativas dos erros. Isso serve também de razão para abordarmos primeiro os critérios para a escolha do algoritmo da procura, o que será feito no presente artigo.

Deixaremos para um outro a segunda parte da questão, relativa à estimativa dos erros.

### 3. ESCOLHA DO MODELO PARA PREVISÃO DA PROCURA

A expressão (5) anteriormente deduzida formaliza a influência da imprecisão nos custos, relação que agora interessa desenvolver. A maior dificuldade reside em determinar a função  $G(e)$ . É prática corrente simplificar o problema pressupondo que os erros seguem uma distribuição normal, isto é,

$$e \sim N(E, V) \quad (6)$$

sendo  $E$  o valor esperado e  $V$  a variância. A distribuição normal, com efeito, ajusta-se razoavelmente bem à maioria dos perfis relativos a erros de previsão da procura de artigos em stock, sobretudo os de maior rotação, e tem a vantagem de ser fácil de tratar analiticamente. Será por isso aqui utilizada.

Designemos por

$$z = (e-E) / \sqrt{V} \quad (7)$$

a variável normal generalizada e por  $\Phi(z)$  e  $\phi(z)$  as correspondentes funções distribuição e densidade de probabilidade. Então, de (4d), podemos escrever

$$\Phi(z_0) = r/(h + r) \quad (8.1)$$

em que  $z_0 = (m_0 - E) / \sqrt{V}$  (8.2).

identicamente, (5) transformar-se-ia em

$$C_0 = -h \int_{-\infty}^{z_0} (z \cdot \sqrt{V} + E) \cdot d\phi + r \int_{z_0}^{\infty} (z \cdot \sqrt{V} + E) \cdot d\phi \quad (9.1)$$

Tendo em atenção que para a distribuição normal

$$z \cdot d\phi = -d\phi \quad (9.2)$$

e considerando a relação (8.1) chega-se a

$$C_0 = \sqrt{V} \cdot (h + r) \cdot \phi(z_0) \quad (10)$$

A precisão (ou, melhor, a imprecisão) dos modelos é frequentemente avaliada através

do erro quadrático médio,  $EQM = \Sigma e_i^2 / N$

do erro absoluto médio,  $EAM = \Sigma |e_i| / N$

ou do erro relativo médio,  $ERM = \Sigma |e_i / y_i| / N$

cujos méritos relativos são apresentados, por exemplo, em (Makridakis e Wheelwright, 1978). Na maior parte das vezes eles convergem, isto é, o modelo que leva ao menor EQM é também o que conduz ao menor EAM e ao menor ERM. Mas há casos em que isso não acontece pelo que a escolha de um modelo, mesmo em termos de precisão, poderá ser influenciada pelo critério adoptado. Aqui daremos preferência ao EQM por ser um estimador, ainda que imperfeito, para a variância dos erros e

por esta característica ser fundamental para a análise que está a ser desenvolvida.

Note-se que a variância da amostra é dada por

$$S^2 = EQM - E^2 \quad (11)$$

Se o modelo de previsão for satisfatório, o valor esperado dos erros, E, será próximo de zero e a variância poderá ser estimada por EQM. No caso de os erros seguirem uma distribuição normal de média zero, então

$$e \sim N(0, V) \quad (12.1)$$

$$EAM = \sqrt{\frac{1}{2V/\pi}} \quad (12.2)$$

podendo assim o erro absoluto médio ser usado também para estimar a variância. Vem a propósito referir que, numa análise "ex-post", E tem provavelmente um valor diferente de zero. Mas quando adoptamos uma posição "ex-ante", isto é, quando nos debruçamos sobre o futuro, não faz sentido estimar para E um valor diferente de zero: se assim fosse, a previsão poderia ser corrigida desse valor!

Admitindo então que o EQM pode funcionar como uma estimativa da variância, a expressão (10) passará a ser

$$C_o = \sqrt{EQM} \cdot (h + r) \cdot \phi(z_o) \quad (13.1)$$

Ou, em termos relativos

$$\frac{\Delta C_o}{C_o} = 1/2 \frac{\Delta EQM}{EQM} \quad (13.2)$$

Estas expressões dão-nos um critério económico para selecção do modelo da procura no caso de os erros seguirem uma distribuição próxima da normal. Tal critério, baseado no custo, será certamente muito mais sugestivo para o gestor de stocks do que as habituais medidas de precisão EQM, EAM, etc. Naturalmente que o gestor sentirá que quanto maior for a precisão do modelo tanto melhor: porém, à partida, fica sem saber "quanto melhor". A expressão (13.2) dá-nos o "quanto melhor", em termos relativos. Perante dois modelos a que se atribuem diferentes graus de precisão, se a um corresponder um EQM 20% menor que ao outro, então a utilização do primeiro poderá levar a economias de 10% dos custos de incerteza: será isso compensador perante uma eventual maior complexidade desse modelo?

A expressão (13.1) analisa a precisão em termos absolutos. A maior dificuldade na aplicação da fórmula estará na avaliação do custo de penúria "r", avaliação que sempre contém uma elevada dose de subjectividade. A discussão deste assunto que é abordado por exemplo em (Oral et al., 1972) e em (Vasconcelos, 1982), está porém fora do âmbito do presente artigo. Observa-se apenas que, a avaliação do custo de penúria pode ser feita de uma forma indirecta. Por exemplo, quando o gestor fixa uma taxa ou um risco de ruptura de 10% (isto é, espera-se que haja ruptura de stocks em 10% dos ciclos) tal corresponde, de acordo com a Fig.1, a

$$h/(h + r) = 0,1; \quad \text{donde } r = 9h$$

Este relacionamento permite quantificar "r" em função do custo de posse "h", sendo este mais fácil de objectivar

(baseado no custo de oportunidade do capital, nas despesas e perdas de armazenagem, seguros, rendas, etc.). Permite ainda verificar se o gestor está a ser sensato nos níveis de serviço que fixa. Assim, se ele fixar a taxa de ruptura em 10%, baseado na sua "percepção do mercado", deverá esforçar-se também por estimar o custo da penúria "r" a partir dessa mesma "percepção": se a estimativa de "r" estiver distante de (9.h), o gestor deverá afinar a sua "percepção".

A importância dos custos de penúria pode ser analisada através da sua influência sobre os custos da incerteza. Partindo da expressão (10) e atendendo a (8) chegamos á conclusão que

$$C_0 / h \sqrt{V} = f(k) \quad (14.1)$$

$$\text{sendo } k = r/h \quad (14.2)$$

Estas relações dão-nos a função generalizada dos custos de gestão representada na Fig.2.

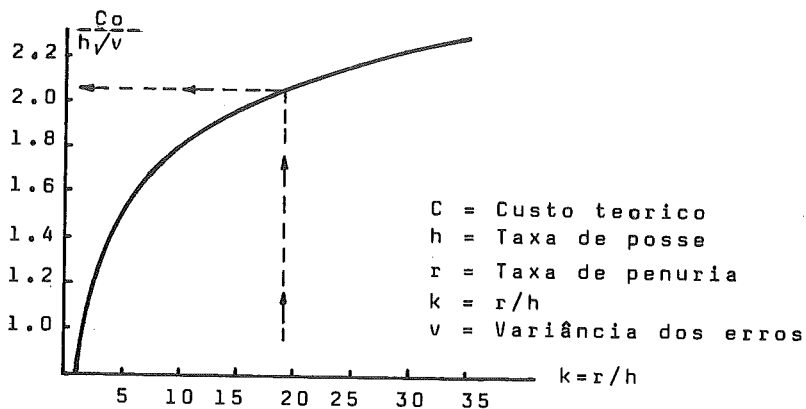


Fig.2 - Custo da incerteza generalizado



A sua utilização pode ser exemplificada como segue: se o custo unitário (taxa) de penúria for 19 vezes o custo unitário (taxa) de posse por ciclo, então  $k = r/h = 20$ . Este valor em abcissas corresponde á ordenada 2,09. Se o EQM das previsões for de 90000 (usado aqui como estimativa da variância) e se o custo de posse por unidade e ciclo for de 0,1 contos, virá

$$C_0 = (2,09)(0,1) \sqrt{90000} = 62,7 \text{ contos por ciclo}$$

#### 4. COMPORTAMENTO REAL DO CRITÉRIO DE CUSTO

A consistência do critério de custo apresentado em (13) depende da capacidade de o custo da incerteza,  $C_0$ , teóricamente calculado, ser representativo dos custos efectivamente incorridos em situações reais, quando as premissas do modelo são apenas aproximações da realidade e se desconhece o efeito conjugado dessas aproximações.

À laia de validação, verificou-se o comportamento do modelo em relação a 36 conjuntos de dados históricos referentes a entregas semanais de produtos petrolíferos, tendo cada conjunto 55 valores (de 55 semanas, portanto). Os dados eram relativos a 13 produtos diferentes em 4 instalações de armazenagem. O perfil de entregas variava largamente de um produto para outro: os óleos de aquecimento tinham variações sazonais grandes enquanto para os restantes combustíveis isso não era tão evidente. As previsões foram feitas usando um modelo de amortecimento exponencial de 1.ª ordem,

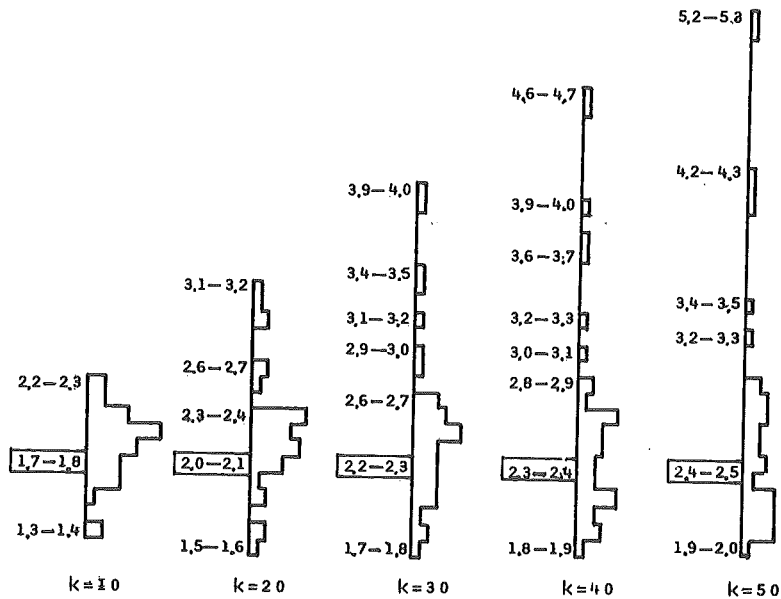


Fig.3 - Custos generalizados  $C/(h\sqrt{EQM})$  com dados reais

portanto, sem considerar a sazonalidade nem o declive. Os erros foram assim maiores do que poderiam ter sido e a sua distribuição, em alguns casos, afastava-se nítidamente da normal. A utilização de um algoritmo tão elementar foi propositada para sujeitar o critério a uma prova de robustez relativamente à distribuição dos erros.

Percorrendo os dados semana após semana, foram simuladas as decisões de um "gestor racional" com o objectivo de minimização de custo formulado em (4) e seguindo uma prática de revisão contínua. Ciclo após ciclo, determinaram-se excedentes, penúrias e respectivos custos, calcu-

lando-se depois o custo médio da incerteza,  $C_{oi}$ , para cada um dos 36 conjuntos. Finalmente, fez-se a generalização  $C_{oi}/(h\sqrt{EQM})$ . A distribuição destes valores, por intervalos e para diferentes quocientes  $k = r/h$ , está representada na Fig.3. Esta distribuição deve ser confrontada com o valor teórico (esperado)  $C_o$ , derivado da Fig.2. O intervalo correspondente ao valor teórico vem assinalado dentro de um rectângulo na escala dos histogramas. Por exemplo,

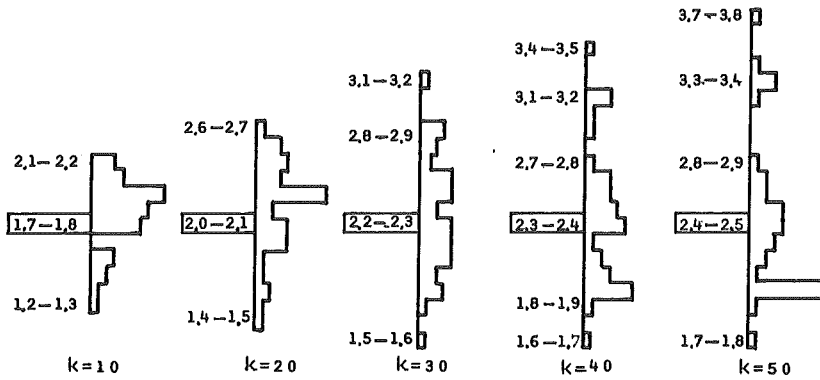


Fig.4 - Custos generalizados  $C/(h\sqrt{EQM})$  com dados reais (excluindo valores extremos)

para  $k = 20$ , o custo esperado segundo a Fig.2 está no intervalo (2,0 a 2,1): na Fig.3, este intervalo está assinalado, verificando-se também que os resultados do ensaio se distribuem de 1,5 a 3,2.

A análise da Fig.3 revela uma concentração em torno dos valores teóricos. Contudo, há alguns que se situam a níveis

de custo muito mais altos. Tal deriva de haver algumas semanas esporádicas em que o volume de saída (e o erro de previsão) é muito superior ao normal, acarretando uma falta apreciável de produto. À medida que o custo de penúria aumenta (valores mais altos para  $k$ ), a repercussão dessa penúria sobre o custo torna-se mais importante. Se essas semanas com saídas excepcionais forem ignoradas, a distribuição dos custos concentra-se mais em torno dos valores teóricos como demonstra a Fig.4.

De qualquer modo parece não haver contradição entre as expectativas e os valores reais. As relações (13) serão, portanto, de utilidade mesmo quando não se está muito seguro acerca da distribuição dos erros. Essas relações fazem ressaltar ainda um importante aspecto: é que a escolha de um modelo pelo critério do menor EQM conduzirá também ao mínimo custo de incerteza.

## 5. CONCLUSÃO

Para efectuar previsões da procura, o agente de decisão tem uma variedade de opções sobre o modelo-base a utilizar, independentemente de adquirir ou desenvolver o "software" correspondente. Os modelos à escolha são qualificados, habitualmente em termos da precisão das previsões (incluindo aqui a que resulta da capacidade de o modelo se adaptar às mutações da procura) e, naturalmente, uma maior precisão é obtida à custa de uma maior complexidade de modelos. Isto representa um custo associado com a aquisição ou desenvolvimento do "software", com a maior capacidade exigida ao computador, com a dificuldade de o agente de decisão compreender o funcionamento do modelo, custo esse que deverá ser

justificado pelo aumento da precisão. Ora, se a precisão tem um significado concreto, a utilidade dessa precisão, que é no fundo o que interessa ao gestor, é algo bem menos imediato.

O presente artigo estabelece a ponte entre precisão e utilidade: esta será a redução dos custos da incerteza obtida por uma maior precisão. Este conceito é aplicado à gestão de stocks permitindo concluir que, para as práticas correntes de reaprovisionamento e com o pressuposto habitual sobre a normalidade dos erros de previsão, tal relacionamento entre precisão e custo é muito simples como se vê pelas expressões (13) e pela Fig.2. Concretamente, o gestor pode estimar o custo da incerteza associado com um determinado modelo de previsão para stocks.

Deste modo o agente de decisão tem um "critério de custo" para comprar modelos de previsão, que pode substituir com vantagem os critérios de precisão usuais. Neste artigo tratámos exclusivamente do modelo para a previsão da procura. Noutra ocasião será feita a análise correspondente para modelos destinados à estimativa da variância dos erros de previsão.

#### REFERÊNCIAS

Fildes, R., 1979 - Quantitative Forecasting, The State of the Art: Extrapolative Models. J.Opl.Soc., Vol.30, pp. 691-710.

Taylor, P.B. and Oke, K.H., 1976 - Tables for Stock Control, Problems of Formulations and Computations. O.R.Q., Vol.27,

pp. 747-758.

Makridakis, S. and Wheelwright, S., 1978 - Forecasting Methods and Applications Cap. 16/1. Santa Bárbara, Wiley.

Oral, M.; Salvador, M.S.; Reisman, A.; Dean, B.V., 1972 - On the Evaluation of the Shortage Costs for Inventory Control of Finished Goods. Mgmt.Sci., vol. 18B, pp. 344-351.

Vasconcelos, B.C., 1982 - Improvements to Stochastic Stock Control Decisions, Cap.2, Tese de doutoramento não publicada, University of Warwick, England.

Investigação Operacional

Vol.4 - N.1 - Julho 1984

## THE MANAGEMENT OF O.R. PROJECTS

W H Swann

Decision Support Systems Group  
Corporate Management Services  
Imperial Chemical Industries PLC

## 1 - INTRODUCTION

Management Science has made a substantial contribution to the structured decision area of Operational Control, but its effect on the managerial activities of Management Control and Strategic Planning where the problems are much less structured has been relatively small. Yet as the increasing competitiveness of business imposes ever greater demands and pressures on management, the need and opportunity for OR to impact on these areas is growing significantly. However the fuzzy nature of semi-structured decision-making does not lend itself to the more conventional OR intervention style of client and consultant. The paper discusses a more appropriate style based on collaboration in which the client management is involved directly in the intervention.

The views expressed are based on the author's experience gained over a number of years operating in a variety of management scientist roles within Imperial Chemical Industries PLC, or ICI as it is commonly known. ICI is a large multi-national group based in the UK with some 132,400 employees,

74,700 of them in the UK. The annual report for 1981 shows that group sales for that year amounted to £6581 million leading to a trading profit of £425 million resulting from the Company's operations of manufacturing and selling a wide range of chemical based goods. These cover fertilisers and crop protection chemicals, artificial fibres, chlorinated solvents, petrochemical and plastics, oil, organic chemicals, paints and decorative products, pharmaceuticals, industrial explosives and general chemicals.

In Portugal ICI Portuguesa has been established for over 30 years, with active selling in the areas of fibres, chemicals, plastics, dyestuffs and pharmaceuticals, and managing local subsidiaries and associated companies, adding up to a turnover of over 8 billion escudos and nearly 1,000 jobs.

## 2 - IMPACT OF OR

(Anthony, 1965) has proposed a spectrum for managerial activities ranging from Operational Control through Management Control to Strategic Planning. Operational Control is concerned with task-dominated situations based on structured decisions, by which is meant decisions which tend to be routine and repetitive and for which a definite procedure or set of rules has been identified. Moving along the spectrum towards Strategic Planning leads to people-dominated situations involving unstructured decisions, by which is meant those decisions which are novel and require that considerable reliance be placed on the decision-maker's experience and judgement.

In ICI much progress has been made in the structured



areas with the provision of data processing and information systems plus a wide range of appropriate OR applications. However towards the less structured end of the spectrum the influence of the Company's OR function reduces significantly. Although important contributions have been made in these areas they have tended to be in terms of influencing the view senior managers take of the world rather than directly impacting on decision-making. This situation is by no means unique to ICI, and Cyert has stated that "OR has not proved itself at the top management level. In comparison to computers, for example, OR is little known by top managers" (Cyert, 1981).

He went on to say that: "Prior to the development of management science many of the problems for which we now have analytical solutions were viewed as being soluble only by managerial judgement". This view continues to persist in the less structured decision areas so that management often fails to recognise the contribution OR can make. A manager may also feel that the presence of OR is a threat in that it may automate his job, removing the interesting judgemental elements and their associated mystique, reducing his influence, responsibility, satisfaction and status, or even worse removing his job altogether.

In most companies the OR function has no direct responsibility for managing the business. Its role is to act as a service to other parts of the organisation, but one which management is not obliged to use, by comparison with say the accounts function. As such it is not sufficient just to solve a given problem, the relevant management must also be persuaded to take action appropriate to the solution. This is achieved by a combination of process and task where by process is meant the how of the OR intervention, whilst by task is meant

the what. The rest of this paper discusses both of these aspects in turn, beginning with process, and considers them in the light of the desire to impact on the middle ground of semi-structured problems where the quantitative modelling approach of OR can be allied to managerial judgement to form an effective decision-making activity.

### 3 - CONSULTANCY STYLE OF INTERVENTION

Unfortunately most OR staff are heavily task oriented and fail to recognise that the development and use of an effective working process is necessary to ensure a successful OR intervention. As a result they tend to become involved with other parts of the organisation through specific projects rather than on a continuing basis, and use of the OR service tends to depend upon the reputation of OR individuals with their contacts rather than on a belief that OR can help. This can lead management to consider OR as applicable only to the level of decision-making at which it is first applied in their area. Thus they tend to request repeat applications of a given technique, and as a result the style of working relationship generally reduces to that of client and consultant.

The success of an intervention based on this style will be highly dependent upon a number of assumptions, namely:

- . the manager has correctly identified his needs;
- . the manager has accurately communicated his needs to the consultant;
- . the consultant has available to him techniques relevant

to the manager's needs and is able to apply them to arrive at an appropriate solution;

the manager is prepared to manage the consequences of implementing the consultant's solution.

At the Operational Control level these assumptions usually hold good and the OR intervention is indeed successful. However at the less structured levels, the validity of the assumptions is doubtful and all too often the application of OR is aimed at mechanising the present rather than designing the future, i.e. there is a tendency to improve the existing way of doing things instead of helping to find new ways of doing them.

#### 4 - CHANGE AGENT STYLE OF INTERVENTION

The nature of semi-structured decision-making demands a high level of interpersonal interactions between managers who provide insight into the analysis of a particular problem and apply judgement and evaluative capability based on experience to arrive at a decision. Any change to this activity is a social process and will only be successful if an appropriate climate has been developed. This coupled with the novel and non-repetitive character of the decision-making means that the traditional OR approach of an expert solving a problem and selling the results to management is not appropriate. The OR expert must operate as a change agent, helping management themselves to explore and structure their problem situation and collaborating with them in generating and evaluating alternative solutions. The assumptions underlying this approach are that:

- . managers can better recognise the existence of situations than identify specific needs;
  - . managers need assistance to identify the key issues which characterise the problem situations;
  - . a close knowledge of the relevant organisation is needed to generate appropriate courses of action aimed at resolving key issues;
  - . the organisation must be involved in the changes in structure and working methods likely to result.
- Effective execution of this approach requires close collaboration between management and analyst. The creativity and technical knowledge of the analyst should be exploited to enable possible solutions to be identified, while the pragmatism and experience of the managers should be used to evaluate these in terms of feasibility and desirability. Working together in this way will help to ensure that the problem definition, jointly agreed, represents the actual situation rather than some contrived approximation developed to suit a particular solution technique. Furthermore management will consider the chosen solution to be its own which is based on well understood and agreed assumptions and data. It will therefore be committed to it so that implementation depends upon the real needs of the organisation rather than the selling ability of the analyst.

## 5 - PROJECT ORGANISATION

An effective way of achieving the necessary collaboration is to formalise the intervention as a project carried out by a

Project Team reporting to a senior management Steering Group.

The Steering Group has overall responsibility for managing the project. Thus it must set up the Project Team and define the initial remit, guide the study in terms of assigning priorities etc., monitor progress, ensure sufficient resources in terms of money, materials and people are made available, and authorise, initiate and manage any changes in organisation or working methods which result from the proposals of the Project Team. Clearly it is a decision-making body, not an information one, and should be chaired by the senior manager responsible for the business or part thereof being studied. The project should be managed to ensure that Steering Group meetings occur sufficiently frequently to maintain involvement, continuity, commitment and realistic awareness without becoming so frequent that they intrude too much on the manager's time.

The Project Team is best formed as a mixed group of management representatives and OR analysts. The numbers involved will depend on the particular study being undertaken, but typically might range from 2 to 4 management representatives and 1 to 3 analysts. In many cases it will be appropriate for the Steering Group to appoint as leader of the Team the manager with whose area the project will primarily be concerned. This will help ensure that the study remains focussed on the client's needs rather than on possible solutions. The main role of the management members of the Team is to represent the client and to provide the analysts with the relevant information about the problem situation. They act as a sounding board for the analysts so that together the Team can develop tentative, conceptual ideas which mostly will be generated by the analysts into feasible and desirable propo-

sals to which they are all committed.

This team approach helps provide the well publicised advantages of the multi-disciplinary approach of OR, but it also brings with it some of the not so well publicised difficulties. A typical team might consist of an OR analyst, a computer professional, and marketing, production and distribution managers. In contributing to the investigation each will seek to apply his own pre-conceived notions and objectives; and will base his views on his personal experience. These are all likely to differ. The result is that every one is tackling his own perception of the problem, contributing to the discussions using his own jargon and language. For success the team must adopt a method of working which will draw it together into a cohesive unit able to exploit the differences between team members rather than suffer from them.

## 6 - METHODOLOGY

The subject of OR methodology has been exercising many OR experts recently, e.g.( Ackoff, 1979 ). However the debate has tended to remain on a conceptual plane with only limited practical guidance emerging. Furthermore in a recent study (Pidd and Wooley, 1980) surveyed a number of industrial OR groups in the UK and found little evidence of any formal or explicit process, at least in the initial problem analysis and structuring stage.

What is needed is a methodology which admits the change agent role, and which covers the spectrum from structured situations characterised by distinct objectives, well defined decision-making procedures and quantitative measures of performance, to unstructured situations in which objectives

are difficult to define, decision making procedures are fuzzy, performance criteria tend to be qualitative, and human behaviour may be irrational. Such a methodology needs to be precise enough to guide action by being explicit, non-random and independent of the subject matter, but vague enough to avoid becoming a mechanistic technique. It must remain problem oriented and cater for a range of different viewpoints, but avoid distorting the problem into a particular form just to fit a specific technique.

An approach which has been found to be very effective is the systems-based methodology developed by Checkland at the University of Lancaster (Checkland, 1981). This recognises that businesses are social entities operating as human activity systems in a purposeful way, and it aims to explore, identify and structure the problem before solving it. The methodology may be considered as a framework of related activities based on systems principles which can be used as a learning system to explore the problem and identify actions required to improve the situation.

The initial activities are concerned with developing a rich picture on the problem situation and identifying the relevant key issues. It is useful to breakdown the problem situation into its constituent elements of structure and process. The structure is relatively static and may be examined in terms of physical layout, hierarchy, reporting mechanisms and pattern of communications both formal and informal. These provide the framework within which the process operates. The latter is dynamic in contrast to the structure and may be analysed in terms of the basic activities: planning, doing, monitoring performance, and taking control action to correct deviations. This analysis leads to

the postulation of a root definition of a system considered relevant to the problem situation. This should be a condensed description of the relevant system covering its basic purpose and essential nature with the aim of capturing insight and representing viewpoint. It may be useful to develop several different root definitions so that the implications of differing views can be explored. The viewpoint issue is critical since the action ultimately taken will be dependent upon that chosen, and the importance of this step is that it accentuates viewpoint and makes it explicit. All too often without using the methodology a particular viewpoint is implicitly assumed - frequently incorrectly!

A conceptual model of the relevant system corresponding to what is implied by the root definition can then be generated for comparison with the rich picture. It is developed by assembling in correct sequence the minimum set of activities which are necessary in the human activity system described by the root definition. The conceptual model is a means of structuring and evolving the thinking about fuzzy problem situations and not a representation of an ideal which ought to exist in reality. A formal comparison of the conceptual model with what exists in the problem situation is then made in order to reveal changes which could lead to improvement. These are assessed to select those changes which are both feasible and desirable and which may be implemented.

Although presented here as a consequence, in practice there is usually iteration between the activities comprising the methodology as insight and understanding develop and perception is enriched.



Experience shows that when used skillfully within the project organisation described earlier, the methodology:

- provides a formal framework and language for studying human activity systems such as decision-making;
- provides techniques, based upon systems principles, which reduce the risk of analysts and managers being prejudiced by preconceived ideas concerning the solutions;
- helps to clarify the choices and risks involved and provides an environment for building commitment and developing realistic expectations;
- allows technical, organisational and social values and viewpoints to be explicitly identified, discussed and compared;
- encourages constructive debate and creative thinking through sharing and understanding the range of viewpoints;
- encourages open and constructive relations between the study team and the personnel involved in the area under study;
- provides a fertile framework and environment for the exploitation of more formal OR thinking and techniques.

It is of course impossible to establish the precise value of a methodology such as this, and each organisation

should adopt the one which works best for it given its own culture, environment and available skills, though care should be taken to ensure that it satisfies the requirements outlined above.

## 7 - DECISION SUPPORT SYSTEMS

Turning now to the task inside of the OR intervention, in many cases the result is some computer based model directed at the problem in hand. The prime feature of the semi-structured problems found in the Management Control and Strategic Planning is that there is no routine method for arriving at a decision with regard to a problem because that problem is unlikely to have occurred previously and its precise nature and structure are complex. There are no agreed and accepted rules for processing the relevant information to solve the problem. The manager relies on his knowledge and experience, his understanding of existing circumstances and his judgement to reach his decision. In most situations the decision is a compromise arrived at by balancing a number of performance criteria which may not even be well defined and with the balance point dependent upon the existing conditions such as the point reached in the business cycle. Furthermore because there is no defineable right way of arriving at a decision, two managers tackling the same problem will often adopt quite different approaches.

To support this activity the more conventional computer model incorporating fixed rules and applying a specific algorithm to determine the solution to a given problem is unlikely to be appropriate as it allows little scope for the application of managerial expertise. What is needed is a man-machine combination which provides a framework within which

the manager can exploit his judgemental, creative, and pattern recognition abilities in harness with a computer which covers the structured elements in the decision process by using its computational, memory and retrieval, and display capabilities.

The computer model part of this combination is termed a decision support system (DSS) (Keen and Scott Morton, 1978) and the combination is most effective if the DSS is designed to enable the manager to work directly with it rather than via third parties.

## 8 - VISUAL MODELLING

However until recently building and running computer models has tended to remain very much the domain of the professional analyst. Thus the style of an OR intervention has usually been for the analyst to develop a model thought to be appropriate. On tackling a particular problem manager and analyst discuss the problem, the analyst formulates it in the style required by the model, submits it to the computer, collects the output sometime later, and takes the results back to the manager for analysis either as many pages of computer output paper or in some summarised and interpreted form. Either way the manager is presented with information on which to base his decision, and often he may not understand the basis on which the information was arrived as the model appears to him as a remote black-box. If he doesn't understand the basis then he won't be able to fine-tune the solution, which in many cases is what he will want to do. Even if understanding is not a problem he may wish to probe the given solution, or to explore alternative solutions based on different scenarios, and this will

require further iterations of the process for which he may not have time. So at best the decision may be made on very much less than perfect information. At worst the manager may decide the model, and the OR analyst cannot help him with his problem and discard both.

Thus the approach is not very helpful when applied to semi-structured decision-making as the desired man-machine combination, although experience shows that it can prove very effective when used to tackle structured problems.

However an alternative approach has emerged with the development of the visual interactive modelling as promoted by, among others, R. D. Hurrion (Hurrion, 1980). Briefly this involves setting up the computer system so that the output of the model is directed in dynamic form to a colour VDU which is made accessible to the manager. This is particularly effective in simulation where the manager can watch the progress of the simulation as it happens, rather like viewing a silent film. At any stage during a run he can interact with the model to change assumptions or conditions, and the final results can be displayed in graphical form as time series, histograms, etc.

There are four particular benefits with this approach.

(a) The manager can be much more involved in the model building and validation, without diminishing in any way the OR analyst. This will improve the modelling activity both in terms of quality and speed, and it will also increase the manager's confidence in the end result.

(b) Skilfull creation of a user-friendly interface

will enable the manager to use the system directly himself rather than through a third party. This eliminates time delays and dangers of miscommunication and/or misinterpretation.

(c) The management can observe the simulation running which provide him with insight into how the end results are arrived at, which will further increase his confidence in the model and the results it produces.

(d) Since the manager is directly involved there is less need to provide a fully comprehensive model catering for all possible situations, simplifying (and further speeding up) the modelling activity by relying on managerial response to deal with rare, unexpected circumstances.

This approach is consistent with the earlier discussion on the OR process in that it reinforces management involvement. Although presented here in terms of a simulation model it can be applied to a wide range of OR activities. However one would need to consider very carefully the wisdom of using it where the model was, say, a large LP which might take some minutes to arrive at its solution.

We now have two key components which provide the means whereby we can begin to impact on semi-structured decision-making areas. Firstly the process for investigating such human activity systems whereby OR and management can work together collaboratively to analyse the situation and derive appropriate solutions. Secondly where these solutions involve provision of some computer aid the development of decision support system implemented as interactive visual models which provide an effective vehicle whereby managers can apply their judgement, creativity, flexibility and

experience to explore problem situations.

## 9 - PRODUCING DECISION SUPPORT SYSTEMS

Development and implementation of an effective DSS requires of the OR analyst considerable skill, embracing many of the qualities needed in more conventional modelling plus the ability to produce an appropriate man-machine interface (Keen and Scott Morton, 1978), (Hurrion, 1980). However experience shows that three factors in particular need to be considered as follows.

The introduction of a DSS is certain to have a significant effect on the working methods of the staff involved. It will help to formalise the decision-making process and begin to increase the degree of structure in it by making more explicit the application of judgement, whilst increasing the profitable communication around the business. Hence to avoid resistance by the staff whom it will affect, the specific details of the system's design must match its organisational context in terms of patterns of access to and control over data, allocation of authority, responsibility for performance evaluation and action taking. Furthermore, since no two businesses are identical it is important that the relevant managers are involved in deciding on the precise form of aid to secure their commitment to and ownership of it.

Therefore it is necessary to ensure that at the analysis stage the organisational and social aspects of the situation are properly considered. The systems-based methodology described earlier can be a very effective way of achieving this. Often such a study leads management to recognise that the difficulties which led it to request a DSS resulted at least in

part from inadequacies within the existing organization and the appropriate action is development of the organization prior to the provision of a DSS relevant to the new set-up.

The next point to consider is the difficulty of getting a DSS into regular use. However much care has been taken to cover all the technical aspects of installing the system the final change-over can be very difficult because of the concern that the decision-maker has for carrying out his job. Almost certainly he will be under pressure and tight time constraints in doing his job. He will have derived a process which enables him to satisfy the organisation's requirements to some acceptable level. No matter how much he genuinely desires to improve his decision making, and no matter how much he has been involved in developing the system, when it finally comes to changing over to using it he is likely to feel threatened and beset with concerns about what happens if something goes wrong and he is not able to make his decisions when they are required. So he may decide not to change over immediately but to operate a parallel system, making his decisions in the usual way and using the DSS to check them. This should be avoided since he is unlikely to find the time to make the same decision twice, and any use of the DSS will be incidental, burdensome and unhelpful so that as a result he is likely to conclude that the system provides no benefit and it will fall into disuse and disrepute.

This situation needs careful managing, and provides an important role for the Steering Group since one of their duties is to manage changes in working methods. At the implementation stage the senior management must support the decision-maker openly through the change-over period and

insulate and protect him from any teething difficulties encountered with the system, thereby instilling in him the confidence to use it wholeheartedly and for real.

Finally, associated with the problem of implementation is the question of training, to which there are two aspects. The first concerns the mechanistic operations required to use the hardware and knowledge of the facilities and features available. Properly approached with planning, preparation, documentation and adequate time this should not present any difficulties for a well designed DSS.

However the second aspect concerns exploiting the full power and potential of the system, and is a much more difficult area. Managers are often under such pressure that with complex problems they tend to search for a feasible solution and as soon as they have found one proceed to implement it. They do not use the facilities of the system to help them identify alternative, better solutions. Thus although the DSS is aimed at increasing effectiveness by improving the quality of decisions, in this situation it is being used to increase efficiency, and as such is unlikely to cost-justify itself.

This has clear implications for the design of the DSS which must encourage and help the manager to make full use of the range of facilities provided. It is also likely to require a substantial involvement of the OR analyst during the earlier stages of use of the system helping train management to develop their decision-making process so that they can exploit the system to the full. It may even be desirable for the analyst to become a temporary member of the organisation for some time to bed the system down.



However this needs to be handled very carefully with the roles of the analyst and decision-makers clearly defined to avoid management opting out of using the system themselves and leaving it all to the analyst, which again would fail to exploit fully the potential of the man-machine combination since the analyst is not the decision-maker.

## CONCLUSION

Recent analytical developments have seen a growth in the ability to evolve an understanding of the inherent structure of decision-making processes within organisations, which begins to provide insight into the concepts necessary for the design of aids to support those processes. Meanwhile parallel technological developments now provide the means whereby these designs may be implemented effectively.

Exploiting these advances requires the OR analyst to adopt a change agent role which will prove highly demanding in terms of:

- behavioural skills needed to enable the analyst to manage and control the process of the intervention and cope with the interpersonal issues likely to arise in the course of it;
- technical skills needed in the analysis of novel problem situations and the derivation of appropriate solutions;
- creativity and innovation needed to produce management

aids relevant to the analysis and proposed solution, and based on OR management science techniques, both existing and new, and utilising improvements in computing technology.

However the potential rewards for undertaking this role are high. Success will enable OR to secure an exciting future by moving away from the "technician with his toolkit" image to a position from which it can impact significantly on the vital semi-structured decision-making areas of Management Control and ultimately Strategic Planning, and thereby make increasing contributions to business performance.

#### ACKNOWLEDGMENT

The author wishes to thank the Board of Imperial Chemical Industries PLC for permission to publish this paper.

#### REFERENCES

- Ackoff, R.L., 1979 - The Future of Operational is Past. J.Op1.Res.Soc.30; pp 93-104.
- Anthony, R.N., 1965 - Planning and Control Systems: Framework for Analysis. Harvard Graduate School of Business Administration.
- Checkland, P.B., 1981 - Systems Thinking, Systems Practice, Wiley.
- Cyert, R.M., 1981 - The Future of Operations Research. In: Operational Research '81, ed J.P.Brans. North Holland

Publishing Co.

Hurrion, R.D., 1980 - An Interactive Visual Simulation System for Industrial Management, EJOR, 5, pp 829-842.

Keen, P.G.W. and Scott Morton, M.S., 1978 - Decision Support Systems. An Organisational Perspective, Addison-Wesley.

Pidd, M and Wooley, R.N., 1980 - A Pilot Study of Problem Structuring. J.Opl Res.Soc., 31, pp 1063-1068

## ANÁLISE PROBABILÍSTICA DE UM SISTEMA DE ESTACIONAMENTO

Antônio Sérgio Pinto Aor

e

Luiz Flavio Autran Monteiro Gomes

Departamento de Engenharia Industrial de PUC/RJ

CEP 22.453, Rio de Janeiro, RJ

## RESUMO

Este trabalho apresenta um modelo normativo aplicável à alocação de vagas de estacionamento em comunidades fechadas. Após uma definição do sistema, passa-se ao desenvolvimento matemático da abordagem do problema, onde um tratamento probabilístico é dado à descrição das características de utilização da área de estacionamento. O desenvolvimento matemático é feito inicialmente de forma generalizada. Mais adiante, através da aplicação da lei da adição de probabilidades, mostra-se como passar para o caso em que se garante ser a mesma, para qualquer usuário do sistema, a probabilidade de que esse usuário consiga uma vaga.

## 1. INTRODUÇÃO

Entende-se por sistema de estacionamento um conjunto de áreas ou lotes de estacionamento alternativos, cada dos quais possuindo de certo número de vagas. Em termos gerais, pode-se

definir o problema da racionalização do uso de um tal sistema da seguinte forma: dada uma distribuição especial de destinos de viagens e de áreas de estacionamento, considerando-se que as demandas por estacionamento são diferenciadas por tipos de permissão para estacionar e que cada usuário em potencial tem uma probabilidade conhecida de trazer seu veículo, deseja-se saber em que área cada usuário deve estacionar de modo a maximizar uma função de utilidade para o número total de usuários, ou seja, uma função de utilidade colectiva.

Em trabalho anterior (Gomes e Gomes, 1980), além de apresentar-se as principais abordagens normativas àquele problema, propôs-se um modelo de programação linear cuja aplicação conduz à otimização do uso de um sistema de estacionamento, ao mesmo tempo em que se garante ser a mesma, para cada usuário com determinado tipo de permissão, a probabilidade de que este usuário consiga uma vaga, dado que o número total de vagas disponível é menor do que o número total de usuários. Aplicou-se o modelo a um sistema de estacionamento com 3 áreas, 4 prédios de destino e 2 tipos de permissão. Naquela ocasião, empregou-se o seguinte modelo de programação linear:

Minimizar:

$$Z = \sum_{k=1}^r \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n X_{ijk} D_{ij} C_{ik} P_k \quad (1)$$

sujeito a:

$$\sum_{j=1}^n X_{ijk} = N_{ik} \quad (i = 1, \dots, m) \quad (k = 1, \dots, r) \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^m X_{ijk} = B_{jk} \quad (j = 1, \dots, n) \quad (k = 1, \dots, r) \quad (3)$$

$$X_{ijk} \geq 0 \quad \forall (i, j, k)$$

onde:

- m      número de lotes "i" existentes na área.
- n      número de destinos "j".
- r      número de tipos de permissão "k".
- $P_k$     probabilidade de um usuário com permissão do tipo "k" utilizar o seu carro.
- $D_{ij}$     distância entre o lote "i" e o destino "j".
- $C_{ik}$     tarifa cobrada no lote "i", para o tipo de permissão "k".
- $B_{jk}$     número de usuários com permissão do tipo "k", que tem destino "j".
- $N_{ik}$     número de concessões para estacionar no lote "i", distribuídas a usuários com permissão do tipo "k".
- $X_{ijk}$     número de concessões para estacionar no lote "i", distribuídas a usuários com permissão do tipo "k" e destino "j".

No modelo acima, os valores de " $N_{ik}$ " são obtidos em função das características de utilização do estacionamento e da disponibilidade de vagas na área. Isto é:

$$N_{ik} = f (p_k, A_{ik})$$

onde:

$A_{ik}$  número de vagas disponíveis no lote "i" para portadores de permissão do tipo "k".

Os valores de " $X_{ijk}$ " são então determinados de modo que o valor esperado da distância total percorrida pelos usuários, ponderada pelas tarifas de estacionamento, seja o menor possível. Pois é esperado que, dentre os " $X_{ijk}$ " usuários com permissão "k" que vão de "i" para "j", apenas o número médio, dado por  $X_{ijk}P_k$ , procure estacionamento.

No presente trabalho mostrar-se-á como, através da lei da adição de probabilidades generalizada, pode-se passar do modelo mencionado a um cálculo que garante ser a mesma para qualquer usuário do sistema, independente do seu tipo de permissão, a probabilidade de que esse usuário consiga uma vaga. Para tanto, além da notação já mencionada, são utilizadas, também, as seguintes variáveis:

$Y_{ik}$  número de usuários, com permissão do tipo "k" e concessão para estacionar no lote "i", que decide utilizar o carro.

$\psi_{ik}$  função densidade de probabilidade de " $Y_{ik}$ ", normalizada.

$P_{ik}$  probabilidade de " $Y_{ik}$ " ser menor ou no máximo igual a " $A_{ik}$ ", isto é, probabilidade de um usuário, com permissão do tipo "k" e concessão para estacionar no lote "i", encontrar vaga.

No que diz respeito à estrutura do trabalho, na secção "Modelagem Probabilística" desenvolve-se, de forma genérica, o conceito que serve de base para a abordagem do problema. As

características estocásticas da utilização do estacionamento são, então, estudadas e tratadas segundo o critério normativo descrito no parágrafo anterior. Na seção "Exemplo de Aplicação", procura-se mostrar como são calculados, de acordo com a seção anterior, os parâmetros utilizados pelo modelo de programação linear, já na forma compatível com o desenvolvimento proveniente da abordagem objeto deste trabalho. Finalmente na seção "Considerações Finais", são tecidos alguns comentários sobre aspectos de ordem prática na utilização do modelo.

## 2. MODELAGEM PROBABILÍSTICA

Seja " $X_{1ik}, X_{2ik}, \dots, X_{Nik}$ ", uma amostra aleatória de tamanho " $N_{ik}$ ", extraída de uma população cuja distribuição é  $b(1, p_k)$ .

Aqui, " $X_{1ik}, X_{2ik}, \dots, X_{Nik}$ "

é o grupo de usuários, com tipo de permissão " $k$ ", que será alocado no lote " $i$ " e " $p_k$ " é a probabilidade de um usuário, com esse tipo de permissão, demandar efectivamente uma vaga. A média e a variância da distribuição são respectivamente  $\mu = p_k$  e  $\sigma^2 = p_k(1-p_k)$ . Se

$$Y_{ik} = X_{1ik} + X_{2ik} + \dots + X_{Nik},$$

sabe-se que a distribuição amostral de

$$"Y_{ik}" \quad \text{é} \quad b(N_{ik}, p_k)$$

com média  $\mu_{ik} = N_{ik}p_k$  e variância  $\delta_{ik}^2 = N_{ik}p_k(1-p_k)$ .

Para que os usuários que procuram por estacionamento realmen-



te encontrem vaga, é preciso que " $Y_{ik}$ " seja menor ou no máximo igual a " $A_{ik}$ ".

A probabilidade de que isso ocorra pode ser obtida por:

$$P_{ik} = \Pr ( Y_{ik} \leq A_{ik} ) = \sum_{Y_{ik}=0}^{A_{ik}} \binom{N_{ik}}{Y_{ik}} P_k^{Y_{ik}} (1-p_k)^{N_{ik}-Y_{ik}} \quad (4)$$

No entanto, o facto de a distribuição binominal aproximar-se da normal quando o tamanho da amostra tende para infinito, significa que, para um " $N_{ik}$ " suficientemente grande, pode-se usar a distribuição normal como uma aproximação da distribuição binomial. E tendo " $Y$ " distribuição normal qualquer função linear de " $Y_{ik}$ " é também normal (Anderson e Bancroft, 1952). A função linear  $\Psi_{ik} = (Y_{ik} - \mu_{ik})/\delta_{ik}$  que tem média zero e variância igual a um, é a variável normal padrão. Assim, qualquer variável normal com média " $\mu_{ik}$ " e variância " $\delta_{ik}^2$ " pode ser transformada em uma variável normal padrão que expresse o seu desvio da média, medido em unidades do desvio padrão. Este desvio em relação à média é medido pelo numerador da expressão da variável normal padrão " $\Psi_{ik}$ ", que no caso é dado por  $Y_{ik} - \mu_{ik}$ . Então, dependendo de o valor de " $Y_{ik}$ " ser maior ou menor do que a média " $\mu_{ik}$ ", a variável " $\Psi_{ik}$ " será, respectivamente, ou maior ou menor que zero, já que " $\delta_{ik}$ " é uma grandeza positiva.

Substituindo-se os parâmetros " $\mu_{ik}$ " e " $\delta_{ik}$ ", da expressão de " $\Psi_{ik}$ ", por seus respectivos valores

$$N_{ik} p_k \quad e \quad \sqrt{N_{ik} p_k (1 - p_k)}$$

e fazendo  $Y_{ik} = A_{ik}$ , o cálculo da probabilidade  $\Pr ( Y_{ik} \leq A_{ik} )$

pode ser feito, para cada lote "i" e tipo de permissão "k", a partir da variável normalizada que tem distribuição  $n(0,1)$ .

$$\Psi_{ik} = \frac{A_{ik} - N_{ik} P_k}{\sqrt{N_{ik} P_k (1-p_k)}} = (i = 1, \dots, m) (k = 1, \dots, r) \quad (5)$$

A distribuição normal é simétrica em relação ao eixo que passa pelo seu valor médio, tendo, portanto, média e mediana iguais (Cramer, 1973). Isso significa que, para que um usuário, com tipo de permissão "k", tenha por exemplo, 50% de chance de encontrar uma vaga no lote "i", é preciso que o número de vagas desse lote, que são destinadas ao tipo de permissão em questão, isto é, o valor de " $A_{ik}$ ", seja igual ao valor médio " $\mu_{ik}$ " da distribuição amostral do número de usuários que procura estacionamento, dado por " $N_{ik} P_k$ ".

Para se determinar a variável " $\Psi_{ik}$ ", os valores de " $A_{ik}$ " e " $p_k$ " são pré-estabelecidos, porém os " $N_{ik}$ " não são determinados para cada lote "i" em separado. Dispõe-se, sim, do número total de concessões para estacionar " $N_k$ ", a serem distribuídas a portadores do tipo "k" de permissão. A saber, esse valor deve ser igual à demanda em potencial " $B_k$ " para o respectivo tipo de permissão, ou seja, o número total de indivíduos desse tipo, que frequenta a comunidade. Assim, tem-se:

$$[N_k = \sum_{i=1}^m N_{ik}] = [B_k = \sum_{j=1}^n B_{jk}] \quad (k=1, \dots, r) \quad (6)$$

A resolução da expressão (5) para " $N_{ik}$ " e a aplicação do somatório para os "m" lotes de estacionamento "i" possibilitam a utilização da expressão (6) no sentido de se determinar

" $\Psi_{ik}$ ". Entretanto, dois problemas aparecem ao se desenvolver o cálculo. Primeiro, deve-se tomar o cuidado de fazer com que na expressão de " $N_{ik}$ " resultante, a variável " $\Psi_{ik}$ " não apareça sempre elevada a expoente par. Pois isso significaria que o valor algébrico da variável " $\Psi_{ik}$ " estaria sendo negligenciado. No entanto, dependendo de o valor de " $A_{ik}$ " ser maior ou menor do que a média " $\mu_{ik}$ ", a variável normalizada " $\Psi_{ik}$ " resulta, respectivamente, maior ou menor do que a sua média, que no caso é igual a zero.

O outro problema aparece quando se faz o somatório em " $i$ " ( $i=1, \dots, m$ ). É que a variável " $\Psi_{ik}$ " também está sujeita a esse somatório e, portanto, acaba sendo desmembrada em " $m$ " valores diferentes, ou seja, um para cada lote " $i$ ", o que, aparentemente, cria uma indeterminação. Todavia, esse problema é facilmente contornado fazendo-se uso do que estabelece o critério normativo, isto é, que a probabilidade de " $Y_{ik}$ " ser menor ou igual a " $A_{ik}$ " seja a mesma para todos os lotes " $i$ ". Como essa probabilidade é determinada pela variável aleatória normalizada " $\Psi_{ik}$ ", basta fazer com que " $\Psi_{ik}$ " independa de " $i$ ", isto é, seja igual a " $\Psi_k$ " para qualquer " $i$ ".

Procedendo-se, então, ao desenvolvimento a partir da expressão (5), é possível se escrever uma expressão para " $N_{ik}$ ", de forma que a variável " $\Psi_{ik}$ " apareça elevada a expoente, por exemplo, unitário. Assim, o valor algébrico de " $\Psi_{ik}$ " passa a ter influência sobre a relação entre " $N_{ik}$ " e " $A_{ik}$ ". Além disso, pode-se mostrar (Aor e Gomes, 1982) que o sinal positivo do radical proveniente da resolução da equação quadrática resultante, deve ser ignorado. Então, tem-se:

$$N_{ik} = \frac{1}{p_k} \left[ A_{ik} + \Psi_{ik}^2 (1-p_k) \frac{1}{2} - \Psi_{ik} \sqrt{A_{ik} (1-p_k) + \Psi_{ik}^2 (1-p_k)^2 \frac{1}{4}} \right] \begin{matrix} (i=1, \dots, m) \\ (k=1, \dots, r) \end{matrix} \quad (7)$$

Continuando o desenvolvimento, faz-se o somatório e iguala-se " $N_k$ " a " $B_k$ ". Uma vez que a 2a. parcela sob o radical pode ser desprezada em presença dos demais valores, e que  $\Psi_{ik} = \Psi_k \quad \forall i = 1, \dots, m$ , tem-se:

$$\frac{1}{2} (1-p_k) m \Psi_k^2 - \Psi_k \sqrt{1-p_k} \sum_{i=1}^m \sqrt{A_{ik}} - (p_k B_k - A_k) = 0 \quad (k=1, \dots, r) \quad (8)$$

E " $\Psi_k$ " é dado por :

$$\Psi_k = \frac{\sqrt{1-p_k} \sum_{i=1}^m \sqrt{A_{ik}} - \sqrt{(1-p_k) \left[ \sum_{i=1}^m \sqrt{A_{ik}} \right]^2 + 2m (1-p_k) (p_k B_k - A_k)}}{m(1-p_k)} \quad (9)$$

( $k=1, \dots, r$ )

Os valores da variável " $\Psi_k$ ", calculados dessa maneira, são, então, introduzidos na expressão (7), possibilitando, assim, a obtenção das quantidades " $N_{ik}$ ", que correspondem às restrições de capacidade dos lotes de estacionamento, de modo que a probabilidade " $P_{ik}$ ", de " $Y_{ik}$ " ser menor ou igual a " $A_{ik}$ ", seja, para cada tipo " $k$ " de permissão, a mesma, igual a " $P_k$ ", qualquer que seja o lote " $i$ ".

Sabe-se que os " $N_{ik}$ " foram calculados a partir de pré-fixação dos " $A_{ik}$ ", ou seja, número de vagas disponíveis no lote " $i$ ", para portadores de permissão do tipo " $k$ ". Se este valor, ao invés de ser fixado para cada um dos " $r$ " tipos de permissão " $k$ ", em cada lote " $i$ ", o for apenas para o lote como todo, de forma que não se faça distinção entre os tipos de permissão, a quantidade de vagas " $A_i$ " existente em cada lote, é o que passa a interessar, sendo:

$$A_i = \sum_{k=1}^r A_{ik} \quad (i = 1, \dots, m)$$

As restrições de capacidade que eram da forma dada pela expressão (2) passam a ser da seguinte forma:

$$\sum_{k=1}^r \sum_{j=1}^n X_{ijk} = N_i \quad (i=1, \dots, m) \quad (10)$$

onde " $N_i$ " é dado pela expressão (5).

Como se pode notar, a quantidade dessas restrições, que era igual a " $r.m$ ", é agora igual a " $m$ ", ou seja, há apenas uma, e não " $k$ ", para cada lote. Assim, a alocação de vagas é feita de maneira menos restritiva. E estando o problema de programação linear com maior liberdade de alocação no que diz respeito às restrições a que está sujeito, o valor ótimo da função objectivo apresenta um resultado melhor, ou seja, maior ou menor valor caso o problema seja de maximização ou minimização respectivamente.

Embora mais eficiente, a alocação feita dessa maneira introduz um outro problema. Não se pode dizer, a priori, que os " $N_i$ " encontrados por simples soma dos " $N_{ik}$ " calculados, garantam, para os " $m$ " diferentes lotes " $i$ ", a mesma probabilidade " $P_i$ ", de " $Y_i$ " ser menor ou igual a " $A_i$ ". Isso significa que, se o número " $N_i$ " de permissões para estacionar no lote " $i$ ", concedidas independentemente do tipo " $k$ " de permissão, for determinado simplesmente calculando-se " $N_i$ " com os valores de " $N_{ik}$ " calculados a partir da pré-fixação dos " $A_{ik}$ ", serão obtidos valores para os quais a probabilidade, de " $Y_i$ " ser menor ou igual a " $A_i$ " fatalmente não será a mesma para todos os lotes, isto é, a cada lote " $i$ " corresponderá uma probabilidade " $P_i$ ".

O cálculo de " $N_{ik}$ ", partindo da premissa segundo a qual, em um dado lote de estacionamento, haverá vagas reservadas

para diferentes tipos de permissão, é feito através da expressão (5).

No entanto, já se sabe que a melhor utilização dos lotes ocorreria quando não houvesse vagas reservadas para portadores de um determinado tipo de permissão, mas quando qualquer usuário em potencial, chegando a um dado lote, tivesse a mesma probabilidade de conseguir uma vaga, independente do seu tipo de permissão. Tal probabilidade, no entanto, seria como foi visto, específica do lote considerado, isto é:

$$\frac{\sum_{k=1}^r A_{ik} - \sum_{k=1}^r N_{ik} p_k}{\sqrt{\sum_{k=1}^r N_{ik} p_k (1-p_k)}} = \psi_i \quad (i=1, \dots, m) \quad (11)$$

Para o cálculo de " $N_{ik}$ " através de (11), seguir-se-ia o seguinte roteiro:

- 1) Explicitar-se-ia " $N_{ik}$ " em (11)
- 2) Lançar-se-ia mão da relação

$$\sum_{j=1}^n B_{jk} = \sum_{i=1}^m N_{ik} \quad (k=1, \dots, r) \quad (12)$$

e resolver-se-ia a expressão (12), para se obter o valor de " $\psi_i$ " para cada lote "i".

- 3) Calcular-se-ia " $N_{ik}$ " para cada valor de " $\psi_i$ " e de " $p_k$ ".

De acordo com a expressão (12), no entanto, não é possível o cálculo de " $N_{ik}$ " segundo o roteiro acima (como é pos-

sível quando se utiliza a expressão (5)) a não ser por via numérica.

Entretanto, se for exigido que a probabilidade " $P_i$ ", que é função de " $\Psi_i$ ", seja a mesma para todos os lotes " $i$ ", essa probabilidade pode ser encontrada, fazendo-se com que a variável aleatória normalizada " $\Psi_i$ ", seja única, igual a " $\Psi$ " para todos os lotes. Se for determinada uma probabilidade " $p$ " de um usuário qualquer trazer seu carro, em função das probabilidades " $p_k$ ", tem-se em (11):

$$\sum_{k=1}^r N_{ik} p_k = N_i p \quad (i = 1, \dots, m)$$

A probabilidade " $p$ " pode ser calculada supondo-se que se tenha o seguinte:

EVENTO  $G_k$  = ocorrência de portador de permissão do tipo " $k$ "  
( $k = 1, \dots, r$ )

EVENTO  $H$  = um portador de permissão traz o seu carro.

Tem-se:

$$p_k = P(H|G_k) \quad (k = 1, \dots, r)$$

Deseja-se:

$$p = P(H)$$

Pelo teorema de Bayes, tem-se:

$$P(H) = \sum_{k=1}^r P(H|G_k) P(G_k)$$

já que " $G_k$ " ( $k = 1, \dots, r$ ) são exclusivos e exaustivos.

As probabilidades " $P(G_k)$ " ( $k = 1, \dots, r$ ) são facilmente calculadas pelos quocientes:

$$P(G_k) = \frac{\sum_{j=1}^n B_{jk}}{\sum_{k=1}^r \sum_{j=1}^n B_{jk}} = \frac{B_k}{B} \quad (k=1, \dots, r) \quad (13)$$

que era o que faltava para se determinar " $p$ ".

Assim, a expressão (11) passa a ter o seguinte novo aspecto:

$$\frac{A_i - N_i p}{\sqrt{N_i p (1-p)}} = \psi_i \quad (i=1, \dots, m)$$

O cálculo dos valores de " $N_i$ " ( $i = 1, \dots, m$ ) se faz de forma análoga ao que foi feito para os de " $N_{ik}$ ", de acordo com o desenvolvimento decorrente da expressão (5); sendo que, agora, deve-se ter  $\psi_i = \psi \quad \forall i = 1, \dots, m$ . As expressões (7) e (9), então, adquirem, respectivamente, o seguinte novo aspecto:

$$N_i = \frac{1}{p} \left[ A_i + \psi^2 (1-p) \frac{1}{2} - \psi \sqrt{A_i (1-p) + \psi^2 (1-p)^2 \frac{1}{4}} \right] \quad (14)$$

e:

$$\psi = \frac{\sqrt{1-p} \sum_{i=1}^m \sqrt{A_i} - \sqrt{(1-p) \left[ \sum_{i=1}^m \sqrt{A_i} \right]^2 + 2m(1-p) (pB-A)}}{m(1-p)} \quad (15)$$

Garante-se, assim, que a probabilidade " $P_i$ ", de " $Y_i$ " ser menor ou igual a " $A_i$ ", seja constante, igual a " $P$ ", para



qualquer lote "i", isto é, que qualquer usuário tenha a mesma probabilidade de encontrar vaga.

3. EXEMPLO DE APLICAÇÃO

Como exemplo, considera-se um campus universitário com os seguintes 3 lotes de estacionamento:

Lote i	n. de vagas disponíveis $A_i = \sum_{k=1}^r A_{ik} \quad (i = 1,2,3)$
1	60
2	50
3	120
Total A = $\sum_{i=1}^m A_i$	230

São 2 os tipos de permissão e 4 os prédios de destino. Os valores  $B_{jk}$  são:

Prédio j	Permissão k		$B_j = \sum_{k=1}^r B_{jk}$
	1	2	
1	45	35	80
2	23	38	61
3	14	27	41
4	81	15	96
$B_k = \sum_{j=1}^n B_{jk}$	163	115	$B = \sum_{j=1}^n B_j = \sum_{k=1}^r B_k = 278$

As probabilidades  $p_k$  são:

Permissão "k"	1	2
Probabilidade " $p_k$ "	0,90	0,70

Portanto, deseja-se alocar 230 vagas a 278 usuários sabendo-se que, desses usuários, 163 são do tipo de permissão  $k = 1$  e 115 do tipo de permissão  $k = 2$ .

As distâncias " $D_{ij}$ ", em metros, entre os lotes de estacionamento e os prédios de destino, são:

Prédio j lote i	1	2	3	4
1	1350	150	100	460
2	700	1230	400	520
3	1050	2000	700	270

Os preços de estacionamento  $C_{ik}$ , em Cr\$/dia, são:

lote i permissão k	1	2	3
1	60	30	50
2	25	30	40

O modelo de programação linear é formado pela função objectivo dada pela expressão (1), e pelos dois conjuntos de restrições, dados pelas expressões (10) e (3) respectivamente, além, naturalmente, das restrições de não-negatividade.

O cálculo dos valores de " $N_i$ " se faz inicialmente pela determinação da probabilidade " $p$ " de um usuário qualquer procurar por estacionamento. Assim:

$$p = p(H) = P(H|G_1) P(G_1) + P(H|G_2) P(G_2)$$

onde:

k	P (H G <sub>k</sub> )
1	0,90
2	0,70

e pela expressão (13).

k	P (G <sub>k</sub> )
1	0,59
2	0,41

Valores estes que substituídos na expressão de " $p$ " dão  $p = 0,82$

O valor de " $\psi$ " pode, então, ser obtido pela resolução da expressão (15), obtendo-se assim:  $\psi = 0,256$ . O que irá proporcionar uma probabilidade de aproximadamente 60% de um usuário encontrar vaga.

Os valores de " $N_i$ ", que devem ser obtidos para que se possa proceder à resolução do problema de programação linear,

são fornecidos pela expressão (14). Tem-se, então:

$i$	$N_i = \sum_{k=1}^r N_{ik}$
1	72
2	60
3	146
Total	$N = 278$

O valor ótimo da função objectivo é igual a 3.707.700. E a solução ótima é apresentada na tabela seguinte:

$X_{jik}$		$X_{jik}$	
$X_{111}$		$X_{112}$	
$X_{211}$	23	$X_{212}$	38
$X_{311}$	11	$X_{312}$	
$X_{411}$		$X_{412}$	
$X_{121}$	45	$X_{122}$	12
$X_{221}$		$X_{222}$	
$X_{321}$	3	$X_{322}$	
$X_{421}$		$X_{422}$	
$X_{131}$		$X_{132}$	23
$X_{231}$		$X_{232}$	
$X_{331}$		$X_{332}$	27
$X_{431}$	81	$X_{432}$	15

#### 4. CONSIDERAÇÕES FINAIS

O problema clássico de transportes, quando formulado para "m" pontos de origem e "n" de destino, admite um total de "m + n" restrições dadas pelas quantidades produzidas e atraídas por cada origem "i" e destino "j" respectivamente. O objetivo, então, é determinar os pares "i,j" que otimizam a solução do problema.

Com a introdução de tipos de permissão diferentes a dimensão do problema é aumentada em uma unidade, ou seja, os pares "i,j" devem ser agora determinados para cada tipo "k" de permissão.

No modelo proposto em (Gomes e Gomes, 1980) o número " $N_{ik}$ " de concessões a serem fornecidas para usuários com permissão de tipo "k" é obtido, para cada lote "i", a partir da pré-fixação do número " $A_{ik}$ " de vagas a serem destinadas a cada tipo de permissão. O número de usuários com um determinado tipo de permissão, por sua vez, é fixo para cada destino "j".

Sendo assim, cada ponto de origem ou destino admite uma restrição para cada tipo de permissão, isto é, se "r" for o número de permissões, o número de restrições de origem será "r.m" e o de destino "r.n", e o total de restrições, dado por:

$$r.m + r.n = r (m + n)$$

O número de variáveis que no problema clássico é igual a "m.n" passa a ser "r.m.n", ou seja, também é multiplicado pelo número "r" de permissões.

Do exposto conclui-se que o problema de programação linear

resultante tem " $r.m.n$ " variáveis de decisão sujeito a " $r(m+n)$ " restrições. Todavia observa-se que existem " $r$ " grupos de variáveis e " $r$ " grupos de restrições. O problema pode, ser decomposto em " $r$ " problemas independentes, a saber, um para cada tipo de permissão, sendo que cada um tem " $m.n$ " variáveis e " $m+n$ " restrições.

Com o tipo de formulação em que o valor de " $\Psi_k$ " é único para todos os tipos de permissão, o número de vagas a serem destinadas a cada tipo de permissão, como foi visto, não é pré-fixado; as restrições de capacidade de estacionamento são da forma apresentada no texto e o número de restrições desse tipo é igual a " $m$ ". O número de restrições de destino é igual a " $r.n$ ", e o total, dado por " $m+r.n$ ", não pode ser decomposto em " $r$ " grupos independentes.

Com o modelo proposto na forma deste artigo, a probabilidade de um usuário encontrar uma vaga é a mesma para todos, independente do tipo de permissão, ao passo que se cada grupo de usuário com tipo " $k$ " de permissão for considerado de forma independente, dependendo da quantidade " $A_k$ " de vagas a serem fixadas para cada tipo de permissão, os valores obtidos para " $P_k$ " (probabilidades de um usuário, com tipo " $k$ " de permissão, encontrar vaga) podem apresentar grandes discrepâncias.

## 5. REFERÊNCIAS

Anderson, R.L. e Bancroft, T.A., 1952 - Statistical Theory in Research, McGraw-Hill, New York, pp. 63-64.

Aor. A.S.P. e Gomes, L.F.A.M., 1982 - "Análise Probabilística

de um Sistema de Estacionamento", apresentado no "V Simpósio Nacional de Probabilidade e Estatística", São Paulo - SP, Brasil.

Cramer, H., 1973 - Teoria da Probabilidade, Editora Mestre Jou., São Paulo, pp. 84.

Gomes, L.F.A.M. e Gomes, A.C.S., 1980 - "Equilíbrio Demanda-Performance na Alocação de Vagas de Estacionamento", CIÊNCIA E CULTURA, 23 (12), pp. 1683-1691.

Goyal, S.K. e Gomes, L.F.A.M., 1981 - "A Model for Allocating Car Parking Facilities in Universities" (Duas Aplicações de Programação Matemática ao Planejamento de Sistemas de Produção e Transportes, PUC/RJ, Série EDIPUC. IND/022), pp. 6.

Investigação Operacional  
Vol.4 - N.1 - Julho 1984

COMPUTATIONAL COMPLEXITY OF DISCRETE OPTIMIZATION  
PROBLEMS

J. K. LENSTRA Mathematisch Centrum, Amsterdam, The  
Netherlands

A. H. G. RINNOOY KAN  
Erasmus University, Rotterdam, The Netherlands

ABSTRACT

Recent developments in the theory of computational complexity as applied to combinatorial problems have revealed the existence of a large class of so-called NP-complete problems, either all or none of which are solvable in polynomial time. Since many infamous combinatorial problems have been proved to be NP-complete, the latter alternative seems far more likely. In that sense, NP-completeness of a problem justifies the use of enumerative optimization methods and of approximation algorithms. In this paper we give an informal introduction to the theory of NP-completeness and derive some fundamental results, in the hope of stimulating further use of this valuable analytical tool.

This report was presented as an invited survey paper at the DO 77 Conference, August 1977 in Vancouver (Canada)



## 1. INTRODUCTION

After a wave of initial optimism, integer programming soon proved to be much harder than linear programming. As integer programming formulations were found for more and more discrete optimization problems, it also became obvious that such formulations yielded little computational benefit. To this day, integer programming problems of more than miniature size computationally intractable.

For some structured problems, however, highly efficient algorithms have been developed. Network flow and matching provide well-known examples of problems that are easy in the sense that they are solvable by a good algorithm - a term coined by J. Edmonds (Edmonds, 1965A) to indicate an algorithm whose running time is bounded by a polynomial function of problem size. This notion is not only theoretically convenient, but is also supported by overwhelming practical evidence that polynomial-time algorithms can indeed solve large problem instances very efficiently; the polynomial involved is usually of low degree. For example, in a network on  $v$  vertices a maximum flow can be determined in  $O(v^3)$  time (Dinic, 1970), (Karzanov, 1974), (Even, 1976) and a maximum weight matching can be found in  $O(v^3)$  time (Gabow, 1976), (Lawler, 1976).

It is commonly conjectured that no good algorithm exists for the general integer programming problem. A similar conjecture holds with respect to many other combinatorial problems that are notorious for their computational intractability (Johnson, 1973), such as graph coloring, set covering, travel-

ling salesman and job shop scheduling problems. Typically, all optimization methods that have been proposed so far for these problems are of an enumerative nature. They involve some type of backtrack search in a tree whose depth is bounded by a polynomial function of problem size. In the worst case, those algorithms require superpolynomial (e.g., exponential) time.

For the time being, we shall loosely denote the class of all problems solvable in polynomial time by  $P$  and the class of all problems solvable by polynomial-depth backtrack search by  $NP$ . It is obvious that  $P \subset NP$ .

The battle against hard combinatorial problems dragged on until S. Cook (Cook, 1971) and R.M. Karp (Karp, 1972) showed the way to peace with honor (Fisher, 1976). They exhibited the existence within  $NP$  of a large class of so-called  $NP$ -complete problems (Knuth, 1974) that are equivalent in the following sense:

- none of them is known to belong to  $P$ ;
- if one of them belongs to  $P$ , then all problems in  $NP$  belong to  $P$ , which would imply that  $P = NP$ .

$NP$ -completeness of a problem is generally accepted as strong evidence against the existence of a good algorithm and consequently as a justification for the use of enumerative optimization methods such as branch-and-bound or of approximation algorithms. By way of examples, even restricted versions of all hard problems mentioned above are  $NP$ -complete.

$NP$ -completeness theory has proved to be an extremely fruitful research area. The computational complexity of many

types of combinatorial problems has been analyzed in detail. Under the assumption that  $P \neq NP$ , this analysis often reveals the existence of a sharp borderline between  $P$  and the class of NP-complete problems that is expressible in terms of natural problem parameters. A truly remarkable feature of the theory is the large proportion of time in which a given problem in NP can be shown to be either in  $P$  or NP-complete. Moreover, the two types of problems really have proved to be quite different in character. As mentioned, extremely large instances of problems in  $P$  are efficiently solvable, whereas only relatively small instances of NP-complete problems admit of solution by tedious enumerative procedures. Establishing NP-completeness of a problem provides important information on the quality of the algorithm that one can hope to find, which makes it easier to accept the computational burden of enumerative methods or to face the inevitability of a heuristic approach.

In this paper we shall not attempt to present an exhaustive survey of all NP-completeness results (Karp,1972), (Karp,1975), (Garey and Johnson,1978A). Instead, we shall examine some typical NP-complete problems, demonstrate some typical proof techniques and discuss some typical open problems (cf. (Aho et al.,1974), (Savage,1976), (Reinolds et al., 1977)). We hope that as a result the reader will be stimulated to consider the computational complexity of his or her favorite combinatorial problem and to draw the algorithmic implications.

## 2. CONCEPTS OF COMPLEXITY THEORY

A formal theory of NP-completeness would require the introduction of Turing machines as theoretical computing

devices (Aho et al., 1974). Turing machines can be designed to recognize languages; the input to the machine consists of a string, which is accepted if and only if it belongs to the language.  $P$  is then defined as the class of languages recognizable in polynomial time by a deterministic Turing machine, an artificial but theoretically accessible model for an ordinary computer, that is polynomially related to more realistic models such as the random access machine (Aho et al., 1974).  $NP$  is similarly defined as the class of languages recognizable in polynomial time by a nondeterministic Turing machine, which can be thought of as a deterministic one that can duplicate its current state in zero time whenever convenient.

For our purposes, we may identify languages with recognition problems, which require a yes/no answer, and strings with instances of such problems. A recognition problem is in  $P$  if the existence of a feasible solution can be determined in polynomial time; it is in  $NP$  if any feasible solution can be recognized as such in polynomial time.

Problem  $p'$  is said to be reducible to problem  $p$  (notation:  $p' \leq p$ ) if for any instance of  $p'$  an instance of  $p$  can be constructed in polynomial time such that solving the instance of  $p$  will solve the instance of  $p'$  as well. Informally, the reducibility of  $p'$  to  $p$  implies that  $p'$  can be considered as a special case of  $p$ , so that  $p$  is at least as hard as  $p'$ .

$p$  is called  $NP$ -hard if  $p' \leq p$  for every  $p' \in NP$ . In that case,  $p$  is at least as hard as any problem in  $NP$ .  $p$  is called  $NP$ -complete if  $p$  is  $NP$ -hard and  $p \in NP$ . Thus, the  $NP$ -complete problems are the most difficult problems in  $NP$ .

A good algorithm for a NP-complete problem  $p$  could be used to solve all problems in NP in polynomial time, since for any instance of such a problem the construction of the corresponding instance of  $p$  and its solution can be both effected in polynomial time. Note these two important observations:

- It is very unlikely that  $P = NP$ , since NP contains many notorious combinatorial problems, for which in spite of a considerable research effort no good algorithms have been found so far.
- It is very unlikely that  $p \in P$  for any NP-complete  $p$ , since this would imply that  $P = NP$  by the earlier argument.

The first NP-completeness result is due to Cook (Cook, 1971). He designed a "master reduction" to prove that every problem in NP is reducible to the SATISFIABILITY problem. This is the problem of determining whether a boolean expression in conjunctive normal form assumes the value true for some assignment of truth values to the variables; for instance, the expression is satisfied if  $x_1 = \bar{x}_1 = x_1 = \text{true}$ . Given this result, one can establish NP-completeness of some  $p \in NP$  by specifying a reduction  $p' \alpha p$  with  $p'$  already known to be NP-

$$(x_1) \wedge (\bar{x}_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3) \wedge (x_3) \quad (1)$$

-complete: for every  $p'' \in NP$ ,  $p'' \alpha p'$  and  $p' \alpha p$  then imply that  $p'' \alpha p$  as well. In the following section we shall present several such proofs.

As far as optimization problems are concerned, we shall

reformulate a minimization (maximization) problem by asking for the existence of a feasible solution with value at most (at least) equal to a given threshold. It should be noted that membership of NP for this recognition version does not immediately imply membership of NP for the original optimization problem as well. In particular, proposing a systematic search over a polynomial number of threshold values, guided by positive and negative answers to the existence question, is not a valid argument. This is because a nondeterministic Turing machine is only required to give positive answers in polynomial time. Indeed, no complement of any NP-complete problem is known to be NP!

As an obvious consequence of the above discussion, NP-completeness can only be proved with respect to a recognition problem. However, the corresponding optimization problem might be called NP-hard in the sense that the existence of a good algorithm for its solution would imply that  $P = NP$ .

So far, we have been purposefully vague about the specific encoding of problem instances. Suffice it to say that most reasonable encodings are polynomially related. One important exception with respect to the representation of positive integers will be dealt with in Section 3.5.

The classes P and NP are certainly not the only classes of interest to complexity theorists. There is, for instance, the class PSPACE, which contains all languages recognizable in polynomial space. This class is the same for both deterministic and nondeterministic Turing machines. There is a notion of PSPACE-completeness analogous to NP-completeness. The standard PSPACE-complete problem is "quantified" SATISFIABILITY or QSATISFIABILITY (Stockmeyer and Meyer, 1973), (Aho et al.,

1974). An instance of this problem results from the quantification of boolean expression by both existential and universal quantifiers, e.g.

$$\forall x_1 \exists x_2 \forall x_3 [(x_1 \vee x_2) \wedge (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)]$$

The question then becomes: does there exist a truth assignment to the existentially quantified variables such that the reduced expression (in terms of universally quantified variables) is a tautology?

The QSATISFIABILITY problem can be viewed as defining a game between two players: an "existential" player who tries to select values to make the expression true and a "universal" player who tries to defeat him. This insight has suggested a rich lore of simply-structured combinatorial games for which the problem of determining the outcome of optimal play is PSPACE-complete (Schaefer,1976). One example of such a game is "generalized hex" (Even and Tarjan,1976).

Clearly  $NP \subset PSPACE$ . It has not yet been proved that  $NP \neq PSPACE$ . However, it seems reasonable to conjecture that this is the case and that PSPACE-complete problems are more difficult than NP-complete ones.

We should also mention that there are problems which have been shown to be inherently more difficult than any problem in PSPACE. For example, consider the "reachability" problem for vector addition systems: given a finite set of vectors with integer components, an initial vector  $u$  and a final vector  $v$ , is it possible to add vectors from the given set to  $u$ , with repetition allowed, so as to reach  $v$ , while always staying within the positive orthant? This problem has been shown to

be decidable (Sacerdote and Tenney, 1977) but to require exponential space (Lipton, 1976). Some other combinatorial problems have been shown to require exponential space as well (Stockmeyer and Meyer, 1973).

### 3. NP-COMPLETENESS RESULTS

In this section we shall establish some basic-NP-completeness results according to the scheme given in Figure 1, and we shall mention similar results for related problems. Our proofs will be sketchy; for instance, it will be left to the reader to verify the membership of NP for the problems considered and polynomial-boundedness of the reductions presented.

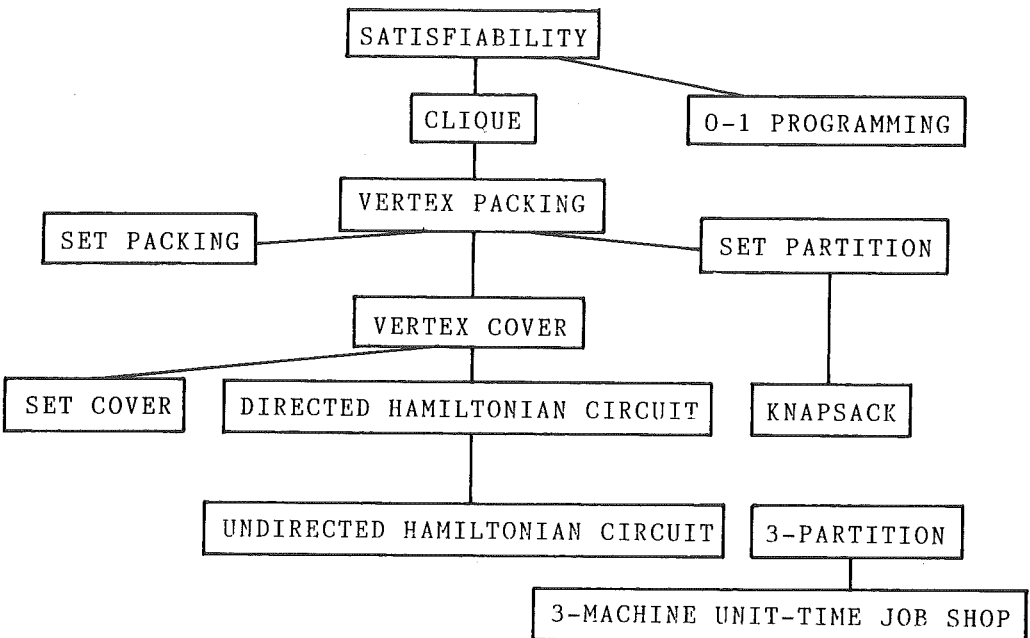


Figure 1 - Scheme of reductions.



### 3.1 SATISFIABILITY

**SATISFIABILITY:** Given a conjunctive normal form expression, i.e. a conjunction of clauses  $C_1, \dots, C_s$ , each of which is a disjunction of literals  $x_1, \bar{x}_1, \dots, x_t, \bar{x}_t$  where  $x_1, \dots, x_t$  are boolean variables and  $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_t$  denote their complements, is there a truth assignment to the variables such that the expression assumes the value true?

#### NP-completeness

It has already been mentioned that SATISFIABILITY was the first problem shown to be NP-complete. The proof of this key result is quite technical and beyond the scope of this paper; we refer to (Cook, 1971), (Aho et al., 1974). We shall take (1) as an example of an instance of SATISFIABILITY to illustrate subsequent reductions.

#### Related results

Even the 3-SATISFIABILITY problem, i.e. SATISFIABILITY with at most three literals per clause, is NP-complete (Cook, 1971). The 2-SATISFIABILITY problem, however, belongs to P. Often, the borderline between easy and hard problems is crossed when a problem parameter increases from two to three. This phenomenon will be encountered on various occasions below, and is held by some to explain the division of mankind in two and not three sexes.

## 3.2. CLIQUE, VERTEX PACKING and VERTEX COVER

CLIQUE: Given an undirected graph  $G = (V, E)$  and an integer  $k$ , does  $G$  have a set of at least  $k$  pairwise adjacent vertices?

VERTEX PACKING (INDEPENDENT SET): Given an undirected graph  $G' = (V', E')$  and an integer  $k'$ , does  $G'$  have a set of at least  $k'$  pairwise non-adjacent vertices?

VERTEX COVER: Given an undirected graph  $G = (V, E)$  and an integer  $k$ , does  $G$  have a set of at most  $k$  vertices such that every edge is incident with at least one of them?

NP-completeness

SATISFIABILITY  $\approx$  CLIQUE:

$$V = \{(x, i) \mid x \text{ is a literal in clause } C_i\};$$

$$E = \{(x, i), (y, j)\} \mid x \neq \bar{y}, i \neq j\};$$

$k = s.$

Cf. Figure 2. We have created a vertex for each occurrence of a literal in a clause and an edge for each pair of literals that can be assigned the value true independently of each other. A clique of size  $k$  corresponds to  $s$  literals (one in each clause) that satisfy the expression and vice versa (Cook, 1971). The NP-completeness of CLIQUE now follows from (i) its membership of NP, (ii) the polynomial-boundedness of the reduction, and (iii) the NP-completeness of SATISFIABILITY.

CLIQUE  $\alpha$  VERTEX PACKING:

$$V' = V;$$

$$E' = \{\{i,j\} \mid i = j, \{i,j\} \notin E\};$$

$$k' = k.$$

Cf. Figure 3. A set of vertices is independent in  $G'$  if and only if it is a clique in the complementary graph  $G$ . This relation between the two problems belongs to folklore.

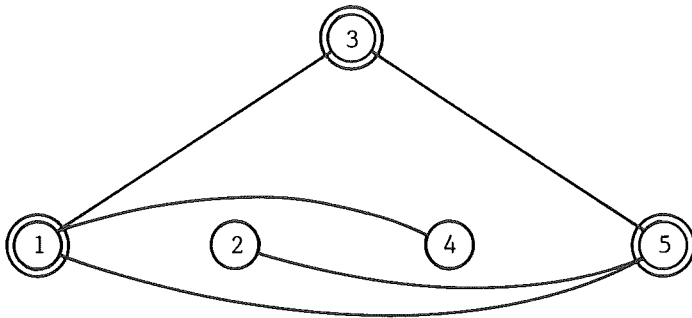


Figure 2 - Instance of CLIQUE for the example.

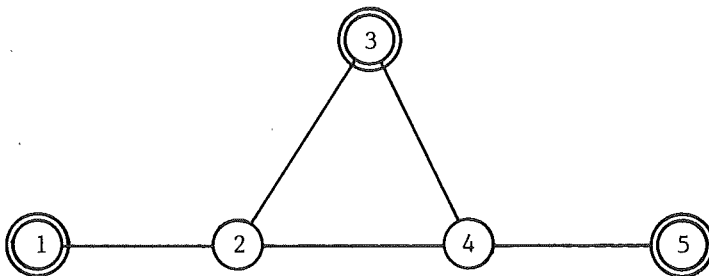


Figure 3 - Instance of VERTEX PACKING for the example.

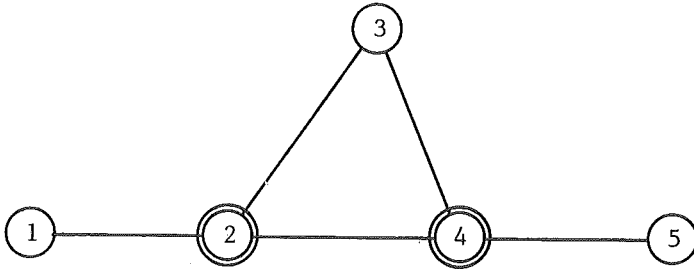


Figure 4 - Instance of VERTEX COVER for the example.

VERTEX PACKING  $\alpha$  VERTEX COVER:

$$V = V';$$

$$E = E';$$

$$K = |V'| - k'.$$

Cf. Figure 4. It is easily seen that a set of vertices covers all edges if and only if its complement is independent (Karp, 1972).

#### Related results

Given the above results, it is not surprising (though less easy to prove) that the problems of determining whether the vertex set of a graph can be covered by at most  $k$  cliques or, after complementation, by at most  $k$  independent sets are NP-complete (Karp, 1972). These problems are known as CLIQUE COVER and GRAPH COLORABILITY respectively. In fact, it is

already an NP-complete problem to determine if a planar graph with vertex degree at most 4 is 3-colorable (Garey et al., 1976C), whereas 2-colorability is equivalent to bipartiteness and can be checked in polynomial time.

### 3.3. SET PACKING, SET COVER AND SET PARTITION

**SET PACKING:** Given a finite set  $S$ , a finite family  $s$  of subsets of  $S$  and an integer  $m$ , does  $s$  include a subfamily  $s'$  of at least  $m$  pairwise disjoint sets?

**SET COVER:** Given a finite set  $S$ , a finite family  $s$  of subsets of  $S$  and an integer  $m$ , does  $s$  include a subfamily  $s'$  of at most  $m$  sets such that  $\bigcup_{S' \in s'} S' = S$ ?

**SET PARTITION (EXACT COVER):** Given a finite set  $S$  and a finite family  $s$  of subsets of  $S$ , does  $s$  include a subfamily  $s'$  of pairwise disjoint sets such that  $\bigcup_{S' \in s'} S' = S$ ?

NP-completeness

VERTEX PACKING  $\alpha$  SET PACKING:

$$S = E';$$

$$S = \{ \{i, j\} \mid \{i, j\} \in E' \mid i \in V' \};$$

$$m = k'.$$

VERTEX COVER  $\alpha$  SET COVER:

delete the primes in the above reduction.

VERTEX PACKING and VERTEX COVER are easily recognized as special cases of SET PACKING and SET COVER respectively, and these reductions require no further comment.

VERTEX PACKING  $\alpha$  SET PARTITION:

$$S = E' \cup \{1, \dots, k'\};$$

$$s = \{S_{ih} \mid i \in V', h = 1, \dots, k'\} \cup$$

$$\{S_{\{i,j\}} \mid \{i,j\} \in E'\} \text{ where}$$

$$S_{ih} = \{\{i,j\} \mid \{i,j\} \in E'\} \cup \{h\},$$

$$S_{\{i,j\}} = \{\{i,j\}\}.$$

Cf. Figure 5. Suppose that  $G'$  has an independent set  $U' \subseteq V'$  of size  $k'$ , say,  $U' = \{v_1, \dots, v_{k'}\}$ . Then the sets  $S_{v_1,1}, \dots, S_{v_{k'},k'}$  are pairwise disjoint, and the elements of  $S$

not contained in any of them belong to  $E'$ . It follows that a partition of  $S$  is given by

$$\{S_{v_1,1}, \dots, S_{v_{k'},k'}\} \cup \{S_{\{i,j\}} \mid \{i,j\} \in E', i \notin U', j \notin U'\}.$$

Conversely, suppose that there exists a partition  $s'$  of  $S$ . Then  $S'$  contains  $k'$  pairwise disjoint sets  $S_{v_1,1}, \dots, S_{v_{k'},k'}$ ,

and the vertices  $v_1, \dots, v_k$ , clearly constitute an independent set of size  $k'$  in  $G'$ . This reduction simplifies the NP-completeness proof given in (Karp,1972).

S	S <sub>1</sub>	S <sub>2</sub>	S <sub>3</sub>	S <sub>4</sub>	S <sub>5</sub>	S <sub>6</sub>	S <sub>7</sub>	S <sub>8</sub>	S <sub>9</sub>	S <sub>10</sub>	S <sub>11</sub>	S <sub>12</sub>	S <sub>13</sub>	S <sub>14</sub>	S <sub>15</sub>	S <sub>16</sub>	S <sub>17</sub>	S <sub>18</sub>	S <sub>19</sub>	S <sub>20</sub>
{1,2}	⊙	•				•	•				•	•					•			
{2,3}		•	•				•	⊙					•	•				•		
{2,4}		•		•			•		•				•	•					⊙	
{3,4}			•	•			•	⊙	•					•	•					•
{4,5}				•	•				•	•					•	⊙				•
1	⊙	•	•	•	•															
2						•	•	⊙	•	•										
3											•	•	•	•	⊙					

Figure 5 - Instance of SET PARTITION for the example.

Related results

Even the EXACT 3-COVER problem, where all subsets in  $S$  are constrained to be of size 3, is NP-complete, since it is an obvious generalization of the 3-DIMENSIONAL MATCHING problem, proved NP-complete in (Karp,1972). An EXACT 2-COVER corresponds to a perfect matching in a graph, which can be found in polynomial time. The existence of good matching algorithms proves that EDGE PACKING and EDGE COVER problems are members of P.

## 3.4. DIRECTED and UNDIRECTED HAMILTONIAN CIRCUIT

**DIRECTED HAMILTONIAN CIRCUIT:** Given a directed graph  $H = (W, A)$ , does  $H$  have a directed cycle passing through each vertex exactly once?

**UNDIRECTED HAMILTONIAN CIRCUIT:** Given an undirected graph  $G = (V, E)$ , does  $G$  have a cycle passing through each vertex exactly once?

NP-completeness

VERTEX COVER  $\propto$  DIRECTED HAMILTONIAN CIRCUIT:

$$W = \{(i, j), \{i, j\}, (j, i) \mid \{i, j\} \in E\} \cup \{1, \dots, k\};$$

$$A = \{(\{i, j\}, \{i, j\}), (\{i, j\}, (i, j)), (\{j, i\},$$

$$\{i, j\}), (\{i, j\}, (j, i)) \mid \{i, j\} \in E$$

$$\cup \{((h, i), (i, j)) \mid \{h, i\}, \{i, j\} \in E, h \neq j\}$$

$$\cup \{((i, j), h), (h, (i, j)), ((j, i), h), (h, (j, i))$$

$$\mid \{i, j\} \in E, h = 1, \dots, k\}.$$

Cf. Figure 6. For each edge  $\{i, j\}$  in  $G$  we have created a configuration in  $H$  consisting of three vertices  $(i, j), \{i, j\}, (j, i)$  and four arcs, as shown in the figure. The configurations are linked by arcs from  $(h, i)$  to  $(i, j)$  for  $h \neq j$ . Further, we have added  $k$  vertices  $1, \dots, k$  and all arcs between



them and the vertices of type  $(i,j)$ .

Suppose that  $G$  has a vertex cover  $U \subset V$  of size  $k$ , say,  $U = \{v_1, \dots, v_k\}$ . The edge set  $E$  can be written as

$$E = \{ \{v_h, w_{h1}\}, \dots, \{v_h, w_{hm_h}\} \mid h = 1, \dots, k \}$$

and it is easily checked that a hamiltonian circuit in  $H$  is given by

$$\begin{aligned} &(1, (v_1, w_{11}), \{v_1, w_{11}\}, (w_{11}, v_1), \dots, (v_1, w_{1m_1}), \\ &\{v_1, w_{1m_1}\}, (w_{1m_1}, v_1), \dots, k, (v_k, w_{k1}), \{v_k, w_{k1}\}, (w_{k1}, v_k), \\ &\dots, (v_k, w_{km_k}), \{v_k, w_{km_k}\}, (w_{km_k}, v_k), 1). \end{aligned}$$

Conversely, suppose that  $H$  has a hamiltonian circuit. By deletion of all arcs incident with vertices  $1, \dots, k$ , the circuit is decomposed into  $k$  paths. A path starting at  $(i,j)$  for  $\{i,j\} \in E$  has to go on to visit  $\{i,j\}$  and  $(j,i)$ ; then it ends or goes on to visit  $(i,j')$ ,  $\{i,j'\}$ ,  $(j',i)$  for some  $\{i,j\} \in E$ , etc. Thus, this path corresponds to a specific vertex  $i \in V$ , covering edges  $\{i,j\}$ ,  $\{i,j'\}$ , etc. Since the circuit passes through each  $\{i,j\}$  exactly once, each edge  $\{i,j\} \in E$  is covered by one of  $k$  specific vertices, which therefore constitute a vertex cover of size  $k$  in  $G$ .

The above reduction is a modification of the original construction due to E. L. Lawler (Karp, 1972), based on ideas of M. Fuerer (Schuster, 1976) and P. van Emde Boas.

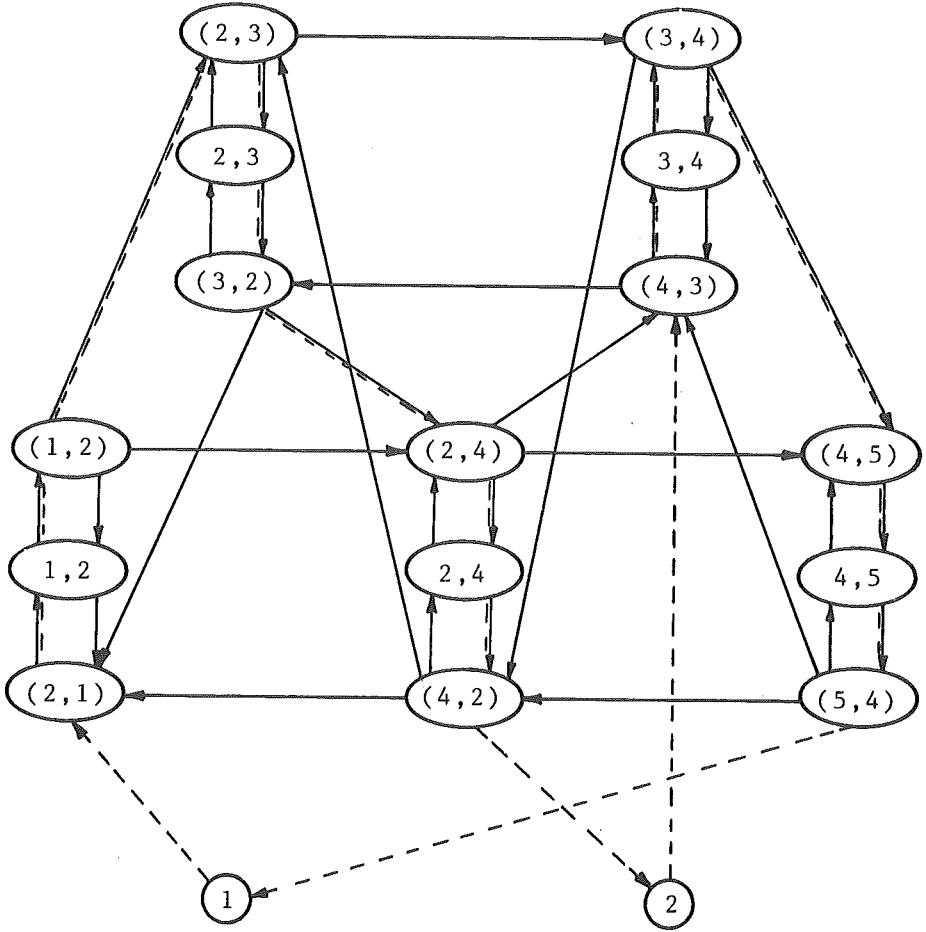


Figure 6 - Instance of DIRECTED HAMILTONIAN CIRCUIT for the example. Not all arcs incident with vertices  $1, \dots, k$  have been drawn.

DIRECTED HAMILTONIAN CIRCUIT  $\alpha$  UNDIRECTED HAMILTONIAN CIRCUIT:

$$V = \{(i, \text{in}), (i, \text{mid}), (i, \text{out}) \mid i \in W\};$$

$$E = \{(i, \text{in}), (i, \text{mid})\}, \{(i, \text{mid}), (i, \text{out})\} \mid i \in W \} \cup \{(i, \text{out}), (j, \text{in})\} \mid (i, j) \in A\}.$$

The one-one correspondence between undirected hamiltonian circuits in G and directed hamiltonian circuits in H is evident. This reduction is due to R. E. Tarjan (Karp, 1972).

#### Related results

The above results have been strengthened in various ways. For instance, the UNDIRECTED HAMILTONIAN CIRCUIT problem remains NP-complete if G is planar, triply-connected and regular of degree 3 (Garey et al., 1976D) or if G is bipartite (Krishnamoorthy, 1975). The latter result is a simple extension of the last reduction given above and we recommend it as an exercise.

NP-hardness of the (general) TRAVELING SALESMAN problem is another obvious consequence. Intricate NP-hardness proofs for the EUCLIDEAN TRAVELLING SALESMAN problem can be found in (Garey et al., 1976A), (Papadimitriou, 1977). It is well known that TRAVELING SALESMAN is a special case of the problem of finding a maximum weight independent set in the intersection of three matroids. Thus, the 3-MATRID INTERSECTION problem is NP-hard, whereas 2-MADROID INTERSECTION problems, such as finding an optimal linear assignment or spanning arborescence, can be solved in polynomial time (Lawler, 1976).

The TRAVELING SALESMAN problem serves as a prototype for a whole class of routing problems where, given a mixed graph consisting of a set  $V$  of vertices, a set  $E$  of (undirected) edges and a set  $A$  of (directed) arcs, a salesman has to find a minimum-weight tour passing through subsets  $V' \subset V$ ,  $E' \subset E$  and  $A' \subset A$ . If  $V' = \emptyset$ ,  $E' = E$  and  $A' = A$ , we have the CHINESE POSTMAN problem, which can be solved in polynomial time in the undirected or directed case ( $A = \emptyset$  or  $E = \emptyset$ ) (Edmonds, 1965B), (Edmonds and Johnson, 1973), but is NP-hard in the mixed case (Papadimitriou, 1976). For the case that only  $V' = \emptyset$ , NP-hardness has been established for the UNDIRECTED and DIRECTED RURAL POSTMAN problems ( $A = \emptyset$  and  $E = \emptyset$  respectively) (Lenstra and Rinnooy Kan, 1976) and for the STACKER-CRANE problem ( $E' = \emptyset$ ,  $A' = A$ ) (Frederickson et al., 1976).

### 3.5. 0-1 PROGRAMMING, KNAPSACK AND 3-PARTITION

0-1 PROGRAMMING: Given an integer matrix  $A$  and an integer vector  $b$ , does there exist a 0-1 vector  $x$  such that  $Ax \geq b$ ?

KNAPSACK: Given positive integers  $a_1, \dots, a_t, b$ , does there exist a subset  $T \subset \{1, \dots, t\}$  such that  $\sum_{j \in T} a_j = b$ ?

3-PARTITION: Given positive integers  $a_1, \dots, a_t, b$ , do there exist  $t$  pairwise disjoint 3-element subsets  $S_i \subset \{1, \dots, 3t\}$  such that  $\sum_{j \in S_i} a_j = b$  ( $i = 1, \dots, t$ )?

NP-completeness

SATISFIABILITY  $\alpha$  0-1 PROGRAMMING:

$$a_{ij} = \left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ if } x_j \text{ is a literal in clause } C_i, \\ -1 \text{ if } \bar{x}_j \text{ is a literal in clause } C_i, \\ 0 \text{ otherwise} \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} (i=1, \dots, s, \\ j=1, \dots, t); \end{array}$$

$$b_i = 1 - |\{j | \bar{x}_j \text{ is a literal in clause } C_i\}| \quad (i=1, \dots, s).$$

cf. Figure 7 and (Karp, 1972).

$\begin{array}{rcl} X_1 & \geq & 1 \\ X_1 + X_2 - X_3 & \geq & -1 \\ X_3 & \geq & 1 \end{array}$
--

Figure 7-Instance of 0-1 PROGRAMMING for the example.

SET PARTITION  $\propto$  KNAPSACK:

Given  $S = \{e_1, \dots, e_s\}$  and  $S = \{S_1, \dots, S_t\}$ , we define

$$\epsilon_{ij} = \left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ if } e_i \in S_j \\ 0 \text{ if } e_i \notin S_j \end{array} \right\} \quad (i=1, \dots, s, \quad j=1, \dots, t),$$

$$u = t + 1,$$

and specify the reduction by

$$a_j = \sum_{i=1}^S \epsilon_{ij} u^{i-1} \quad (j=1; \dots, t);$$

$$b = (u^S - 1)/t.$$

cf. Figure 8. The one-one correspondence between solutions to KNAPSACK and SET PARTITION is easily verified (Karp, 1972).

Given this results, the reader should have little difficulty in establishing NP-completeness for the PARTITION problem, i.e. KNAPSACK with  $\sum_{j=1}^t a_j = 2b$ .

3-PARTITION has been proved NP-complete through a complicated sequence of reductions, which can be found in (Garey and Johnson, 1975).

$\epsilon_{ij}$ ↕	① 2 3 4 5 6 7 ⑧ 9 10 11 12 13 14 ⑮ 16 17 ⑰ 19 20	$a_j$	$b$
1	① 1 0 0 0 1 1 0 0 0 1 1 0 0 0 1 0 0 0 0	$\epsilon_{1j} \cdot u^0$	$u^0$
2	0 1 1 0 0 0 1 ① 0 0 0 1 1 0 0 0 1 0 0 0	$\epsilon_{2j} \cdot u^1$	$u^1$
3	0 1 0 1 0 0 1 0 1 0 0 1 0 1 0 0 0 ① 0 0	$\epsilon_{3j} \cdot u^2$	$u^2$
4	0 0 1 1 0 0 0 ① 1 0 0 0 1 1 0 0 0 0 1 0	$\epsilon_{4j} \cdot u^3$	$u^3$
5	0 0 0 1 1 0 0 0 1 1 0 0 0 1 ① 0 0 0 0 1	$\epsilon_{5j} \cdot u^4$	$u^4$
6	① 1 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	$\epsilon_{6j} \cdot u^5$	$u^5$
7	0 0 0 0 0 1 1 ① 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	$\epsilon_{7j} \cdot u^6$	$u^6$
8	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 1 1 ① 0 0 0 0 0	$\epsilon_{8j} \cdot u^7$	$u^7$

Figure 8 - Instance of KNAPSACK for the example, where  $s = 8, t = 20, u = 21$ .

## Binary vs. unary encoding

KNAPSACK was the first example of a NP-complete problem involving numerical data. The size of a problem instance is  $O(t \log b)$  in the standard binary encoding and  $O(tb)$  if a unary encoding is allowed. Readers will have noticed that the reduction SET PARTITION  $\alpha$  KNAPSACK is polynomial-bounded only with respect to a binary encoding. Indeed, KNAPSACK can be solved by dynamic programming in  $O(tb)$  time (Bellmore and Dreyfus, 1962), which might be called a pseudopolynomial algorithm in the sense that it is polynomial bounded only with respect to a unary encoding. Thus, the binary NP-completeness of KNAPSACK and its unary membership of P are perfectly compatible results, although it tends to make us think of KNAPSACK as less hard than other NP-complete problems.

3-PARTITION was the first example of a problem involving numerical data that remains NP-complete even if we measure the problem size by using the actual numbers involved instead of their logarithms. This strong or unary NP-completeness of 3-PARTITION indicates that already the existence of a pseudopolynomial algorithm for its solution would imply that  $P=NP$  (Garey and Johnson, 1978B).

Quite often, a binary NP-completeness proof involving KNAPSACK or PARTITION can be converted to a unary NP-completeness proof involving 3-PARTITION in a straightforward manner. Occasionally, however, the polynomial-boundedness of a reduction depends essentially on allowing a unary encoding for 3-PARTITION. An example of such a reduction is given in the next section.

## 3.6. 3-MACHINE UNIT-TIME JOB SHOP

3-MACHINE UNIT-TIME JOB SHOP: Given 3 machines  $M_1, M_2, M_3$  each of which can process at most one job at a time,  $n$  jobs  $J_1, \dots, J_n$  where  $J_j$  ( $j = 1, \dots, n$ ) consists of a chain of unit-time operations, the  $h$ -th of which has to be processed on machine  $\mu_{jh}$  with  $\mu_{jh} \neq \mu_{j, h-1}$  for  $h > 1$ , and an integer  $k$ , does there exist a schedule with length at most  $k$ ?

NP-completeness

3-PARTITION  $\propto$  3 MACHINE UNIT-TIME JOB SHOP:

$$n = 3t + 2;$$

$$\mu_j = (M_1, M_3, [M_1, M_2]^a, M_3) \quad (j=1, \dots, 3t);$$

$$\mu_{n-1} = ([M_2, M_3, M_2, M_1, M_2, M_1, [M_2, M_3]^b, M_1, M_2, M_1]^t);$$

$$\mu_n = ([M_3, M_2, M_3, M_2, M_1, M_2, [M_3, M_1]^b, M_2, M_1, M_2]^t);$$

$$k = (2b + 9)t;$$

where  $[s]^h = s, [s]^{h-1}$  for  $h > 1$  and  $[s]^1 = s$ .

Note that both  $J_{n-1}$  and  $J_n$  consist of a chain of operations of length equal to the threshold  $k$ . We may assume the  $h$ -th operations of these chains to be completed at time  $h$ , since otherwise the schedule length would exceed  $k$ . This



leaves a pattern of idle machines for the other jobs that can be described as

$$([\overline{M_1}]^3, [\overline{M_3}]^3, [\overline{M_1}, \overline{M_2}]^b, [\overline{M_3}]^3)^t$$

(cf. figure 9). We will show that this pattern can be filled properly if and only if 3-PARTITION has a solution.

Suppose that 3-PARTITION has a solution  $(S_1, \dots, S_t)$ . In this case, processing  $J_j$  with  $j \in S_i$  entirely within the interval  $[(2b+9)(i-1), (2b+9)i]$  ( $j=1, \dots, 3t, i=1, \dots, t$ ) yields a schedule with length  $k$ .

Conversely, suppose that there exists a schedule with length  $k$ . We will prove that in such a schedule exactly three jobs are started in  $[0, 2b+9]$  and that they are completed in this interval as well; clearly, these jobs indicate a 3-element subset  $S_1$  with  $\sum_{j \in S_1} a_j = b$ . One easily proves by induction that  $S_i$  is similarly defined by the jobs started and completed in  $[(2b+9)(i-1), (2b+9)i]$  ( $1 < i \leq t$ ).

If  $J_j$  starts in  $[0, 2b+9]$ , its subchain of operations completed in that interval is one of four types:

type 1:  $(M_1)$ ;

type 2:  $(M_1, M_3, [\overline{M_1}, \overline{M_2}]^h)$  ( $0 \leq h \leq a_j$ );

type 3:  $(M_1, M_3, [\overline{M_1}, \overline{M_2}]^h, M_1)$  ( $0 \leq h < a_j$ );

type 4:  $(M_1, M_3, [\overline{M_1}, \overline{M_2}]^{a_j}, M_3)$ .

Let  $x_i$  denote the number of subchains of type  $i$  and  $y_i$  the number of operations on  $M_2$  in subchains of type  $i$ . We have to prove that  $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ ,  $x_4 = 3$ . Observing that a schedule of length  $k$  contains no idle unit-time periods, we have

$$(1) \quad x_1 + x_2 + y_2 + 2x_3 + y_3 + x_4 + y_4 = b+3;$$

$$(2) \quad y_2 + y_3 + y_4 = b;$$

$$(3) \quad x_2 + x_3 + 2x_4 = 6$$

Subtracting (1) from the sum of (2) and (3), we obtain  $-x_1 - x_3 + x_4 = 3$  and therefore  $x_4 \geq 3$ . Also, (3) implies that  $x_4 \leq 3$ . It follows that  $x_4 = 3$ , and  $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ .

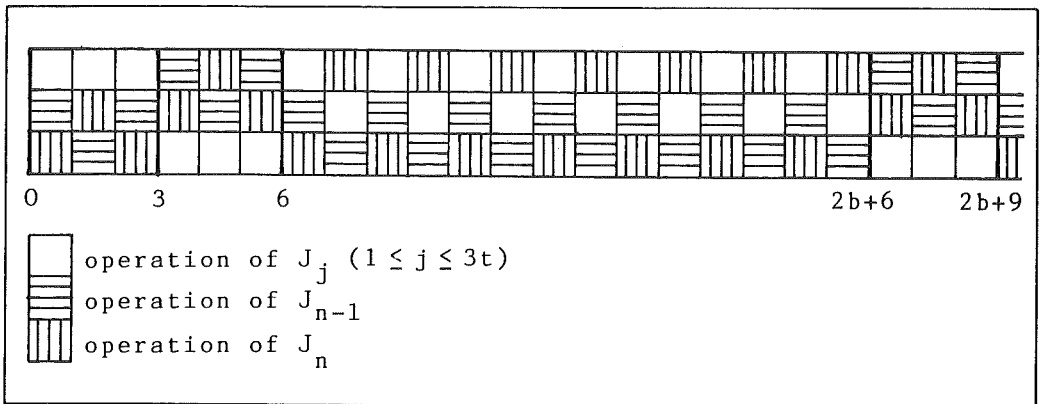


Figure 9 - First part of 3-MACHINE UNIT-TIME JOB SHOP schedule corresponding to an instance of 3-PARTITION with  $b = 7$ .

## Related results

The complexity of the 2-MACHINE UNIT-TIME JOB SHOP problem is unknown; to introduce a competitive element we shall be happy to award a chocolate windmill to the first person establishing membership of P or NP-completeness for this problem. If the processing times of the operations are allowed to be equal to 1 or 2, the 2-machine problem can be proved NP-complete by a reduction similar to (but simpler than) the above one; this improves upon related results given in (Garey et al., 1976B), (Lenstra et al., 1977). If each job has at most two operations, the 2-machine problem belongs to P even for arbitrary processing times (Jackson, 1956).

These results form but a small fraction of the extensive complexity analysis carried out for scheduling problems. We refer to (Ullman, 1975), (Garey and Johnson, 1975), (Coffman, 1976) (Garey et al., 1976B), (Lenstra et al., 1977), (Lenstra and Rinnooy Kan, 1977) for further details and to (Graham et al., 1978) for a concise survey of the field.

## 4. CONCLUDING REMARKS

We hope that the preceding section has conveyed some of the flavor and elegance of NP-completeness results. In only a few years an impressive amount of results has been obtained. Nevertheless, there are still plenty of open problems, for which neither a polynomial algorithm nor an NP-completeness proof is available. We shall mention four famous ones, on

whose complexity status little or no progress has been made so far.

#### (a) GRAPH ISOMORPHISM

This is the problem of determining whether there exists a one-one mapping between the vertex sets of two graphs which preserves the adjacency relation. The essential nature of the problem does not change if we restrict our attention to graphs of certain types such as bipartite or regular ones; these problems are polynomially equivalent to the general case (Booth, 1976). The status of the problem is totally unknown and we do not dare to guess the final outcome.

#### (b) MATROID PARITY

This problem is interesting because it generalizes both the matroid intersection problem and the nonbipartite matching problem (Lawler, 1976). Despite serious investigation, its status is far from clear. A special case of the matroid parity problem is as follows. Given a connected graph  $G$  with an even number of edges, arbitrarily paired (i.e., each edge  $e$  has a uniquely defined mate  $e$ ), does  $G$  have a spanning tree  $T$  with the property that if an edge is contained in  $T$ , then its mate is in  $T$  as well? An NP-completeness proof for this special case would, of course, resolve the question for the general problem. On the other hand, a polynomial-time algorithm for this special case would probably suggest a similar procedure for the general problem.

#### (c) 3-MACHINE UNIT-TIME PARALLEL SHOP

This problem involves the scheduling of unit-time jobs

on three identical parallel machines subject to precedence constraints between the jobs, so as to meet a common deadline of the jobs. For a variable number of machines, the problem is NP-complete (Ullman,1975), (Lenstra and Rinnooy Kan,1977), the special case of three-type precedence constraints can be solved in polynomial time (Hu,1961). The 2-machine problem belongs to P (Coffman and Graham,1972), even if for each job a time-interval is specified in which it has to be processed (Garey and Johnson,1977). The 3-machine problem has remained open in spite of vigorous attacks. In this case we would be willing to extrapolate on the magic quality of three-ness and conjecture NP-completeness.

(d) LINEAR PROGRAMMING (see Editor's note in the end of this paper)

This is perhaps the most vexing open problem. The simplex method performs very well in practice and usually requires time linear in the number of constraints. On certain weird polytopes, however, it takes exponential time (Klee and Minty, 1972). Fortunately, in this case there is circumstantial evidence against NP-completeness. Thanks to duality theory, determining the existence or non-existence of a feasible solution are equally hard problems, and NP-completeness of LINEAR PROGRAMMING would therefore imply NP-completeness for the complements of all other NP-complete problems as well. However, as mentioned, it is not even known whether the complement of any NP-complete problem belongs to NP. In addition to the above rather technical argument, it seems highly unlikely that all NP-complete problems would allow a polynomial-bounded linear programming formulation.

Interpretation of NP-completeness results as more or less definite proofs of computational intractability has stimulated the design and analysis of fast approximation algorithms.

With respect to the worst-case analysis of such algorithms, a wide variety of outcomes is possible. We give the following examples.

(1) For the optimization version of the KNAPSACK problem, a solution within an arbitrary percentage  $\epsilon$  from the optimum can be found in time polynomial in  $t$  and  $1/\epsilon$  (Ibarra and Kim,1975), (Lawler,1977).

(2) For the EUCLIDEAN TRAVELING SALESMAN problem, a solution within 50% from the optimum can be found in polynomial time (Christofides,1976).

(3) For the GRAPH COLORABILITY problem, a solution within 100% from the optimum cannot be found in polynomial time unless  $P = NP$  (Garey and Johnson,1976A).

(4) For the general TRAVELING SALESMAN problem, a solution within any fixed percentage from the optimum cannot be found in polynomial time unless  $P=NP$  (Sahni and Gonzalez,1976).

We refer to (Garey and Johnson,1976B) for a survey in this area. Impressive advances have been made and more can be expected in the near future.

The above approach to performance guarantees may be accused of being overly pessimistic - cf. the simplex method with its exponential worst-case behavior! The probabilistic analysis of average or "almost everywhere" behavior, however,

requires the specification of a probability distribution over the set of all problem instances. For some problems, a natural distribution function is available and some intriguing results have been derived (Karp,1976), although technically this approach seems to be very demanding.

The worst-case analysis of approximation algorithms shows that there are significant differences in complexity within the class of NP-complete problems. These problems might be classifiable according to the best possible polynomial-time performance guarantee that one can get. Another refinement of the complexity measure may be based on the way in which numerical problem data are encoded, i.e. on the distinction between binary and unary encoding mentioned in Section 3.5. Several other ways of measuring problem size could be devised and each of them could be subjected to a complexity analysis, producing new information on the best type of algorithm that is likely to exist.

The concluding remarks above were intended to confirm to the reader that the field of computational complexity is still very much alive. In the first place, however, the theory of NP-completeness has yielded highly useful tools for the analysis of combinatorial problems that deserve to find acceptance in a wide circle of researchers and practitioners.

#### ACKNOWLEDGEMENTS

We have received valuable comments from several participants to "Discrete Optimization 1977" in Vancouver and are particularly grateful for various constructive suggestions by E.L.Lawler.

## REFERENCES

- A.V. AHO, J.E. HOPCROFT, J.D. ULLMAN, 1974 - The Design and Analysis of Computer Algorithms. Addison - Wesley, Reading, Mass.
- R.E. BELLMAN, S.E. DREYFUS, 1962 - Applied Dynamic Programming. Princeton University Press, Princeton, N.J.
- K.S. BOOTH, 1976 - Problems polynomially equivalent to graph isomorphism. In: J.F. TRAUE (ED.) (1976) Algorithms and Complexity: New Directions and Recent Results. Academic Press, New York, 435.
- N. CHRISTOFIDES, 1976 - Worst-case analysis of a new heuristic for the travelling salesman problem. Math. Programming, to appear.
- E.G. COFFMAN, JR.(ed.), 1976 - Computer and JobShop Scheduling Theory. Wiley, New York.
- E.G. COFFMAN, JR., R.L. GRAHAM, 1972 - Optimal scheduling for twoprocessor systems. Acta Informat. 1,200-213.
- S.A. COOK,1971 - The complexity of theorem proving procedures. Proc. 3rd Annual ACM Symp. Theory of Computing, 151-158.
- E.A. DINIC, 1970 - Algorithms for solution of a problem of maximum flow in a network with power estimation. Soviet Math. Dokl.11, 1277-1280.



- J. EDMONDS, 1965A - Paths, trees and flowers. *Canad. J. Math.* 17, 449-467.
- J. EDMONDS, 1965B - The Chinese postman's problem. *Operations Res.* 13, Suppl. 1, B73.
- J. EDMONDS, E.L. JOHNSON, 1973 - Matching, Euler tours and the Chinese postman. *Math. Programming* 5, 88-124.
- S. EVEN, 1976 - The max flow algorithm of Dinic and Karzanov: an exposition. Department of Computer Science, Technion, Haifa.
- S. EVEN, R.E. TARJAN, 1976 - A combinatorial problem which is complete in polynomial space. *J. Assoc. Comput. Mach.* 23, 710-719
- M.L. FISHER, 1976 - Private communication.
- G.N. FREDERICKSON, M.S. HECHT, C.E. KIM, 1976 - Approximation algorithms for some routing problems. *Proc. 17th Annual IEEE Symp. Foundations of Computer Science*, 216-227.
- H.N. GABOW, 1976 - An efficient implementation of Edmonds' algorithm for matching on graphs. *J. Assoc. Comp. Mach.* 23, 221-234.
- M.R. GAREY, R.L. GRAHAM, D.S. JOHNSON, 1976A - Some NP complete geometric problems. *Proc. 8th Annual ACM Symp. Theory of Computing*, 1022.
- M.R. GAREY, D.S. JOHNSON, 1975 - Complexity results for multi-processor scheduling under resource constraints. *SIAM J. Comp.*

4, 397-411.

M.R. GAREY, D.S. JOHNSON, 1976A - The complexity of near optimal graph coloring. J. Assoc. Comput. Mach. 23,43-49.

M.R. GAREY, D.S. JOHNSON, 1976B - Approximation algorithms for combinatorial problems: an annotated bibliography. In: J.F. TRAUB (ed.) (1975). Algorithms and Complexity: New Directions and Recent Results. Academic Press, New York, 41-52.

M.R. GAREY, D.S. JOHNSON, 1977 - Two-processor scheduling with start times and deadlines. SIAM J. Comput. 6, 416-426.

M.R. GAREY, D.S. JOHNSON, 1978A - Computers and Intractability: a Guide to the Theory of NP Completeness. Freeman, San Francisco, to appear.

M.R. GAREY, D.S. JOHNSON, 1978B - "Strong" NP completeness results: motivation, examples and implications. To appear.

M.R. GAREY, D.S. JOHNSON, R. SETHI, 1976B - The complexity of flowshop and jobshop scheduling. Math. Operations Res. 1, 117-129.

M.R. GAREY, D.S. JOHNSON, L. STOCKMEYER, 1976C - Some simplified NP-complete graph problems. Theoret. Comput. Sci. 1, 237-267.

M.R. GAREY, D.S. JOHNSON, R.E. TARJAN, 1976D - The planar Hamiltonian circuit problem is NPcomplete. SIAM J. Comput. 5, 704-714.

R.L. GRAHAM, E.L. LAWLER, J.K. LENSTRA, A.H.G. RINNOOY KAN, 1978 - Optimization and approximation in deterministic sequencing and scheduling: a survey. Ann. Discrete Math., to appear.

T.C. HU, 1961 - Parallel sequencing and assembly line problems. Operations Res. 9, 841-848

O.H. IBARRA, C.E. KIM, 1975 - Fast approximation algorithms for the knapsack and sum of subset problems. J. Assoc. Comput. Mach. 22, 463-468.

J.R. JACKSON, 1956 - An extension of Johnson's results on job lot scheduling. Naval Res. Logist. Quart. 3, 201-203.

D.S. JOHNSON, 1973 - Nearoptimal bin packing algorithms. Report MAC TR109, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Mass.

R.M. KARP, 1972 - Reducibility among combinatorial problems. In: R.E. MILLER, J.W. THATCHER (eds.), (1972) Complexity of Computer Computations. Plenum Press, New York, 85-103.

R.M. KARP, 1975 - On the computational complexity of combinatorial problems. Networks 5, 45-68.

R.M. KARP, 1976 - The probabilistic analysis of some combinatorial search algorithms. In: J.F. TRAUB (ed.), (1976) Algorithms and complexity: New Directions and Recent Results. Academic Press, New York, 1-19.

A.V. KARZANOV, 1974 - Determining the maximal flow in a network by the method of preflows. Soviet Math. Dokl. 15,

434-437.

V. KLEE, G.J. MINTY, 1972 - How good is the simplex algorithm?  
In: O. SHISHA (ed.), (1972) Inequalities III. Academic Press,  
New York, 159-175.

D.E. KNUTH, 1974 - A terminological proposal. SIGACT News 6.1,  
12-18.

M.S. KRISHNAMOORTHY, 1975 - An NPhard problem in bipartite  
graphs. SIGACT News 7, 1-26.

E.L. LAWLER, 1976 - Combinatorial Optimization: Networks and  
Matroids. Holt, Rinehart and Winston, New York.

E.L. LAWLER, 1977 - Fast approximation algorithms for knapsack  
problems. Memorandum UCB/ERL M77/45, Electronics Research  
Laboratory, University of California, Berkeley.

J.K. LENSTRA, A.H.G. RINNOOY KAN, 1976 - On general routing  
problems. Networks 6, 273-280.

J.K. LENSTRA, A.H.G. RINNOOY KAN, 1977 - Complexity of sched-  
uling under precedence constraints. Operations Res. 25, to  
appear.

J.K. LENSTRA, A.H.G. RINNOOY KAN, P. BRUCKER, 1977 - Complexity  
of machine scheduling problems. Ann Discrete Math. 1, 343-362.

R. LIPTON, 1976 - The reachability problem requires exponential  
space. Theoret. Comput. Sci., to appear

C.H. PAPADIMITRIOU, 1976 - On the complexity of edge travers-

ing. J. Assoc. Comput. Math. 23, 544-554.

C.H. PAPANITRIOU, 1977 - The Euclidean traveling salesman problem is NP-complete. Theoret. Comput. Sci. 4, 237-244.

E.M. REINGOLD, J. NIEVERGELT, N. DEO, 1977 - Combinatorial Algorithms: Theory and Practice. Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J.

G.S. SACERDOTE, R.L. TENNEY, 1977 - The decidability of reachability problem for vector addition systems. Proc. 9th Annual ACM Symp. Theory of Computing, 61-76.

S. SAHNI, T. GONZALEZ, 1976 - P-complete approximation problems. J. Assoc. Comput. Math. 23, 555-565.

J.E. SAVAGE, 1976 - The complexity of Computing. Wiley, New York.

T.J. SCHAEFER, 1976 - Complexity of decision problems based on finite twoperson perfect information games. Proc. 8th Annual ACM Symp. Theory of Computing, 41-59.

P. SCHUSTER, 1976 - Probleme, die zum Erfuellungsproblem der Aussagenlogik polynomial "aequivalent sind. In: E.SPECKER,

V. STRASSEN (eds.), 1976 - Komplexitaet von Entscheidungsproblemen: ein Seminar. Lecture Notes in Computer Science 43, Springer, Berlin, 36-48.

L.J. STOCKMEYER, A.R. MEYER, 1973 - World problems requiring exponential time: preliminary report. Proc. 5th Annual ACM Symp. Theory of Computing, 19.

J.D. ULLMAN, 1975 - NP-complete scheduling problems. J.Comput. System Sci. 10,384-393.

---

Editor's Note:

As a strong proof of the intensity of the work going on in this field as reported by the authors, it has been proved in the meantime that Linear Programming in general is a problem that belongs to P. The proof is due to Khachiyan with his Ellipsoid Method and can be found in (Khachiyan, 1979). A good coverage of the method is also given in (Papadimitriou and Steilglitz, 1982). Although this method has not yet provided an efficient algorithm (in the sense that it runs quicker than the Simplex for the usual problems), it has encouraged new research in this direction: an interesting linear algorithm can be found for instance in (Meggido, 1984).

References for Editor's Note:

KHACHIYAN, L.G., 1979 - A polynomial algorithm in linear programming - Doklady Akademika Nank, 224, pp. 1093-1096 (translated in Soviet Mathematics Doklady, 20, pp. 191-194).

MEGGIDO, 1984 - Linear programming in linear time when the dimension is fixed, Journal of the A.C.M., Vol. 31, pp.114-127

PAPADIMITRIOU, C. and STEILGLITZ, R., 1982 - Combinatorial Optimization - Algorithms and Complexity - Prentice-Hall.

Investigação Operacional  
Vol.4 - N.1 - Julho 1984

RESUMOS

---

UM CRITERIO DE UTILIDADE EM MODELOS DE PREVISÃO PARA STOCKS

Bernardo C. Vasconcelos

Dep. Engen. Mecânica (GEIN), R. dos Bragas, 4099 PORTO CODEX

Inúmeros problemas de decisão requerem modelos de previsão. Em geral há diferentes modelos possíveis e o utilizador terá que escolher o que lhe pareça mais adaptado para a aplicação em vista. Habitualmente, a precisão do modelo é uma das qualidades destacadas para essa escolha. Contudo, não é a precisão em si que interessa ao gestor, mas a utilidade dessa precisão na aplicação em causa. No presente artigo, analisa-se o caso da precisão da procura em gestão de stocks e estabelece-se a relação entre precisão e custo da incerteza propondo-se que a diminuição conseguida para esse custo seja a medida da utilidade da precisão.

---

THE MANAGEMENT OF O.R. PROJECTS

(A GESTÃO DE PROJECTOS DE INVESTIGAÇÃO OPERACIONAL)

W H Swann

Decision Support Systems Group, Corporate Management Services  
Imperial Chemical Industries PLC

As ciências de gestão têm dado uma contribuição de grande valor na área decisional estruturada do Controlo de Operações, mas a sua contribuição nas actividades de gestão a nível de Controlo de Gestão e Planeamento Estratégico, onde os problemas são muito menos estruturados, tem sido relativamente pequena. No entanto, à medida que a crescente competitividade das empresas vai impondo cada vez maiores exigências e pressões aos gestores, a necessidade e as oportunidades de intervenção da Investigação Operacional nestas áreas vão também naturalmente crescendo. No entanto a natureza vaga dos processos decisoriais semi-estruturados não se presta facilmente ao estilo de intervenção convencional da I.O. baseado na separação entre cliente e consultor. O artigo discute um outro estilo mais adequado, baseado na colaboração e no qual os órgãos de gestão do cliente são participantes directos no processo de intervenção.

As opiniões expressas são baseadas na experiência do autor ao longo dos anos, com actividade em diversas funções de consultor científico de gestão dentro da I.C.I. (UK).

---

#### ANÁLISE PROBABILÍSTICA DE UM SISTEMA DE ESTACIONAMENTO

António Sérgio Pinto Aor e Luiz Flavio Autran Monteiro Gomes  
Departamento de Engenharia Industrial de PUC/RJ  
CEP 22.453, Rio de Janeiro, RJ

Este trabalho apresenta um modelo normativo aplicável à alocação de vagas de estacionamento em comunidades fechadas. Após uma definição do sistema, passa-se ao desenvolvimento matemático da abordagem do problema, onde um tratamento



probabilístico é dado à descrição das características de utilização da área de estacionamento. O desenvolvimento matemático é feito inicialmente de forma generalizada. Mais adiante, através da aplicação da lei da adição de probabilidades, mostra-se como passar para o caso em que se garante ser a mesma, para qualquer usuário do sistema, a probabilidade de que esse usuário consiga uma vaga.

---

COMPUTATIONAL COMPLEXITY OF DISCRETE OPTIMIZATION PROBLEMS  
(COMPLEXIDADE COMPUTACIONAL DE PROBLEMAS DE OPTIMIZAÇÃO  
DISCRETA)

J. K. LENSTRA, Mathem. Centrum, Amsterdam, The Netherlands  
A. H. G. RINNOOY KAN, Erasmus Univ., Rotterdam, The Netherlands

Avanços recentes na teoria da complexidade computacional aplicada a problemas combinatórios revelaram a existência de uma vasta classe de problemas chamados NP-completos, dos quais se pode dizer que todos ou nenhum será resolúvel em tempo polinomial. Dado que para muitos dos mais difíceis problemas combinatórios já foi possível provar que pertencem a esta classe, a última alternativa parece ser bem mais provável. Nesse sentido, o facto de um problema ser NP-completo justifica o uso de métodos enumerativos e de algoritmos aproximados. Neste artigo dá-se uma introdução informal à teoria dos problemas NP-completos e deduzem-se alguns resultados fundamentais, na esperança de estimular o uso adicional desta valiosa ferramenta analítica.

---

ABSTRACTS

-----

UM CRITERIO DE UTILIDADE EM MODELOS DE PREVISÃO PARA STOCKS  
(A UTILITY CRITERION FOR FORECASTING MODELS IN INVENTORY  
CONTROL)

Bernardo C. Vasconcelos

Dep. Engen. Mecanica (GEIN), R. dos Bragas, 4099 PORTO CODEX

Many decision problems require forecasting models. Usually there are different available models and the user has to choose the one that seems most adequate for the application considered. Very often accuracy is one of the properties sought for in that choice. Yet, it is not accuracy by itself that is of primary interest to the manager, but the utility of that accuracy for the application. In this paper, the case of accuracy in estimating demand in inventory control is analysed and the relationship established between accuracy and cost of uncertainty. It is claimed that the decrease in this cost constitute the measure of utility of accuracy.

-----

THE MANAGEMENT OF O.R. PROJECTS

W H Swann

Decision Support Systems Group, Corporate Management Services  
Imperial Chemical Industries PLC

Management Science has made a substantial contribution to the structured decision area of Operational Control, but its effect on the managerial activities of Management Control and Strategic Planning where the problems are much less structured has been relatively small. Yet as the increasing competitiveness of business imposes ever greater demands and pressures on management, the need and opportunity for OR to impact on these areas is growing significantly. However the fuzzy nature of semi-structured decision-making does not lend itself to the more conventional OR intervention style of client and consultant. The paper discusses a more appropriate style based on collaboration in which the client management is involved directly in the intervention.

The views expressed are based on the author's experience gained over a number of years operating in a variety of management scientist roles within Imperial Chemical Industries PLC, or ICI as it is commonly known.

---

ANALISE PROBABILISTICA DE UM SISTEMA DE ESTACIONAMENTO  
(PROBABILISTIC ANALYSIS OF A PARKING SYSTEM)

Antonio Sergio Pinto Aor e Luiz Flavio Autran Monteiro Gomes  
Departamento de Engenharia Industrial de PUC/RJ  
CEP 22.453, Rio de Janeiro, RJ

This paper presents a normative model applicable to the allocation of parking vacancies in closed communities. After a definition of the system, one passes to the mathematical development of the approach to the problem, where a prob-

abilistic treatment is given to the parking area utilization characteristics description. The mathematical development is initially presented in a generalized way. Next, through an application of the law of addition of probabilities, one shows how to arrive to the situation in which the probability that each user gets a vacancy is the same for every user of the system.

---

#### COMPUTATIONAL COMPLEXITY OF DISCRETE OPTIMIZATION PROBLEMS

J. K. LENSTRA, Mathem. Centrum, Amsterdam, The Netherlands

A. H. G. RINNOOY KAN, Erasmus Univ., Rotterdam, The Netherlands

Recent developments in the theory of computational complexity as applied to combinatorial problems have revealed the existence of a large class of so-called NP-complete problems, either all or none of which are solvable in polynomial time. Since many infamous combinatorial problems have been proved to be NP-complete, the latter alternative seems far more likely. In that sense, NP-completeness of a problem justifies the use of enumerative optimization methods and of approximation algorithms. In this paper we give an informal introduction to the theory of NP-completeness and derive some fundamental results, in the hope of stimulating further use of this valuable analytical tool.

---