

# INVESTIGAÇÃO OPERACIONAL

PUBLICAÇÃO DA:



Associação Portuguesa para o Desenvolvimento  
da Investigação Operacional.

Volume 3  
Número 2  
Julho 1983

# INVESTIGAÇÃO OPERACIONAL

Propriedade:

APDIO — Associação Portuguesa para o Desenvolvimento  
da Investigação Operacional

## *ESTATUTO EDITORIAL*

*«Investigação Operacional», órgão oficial da APDIO cobre uma larga gama de assuntos reflectindo assim a grande diversidade de profissões e interesses dos sócios da Associação, bem como as muitas áreas de aplicação da I. O. O seu objectivo primordial é promover a aplicação do método e técnicas da I.O. aos problemas da Sociedade Portuguesa.*

*A publicação acolhe contribuições nos campos da metodologia, técnicas, e áreas de aplicação e software de I. O. sendo no entanto dada prioridade a bons casos de estudo de carácter eminentemente prático.*

*Serão também publicadas notícias da APDIO bem como informações sobre acontecimentos nacionais e internacionais relacionadas com a I.O.*

**Distribuição gratuita aos sócios da APDIO.**

O VI Congresso da EURO, realizou-se de 19 a 21 de Julho em Viena de Áustria, reunindo quase 500 participantes. Nessa ocasião teve lugar a reunião do Conselho de Representantes da EURO, em que tive o prazer de apresentar a APDIO. O Conselho de Representantes é o órgão deliberativo e consultivo superior da EURO - Associação Europeia de Sociedades de Investigação Operacional em que cada país membro é representado por um elemento com direito de voto. Para dar uma ideia da importância dada à EURO basta dizer que todos os países membros, sem excepção, estavam representados. Foram tomadas deliberações sobre vários assuntos relacionados com a vida da Associação dos quais penso valer a pena destacar três :

Novos Membros - O Comité Jugoslavo "ETAN" foi admitido como membro de pleno direito e o Comité de Investigação Operacional da Academia Húngara de Ciências foi admitido como membro associado. Ambas as admissões foram aprovadas por unanimidade.

Novos Instrumentos da EURO - O presidente J.P. Brans, apresentou três propostas de novas actividades que no seu entender contribuirão para aumentar a vitalidade da Associação. Tais propostas que tinham sido previamente apresentadas às sociedades membras foram discutidas e aprovadas apenas com alterações de pormenor. Foi aprovada a criação do Prémio "EURO" que se pretende seja a maior distinção Europeia no domínio da Investigação Operacional. O prémio que consistirá numa medalha de ouro será atribuído a um indivíduo, Centro ou Instituição que deverá ter prestígio científico e técnico internacionalmente reconhecido e ter contribuído para o desenvolvimento da I.O. na Europa. As sociedades membras da EURO participarão no processo de selecção do laureado sendo os prémios entregues durante as conferências EURO. Foi decidido que, para além das conferências multidisciplinares EURO-K, a EURO deveria apoiar a realização de mini-conferências sobre temas específicos e portanto com assistência mais restrita que servirão de espaço de debate e

transferência de know-how em áreas de especial interesse. Finalmente foi decidido iniciar a realização de "EURO SUMMER INSTITUTES", que reunirão os jovens cientistas dos vários países europeus com o objectivo de promover a cooperação entre os cientistas de amanhã. O tema seleccionado será diferente cada ano pensando-se assim poder cobrir, ao fim de 10 anos, os principais temas da I.O.. Chamo a atenção para esta iniciativa que me parece muito interessante e que vem noticiada mais detalhadamente no corpo da revista.

Futuras Conferências EURO-K - Foi discutida a data do EURO VII que se realizará em Bolonha, Itália, em 1985, tendo a Páscoa sido recomendada como a altura ideal. Depois foi discutido o local de realização do EURO VIII (1986). Três países tinham apresentado a sua candidatura - Portugal, Finlândia e Hungria. Foi pedido aos representantes dos três países que apresentassem as suas Associações bem como os locais em que tencionavam realizar a conferência. O resultado da votação foi favorável a Portugal tendo ficado decidido que o EURO VIII se realizará em Lisboa. Tal iniciativa contribuirá certamente para fortalecer os laços internacionais da APDIO e permitirá a participação de todos nós numa reunião científica internacional de grande interesse.

Para terminar gostaria de chamar a atenção para uma pequena nota, publicada neste número, que nos chegou de Bengladesh e que denota certamente que Investigação Operacional é conhecida além fronteiras. O outro artigo incluído neste número descreve um modelo de gestão de stocks de produtos intermédios que pode vir a ter muitas aplicações práticas.

Tsai Sel Huenido

# INVESTIGAÇÃO OPERACIONAL

PUBLICAÇÃO QUADRIMESTRAL

Volume 3, Nº 2, Julho 1983

Número Avulso: 200\$00

DIRECTOR: ISABEL MARIA HALL THEMIDO

## COMISSÃO EDITORIAL

Dr. Paulo Bárcia (EDP)	Prof. Guimarães Rodrigues (U. Minho)
Eng. João Caraça	Prof. Mário Rosa (U. COIMBRA)
Prof. Dias Coelho (UNL)	Prof. Luís Valadares Tavares (IST, CESUR)
Prof. Rui Campos Guimarães (FEUP)	Eng. Eduardo Zúquete (CP)
Prof. Fernando de Jesus (ISE)	Prof. Nelson Maculan Filho (Brasil - CPPE/UFRJ)
Eng. A. Máximo (NAVELINK)	Prof. K. Brian Haley (Reino Unido)
Eng. Rui Barbesti Nápoles (LISNAVE)	Prof. Robert Machol (Estados Unidos)
Prof. Valente de Oliveira (FEUP, CPRN)	Prof. Bruno Martinoli (Itália)
Prof. Gouvêa Portela (IST, EGF)	Prof. M. Najim (Marrocos)
Cte. Cervaens Rodrigues (CIOA)	Prof. Ioánnis A. Pappás (Grécia)

## COMISSÃO DIRECTIVA DA APDIO

Presidente:	Luís A. Valadares Tavares
Vice-Presidente:	Isabel Maria Hall Themido
Vice-Presidente:	José António Cervaens Rodrigues
Secretário:	João Luís César das Neves
Tesoureiro:	Luís A. Tadeu dos Santos Almeida

---

Este número foi subsidiado pela Junta Nacional de Investigação Científica e Tecnológica. A Revista "Investigação Operacional" está registada na Secretaria de Estado da Comunicação Social sob o nº 108 335.

Esta Revista é distribuída gratuitamente aos sócios da APDIO. As informações sobre inscrições na Associação, assim como a correspondência para a Revista, devem ser enviadas para a sede da APDIO - Associação Portuguesa para o Desenvolvimento da Investigação Operacional - CESUR, Instituto Superior Técnico, Av. Rovisco Pais, 1000 Lisboa.

---

Dactilografia:  
Maria Luísa Saraiva

Impressão:  
João de Matos, Impressores  
Avenida Álvares Cabral, 1A  
Telef.: 65 18 83 1200 Lisboa

	Pg.
. EDITORIAL .....	1
. CARTA DO PRESIDENTE DA IFORS .....	5
. RELATÓRIO DE ACTIVIDADES DO ANO DE 1982 .....	7
. BALANÇO SINTÉTICO DO EXERCÍCIO DE 1982 .....	9
. NOTÍCIAS .....	16
. APPROACH TO O.R. PROBLEMS - <i>Q.A.M.M. Yaha</i> .....	17
. OPTIMIZAÇÃO DE STOCKS INTERMÉDIOS - <i>José Cayolla</i> .....	21
. INDICE DE PESQUISA OPERACIONAL .....	40

# I.F.O.R.S.

INTERNATIONAL FEDERATION OF OPERATIONAL RESEARCH SOCIETIES

*letter from the president*

THE HOUSE OF ARTS AND SCIENCES No. 5, May 1983

Let us consider a house with many windows. A new born baby lies in the centre. It has a view through any window - but not very clear, due to the distances. As the child grows up, somebody guides him slowly - over the years - to one window and puts him in irons such that he can only look through this window - his window. This may happen to anybody in the house, until every window has its prisoner. Now, should somebody at a West window talk to somebody at a North, East, or South window, they would not be able to understand each other because they see completely different things and make different observations. They might not have anything in common to talk about.

Is this not the situation of man ? Each individual receives his education and his experience which forms his world view - his window to the world. The world views can be as different as the panoramas on the different sides of the house. Let a sociologist talk to a physicist, an economist to a chemist, a physician to an accountant, a painter to a mechanical engineer, a computer scientist to a lawyer. They may perceive reality so differently that they can hardly agree on any observation they make. They are prisoners of their discipline.

It is often emphasised that one of the characteristics of operational research (OR) is its interdisciplinary approach. How can we achieve interdisciplinarity ? Has OR the key to deliver others from their irons ? No; and we too, the individual operational researchers, have our windows and bear our irons. Can therefore our interdisciplinary approach be accomplished at all ? I believe it can - at least to some extent ! It requires two things though, (i) the

individual will and (ii) the central tool of OR : the model, not necessarily a mathematical one.

(i) He who confesses to interdisciplinarity has to have the strong will to move within his iron and to turn his head and have a distant look through other windows - even if the iron hurts. That means that he has to develop some basic understanding of and appreciation for the single disciplines and has to try to communicate with their representatives. This may be difficult and strenuous, but it is indispensable.

(ii) In order to understand a particular system of reality or to develop a solution for a particular problem, the operational researcher designs models and studies their behaviour. The models enable him to capture different views in that he lets his companions from quite different windows report what they see and transforms their outspoken perceptions into models. Thus, typical OR models may - at the same time - contain information from as different disciplines as physics, chemistry, engineering, accounting, management, economics, sociology, law, and others. It is the potential strength of OR that many types of models have been developed which are available for our endeavours today.

Many current problems in the world cry for an interdisciplinary approach. Thus, there is a great potential demand for OR. Are we, the OR community, prepared to face this demand ?

*Heiner Muller-Merbach*  
- President of IFORS -



## **RELATÓRIO DAS ACTIVIDADES DO ANO DE 1982**

No ano de 1982, continuando o trabalho iniciado em 1981, a acção da APDIO centrou-se em quatro campos fundamentais :

### **A - ENCONTROS E CONFERÊNCIAS**

Além de continuar com a realização de palestras sobre temas de Investigação Operacional, por professores de variados quadras, a APDIO concentrou os seus esforços na preparação de dois grandes encontros :

- o "1º Congresso Nacional de Investigação Operacional", de (22 a 24 de Março de 1982 na Fundação Gulbenkian) que teve a presença de cerca de duzentos participantes e cujo tema foi "A Investigação Operacional e as suas Aplicações à Gestão".
- o "1º Seminário avançado sobre Optimização", de (9 a 11 de Dezembro, no Hotel Sintra Estoril) onde o numero de participantes atingiu a centena.

### **B - CONTACTOS INTERNACIONAIS**

Neste capítulo tomam especial relevo a entrada da APDIO para membro nacional da IFORS e da IFAC, além da continuação da participação nos trabalhos da EURO.

Nos contactos bilaterais entre a APDIO e outras associações nacionais aparecem com grande importância as relações com a sociedade brasileira, SOBRAPO, tendo os trabalhos para a realização de um vocabulário luso-brasileiro de Investigação Operacional desempenhado um papel importante.

#### C - PUBLICAÇÕES

Continuou a sua publicação, a revista da associação, INVESTIGAÇÃO OPERACIONAL, e encontra-se em vias de sair do prelo o volume com as comunicações completas do 1º Congresso da APDIO (os resumos saíram num número especial da INVESTIGAÇÃO OPERACIONAL à data do congresso).

#### D - COMISSÕES ESPECIALIZADAS

A primeira das comissões especializadas, dedicada à Optimização, encontra-se já em funcionamento, tendo realizado uma primeira reunião em 10 de Dezembro de 1982 onde esboçou uma estrutura e um programa de actividades bem como uma sondagem das áreas de interesse.

A associação no fim de 1982, inclui 208 sócios, o que representa um aumento apreciável se compararmos com os 107 sócios do fim de 1981.

*A Comissão Directiva*

**BALANÇO SINTÉTICO DO EXERCÍCIO DE 1982**

	Receita	Despesa
Saldo do ano anterior	166 941\$10	
Jóias dos sócios singulares	33 500\$00	
Quotas dos sócios singulares	150 000\$00	
Quotas dos sócios colectivos	260 000\$00	
Saldo do Congresso 1982	113 364\$00	
Subsídio JNICT	250 000\$00	
Saldo Seminário 1982	108 834\$00	
<b>Total da receita</b>	<b>1 082 639\$10</b>	
Revista		150 761\$90
Secretariado		184 958\$70
Diversos		34 998\$00
Deslocações		32 680\$00
Quota IFAC		47 634\$60
Inscrições no congresso IFAC		12 282\$60
Despesas de divulgação de actividades da APDIO		114 880\$00
<b>Total da despesa</b>		<b>578 195\$80</b>
<b>Saldo das contas</b>		<b>504 443\$30</b>

EVOLUÇÃO DOS SALDOS FINAIS DE EXERCÍCIO, EM 31 DEZEMBRO 1982

Saldo do exercício de 1981 .....	166 941\$10
Saldo do exercício de 1982 .....	337 502\$20
Saldo transferido p/ 1983 .....	504 443\$30

EVOLUÇÃO DO FUNDO DE RESERVA

Fundo reserva relativo a 1981 .....	16 690\$00
Fundo reserva relativo a 1982 .....	33 750\$00
Fundo de reserva acumulado .....	50 440\$00

MATERIALIZAÇÃO DO SALDO TRANSFERIDO PARA 1983, SEGUNDO A SUA DISPONIBILIDADE

Fundo de reserva acumulado (dep. à ordem) .....	50 440\$00
Depósitos à ordem .....	454 003\$30
Valores em caixa .....	-----
Saldo transferido p/ 1983 .....	504 443\$30

NOTA FINAL

Nas despesas de 1982 não estão contabilizados todos os custos associados à publicação dos artigos do 1º Congresso da APDIO, por ainda não terem sido realizados. Estima-se no entanto que haverá ainda que pagar cerca de 200 contos até ao fim de 1983.

XX-XXXXXX



INVESTIGAÇÃO OPERACIONAL 84

2º CONGRESSO DA APDIO - 16 a 18 de Abril de 1984 - PORTO  
- FACULDADE DE ECONOMIA -

Esta será a 2.<sup>a</sup> grande reunião Nacional de Investigação Operacional que de certo contará de novo com o apoio e participação maciça dos associados da APDIO. Contamos ainda com a participação de muitos gestores já que o tema principal do Congresso são as Potencialidades e Aplicações da I.O. na Gestão de Organizações. Contamos já com a presença do Prof. Brian Haley, um brilhante orador e grande amigo da APDIO desde a primeira hora, que proferirá a lição inaugural. O Prof. Gryn Gravenor da Universidade de Swansea fará uma alocução sobre as potencialidades da I.O. na Indústria Transformadora e Energia e o Dr. Fred Ridgway do Banco da Irlanda falará sobre as muitas aplicações da I.O. na Banca. Esperamos ainda poder contar com a presença do Presidente da IFORS.

Além do interesse científico e ensinamentos práticos, de que todos certamente vamos beneficiar, o Prof. Rui Campos Guimarães promete organizar um variado programa social e mostrar-nos a beleza do Norte.

O programa do Congresso, organizado em sessões paralelas, oferecerá certamente algo de interesse para cada um pelo que contamos desde já com a sua presença no Porto de 16 a 18 de Abril de 1984 (atenção que as datas inicialmente propostas foram alteradas). Sobretudo estamos ansiosos por receber os resumos das comunicações que tenciona apresentar. A data limite é 17 de Fevereiro de 1984.

XX



**EURO: the Association of European Operational  
Research Societies Within I.F.O.R.S.**

Every year Euro organizes a summer institute for the  
most promising young scientists in a particular field of O.R.

**FIRST EURO SUMMER INSTITUTE**

Brussels - Belgium - July 20 - August 10, 1984

**THEME FOR 1984: LOCATION THEORY**

O Instituto reunirá num ambiente propício à troca de ideias 20 jovens cientistas (25 aos 35 anos) que, embora no início da sua carreira, já tenham dado provas de poder vir a ser, nos seus respectivos países, os especialistas de amanhã. Esta nova iniciativa da EURO tem por objectivo promover a futura cooperação entre cientistas europeus. Cada um dos participantes apresentará um artigo sobre a sua área específica de interesse. Um comité científico orientará seminários e outras actividades de investigação que serão reunidos num número especial do EJOR (European Journal of Operational Research) a ser integralmente preparado pelos participantes no Instituto. O Instituto é residencial e não haverá quaisquer despesas de inscrição ou acomodação já que estas são integralmente suportadas pela Universidade de Bruxelas (V.U.B.) e pela EURO.

**Comité Científico**

Scientific Committee

Coordinator : prof. J.P. Brans

President of EURO - V.U.B. - CS00

Pleinlaan 2. B 1050 Brussels

Members :

P. Hansen, L. Kaufman, F. Plastria, A.H.G. Rinnooy Kan and J. Thisse

Os candidatos serão pré-seleccionados pelas Associações Nacionais de Investigação Operacional que submeterão as candidaturas até 1 de Março de 1984 ao presidente do EURO que é também coordenador do Instituto. A escolha final dos candidatos é feita pelo Comité Científico.

Os candidatos portugueses interessados em participar nesta iniciativa deverão enviar, ao presidente da APDIO até 15 de Fevereiro de 1984, o seu curriculum-vitae acompanhado de um artigo, que não tenha sido publicado.

XX

X CONGRESSO MUNDIAL DA IFORS  
(Washington D.C. - Agosto 6-10, 1984)

A Federação Internacional de Associações de Investigação Operacional vai realizar o seu décimo congresso mundial subordinado ao tema "Co-operation - The Culture for O.R. Success".

Os congressos da IFORS realizam-se de três em três anos e reúnem sempre grande número de especialistas e utilizadores da I.O. de todo o mundo sendo uma excelente ocasião para a troca de impressões e de experiências. Além disso em Washington celebram-se dois aniversários importantes na vida da IFORS -

- Os 25 anos da sua fundação e,
- O seu 10º Congresso Mundial.

Durante o Congresso serão apresentadas contribuições nacionais de todas as Associações que integram a IFORS. A contribuição Portuguesa que, tal como foi oportunamente divulgado, foi seleccionada pela Comissão Editorial - será apresentada pelo nosso colega Engº Luis Tadeu Almeida e intitulada-se "The O.R. Methodology and Techniques Applied to a Real Situation in Portugal".

O programa preliminar do Congresso estará à sua disposição na sede da APDIO a partir de Fevereiro, sendo já certo que o Prof. Howard Raiffa proferirá a lição inaugural. Para mais informações deve contactar o organizador de conferência

Richard M. Soland, Dept. of Operations Research  
School of Engineering and Applied Science  
George Washington University  
Washington, D.C. 20052, U.S.A.

XX



IX CONGRESSO MUNDIAL DA IFAC  
(Budapeste 2-6 de Julho de 1984)

A Federação Internacional de Controle Automático vai realizar o seu nono congresso mundial subordinado ao tema "A Bridge Between Control Science and Technology". Estão previstos 500 artigos organizados em 39 "mini-conferências" cada uma delas subordinada a um tema restrito. Haverá ainda palestras proferidas por grandes nomes internacionais do Controle Automático e a possibilidade de trocas informais de impressões com colegas de outros países. Caso este já interessado deve contactar :

Computer and Automation Institute  
Hungarian Academy of Sciences  
Budapest 112, P.O.B. 63  
H-1502 HUNGARY

XX

- ASSINATURA DE REVISTAS -

Os membros individuais da Associação gozam de preços especiais nas seguintes assinaturas :

EUROPEAN JOURNAL OF OPERATIONAL RESEARCH (EJOR)	Dfl. 130
INTERNATIONAL ABSTRACT IN OPERATIONS RESEARCH (IAOR)	Dfl. 65
OPERATIONS RESEARCH LETTERS (ORL)	Dfl. 65

Caso esteja interessado deve contactar com a sede da APDIO enviando cheque da quantia referida. As revistas serão enviadas directamente aos assinantes pela North-Holland.

A Sociedade Britânica de Investigação Operacional (ORS), oferece também aos membros da APDIO a possibilidade de se fazerem seus associados pagando apenas 2/3 da quota, o que corresponde a £15 para o ano de 1984. Os associados da ORS recebem gratuitamente o JOURNAL OF THE OPERATIONAL RESEARCH SOCIETY e a O.R. NEWSLETTER.

XX

XX

## FALECIMENTO DO PROF. MICHAEL SIMPSON

Morreu o Professor Michael Simpson. Era uma figura ilustre, mas discreta, do mundo da IO.

Alguns reconhecerão o nome daquele que foi Presidente da (British) OR Society.

Outros tê-lo-ão conhecido como Professor da Universidade de Lancaster. Nas suas aulas, Mike, como era por todos conhecido, impunha-se através de uma combinação difícil de eloquência e simplicidade, seriedade e humor, classe e simpatia.

Outros ainda, como nós, ficaram seus amigos. Porque foram por ele compreendidos em momentos difíceis, dele recebendo palavras de ânimo e uma ajuda desinteressada. Ou porque compartilharam com ele momentos de exuberante alegria. Ou simplesmente porque com ele conversaram amavelmente à mesa de um Pub.

Quis o destino que o Professor Simpson nos deixasse tão cedo. Passado o choque da notícia, fica-nos uma enorme saudade.

*Rui Guimarães*

XX

## APPROACH TO O.R. PROBLEMS

Q.A.M.M. YAHYA

Defence Science Organisation - Dhaka - Bangladesh

### 1 - INTRODUCTION

In dealing with O.R. problems, whether military or industrial, one finds that the correct evaluation of non-mathematical considerations is more important than mathematical sophistication. The well-known optimum depth problem at which depth-charges should explode, was a critical problem during World War II, till it was solved by Williams with the simple observation that a submarine wastes a few seconds before it dives ! The design of shaped charges was solved at a critical time in history by using high school algebra, conservation laws of mass-energy and momentum (1) - (2). A consultant was once going to discuss matters related to a sophisticated weapons system. On the way, he observed that two cans were being used for rinsing plates after lunch and another two cans for the final washing-up. He suggested that three cans be apportioned for rinsing. When that was done the long queues decreased dramatically. The consultant thus created a sense of confidence before tackling the main problem.

## 2 - SOME O.R. PROBLEMS AND THEIR SOLUTIONS

We were asked to improve the over-all situation in a hospital. The total number of patients (only diabetes and related diseases) calling every morning was 150 - 180. The seating facilities were inadequate. We proposed that local patients (about 78%) should give blood for test and depart at once and return to collect their cards anytime next-day. All non-local patients should wait till the doctors had seen them on that day. This dispersed the crowd altogether. We also advised on diabetic data analysis, optimal batch size of blood sample, nurse training systems etc.

To finish a project by the stipulated time, PERT and CPM are universally used. In this country, the Newspaper Mills, shipyard and other industries have introduced the technique. We offered courses in the University to cover these O.R. methodologies.

Elimination of alternatives and the choice of the best alternative (or optimal mix) can sometimes be achieved using matrix games. Such theory was once used to analyse the performance of men using recoilless rifles. Zero-sum two person matrix games with forbidden situations can be solved by making their realization extremely undesirable for both players. We quote the Theorem 3 in the paper of Orlovskii (4) which reads 'Let  $x(k)$  be the optimal strategy of the maximizing player in the antagonistic game  $\Gamma(A, k)$ . Then  $x(k)$  is the  $\epsilon$ -optimal strategy of player in the game  $\Gamma(A)$  with forbidden situations, i.e.

$$v_0 = \sup_{x \in S_m} \min_{j \in N(x)} (x \cdot A)_j = \lim_{k \rightarrow \infty} \min_{j \in N(x(k))} (x(k) \cdot A)_j. \quad (1)$$

Occasionally in commercial competition some moves by the two competitors are to be avoided by a mutual agreement. Then the theorem below finds an application.

Industrial processes often lead to Linear Programming and Dynamic Programming formulations. One has to be careful that the algorithm does not become unsolvable or one that requires too much computer time. In an optimal search strategy in which using an IBM computer was used, the algorithm did not take an excessive computer time. So, problems of integer programming need to be solved by that method. The solution obtained by rounding off the decimals of the corresponding linear programming solution can be far away from the optimum.

When we were called upon to study any organization with the purpose of finding means for improvement, such as reducing the wastages and maximizing the profits, we first made the system flow-chart which was most useful throughout the analysis. We resorted to graphs and pictorial presentation, putting the mathematical matters in the Appendix of our Report. Using intuition, the user could be convinced of our recommendations.

#### REFERENCES

- (1) G. Birkhoff et al, *Explosives with line cavities*, J. Appl. Phys. 19(1948) 363-382.
- (2) G. Birkhoff, *The Birkhoff Prize Talks, Atlanta, 1978*, Math. Intelligencer 2(1978), 95.
- (3) Q.A.M.M. Yahya, *Report on War data Analysis (Classified)*
- (4) S.A. Orlovskii, *Matrix games with forbidden situations*, (Russian) Zh. vyehisl. Mat. mat. Fiz. 11(1971) 623-631.



## OPTIMIZAÇÃO DE STOCKS INTERMÉDIOS

JOSÉ CAYOLLA

SIDERURGIA NACIONAL E INSTITUTO SUPERIOR DE ENGENHARIA  
DE LISBOA

Praça do Junqueiro nº 1-3D - Carcavelos - 2775 PAREDE

### R e s u m o

*As operações unitárias de uma actividade industrial qualquer estão sujeitas a paragens de causa aleatória. Considerando duas operações consecutivas, em que, portanto, o produto saído da primeira é carga da segunda, é evidente que uma paragem aleatória na primeira pode acarretar paragem também na segunda, por falta de carga. Isto levanta, desde logo, a questão de saber se haverá vantagem em dispôr de um stock intermédio no início de cada período de gestão.*

*O problema em análise é o da optimização deste stock, já que um seu valor excessivo negativa certamente o resultado, pela imobilização de capital que envolve.*

## 1 - INTRODUÇÃO

Relativamente a uma actividade industrial qualquer, considere-se um ponto do diagrama de fabrico, intermédio a duas operações. Seja M a operação imediatamente a montante do ponto considerado e J a operação imediatamente a jusante.

Se as capacidades de tratamento de M e J são equilibradas e não há paragens de M e J devidas a causas aleatórias, toda a produção de M é seguidamente tratada em J. Na realidade há paragens em M e J de causa aleatória. Interessam as paragens desencontradas, isto é, paragens em M não simultâneas com paragens em J. Seja  $T'$  o tempo total destas paragens, durante um período de gestão, T. Elas vão dar lugar a quebras de actividade J e à correspondente diminuição do resultado no fim de T. Essas quebras podem ser evitadas, pelo menos em parte, se no início de T houver um stock, S, de produto intermédio (carga potencial de J).

Mas, é óbvio que se S for excessivo o encargo com a imobilização de capital inerente a S sobreleva a vantagem possível de evitar a quebra de lucros em J.

Então é evidente que haverá um valor,  $S_0$ , de S óptimo. O cálculo de  $S_0$  constitui o problema em análise e que se resolveu.

A resolução passa pela simulação em computador das paragens desencontradas de origem aleatória, a qual fornece a densidade de probabilidade  $f(T')$ .

Demonstra-se que  $S_0$  existe sempre e é único, calculando-se um valor,  $p_c$ , da probabilidade de que ocorra pelo menos uma paragem desencontrada, abaixo do qual é sempre  $S_0 = 0$ .

No fim levanta-se a hipótese de as capacidades de M e J serem equilibradas e mostra-se como deve planear-se a actividade de M em coerência com  $S_0$ .



## 2 - SIMBOLOGIA

No esquema da Fig. 1 e no texto a simbologia adoptada é a seguinte

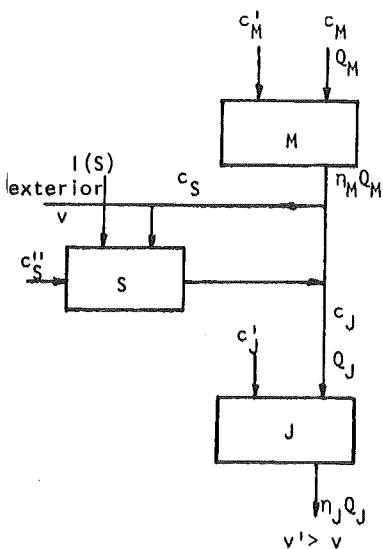


Fig. 1

$T$	período de gestão do stock, entre um aprovisionamento e o previsto a seguir
$c'_M, c'_J$	custos unitários proporcionais às cargas de M e J
$\eta_M, \eta_J$	rendimentos mássicos de M e J
$Q'_M, Q'_J$	valores nominais dos caudais mássicos de carga de M e J
$c'_M, c'_J$	custos de M e J proporcionais ao tempo
$S$	massa do stock intermédio no início de $T$
$c_S$	custo unitário de $S$ se produzido por M ( $c_S < v$ )
$v$	valor unitário de $S$ se proveniente do exterior
$v'$	valor unitário do produzido por J

$I(S)$	encargo com a imobilização do valor de $S$ no fim de $T$
$J$	taxa de juros do capital imobilizado
$c''_S$	custos de estrutura do parque de $S$ , por unidade de tempo
$T'$	tempo de paragem desencontrada (em M, mas não em J) durante $T$
$t^*$	valor máximo, estatisticamente conhecido, de $T'$
$t_*$	valor mínimo, estatisticamente conhecido, de $T'$
$\rho$	massa específica aparente de $S$
$V$	volume total disponível para $S$
$f(T')$	densidade de probabilidade de $T'$
$r(S, T')$	resultado sobre $S$ , verificando-se $T'$ em $T$
$R(S) = \bar{r}(S, T')$	resultado esperado sobre $S$ no início de $T$ .

### 3 - APRESENTAÇÃO GENÉRICA DO MODELO

#### 3.1 - HIPÓTESES

$H_1$  : M e J são rendíveis. Sendo m a margem de J, será portanto

$$m = n_J v' - v - c_J > 0 \quad (1)$$

$H_2$  : M e J têm capacidades equilibradas  $n_M Q_M = Q_J$  (2)

(esta restrição será posteriormente levantada).

#### 3.2 - VIA DE RESOLUÇÃO

A probabilidade de haver pelo menos uma paragem desencontrada é

$$p = \int_{t^*}^{t^*} f(T') dT'$$

sendo em geral  $p < 1$  porque pode ser  $T' = 0$ , (3)  
com a probabilidade

$$q = 1 - p. \quad (4)$$

O resultado esperado  $R(S)$ , vale

$$R(S) = \bar{r}(S, T') = \int_{t^*}^{t^*} r(S, T') f(T') dT' - q j v S T \quad (5),$$

o segundo termo correspondendo à eventualidade  $T' = 0$ .

O intervalo de S que interessa é

$$0 \leq S \leq Q_J t^* \quad (6)$$

pois que acima de  $Q_J t^*$  haveria a certeza de ter stocks sobejantes no fim de T.

E a restrição quanto ao espaço disponível para S é  $S \leq \rho V$ . (7)

É condição necessária de exequibilidade econômica da solução

$$R(S) \geq 0 \quad (8)$$

e a otimização traduz-se por

$$R(S_0) = \text{ext sup } R(S) \quad (9)$$

sendo o domínio de  $S$  definido por (6), (7) e (8).

Se o extremo superior for um ponto de estacionaridade

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dR}{dS} = \frac{d}{dS} \int_{t_*}^{t^*} r(S, T') p(T') dT' - qjvT = 0 \\ \frac{d^2R}{dS^2} < 0 \end{array} \right. \quad (10)$$

### 3.3 - ANÁLISE DE $f(T')$

Do exposto conclui-se que a densidade não condicionada  $f(T')$ , que é homogênea a uma frequência, vai ter um papel central em todo o problema. Convém portanto, e desde já, indicar a via de acesso ao seu conhecimento.

Se existirem elementos estatísticos periódicos que contenham informação sobre as paragens desencontradas, deles se obterá  $f(T')$ , pelos processos habituais de passagem a uma descrição contínua, à parte as discontinuidades próprias de  $f(T')$ . Destas há uma, desde logo, que não é possível remover. De facto,  $T'$  é variável aleatória no domínio  $[0, T]$ , mas como não ocorrem valores entre zero e  $t_*$ , nem superiores a  $t^*$ , tem-se

$$(0 < T' < t_*) \cup (T' > t^*) \rightarrow f(T') = 0. \quad (11)$$

Ora, por um lado, os integrais de  $f(T')$  sobre intervalos de  $T'$  são probabilidades de intervalo, não condicionadas, mas por outro lado, de (11) e (4), resulta que  $T' = 0$  é ponto isolado do domínio, ou seja, intervalo de medida nula a que corresponde, todavia, a probabilidade  $q \neq 0$ . Logo  $f(0) = +\infty$ , forçosamente.

Por outras palavras, à parte o factor  $q$ ,  $f(T'=0)$  é a função  $\delta$ , de Dirac. Então, se designarmos por  $\psi(T')$  uma função nula no exterior de  $[t_*, t^*]$  e idêntica a  $f(T')$  no interior daquele intervalo, pode escrever-se

$$f(T') = q \delta(T') + \psi(T').$$

Se não existirem aqueles elementos estatísticos,  $f(T')$  pode ser obtido pelo seguinte método de Monte Carlo.

Fixemos primeiro a atenção sobre o que se passa em  $M$  durante  $T$  e principiemos por ordenar as paragens de origem aleatória pela sua duração,  $t_{iM}$ . Se foram  $t_{*M}$  e  $t_{*M}^*$  os respectivos valores mínimo e máximo, a ordenação será

$$t_{iM}) \quad t_{iM} = t_{*M} < t_{2M} < \dots < t_{*M}^* .$$

Seja agora  $A$  o acontecimento *não parar* durante um certo  $t_{*M}$  e  $\bar{A}$  o seu complementar, este realizável pelas modalidades  $\bar{A}_i$  a que correspondem os tempos  $t_{iM}$  e as probabilidades  $p_i(\bar{A})$ . Procuremos as probabilidades à priori.

$$\left| \begin{array}{l} p(A) \\ p_i(\bar{A}) \end{array} \right. \quad (12)$$

o que desde já, se vê que é possível através da distribuição binomial.

Chamando  $\bar{U}_i^M$  ao número médio de ocorrências de  $\bar{A}$  pela modalidade a que corresponde a duração  $t_{iM}$  e  $\bar{n}_M(\bar{A})$  ao número médio de ocorrências de  $\bar{A}$ , é

$$\bar{n}_M(\bar{A}) = \sum_i \bar{U}_i^M . \quad (13) (*)$$

A distribuição, sobre  $T$ , dos tempos correspondentes a  $A$  e  $\bar{A}$  é portanto

$$\bar{n}_M(A) t_{*M} + \sum_i \bar{U}_i^M t_{iM} = T \quad (14)$$

---

(\*) Se também não houver estatísticas das paragens separadas de  $M$  e  $J$ , então os  $U_i$  podem ser estimados à priori por técnicos especialistas.

e o correspondente número médio,  $\bar{n}(T)$ , de ensaios binomiais em  $T$  sobre  $A$  e  $\bar{A}$  é

$$\bar{n}_M(T) = \bar{n}_M(A) + \bar{n}_M(\bar{A}) = \bar{n}_M(A) + \sum_i \bar{U}_i^M \quad (15)$$

O melhor valor estimável do  $p(A)$  de (12) é portanto

$$p(A) = \frac{\bar{n}_M(A)}{\bar{n}_M(T)} .$$

Entrando com (14) e (15) vem

$$\left| \begin{array}{l} p(A) = \frac{1}{t_{*M} \sum_i \bar{U}_i^M} \\ 1 + \frac{\sum_i \bar{U}_i^M t_{iM}}{T - \sum_i \bar{U}_i^M} \\ p(\bar{A}) = 1 - p(A) \end{array} \right. \quad (16)$$

A probabilidade *a priori* de que, num ensaio,  $\bar{A}$  ocorra pela sua modalidade de índice  $i$  é portanto

$$p_i(\bar{A}) = \frac{\bar{U}_i^M}{\sum_i \bar{U}_i^M} [1 - p(A)] . \quad (17)$$

Quanto ao que se passa em  $J$ , as probabilidades *a priori* de não parar, ou de parar, têm expressões absolutamente análogas a (16) e (17), pondo  $J$  onde está  $M$ .

Posto isto, pode simular-se em computador a distribuição sobre  $T$  dos  $U_i^M$  e  $U_i^J$  com as probabilidades *a priori* dadas por (16), (17) e as suas análogas (Bernoulli) no fim do tempo de paragem  $t_{iM}$  ou  $t_{iJ}$ , do ensaio anterior.

Para cada  $T$  obtêm-se assim a estatística simulada,  $U_k^T$ , das paragens  $T_k^T$  desencontradas e desta sai  $f(T')$ .

### 3.4 - DISTRIBUIÇÃO DE $T'$ SOBRE $T$

A questão que se levanta a seguir, e que é básica para a modelização do problema, é a de como se reparte  $T'$  sobre  $T$ . Na ausência de condições particulares que tornem defensável outro modelo, o mais natural, por ser também o mais provável a priori, é o de repartição uniforme, de sorte que ao intervalo de tempo  $dt$  corresponde a variação elementar  $dt'^*$  de  $T'$ , tal que

$$dt' = \frac{T'}{T} dt . \quad (18)$$

Na formulação (18) pode dizer-se que enquanto  $t$  é o tempo "cronológico" (passe a redundância),  $t'$  ( $\leq t$ ) é um tempo "paralelo", definido por, nele, o decréscimo de  $S'$  ser uniforme ao ritmo  $Q_j$ , quer dizer,

$$dS = - Q_j dt' = - Q_j \frac{T'}{T} dt, \quad (18 a)$$

donde

$$S(t) = S - Q_j \frac{T'}{T} t . \quad (19)$$

É agora oportuno esclarecer, e sublinhadamente, que o  $S(t)$  de (19) - linear, neste modelo de repartição uniforme - é a quantidade remanescente esperada para o instante  $t$  do stock inicial  $S$ , cujo critério de decisão a priori é o cerne do problema em análise. Ora já se viu, por um lado, que esse critério é o do valor do resultado esperado,  $R(S)$ , sobre  $S$ . Mas, por outro lado, sendo  $f(T')$  densidade não condicionada, é óbvio que pode haver, concomitantemente à ocorrência aleatória de qualquer  $T'$ , paragens também aleatórias e desencontradas em  $J$  (mas não em  $M$ ) de tempo  $T'_j$  em  $T$ . Estas paragens vão causar acumulação de um stock intermédio  $S'_j$ , de tal modo que no fim de  $T$  o stock total  $S''$  pode ser eventualmente superior ao stock decidido a priori,  $S$ . Para que tal aconteça nem é necessário que concomitantemente a  $T'_j > 0$  seja  $T' = 0$ ; basta, na hipótese (2), que seja  $T'_j > T'$ . Mas isto em nada interfere com o critério de avaliar a decisão sobre  $S$  em  $t=0$ . Por

---

\* (Note-se que no primeiro membro de (18) é necessário usar outro símbolo, que não  $T'$ , de outro modo cair-se-ia, por mero acidente simbólico-analítico, numa repartição logarítmica, sem qualquer argumento que a sustentasse. Mas esta questão só se levanta nas expressões (18) e (18a).

outras palavras e a título de exemplo,  $T' = 0$  acarreta que o resultado sobre  $S$  inicial é  $-jvST$  em  $t = T$ , seja, ou não,  $S'_j > 0$ . Se, por acaso, for  $S'_j > 0$ , este stock adicional, ou se escoar para o mercado ao valor  $v$ , ou se tem em consideração como componente do stock ótimo,  $S_0$ , (se este não for nulo) no início do período de gestão do stock  $T$ , seguinte.

Quer isto dizer que, devendo os planos de fabrico ter em atenção todas as paragens em  $M$  e  $J$  - previsíveis e aleatórias - da optimização em causa resulta ser zero o valor esperado da variação do stock inicial  $S$  no fim de  $T$ .

Notemos agora que a cada valor inicial  $S$  corresponde um valor  $T''$ , de  $T'$ , do seu esgotamento ao ritmo  $Q_j$  :

$$T'' = \frac{S}{Q_j} \quad (20)$$

o que se verifica no instante

$$t'' = \frac{S T}{Q_j T'} \quad (21)$$

#### 4 - DESENVOLVIMENTO

##### 4.1 - EVENTUALIDADES COMPLEMENTARES

Posto isto, duas hipóteses se podem dar quanto aos valores de  $T'$  e  $T''$  :  
 $T'' \leq T'$  e  $T'' > T'$ . Convém tratá-las em separado.

a)  $T'' \leq T'$  (22)

Neste caso  $S$  esgota-se num instante  $t'' \leq T$  dado por (21). A discriminação, nesta hipótese, dos débitos e créditos no fim de  $T$  é como segue.

### *Débitos*

Imobilização do valor de S

$$I(S) = I(S, t'') = \int_0^{t''} j v S(t) dt = \frac{j v S^2 T}{2 Q_J T'} \quad (23)$$

tendo utilizado (19) e (21).

Valor de S	v S
Processamento de S em J	$c_J S$

### *Créditos*

Valor do produzido por J  $\eta_J v' S$

O resultado nesta hipótese é portanto

$$r_a(S, T') = - \frac{j v S^2 T}{2 Q_J T'} + m S \quad (24)$$

tendo utilizado (1) e (2).

Deve agora considerar-se a hipótese complementar de (22).

b)  $T'' > T'$  (25)

Neste caso S não se esgota no fim de T e a discriminação de débitos e créditos é como segue.

### *Débitos*

Imobilização do valor de S.

O stock remanescente no fim de T é

$$S_r = S - Q_J T' \quad (26)$$



A parcela  $Q_J T'$  esgota-se exactamente para  $t = T$  e o encargo correspondente é o valor de (23) para  $S = Q_J T'$ , i.e.,  $j v S T / 2$ , de modo que utilizando (26), se tem

$$I(S) = \frac{j v S T}{2} + j v S_r T = \frac{3}{2} j v S T - j v Q_J T' T \quad (27)$$

Valor de  $S$   $v S$   
 Processamento de  $S$  em  $J$   $c_J Q_J T'$

### *Créditos*

Valor do produzido por  $J$   $v' \eta_J Q_J T'$   
 Valor de  $S_r$   $v S_r = v(S - Q_J T')$

O resultado nesta hipótese é portanto

$$r_b(S, T') = -\frac{3}{2} j v S T + Q_J T' (m + j v T) \quad (28)$$

Verifica-se facilmente que se tem, como é necessário,

$$r_a(S, T'') = r_b(S, T'') \quad (29)$$

Quer dizer, as expressões analíticas dos resultados identificam-se no ponto fronteira,  $T''$ , mas diferem noutros valores de  $T'$ , pelo que o integral do resultado deve desdobrar-se em dois

$$R(S) = \int_{t_*}^{S/Q_J} r_b(S, T') f(T') dT' + \int_{S/Q_J}^{t^*} r_a(S, T') f(T') dT' - q j v S T \quad (30),$$

sendo ambos função composta de  $S$ : através dos extremos e pelo facto de as integradas serem funções paramétricas de  $S$ .

Como se verá, é mais simples começar a análise a partir de  $dR/dS$ , conjugando depois as conclusões com as restrições (6), (7) e (8), e não ao contrário.

## 4.2 - OTIMIZAÇÃO

Derivando então (30) e atendendo a que, por força de (29) e (20), cancelam as derivadas relativas aos extremos, tem-se como condição de estacionaridade

$$\frac{dR}{dS} = \int_{t_*}^{S/Q_J} \frac{\partial r_b}{\partial S} f(T') dT' + \int_{S/Q_J}^{t^*} \frac{\partial r_a}{\partial S} f(T') dT' - q j v T = 0 \quad (31)$$

Ora, por (28) e (24), é

$$\left| \begin{array}{l} \frac{\partial r_b}{\partial S} = -\frac{3}{2} j v T \\ \frac{\partial r_a}{\partial S} = m - \frac{j v S T}{Q_J T'} \end{array} \right.$$

Entrando agora com estes valores em (31) e notando que, por (3),

$$\int_{S/Q_J}^{t^*} f(T') dT' = p - \int_{t_*}^{S/Q_J} f(T') dT'$$

chega-se a

$$\frac{dR}{dS} = m p - (m + \frac{3}{2} j v T) \int_{t_*}^{S/Q_J} f(T') dT' - \frac{j v S T}{Q_J} \int_{S/Q_J}^{t^*} \frac{1}{T'} f(T') dT' - q j v T \quad (32)$$

Porque nada obsta à priori a que exista uma solução do tipo (10) e inferior a  $Q_J t_*$ , como será detalhadamente esclarecido, convém, ao prosseguir a análise desta expressão, ter presente que o domínio de  $S$  é o definido por (6) e não apenas o intervalo  $[Q_J t_*, Q_J t^*]$ .

Ora, nesta expressão o primeiro e o último termo são constantes e o segundo é função contínua de  $S$  para todo o  $S > 0$ .

Quanto ao terceiro termo, ele parece integral impróprio quando  $S \rightarrow 0$ . Mas não é assim. De facto,  $S$  só pode tender para zero à direita, pois que não tem sentido  $S < 0$ . Mas, por (11),

$$Q_J t_* > S > 0 \rightarrow f(0 < T' < t_*) = 0 \quad (33),$$

logo o terceiro termo, e com ele  $dR/dS$ , é função contínua de  $S$  à direita de  $S = 0$ .

Para averiguar sobre a segunda condição de (10) é pois, possível derivar novamente (32). Obtém-se

$$\frac{d^2 R}{dS^2} = -f\left(\frac{S}{Q_J}\right) \cdot \frac{1}{Q_J} \cdot \left(m + \frac{1}{2} j v T\right) - \frac{j v T}{Q_J} \int_{S/Q_J}^{t_*} \frac{1}{T'} f(T') dT' \quad (34)$$

as descontinuidades sendo as de  $f(S/Q_J)$ . De qualquer modo, porém, ambos os termos do segundo membro, à parte o sinal, são intrinsecamente positivos e não se anulam simultaneamente, pelo que se tem

$$\left| \begin{array}{l} \frac{d^2 R}{dS^2} < 0 \\ S < Q_J t_* \end{array} \right. \quad \text{e} \quad \left| \begin{array}{l} \frac{d^2 R}{dS^2} = 0 \rightarrow \frac{dR}{dS} = c \cdot t_e < 0 \\ S > Q_J t_* \end{array} \right. \quad (35)$$

Esta conclusão, aliada à continuidade de  $dR/dS$ , permite desde já afirmar que a equação que resulta de anular esta derivada admitirá uma raiz única,  $S(R' = 0)$ , correspondendo ela a um máximo de  $R(S)$ , como se pretendia.

Notando agora que o  $dR/dS$  de (32) é também função dos parâmetros  $m$ ,  $j$ ,  $v$  e  $p$ , vai prosseguir-se a análise pelo método clássico das tendências de  $dR/dS$ .

Por força de (33),

$$\lim_{S \rightarrow 0} \int_{t_*}^{S/Q_J} f(T') dT' = - \lim_{S \rightarrow 0} \int_{S/Q_J}^{t_*} f(T') dT' = 0$$

e

$$\lim_{S \rightarrow 0} \frac{j v S T}{Q_J} \int_{S/Q_J}^{t^*} \frac{1}{T'} f(T') dT' = 0$$

logo

$$\lim_{S \rightarrow 0} \frac{dR}{dS} = m p - q j v T \quad (36)$$

Convém ver ainda como se comporta  $dR/dS$  no extremo superior do intervalo  $(0, Q_J, t^*)$ .

Ora

$$\lim_{S \rightarrow Q_J, t^*} \int_{S/Q_J}^{t^*} \frac{1}{T'} f(T') dT' = 0$$

e

$$\lim_{S \rightarrow Q_J, t^*} \int_{t^*}^{S/Q_J} f(T') dT' = p,$$

logo

$$\lim_{S \rightarrow Q_J, t^*} \frac{dR}{dS} = -q j v T - (m + \frac{3}{2} j v T) p + m p = -j v T (1 + \frac{p}{2}) < 0 \quad (37)$$

Para ver a influência que a densidade  $f(T')$  tem sobre a solução, há também que tomar o limite de  $dR/dS$  quando  $p \rightarrow 0$ .

Mas

$$p \rightarrow 0 \rightarrow f(T' \neq 0) \rightarrow 0 \rightarrow \int f(T') \frac{1}{T'} dT' = 0,$$

portanto

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{p \rightarrow 0} \frac{dR}{dS} = -j v T < 0 \\ \text{vs} \end{array} \right\} \quad (38)$$

Então existe um  $p_c$ , tal que

$$p \leq p_c \rightarrow \begin{cases} \frac{dR}{dS} < 0 \\ \forall S > 0 \end{cases} \quad (39) \rightarrow S_0 = 0 \quad (40)$$

O valor de  $p_c$  vai ser calculado a partir de (36). Assim :

$$m p - q j v T \leq 0 \quad (41) \rightarrow \begin{cases} \frac{dR}{dS} < 0 \\ \forall S > 0 \end{cases} \quad (42)$$

ou

$$\tilde{S}(R'=0) > 0 \rightarrow S_0 = 0 \quad (43)$$

porque senão haveria um intervalo positivo,  $S(a,b)$ , em que  $dR/dS$  cresceria, o que é contraditório de (35).

Logo (41) define o  $p_c$  de (39) :

$$p_c = \frac{j v T}{m + j v T} \quad (44)$$

(De passagem, note-se que a existência de um valor  $p_c$  de  $p$ , abaixo do qual não vale a pena fazer stocks é até expectável à priori. A sua expressão analítica (44) mostra como depende  $p_c$  de factores internos à actividade, tais como a qualidade da tecnologia de  $J$  ( $m$ ) e de factores externos, tais como a situação do mercado de capitais ( $j$ ) e o valor  $v$  de  $S$ . Note-se também que, quando  $m$  diminui  $p_c$  aumenta, até que  $p_c = 1$  para  $m = 0$ , como era de esperar).

Falta apenas supor a contraditória de (41), quer dizer,

$$p > p_c = \frac{j v T}{m + j v T} \quad (45) \rightarrow \left( \frac{dR}{dS} \right)_{S \rightarrow 0} > 0$$

e então, atendendo novamente à continuidade de  $dR/dS$ .

$$\left[ \left( \frac{dR}{dS} \right)_{S \rightarrow 0} > 0 \right] \cap \left[ \left( \frac{dR}{dS} \right)_{S \rightarrow Q_J t_*} < 0 \right] \rightarrow \exists S(R'=0) \left| \begin{array}{l} > 0 \\ < Q_J t_* \end{array} \right. \quad (46)$$

e  $S(R'=0)$  é único.

Parece interessante referir, de passagem, em que condições é que esta solução pode ser inferior a  $Q_J t_*$ .

Atendendo a (11), tem-se no segundo membro de (32)

$$0 < S < Q_J t_* \rightarrow \left( \int_{t_*}^{S/Q_J} f(T') dT' = 0 \right) \cap \left( \int_{S/Q_J}^{t_*} \frac{1}{T'} f(T') dT' = \frac{1}{T'} \right),$$

donde que essa eventual raiz de  $dR/dS = 0$  deva satisfazer a

$$\frac{dR}{dS} = m p - q j v T - \frac{j v S T}{Q_J T'} = 0$$

ou seja,

$$S(R'=0) = \frac{(m p - q j v T) Q_J T'}{j v T}$$

Sem deixar de ter presente que se está na situação (45) e atendendo a (4), tem-se que introduzir agora  $S(R'=0) < Q_J t_*$  na última expressão conduz imediatamente à conclusão pretendida :

$$\frac{j v T}{m + j v T} < p < \frac{j v T}{m + j v T} \left( 1 + \frac{t_*}{T'} \right) \rightarrow 0 < S(R'=0) < Q_J t_*.$$

Claro que nesta eventualidade o stock inicial  $S_0$  só pode vir a ter dois destinos no fim de  $T$ : ou ficar intacto ( $T' = 0$ ), ou ser totalmente consumido ( $T' \neq 0$ ).

Pode agora abordar-se, com grande facilidade, a condição (8).

Principiemos por notar, a partir de (30), que  $R$  é função contínua e unívoca de  $S$ , tendo quando muito, por força de (35), duas raízes reais e que uma delas é  $S = 0$ , como decorre logo da definição de  $r(S, T')$ .

Então,

$$p \leq \frac{jvT}{m + jvT} \rightarrow (39) \rightarrow \left( \frac{dR}{dS} \right)_{S \rightarrow 0} \leq 0 \rightarrow S_0 = 0 \quad (47)$$

que é a solução (40). Esta situação é a ilustrada na Fig. 2.

A alternativa é

$$p > \frac{jvT}{m + jvT} \rightarrow \left( \frac{dR}{dS} \right)_{S \rightarrow 0} > 0 \rightarrow \begin{cases} \exists S(R' = 0) > 0 \\ R[S(R' = 0)] < Q_{jt}^* \\ R[S(R' = 0)] > 0 \end{cases} \quad (48)$$

o que demonstra a exequibilidade da solução  $S(R' = 0)$ . Esta situação é a da Fig. 3.

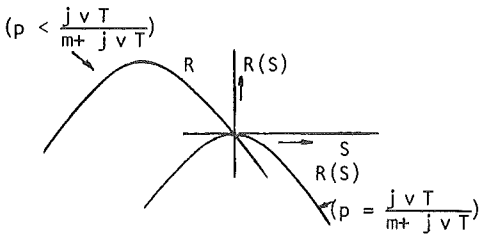


Fig. 2

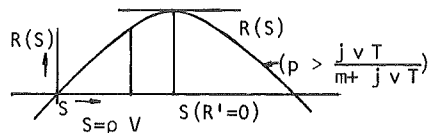


Fig. 3

Para terminar o problema do cálculo da solução,  $S_0$ , falta apenas conjugar as conclusões (47) e (48) com a condição de espaço disponível (7). Como segue.

$$p V \geq S(R' = 0) \rightarrow S_0 = S(R' = 0)$$

$$p V < S(R' = 0) \rightarrow S_0 = p V$$

a última conclusão, aliás ilustrada na Fig. 3, resultando de ser  $dR/dS > 0$  e  $R > 0$  para  $S = p V > 0$ .

### 4.3 - SINTESE DE RESULTADOS

$$P \leq \frac{J v T}{m + J v T} \rightarrow S_o = 0$$

$$P > \frac{J v T}{m + J v T} \rightarrow \frac{dR}{dS} = 0 \rightarrow 0 < S(R'=0) < Q_J t^* \left\{ \begin{array}{l} \rho V \geq S(R'=0) \rightarrow S_o = S(R'=0) \\ \rho V < S(R'=0) \rightarrow S_o = \rho V \end{array} \right.$$

### 5 - GENERALIZAÇÃO

Para finalizar, vai mostrar-se que a hipótese (2), de equilíbrio das capacidades de M e J, (a qual, aliás, é condição normal num projecto) não é restritiva da análise feita.

De facto, se houver desequilíbrio, sendo maior a capacidade de J, i.e., se  $\eta_M Q_M < Q_J$ , a existir S, ele é forçosamente adquirido no exterior, pelo que esta hipótese em nada interfere com o concluído.

Suponhamos agora

$$\eta_M Q_M > Q_J$$

e sejam

$T_{rM}, T_{rJ}$  tempos previsíveis de paragem de M e J no plano de manutenção para T.

$\bar{T}_M, \bar{T}_J$  tempos médios de paragem de M e J de causa aleatória (estes valores, ou existem como dados estatísticos, ou saem da simulação já referida sobre  $f(T')$  e é claro que  $\bar{T}_M \geq \bar{T}_J$ ).

$\bar{Q}_M$  caudal médio de carga de M (a calcular)

Os valores médios dos tempos úteis de laboração de M e J durante T são portanto



$$\bar{T}_{uM} = T - T_{rM} - \bar{T}_M''$$

$$\bar{T}_{uM} = T - T_{rJ} - \bar{T}_J''$$

A condição sobre  $\bar{Q}_M$  que exprime a criação, por M, do stock óptimo,  $S_o$ , para o início do período seguinte, T, é

$$\bar{Q}_M = \frac{Q_J(T - T_{rJ} - \bar{T}_J'') + S_o}{\eta_M(T - T_{rM} - \bar{T}_M'')}$$

isto supondo que o segundo membro não excede o caudal máximo  $Q_M^*$ , praticável em M. Se não for assim, então  $\bar{Q}_M = Q_M^*$  e a parte de  $S_o$  em falta adquire-se no exterior.

PESQUISA OPERACIONAL

Vol. 3, Nº 1, Junho 1983

Carta do Editor .....	1
Esquemas de Redução de Dimensionalidade em Algoritmos de Programação Dinâmica Estocástica	
<i>Cláudia C.G. Costa, Mario Veiga F. Pereira e Jerson Kelman</i> .....	2
Combinação de Informações Subjetivas e Métodos Quantitativos para Previsões de Taxas no Open-Market	
<i>Basilio de Bragança Pereira, Ricardo Cesar O. Coqueiro e Antonio Horácio Vicente Perrota</i> .....	25
Algebraic Properties of GERT-Networks	
<i>Herwig Meyer</i> .....	41
Aspectos da Atividade Atual de Pesquisa Operacional no Brasil	
<i>Claudio T. Bornstein e Luiz Fernando A. da Rocha</i> .....	54
Índice da Revista de Econometria .....	73
Normas e Recomendações para Contribuições .....	74

## INDICE

	Pg.
. EDITORIAL .....	1
. CARTA DO PRESIDENTE DA IFORS .....	5
. RELATÓRIO DE ACTIVIDADES DO ANO DE 1982 .....	7
. BALANÇO SINTÉTICO DO EXERCÍCIO DE 1982 .....	9
. NOTÍCIAS .....	16
. APPROACH TO O.R. PROBLEMS - <i>Q.A.M.M. Yaha</i> .....	17
. OPTIMIZAÇÃO DE STOCKS INTERMÉDIOS - <i>José Cayolla</i> .....	21
. INDICE DE PESQUISA OPERACIONAL .....	40



Associação Portuguesa para o Desenvolvimento  
da Investigação Operacional.

CÊSUR - Instituto Superior Técnico - Avenida Rovisco Pais  
1000 Lisboa - Telef. 80 74 55