

INVESTIGAÇÃO OPERACIONAL

PUBLICAÇÃO DA:



Associação Portuguesa para o Desenvolvimento
da Investigação Operacional.

Volume 3

Número 1

Março 83

INVESTIGAÇÃO OPERACIONAL

Propriedade:

APDIO — Associação Portuguesa para o Desenvolvimento da Investigação Operacional

ESTATUTO EDITORIAL

«Investigação Operacional», órgão oficial da APDIO cobre uma larga gama de assuntos reflectindo assim a grande diversidade de profissões e interesses dos sócios da Associação, bem como as muitas áreas de aplicação da I.O. O seu objectivo primordial é promover a aplicação do método e técnicas da I.O. aos problemas da Sociedade Portuguesa.

A publicação acolhe contribuições nos campos da metodologia, técnicas, e áreas de aplicação e software de I.O. sendo no entanto dada prioridade a bons casos de estudo de carácter iminentemente prático.

Serão também publicadas notícias da APDIO bem como informações sobre acontecimentos nacionais e internacionais relacionadas com a I.O.

Distribuição gratuita aos sócios da APDIO.

Sendo este número o primeiro dum novo volume julgo valer a pena fazer aqui um balanço do que já foi realizado.

Fazer uma revista tem duas facetas distintas. Uma é o processo de produção e nesse campo penso que a pontualidade na publicação e a apresentação gráfica me permitem afirmar que dentro das severas restrições financeiras duma Associação Científica nos seus primeiros anos de existência não seria fácil fazer melhor.

A selecção das contribuições a incluir em cada número é certamente a faceta mais interessante mas aquela em que é mais difícil atingir em poucos anos de vida uma posição equilibrada. O Editor tem que conciliar o que pensa poder interessar aos seus leitores com o que os autores lhe submetem para publicação e ainda com o parecer dos revisores. Se o sucesso de uma revista se mede pelo número de artigos submetidos para publicação então somos certamente um sucesso já que neste momento temos mais artigos submetidos para publicação do que os que podemos publicar durante um ano. No entanto as estatísticas nem sempre são a melhor forma para avaliar o sucesso e devo dizer que 90% desses artigos não são de autores portugueses embora bastantes sejam dos nossos irmãos brasileiros.

Não tenciono alterar durante este ano o formato, apresentação gráfica ou estrutura da revista. Penso que dentro dos parâmetros actuais é ainda possível tornar Investigação Operacional mais interessante. Para isso precisamos da sua colaboração, dos seus artigos, notícias e opiniões.

Isabel Henriques

INVESTIGAÇÃO OPERACIONAL

PUBLICAÇÃO QUADRIMESTRAL

Número Avulso: 200\$00

Volume 3, Nº 1, Março 1983

DIRECTOR: ISABEL MARIA HALL THEMIDO

COMISSÃO EDITORIAL

Dr. Paulo Bácia (EDP)

Eng. João Caraça

Prof. Dias Coelho (UNL)

Prof. Rui Campos Guimarães (FEUP)

Prof. Fernando de Jesus (ISE)

Eng. A. Máximo (NAVELINK)

Eng. Rui Barbesti Nápoles (LISNAVE)

Prof. Valente de Oliveira (FEUP, CPRN)

Prof. Gouvêa Portela (IST, EGF)

Cte. Cervaens Rodrigues (CIOA)

Prof. Guimarães Rodrigues (U. Minho)

Prof. Mário Rosa (U. COIMBRA)

Prof. Luís Valadares Tavares (IST, CESUR)

Eng. Eduardo Zúquete (CP)

Prof. Nelson Maculan Filho (Brasil - CPPE/UFRJ)

Prof. K. Brian Haley (Reino Unido)

Prof. Robert Machol (Estados Unidos)

Prof. Bruno Martinoli (Itália)

Prof. M. Najim (Marrocos)

Prof. Ioánnis A. Pappás (Grécia)

COMISSÃO DIRECTIVA DA APDIO

Presidente: Luís A. Valadares Tavares

Vice-Presidente: Isabel Maria Hall Themido

Vice-Presidente: José António Cervaens Rodrigues

Secretário: João Luís César das Neves

Tesoureiro: Luís A. Tadeu dos Santos Almeida

Este número foi subsidiado pela Junta Nacional de Investigação Científica e Tecnológica. A Revista "Investigação Operacional" está registada na Secretaria de Estado da Comunicação Social sob o nº 108 335.

Esta Revista é distribuída gratuitamente aos sócios da APDIO. As informações sobre inscrições na Associação, assim como a correspondência para a Revista, devem ser enviadas para a sede da APDIO - Associação Portuguesa para o Desenvolvimento da Investigação Operacional - CESUR, Instituto Superior Técnico, Av. Rovisco Pais, 1000 Lisboa.

Dactilografia:
Maria Luísa Saraiva

Impressão:
João de Matos, Impressores
Avenida Álvares Cabral, 1A
Telef.: 65 18 83 1200 Lisboa

DO PRESIDENTE DA IFAC

It was a great pleasure to accept as per January 1st, 1982 APD10 as the IFAC National Member Organization (NMO) of Portugal. I like to welcome APD10 and all its members to the IFAC family and hope that many of you have a chance to participate actively in IFAC's work. Let me use the opportunity to pay some attention to IFAC, its organization and activities.

IFAC is a world-wide technical and scientific organization for automation and control and has neither political nor economic interests ; its goal as an International federation is to promote technology and science in the fields of automatic control in the widest sense. This does not only include the requirements of the theory and application of control technology when applied to actual systems of varying complexity, but also covers questions concerning the effects of control concepts on society and the influence on the developing countries etc. Of great significance is the exchange of scientific results and specialised knowledge among interested experts of all countries. This is promoted on the one hand by the triennial world congresses and on the other hand through symposia, workshops and similar meetings.

The next World Congress takes place on July 2 - 6, 1984 in Budapest, Hungary, the 10th World Congress is planned from June 29 to July 3, 1987 in Munich, Federal Republic of Germany. The aim of the congresses is to report on the newest results and developments in more or less the complete field of automatic control through survey and special lectures, round-table discussions, case studies, excursions as well as through personal exchanges of ideas. The two years between the World Congresses have recently been filled by about 25 symposia, workshops and round-table discussions on very detailed topic ranges.

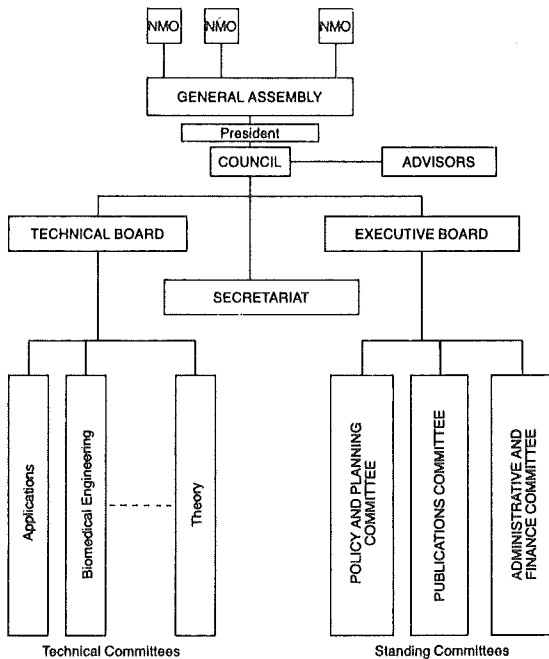
There have been a total of over 150 meetings with about 25.000 specialists since the foundation of the IFAC. The results of almost all of these meetings are available as printed proceedings, which are published by Pergamon Press Ltd, Oxford. The organization of the meetings is subject to the NMO of the sponsoring country. The selection of topics and the spheres of interest, however, are the responsibility of the 14 technical committees of IFAC :

- . *Applications*
- . *Biomedical Engineering*
- . *Components and Instruments*
- . *Computers*
- . *Developing Countries*
- . *Economic and Management Systems*
- . *Education*
- . *Manufacturing Technology*
- . *Mathematics of Control*
- . *Social Effects of Automation*
- . *Space*
- . *Systems Engineering*
- . *Terminology and Standards*
- . *Theory*

They characterize the main working points and enable the wide scope of topics handled to be recognised. The exchange of information takes place through publications additional to those associated with the conference proceedings mentioned earlier. The official IFAC journal "Automatica" is one of the most important periodicals in our field.

The "IFAC Newsletter" which appears every two months informs about activities and meetings. The IFAC was also responsible for the production of the dictionary "Multilingual Glossary of Automatic Control Technology" in English, French, German, Russian, Italian, Spanish and Japanese which appeared in 1981 printed by Pergamon Press.

The close connection of the IFAC to other associated international associations (IMACS, IFIP, IFORS, IMEKO), fostered by the "Five International Associations Coordinating Committee" (FIACC) ensures professional cooperation with neighbouring fields. The IFAC also gives attention to public interests e.g. by nominating suitable specialists as advisers to various organizations within UNO as well as other international and regional associations.



IFAC is organized as shown in the figure. The highest panel is the General Assembly. This is formed of delegates from all NMOs and all have the same rights and number of votes. The Council elected by the General Assembly has the President as its chairman and directs all IFAC business. The technical and organizational affairs are looked after by Working Committees, the "Technical Board" and the "Executive Board". These report to the Council. The technical committees belong to the "Technical Board" and the standing committees to the "Executive Board".

The IFAC Secretariat is located in Laxenburg near Vienna. The IFAC Information brochure, Aims, Structure Activities and other material can be obtained from the IFAC Secretariat, Schloßplatz 12, A 2361 Laxenburg (Austria).

M. Thoma

IFAC President-Elect

I.F.O.R.S.

INTERNATIONAL FEDERATION OF OPERATIONAL RESEARCH SOCIETIES

letter from the president

CHANGING PURPOSES ?

No. 1, January 1983

When IFORS was founded by the OR Societies of the United States of America, the United Kingdom, and France in 1959, the field was quite new, and the exchange of OR knowledge between such industrialized countries was one of the prevailing purposes of IFORS. From 1960 to 1963 the OR Societies of further 14 countries joined IFORS ; at least 10 of these countries would - by today's standards - be considered as developed. At that time OR was not yet fully developed as a scientific subject or as a unique approach to problems - instead, it was in a process of development ; and IFORS played a major role in the exchange of OR ideas and in the cross-fertilization between the OR communities of the industrialized countries.

The exchange between the established OR Societies of the industrialized countries is still one of the purposes of IFORS ; but today this exchange might not to the same extent require a federation like IFORS as it did in the early sixties. Of at least equal importance - today and in the future - may be the transfer of knowledge from the long established and experienced OR Societies to those of the developing countries.

The OR Societies of another 16 countries joined IFORS from 1964 to 1982. Roughly two thirds of these countries can be considered as developing. They may urgently need advice and help from the experienced OR Societies.

To support such transfer of knowledge became more and more important among the purposes of IFORS. This is recognized since many years, and several activities in this direction were carried out by IFORS. For instance, IFORS sponsored specialized meetings in developing countries, and the IFORS Conference 1975 in Japan was dedicated to the theme "OR in the Service of Developing Economies".

It might be questioned, however, whether such Triennial Conferences of IFORS are the adequate forum for the transfer of OR experience to developing countries since (i) they might only be able to send small delegations and (ii) larger parts of the Conference Program might be of little actual relevance for their particular problems. Should - in addition to the Triennial Conferences - IFORS not try to bring the OR knowledge to the developing regions of the world ? This can be done in several ways :

. Regional Conferences - preferably on specific, precisely defined subjects - could be organized jointly by local OR Societies and IFORS. The particular service of IFORS would be to seek and invite experts of the particular field.

. Regional or national OR conferences could be extended by an "IFORS Day", i.e. a program particularly designed with respect to the needs of the particular OR Society.

. Experts could be invited through IFORS to stay with a developing country for a longer period of time in order to (i) work on a project or (ii) teach and help to design curricula.

Many other ways can be thought of. Any requests from OR Societies are welcome. The Member and Kindred Societies of IFORS are invited to apply for any particular help from IFORS.

It should be kept in mind that IFORS as such does not have funds to finance any additional activities. Each particular program would require particular efforts to raise monetary sources.

In the early years of IFORS, the exchange of OR knowledge between equally developed OR Societies prevailed. This purpose has now got a strong brother : The transfer from the experienced to the less experienced OR Societies. This transfer would serve both, the benefit of the developing and that of the developed regions of the world.

Heiner Muller-Merbach - President of IFORS

REUNIÃO DE DIJON DO GRUPO "EURO-SUR L'AIDE À LA DÉCISION MULTICRITÈRE"

Os métodos de decisão em que, explicitamente, se consideram critérios múltiplos começaram a ser desenvolvidos no final da década de 60, assistindo-se nos últimos anos ao seu desenvolvimento e a muitas tentativas de aplicação.

O grupo "Euro-sur l'aide à la Décision Multicritère" foi criado em 1975, no Congresso Euro I em Bruxelas. Desde então têm-se realizado duas reuniões por ano, uma em Março e outra em Outubro. Tive oportunidade de participar na 16.^a reunião que teve lugar em Dijon nos dias 21 e 22 de Outubro de 1982. O ambiente de trabalho e de camaradagem que se vive no seio do grupo, sugerem-me que, sem se substituir aos congressos, este tipo de organizações é, em certa medida, mais produtivo, sendo de incentivar não só a participação de portugueses nas reuniões dos vários grupos Euro, mas também a realização de reuniões deste tipo no nosso País.

Os objectivos do grupo "Euro-sur l'aide à la Décision Multicritère", que distinguem as suas reuniões dos congressos tradicionais, são sucintamente :

- a - Contribuir para o desenvolvimento duma corrente original, ao nível europeu, no domínio em causa
- b - Permitir a cada membro apresentar trabalhos (nas reuniões bi-anuais), submetê-los à crítica do grupo e apresentar questões em aberto.
- c - Manter no grupo um clima de trabalho, privilegiando debates e discussões, isto é, não transformando as reuniões em mini-congressos.

As línguas oficiais do grupo são o francês e o inglês. No entanto, talvez devido à sua origem francófona (o Presidente é o Professor Bernard Roy que foi o impulsor da escola francesa de métodos de decisão com critérios múltiplos) há uma predominância, quer ao nível do idioma falado, quer do tipo de assuntos tratados, dos investigadores de língua francesa. Notes-se, contudo, que o grupo está aberto a todos os tipos de abordagem do problema.

Cada reunião é organizada por um responsável que estabelece o programa de acordo com os trabalhos propostos pelos membros do grupo. Por exemplo, em Dijon as sessões de trabalho realizaram-se no "Institut de Mathématiques Économiques" sendo o organizador Michel Prévot. Foram apresentadas e discutidas doze comunicações (1).

Para ilustrar a diversidade dos temas tratados, enumero seguidamente os trabalhos que mais me impressionaram : Ficheret et al. apresentaram um estudo sobre a identificação de enterobactérias por micro-computador, utilizando modelos com critérios múltiplos ; Winkels apresentou uma técnica de visualização gráfica para programação linear com objectivos múltiplos e Hansen um estudo muito interessante sobre o alcance e as limitações do método "Electre".

A próxima reunião realizar-se-á em Basileia, a 17 e 18 de Março de 1983 e a seguinte em Poznan, Polónia (2). Temos também muito gosto em informar que alguns membros do grupo mostraram interesse em fazer uma das reuniões de 1984 ou de 1985 em Coimbra, encontrando-se o assunto neste momento em estudo.

João Clímaco

(1) Onde se inclui um trabalho sobre "Aide à la Décision Multicritère - Rapport sur la Recherche à l'Université de Coimbra", por J.Clímaco, A. Traça de Almeida, E. Martins.

(2) Os interessados poderão contactar com : Prof. Bernard Roy
Laboratoire d'Analyse et Modélisation de Systèmes pour l'aide à la Décision (LAMSADE) - Place du Mal. de Lattre de Tassigny - 75775 PARIS CEDEX 16

OPTIMIZING A PUMP - PIPE SYSTEM

JOSÉ ANTÓNIO SOEIRO FERREIRA

Faculty of Engineering - University of Oporto

RENÉ VICTOR VALQUI VIDAL

IMSOR - Technical University of Denmark

Resumo

O artigo apresenta um método de dimensionamento de um sistema de bombagem. O modelo matemático apresentado tem como variável de estado a pressão de sucção em cada estação de bombagem e duas variáveis de controle, a pressão da bomba e o diâmetro do tubo. Uma versão discreta do princípio de Optimização de Pontiagrini permite a determinação do valor óptimo das pressões de sucção que devem ser o menor possível, permitindo ainda reduzir o problema à busca do mínimo de uma função de uma só variável. Prova-se ainda que cada estágio pode ser optimizado independentemente. Apresenta-se um exemplo de aplicação.

1 - INTRODUCTION

An application of the theory of optimization will be considered in this article by using the discrete-time version of the Pontryagin Optimum Principle to minimize the total costs of a pump-pipe system in series.

The article begins with the problem formulation (sec. 2). In section 3 a mathematical model is described and analysed from an optimization point of view. In the same section an application of the discrete optimum principle gives some interesting properties of the optimal solution. Afterwards an algorithm is suggested to solve a general problem (sec. 4), an example is presented (sec. 5) and finally (sec. 6) a summary ends the paper.

2 - THE PROBLEM

2.1 - Problem statement

A pipeline is to be built from "O" to "N", to transport some liquid (water, oil, etc.). The distance to be traversed is great enough to justify the construction of intermediate pumping stations. We assume that the route of the pipeline and the number of stations are known and will concentrate on determining the variables, diameter (d), thickness (t) and the size of the pumps (Δp) that minimize the total yearly costs. These costs are composed of:

Annual pump costs (investment + operation + maintenance),

Annual costs of pipe,

Annual costs of sites,

Annual costs of land used for piping between sites

So, we are not going through the problem of finding the optimal route after a first selection of feasible sites, and assume that some approach has been previously used to solve that difficulty, see for instance (4). Our starting point is clarified in fig. 1, that shows the feasible sites and the route already chosen.

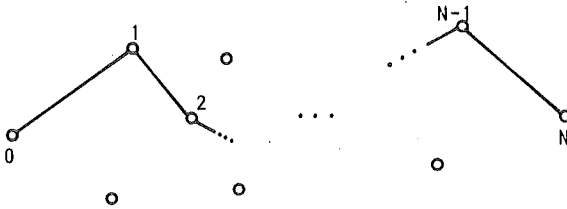


Fig. 1 - Feasible sites showing the chosen route

2.2 - Physical relations and costs

We will use the following relations concerning the design variables, see (4) or (1)

$$\psi(d) = \frac{K(d) \cdot x}{d^5} \quad (2-1)$$

which determine the pressure loss in a pipe of diameter d (feet) and length x (miles). The function $K(d)$ has been approximated as $K(d) = 0.625d^2 - 8.875d + 12.350$ and the minimum thickness t (feet) of the pipe is given by

$$t = \frac{(p+\Delta p) \cdot d}{C_t(d)} \quad (2-2)$$

where :

p (psia, pounds per square inch above atmospheric pressure) is the suction pressure

$p+\Delta p$ - is the discharge pressure

$C_t(d)$ - is the yearly pump cost that can be approximated by :

$$C_t(d) = -625d + 6750$$

and the annual cost of pipe (\$/year) is given by :

$$c(d,t) = (85000t + 1600) \cdot \left[\frac{d}{0.4} \right]^{1.07} \cdot x$$

By using expression (2-2) we can eliminate t , from the above expression obtaining a new cost function.

$$c(p, \Delta p, d) = \psi(c) \cdot (p + \Delta p) + \omega(d) \quad (2-3)$$

where

$$\psi(d) = 85000 \frac{d}{C_t(d)} \cdot \left[\frac{d}{0.4} \right]^{1.07} \cdot x \text{ and } \omega(d) = 1600 \left[\frac{d}{0.4} \right]^{1.07} \cdot x$$

The total annual cost between two sites of distance x is :

$$z(p, \Delta p, d) = b(\Delta p) + c(p, \Delta p, d) + S + \ell \quad (2-4)$$

where S is a constant indicating the annual cost of a site, $\ell = 11600x$ is the annual cost of land used for piping and $b(\Delta p) = 38.2 (\Delta p)^{1.209}$ (2-5)

However, for purposes of optimization it is sufficient to minimize $b(\Delta p) + c(p, \Delta p, d)$ subject to some constraints as will be shown in the next section.

3. THE MATHEMATICAL MODEL AND ITS PROPERTIES

In this section we describe a mathematical model for the pump-pipe system under consideration and define the objective function. Fig. 2 is a flow diagram of the series of pumping stations and the corresponding pressure-distance profile, e.g., (2). It also exhibits indexed variables, a result of the division of the system in N stages, see also fig. 3.

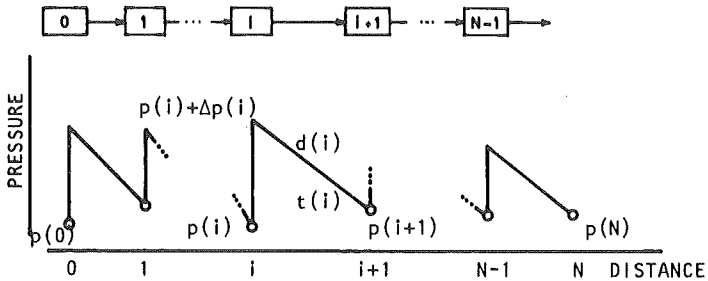


Fig. 2 - Flow diagram of the series of pumping stations and the corresponding pressure-distance profile

3.1 - State-space description

The dynamic system can be represented by a difference equation obtained by using the physical relations of section 2 and the additional information available from fig. 2 :

$$p(i+1) = p(i) + \Delta p(i) - \varphi(d(i)), \quad i = 0, \dots, N-1 \quad (3-6)$$

Then, as illustrated in fig. 3, at the ith stage p is the state variable, $p(i)$ input and $p(i+1)$ output and Δp and d can be considered the control variables.

Equation (3-6) can be written in a more compact form using matrices :

$$L \cdot \begin{bmatrix} p \\ \Delta p \end{bmatrix} - \Phi(d) = 0 \tag{3-7}$$

Where L is a $N \times (2N+1)$ constant matrix and $\Phi(d)$ is a $N \times 1$ matrix. The following constraints on the variables are considered :

$$\begin{aligned} p(0) &= P_0, && \text{(initial condition)} \\ 0 < P_i &\leq p(i), && i = 0, \dots, N-1, N \\ 0 \leq \Delta p(i) &\leq \Delta P_i, && i = 0, \dots, N-1 \\ 0 < A &\leq d(i) \leq B, && i = 0, \dots, N-1 \end{aligned} \tag{3-8}$$

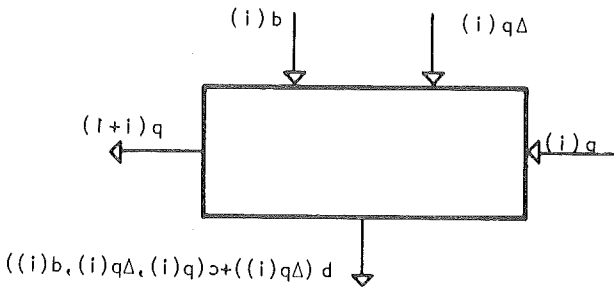


Fig. 3 - Input and output variables at the ith stage

where A and B represent the minimum and maximum possible diameters for the pipes, P_i the minimum suction pressure for pump i and ΔP_i the maximum increase in pressure.

It is also assumed that

$$\forall A \leq d(i) \leq B, P_{i+1} - P_i + \varphi(d(i)) \geq 0, \quad i=0, \dots, N-1 \quad (3-9)$$

and

$$\exists A \leq d(i) \leq B : P_{i+1} - P_i + \varphi(d(i)) \leq \Delta P_i, \quad i=0, \dots, N-1$$

These are essentially practical assumptions to assure the existence of a solution. The first one translates the necessity of having pumping-stations to compensate the loss of pressure with distance, see (3-6). The second expression is a guarantee that the values of ΔP_i (to be considered later on) will not exceed the limit ΔP_i (this is the maximum size of pump i). Anyhow, this will become clearer in 3.3.

3.2 The objective function

The problem being addressed is that of finding the minimum cost by acting on the control variables $\Delta p(i)$ and $d(i)$, i.e., the objective is :

$$\begin{array}{ll} \text{MIN} & \sum_{i=0}^{N-1} b(\Delta p(i)) + c(p(i), \Delta p(i), d(i)) \\ P_i \leq p(i) & \\ 0 \leq \Delta p(i) \leq \Delta P_i & \\ A \leq d(i) \leq B & \end{array}$$

or in a vector notation

$$\begin{aligned} & \text{MIN} && (B(\Delta p) + \Psi(d) \cdot (p + \Delta p) + \Omega(d)) \\ & p \leq P \\ & 0 \leq \Delta p < \Delta P \\ & A \leq d \leq B \end{aligned}$$

after using (2-3) and calculating the sums. Now p , Δp and d are N -dimension vectors. P and ΔP are known vectors of components P_i and ΔP_i , respectively, 0 is the null vector and A and B are also known N -vectors of components all equal to A and B , respectively. $p \leq P$ means $P_i \leq p(i)$ for $i = 0, \dots, N-1$, and the other inequalities have a similar meaning.

3.3 Optimizing the pump-pipe system

The system equation and initial condition are :

$$L \cdot \begin{bmatrix} p \\ \Delta p \end{bmatrix} - \Phi(d) = 0, \quad p(0) = P_0 \quad (3-11)$$

For convenience we define :

$$R = \{d \mid \exists p \leq P, 0 \leq \Delta p \leq \Delta P : (3-11), (3-9) \text{ and } A \leq d \leq B\}$$

and assume $R \neq \emptyset$. This is a realistic assumption that will be clarified with an example in section 5. Now, using (3-10) and the last definition, the minimization can be formulated as :

$$\text{MIN}_{d \in R} \left\{ \begin{array}{l} \Omega(d) + \text{MIN} \\ \quad \begin{array}{l} p \leq P \\ 0 \leq \Delta p \leq \Delta P \end{array} \\ \quad (B(\Delta p) + \Psi(d) \cdot (p + \Delta p)) \end{array} \right\} \quad (3-12)$$

For a given $d \in R$ we can define the convex problem :

$$M(d) = \text{MIN} \quad (B(\Delta p) + \Psi(d) \cdot (p + \Delta p))$$

$$p \leq P$$

$$0 \leq \Delta p < \Delta P$$

subject to the linear system :

$$L. \begin{bmatrix} P \\ \Delta p \end{bmatrix} = \Phi(d) ; p(0) = P_0 \text{ and (3-9).}$$

Then we can apply the conditions given by the Discrete-Time Pontryagin Optimum Principle for the general control problem, that for our case are both necessary and sufficient, see (3), (5).

The Hamiltonian function is given by

$$H(p(i), \Delta p(i), d(i), \lambda(i+1)) = b(\Delta p(i)) + \Psi(d(i)) \cdot (p(i) + \Delta p(i)) + \lambda(i+1) \cdot (p(i) + \Delta p(i) - \varphi(d(i)))$$

and we have the constraints,

$$p(i+1) = p(i) + \Delta p(i) - \varphi(d(i)), \quad i=0, \dots, N-1 \quad (\text{system equation})$$

$$p(0) - P_0 = 0, \quad (\text{initial condition})$$

$$P_N - p(N) \leq 0, \quad (\text{final condition})$$

$$P_i - p(i) \leq 0, \quad i=1, \dots, N-1, \quad (\text{state constraints})$$

$$\Delta p(i) \geq 0, \quad i=0, \dots, N-1$$

The adjoint equation is : $\lambda(i) = \lambda(i+1) + \Psi(d(i)) + \mu_i$, $i=0, \dots, N-1$

subject to the conditions, $\mu_i \geq 0$, $\mu_i \cdot (P_i - p(i)) = 0$, $i=0, \dots, N$ where λ and μ are multipliers.

The transversality or boundary conditions are :

$$\lambda(0) = \alpha_0$$

$$\lambda(N) = \mu_N$$

and finally the stationary conditions that, in this case, can be written as

$$\text{MIN} \quad H(p(i), \Delta p(i), d(i), \lambda(i+1))$$

$$0 \leq \Delta p(i)$$

After some simplifications and using the adjoint equation we reach the simple minimization problem

$$\text{MIN} \quad (b(\Delta p(i)) + (\lambda(i) - \mu_1) \cdot \Delta p(i)) \quad (3-13)$$

$$0 \leq \Delta p(i)$$

The conditions $\lambda(N) = \mu_N \geq 0$, $\psi(d(i)) > 0$ (the diameters do not exceed the value $B = 1.2$) imply $\lambda(i) - \mu_1 > 0$, $i=0, \dots, N-1$, according to the adjoint equation. Therefore the derivative of the expression (3-13) with respect to $\Delta p(i)$ will always be positive showing that its minimum occurs at the minimum possible value of $\Delta p(i)$ - this value also depends upon the restrictions on $p(i)$.

Starting by making $i=0$ in the system equation and using the state constraint:

$$p(1) = P_0 + \Delta p(0) - \varphi(d(0)), \quad p(1) > P_1$$

we obtain

$$\Delta p(0) > P_1 - P_0 + \varphi(d(0)).$$

As the set R , already defined, is nonempty there is a solution for the inequality. According to (3-9) $P_1 - P_0 + \varphi(d(0))$ is positive what enables us to choose $\Delta p(0)$ as small as possible,

$$\Delta p(0) = \Delta_{d(0)}^* p(0) = P_1 - P_0 + \varphi(d(0)).$$

It thus follows that with the control variable $\Delta p(0)$ set equal to $\Delta^* p(0)$, at the next stage we will have $p(1) = p^*(1) = P_1$. This is an important conclusion that is independent from the value of $d(0)$.

A similar reasoning applied successively to the remaining stages will give for the optimal control variable $\Delta_{d(i)}^* p(i)$

$$\Delta_{d(i)}^* p(i) = P_{i+1} - P_i + \varphi(d(i)), \quad i=0, \dots, N-1 \quad (3-14)$$

Then, by assumption (3-9), $\Delta_{d(i)}^* p(i) \leq \Delta P_i$, as wished when we considered the constraints (3-8).

In addition, $p(i) = p^*(i) = P_i$, $i=0, 1, \dots, N-1$ and in this situation the requirement $\mu_i \cdot (P_i - p(i)) = 0$ of the optimal principle is satisfied even if $\mu_i > 0$.

The initial problem becomes :

$$M(d) = B(\Delta_{d}^* p) + \Psi(d) \cdot (P + \Delta_{d}^* p) \quad (3-15)$$

where $\Delta_{d}^* p$ is the N-vector of components $\Delta_{d(i)}^* p(i) = P_{i+1} - P_i + \varphi(d(i))$.

The above deductions allow the conclusion : The state variable p has to be "as small as possible" at the optimal solution, and this value is independent of the diameter.

In the second step we have to solve the problem :

$$\begin{aligned} \text{MIN } \{ \Omega(d) + M(d) \} \\ d \in R \end{aligned} \quad (3-16)$$

Fig. 4 refers to this question. For each diameter $d(i)$ the graphic always contains the points P_i and P_{i+1} and we have to decide which is the "best" path.

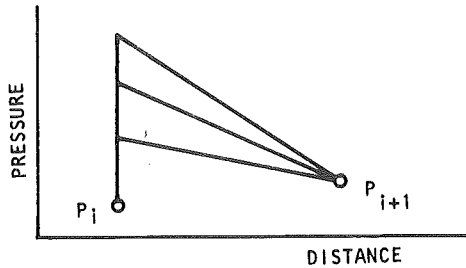


Fig. 4 - Paths corresponding to different diameters, $d(i)$.

Expression (3-16) is equivalent to
$$\text{MIN}_{d \in R} \sum_{i=0}^{N-1} \left[\omega(d(i)) + m(d(i)) \right]$$

Furthermore, we may write (3-16) as :

$$\sum_{i=0}^{N-1} \text{MIN} \left[\omega(d(i)) + m(d(i)) \right] \tag{3-17}$$

This is justified by the independence in choosing each component $d(i)$ of the vectors $d \in R$; $\omega(d(i))$ was taken from (3-4), $\Delta_{d(i)}^* p(1)$ is known for every $d(i)$, see (3-14), and (3-4)

$$m(d(i)) = b (\Delta_{d(i)}^* p(i)) + \psi(d(i)). (P_i + \Delta_{d(i)}^* p(1))$$

Then we arrive at an independent problem of minimizing a function of one variable at each stage separately. This does not bring any special difficulty.

4. AN ALGORITHM

As it was assumed in section 2 that the route of the pipeline and the number of the stations are known as are their relative distances and some restrictions on the design variables p , Δp , d and t . In addition we only consider a few values for the diameters, 0.6, 0.8, 1.0 and 1.2. Using the conclusion of the last section one immediately has the suction pressures p at each station : $p^*(i) = P_i$, $i = 0, 1, \dots, N$

Then, at each stage i , a table relating those diameters and the pump pressures $\Delta_{d(i)}^* p(i)$ is obtained by means of (3-14). Note that $\varphi(d(i))$ also depends on the distance x between stations. Afterwards, and according to the end of section 3, we find the diameter $d(i) = d^*(i)$ that minimize $\omega(d(i)) + m(d(i))$, see (3-17). The corresponding optimal control $\Delta^* p(i)$ is taken from the same table. Finally, expression (2-2) will give the pipe thickness $t(i)$.

5. AN EXAMPLE

Let us consider a pump-pipe system with 5 pumping stations :

- Distances (x) between successive stations : 20, 80, 100, 35, 10.
- Pump pressures : $0 \leq \Delta p \leq 600$.
- Suction pressures : $p(0) = 100$, $p(1) \geq 100$, $p(2) \geq 300$, $p(3) \geq 200$,
 $p(4) \geq 200$, $p(5) = 300$.
- Pipe diameters : 0.6, 0.8, 1.0, 1.2.
- Pipe thickness : 0.060, 0.065, 0.070, 0.075, 0.080.

(The units of the variables are those referred in section 2).

According to section 4 we start by fixing the suction pressures at their optimal values,

$$p^*(0) = 100, \quad p^*(1) = 100, \quad p^*(2) = 300,$$

$$p^*(3) = 200, \quad p^*(4) = 200, \quad p^*(5) = 300.$$

Afterwards a table is constructed for each stage by means of (3-14) and by computing the partial costs see (3-16)

$$\omega(d) + m(d) = \omega(d) + b(\Delta p) + \psi(d) \cdot (P + \Delta p).$$

The table below corresponds to the 4th stage where $p(3) = p(4) = 200$ and $x = 35$.

d	$\varphi(d)$	$\Delta_d^* P$	$b(\Delta_d^* P)/10^3$	$(\psi(d) \cdot (P + \Delta_d^* P) + \omega(d))/10^6$	Cost [*] / 10 ⁶
0.6	3263	>>600			
0.8	604	604	87.9	0.76	0.85
1.0	144	144	15.5	0.59	0.61
1.2	37	37	3.0	0.64	0.64

The "best" diameter is then ascertained by direct comparison of the corresponding costs. So, the optimal values of the control variables for $i=3$ are $d^*(3) = 1.0$ and $\Delta^* p(3) = 144$.

A similar method applied to the other stages would give the following results:

i	d^*	$\Delta^* p$	t^*	$b(\Delta^* p)/10^3$	$(\psi(d) \cdot (P + \Delta^* p) + \omega(d))/10^6$	Cost $^*/10^6$
0	1.0	82	0.060	7.9	0.22	0.23
1	1.2	284	0.080	35.3	2.10	2.14
2	1.2	5	0.065	0.2	2.20	2.20
3	1.0	144	0.060	15.5	0.60	0.61
4	0.8	272	0.060	33.6	0.14	0.18

The optimal costs computed do not include the costs of sites and of land used for piping, see 2.4.

6. CONCLUDING SUMMARY

The problem of designing an optimal pump-pipe system has been considered. The mathematical model presented one state variable, the suction pressure at each pumping station, and two control variables, the pump pressure and the pipe diameter. The discrete-time version of the Pontryagin Optimum Principle led to the determination of the optimal values of the suction pressures - they should be as small as possible ; it also reduced the problem to the search of a minimum depending only on one variable, the diameter. Furthermore, the optimization could be carried stage by stage.

Finally an example was introduced and solved to clarify the ideas developed in this paper.

REFERENCES

- (1) College of Engineering, The University of Michigan, *Computers in Engineering Design Education*, Ann Arbor, vol. VI, 1966.
- (2) S.M. Roberts, *Dynamic Programming in Chemical Engineering and Process Control*, Academic Press, New York, 1964.
- (3) R.V. Valqui Vidal, *Notes on Static and Dynamic Optimization*, IMSOR, 1977.
- (4) R.V. Valqui Vidal, *Design of a pipeline route*, Mathematical programming study, vol. 9, July 1978, pp.95-108.
- (5) Douglas Wilde & Charles Beightler, *Foundations of optimization*, Prentice-Hall, Inc., 1967.

SIMULAÇÃO - OPTIMIZAÇÃO

RUI CAMPOS GUIMARÃES

Gabinete de Gestão e Engenharia Industrial (GEIN)
Departamento de Engenharia Mecânica, FEUP,
Rua dos Bragas, 4099 PORTO CODEX, Portugal

Resumo

Neste artigo apresenta-se o método de simulação-optimização no contexto da resolução de problemas de decisão. O método consiste em combinar :

- (i) um modelo de simulação - que se utiliza para avaliar a função objectivo em pontos particulares do espaço de decisão e, se necessário, para indicar se cada ponto ensaiado se situa dentro ou fora do domínio das soluções admissíveis ;*
- (ii) um método de pesquisa - que, de uma forma eficiente e automática, dita qual o caminho a percorrer, desde uma solução inicialmente escolhida até se atingir a solução óptima.*

Referem-se duas áreas importantes de aplicação do método, nomeadamente à resolução de problemas com restrições e de problemas estocásticos, recorrendo-se neste último caso ao que se designa por método da imagem fixa. Discutem-se seguidamente as limitações do método de simulação-optimização, concluindo-se que, apesar destas limitações, ele permite estender a fronteira da optimização a problemas de decisão extremamente complexos, não abordáveis por outros métodos.

1. PROBLEMAS DE DECISÃO E SIMULAÇÃO

Em Investigação Operacional recorre-se à utilização de modelos como meio de representar problemas de decisão. Embora estes modelos possam tomar as formas mais variadas, consistem essencialmente de uma função objectivo acrescida, na maioria dos casos, de uma ou mais restrições.

A função objectivo traduz a relação existente entre

$$\begin{aligned} U &: \text{medida de eficiência (ou utilidade) do sistema} \\ \{x_i\} &: \text{variáveis controláveis (ou de decisão)} \quad (i=1, \dots, I) \\ \{\pi_j\} &: \text{parâmetros incontroláveis} \quad (j=1, \dots, J) \end{aligned}$$

Conforme a medida de eficiência U seja definida pela negativa (por exemplo, se U for o custo de operação do sistema em causa) ou pela afirmativa (por exemplo, se U for o lucro associado à operação do sistema), assim se tentará minimizar ou maximizar U .

As restrições, do tipo igualdade ou desigualdade, são frequentemente necessárias para exprimir o facto de que uma ou mais variáveis controláveis só podem ser manipuladas dentro de certos limites.

Em termos simbólicos, os modelos de decisão podem escrever-se

$$\begin{cases} \text{maximizar (ou minimizar)} & : \quad U = f(\{x_i\}, \{\pi_j\}) \\ \text{satisfazendo} & : \quad g_k(\{x_i\}, \{\pi_j\}) \begin{cases} \leq \\ \geq \\ = \end{cases} G_k \quad (k=1, \dots, K) \end{cases}$$

onde \mathbb{A} representa uma relação do tipo $=$, \geq ou \leq .

De forma mais simples, representando U e g_k apenas como funções das variáveis controláveis, os modelos de decisão vêm

$$\begin{cases} \text{maximizar (ou minimizar)} & : & U = f(\{x_i\}) \\ \text{satisfazendo} & : & g_k(\{x_i\}) \leq G_k \quad (k=1, \dots, K) \end{cases}$$

A definição das relações que constituem um modelo de decisão é o objecto essencial das duas primeiras faces do método da Investigação Operacional : a formulação do problema e a construção de um modelo.

Na primeira procura-se identificar :

- (i) quem exerce o controle sobre o sistema em análise (isto é quem é ou quem são os agentes de decisão) ;
- (ii) quais são os seus objectivos ;
- (iii) com que decisões alternativas são confrontados (isto é, quais são as variáveis controláveis e as suas restrições) ;
- (iv) quais são os parâmetros que, não sendo controláveis pelo(s) agente(s) de decisão, podem afectar os resultados ou impôr limitações na actuação daquele(s) agente(s) (isto é, quais são os parâmetros Incontroláveis).

O processo de construção de um modelo pode descrever-se como uma sequência de dois estádios :

- (i) identificação da estrutura de relações do tipo causa-efeito entre variáveis controláveis, parâmetros Incontroláveis e medida de eficiência ;
- (ii) quantificação das relações identificadas em (i) e das restrições.

Existem fundamentalmente três métodos básicos a que o analista de Investigação Operacional pode recorrer para a quantificação das relações que integram um modelo :

- (i) método dedutivo (utilizado na quantificação de relações lógicas directamente explicitáveis);
- (ii) método de simulação (alternativa a que se recorre para quantificar relações lógicas não explicitáveis através da via dedutiva);
- (iii) método de inferência estatística (utilizado na quantificação de relações que, como resultado de um conhecimento insuficiente das interações entre os componentes do sistema, não podem ser estabelecidas exclusivamente pela via do raciocínio, carecendo de um processo de validação baseado na análise de dados).

Frequentemente os modelos de decisão são híbridos, no sentido em que diferentes relações que os integram são estabelecidas por recurso a diferentes métodos.

Para que o método de simulação possa ser utilizado, o analista tem que conhecer a lógica interna de funcionamento do sistema em causa. Efectivamente, sem este conhecimento não é possível "imitar" o comportamento do sistema ao longo de um determinado intervalo de tempo, isto é, reproduzir a sucessão de estados pelos quais o sistema passa (ou pode passar, no caso de se considerarem eventos de carácter probabilístico).

2. MÉTODO DE SIMULAÇÃO-OPTIMIZAÇÃO

O método de simulação tem uma limitação importante: como resultado de uma simulação, que envolve um esforço computacional elevado, obtêm-se apenas, para um conjunto particular de valores das variáveis controláveis, $\{x_i\}$ (e dos parâmetros incontroláveis, $\{\eta_j\}$, claro está) o valor correspondente da medida de eficiência, U . O alcance deste resultado fica obviamente muito aquém da explicitação analítica de U como função de $\{x_i\}$ (e de $\{\eta_j\}$), para quaisquer valores destas variáveis (e parâmetros). Por cada simulação apenas se avalia a função $U = f(\{x_i\})$ num ponto particular do espaço de decisão $\{x_i\}$.

No que diz respeito às restrições, haverá que fazer também uma observação. Sempre que elas possam ser definidas a priori, pela via dedutiva, então, quando se simular o sistema, conhecer-se-á, à partida, o domínio das soluções admissíveis, $\{x_i\}_a$. Como é manifesto, só interessará simular o sistema para conjuntos de valores das variáveis controláveis que pertençam a este domínio.

Como veremos mais adiante, há, no entanto, situações em que $\{x_i\}_a$ não é conhecido a priori. É a própria simulação do sistema que permitirá verificar se cada conjunto particular de valores $\{x_i^0\}$ satisfaz, ou não, as restrições do problema. Isto é, só após realizar a simulação se saberá, se a solução em saída, é, ou não, uma solução admissível.

As limitações apontadas à simulação e o elevado esforço computacional que lhe está associado levam a que ela seja utilizada normalmente como último recurso. Só quando, como resultado da complexidade do sistema, não é possível explicitar analiticamente as relações entre as variáveis de decisão, parâme-

tros incontroláveis e medida de eficiência é que se recorre à sua quantificação via simulação. As limitações anteriormente referidas não serão particularmente graves quando o número de variáveis controláveis é pequeno (uma ou duas variáveis, por exemplo). Efectivamente, neste caso, a simulação do sistema para um número relativamente reduzido de valores particulares de $\{x_i\}$, escolhidos intuitivamente, permitirá identificar a forma da função $U = f(\{x_i\})$ e, se necessário, do domínio $\{x_i\}_a$ e, finalmente, chegar à solução óptima ou a uma solução quase-óptima.

No entanto, à medida que o número de variáveis controláveis cresce, o processo de pesquisa da solução óptima (ou de uma solução quase-óptima) complica-se. Numa situação em que, por exemplo, existam seis variáveis controláveis, é irrealista tentar basear aquela pesquisa na simples intuição. De facto, nestas condições será normalmente inviável atingir uma solução quase-óptima, pelas razões que seguidamente se apontam:

- (i) uma vez que a dimensão do espaço das soluções admissíveis é considerável, se o processo de pesquisa não for eficiente, então haverá que analisar a função $U = f(\{x_i\})$ em inúmeras pontos $\{x_i\}$, antes de se atingir a vizinhança da solução óptima;
- (ii) cada avaliação da função envolverá a realização de uma simulação e, portanto, de um elevado esforço computacional.

A procura da solução óptima, conduzida com base na intuição do analista, pode complicar-se ainda mais quando existem restrições, especialmente quando estas não são explicitáveis a priori pela via dedutiva.

É em situações como as que acabamos de referir que tem significado o recurso ao processo que designamos por simulação-optimização. Como o nome indica, neste caso combinam-se :

- (i) um modelo de simulação - que se utiliza para avaliar a função $U = f(\{x_i\})$ em pontos particulares do espaço de decisão $\{x_i\}$ e, se necessário, para indicar se cada ponto ensaiado se situa dentro ou fora do domínio das soluções possíveis $\{x_i\}_a$; e
- (ii) um método numérico de optimização (que, de uma forma eficiente e automática, ditará qual o caminho a percorrer, a partir de uma solução inicialmente escolhida, até se atingir uma solução óptima ou quase-óptima).

A forma como a função $U = f(\{x_i\})$ é avaliada (ponto por ponto, via simulação) restringe os métodos de optimização que podem ser utilizados àqueles que não requerem o conhecimento do valor das derivadas da função a otimizar. Tais métodos são habitualmente designados por métodos de pesquisa ('search methods').

Um estudo comparativo de diferentes métodos numéricos de optimização conduzido por Himmelblau (4), em que foi utilizado um conjunto uniforme de problemas e de critérios de eficiência, revelou que o método de Powell-DSC se situava entre os mais eficientes métodos de pesquisa. Por esta razão e pela sua simplicidade, aquele método está em condições excelentes para ser utilizado num processo de simulação-optimização.

3. MÉTODO DE POWELL-DSC

Na versão mais eficiente deste método, combinam-se os algoritmos de Coggins (2) (optimização unidireccional) e de Powell (6) (optimização multidireccional). Começaremos por descrever o primeiro.

3.1 - Optimização unidireccional : algoritmo de Coggins

O algoritmo de Coggins não é mais do que uma conjugação de dois outros :

- (i) algoritmo de Davies, Swann e Campey (1) (a que se recorre na primeira iteração) ;
- (ii) algoritmo unidireccional de Powell (6) (utilizado nas restantes iterações).

Admitamos que, utilizando o método de simulação, se consegue estabelecer, para cada valor de uma variável controlável x , o valor correspondente de $U = f(x)$ onde U representa, por exemplo, um custo que se pretende minimizar.

Tal como se pretende ilustrar na Fig. 1, a função U , após ser avaliada para uma solução inicial (x_0) , é sucessivamente calculada nos pontos

$$x_1 = x_0 + s$$

$$x_2 = x_1 + 2s$$

$$x_3 = x_2 + 4s \quad (\text{o passo é sucessivamente duplicado),}$$

até que o valor da função aumenta (x_3 , na Fig. 1). A função é então avaliada num ponto (x_4) intermédio em relação aos dois últimos (x_2 e x_3).

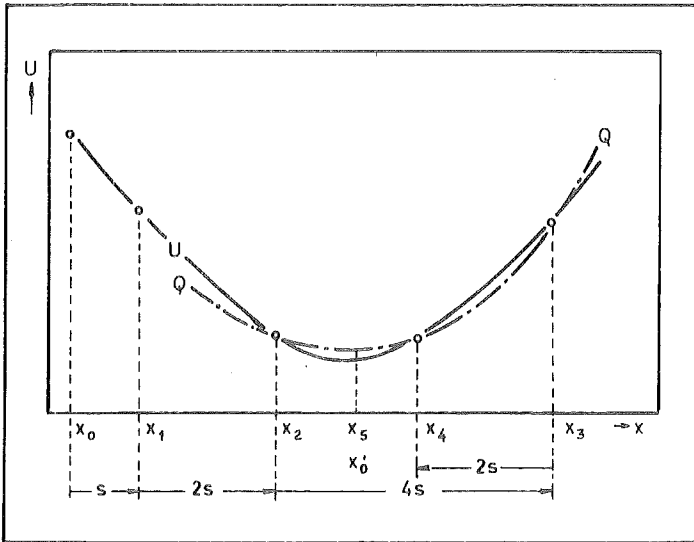


Fig. 1 = Algoritmo de Davies, Sawm e Campey, para otimização unidirecional.

Ficam assim conhecidos os valores da função em quatro pontos igualmente espaçados. Uma vez rejeitado aquele que corresponde ao maior valor da função $U = f(x)$, uma quadrática é ajustada aos três pontos restantes (curva QQ, na Fig. 1).

No caso de não se conseguir uma redução da função após o primeiro passo, isto é, no ponto $x_1 = x_0 + s$, o passo é invertido, prosseguindo o algoritmo com a avaliação da função nos pontos $x'_1 = x_0 - s$, $x'_2 = x_1 - 2s$, etc.

Designando os três pontos utilizados na interpolação quadrática por x_a , x_b e x_c , sendo :

$$x_a = x_b - S$$

$$x_c = x_b + S,$$

e por U_a , U_b e U_c os respectivos valores da função a minimizar, é imediato verificar que o mínimo da quadrática se localiza em

$$x_m = x_b + S_m \quad (\text{com } S_m = S \cdot \frac{U_a - U_c}{2 \cdot (U_a - 2U_b + U_c)}).$$

Com a definição de x_m (x_5 , na Fig. 1) e a correspondente avaliação da função, conclui-se a primeira iteração do algoritmo (de Davies, Swann e Campey).

Cada uma das iterações seguintes (do algoritmo de Powell) consiste em :

- (i) (a) rejeitar, de entre os pontos x_a , x_b e x_c aquele que corresponde ao maior valor da função, ou,
- (b) rejeitar um dos outros dois pontos se este for o único processo de manter x_m "enquadrado" pelos pontos não rejeitados ;
- (ii) a partir de x_m e dos dois pontos não rejeitados em (i) - que agora, conjuntamente, designaremos por x_a , x_b e x_c - faz-se uma interpolação quadrática para se definir o novo mínimo x_m :

$$x_m = \frac{1}{2} \cdot \frac{(x_a^2 - x_b^2) \cdot U_c + (x_b^2 - x_c^2) \cdot U_a + (x_c^2 - x_a^2)}{(x_a - x_b) \cdot U_c + (x_b - x_c) \cdot U_a + (x_c - x_a)}$$

O algoritmo termina quando $\Delta = x_m - x^* < \epsilon$ onde

x^* : é o ponto que, de entre x_a , x_b e x_c , corresponde ao menor valor da função ;

ϵ : é um valor especificado, relacionado com a precisão com que se pretende definir o mínimo da função.

Em relação ao algoritmo descrito, valerá a pena referir os seguintes pontos:

- (i) apenas é garantida convergência para um mínimo local (o que, no caso de existirem vários mínimos locais, pode dificultar a descoberta do mínimo global ; no entanto, esta dificuldade, é normalmente superável por aplicação do algoritmo a partir de várias soluções iniciais) ;
- (ii) durante a primeira iteração, graças à duplicação sucessiva do passo inicial, a eficiência do algoritmo é pouco afectada pela solução inicial escolhida (o mínimo, ou melhor, um mínimo, é sempre 'enquadrado' rapidamente).

3.2 - Optimização multidireccional : método de Powell

De acordo com este método, a minimização de uma função de l variáveis $U = f(\{x_i\})$ ($i=1, \dots, l$) envolve, em cada iteração, a realização de minimizações unidireccionais sucessivas, ao longo de l direcções independentes d_1, d_2, \dots, d_l (recorrendo-se, em cada caso, a um método de optimização como o descrito anteriormente no ponto 3.1.). Tal como se representa na Fig. 2, tomando o caso de uma função de 2 variáveis $U = f(x_1, x_2)$, as direcções escolhidas na primeira iteração são as dos eixos do referencial utilizado.

Nota: no diagrama representam-se projecções de curvas de nível $U=f(x_1, x_2) = C^{te}$, sobre o plano (x_1, x_2) .

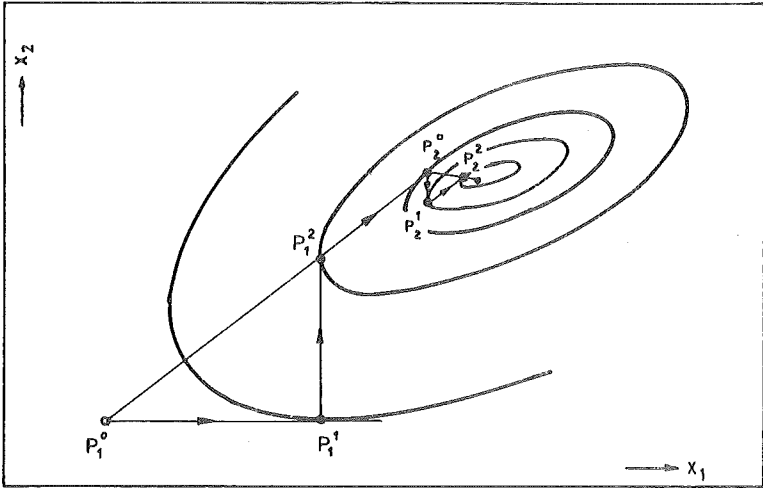


Fig. 2 - Algoritmo de Powell para optimização multidireccional

Partindo de um ponto inicial P_1^0 chega-se, através das l sucessivas optimizações unidireccionais a um ponto P_1^n (na Fig., o ponto P_1^2). Termina-se a primeira iteração optimizando a função ao longo da direcção $d = \overline{P_1^0 P_1^n}$ (na Fig., $d = \overline{P_1^0 P_1^2}$). Assim se atinge o mínimo P_2^0 , ponto em que se inicia a segunda iteração. As direcções de optimização serão agora $d_2, d_3, \dots, \dots, d_l, d$ (na Fig., d_2, d). É fácil demonstrar que, se a função for uma quadrática, encontrar-se-á o mínimo ao fim de n iterações. Na prática, para funções de ordem superior, verifica-se frequentemente que as direcções de optimização tendem a tornar-se paralelas, o que torna o algoritmo ineficaz, na versão exposta. No entanto, Powell (6) mostra como se pode contornar esta dificuldade.

4. GENERALIZAÇÃO DO MÉTODO DE SIMULAÇÃO-OPTIMIZAÇÃO

Tal como anteriormente se referiu, o método de simulação-optimização consiste essencialmente na combinação de um modelo de simulação com um método numérico de optimização como o que acabou de se descrever. No entanto, para que a simulação-optimização seja aplicável à generalidade dos problemas de decisão, haverá que considerar duas extensões importantes do método, nomeadamente

- (i) aos casos em que existem restrições ; e
- (ii) aos problemas estocásticos.

4.1 - Problemas com restrições : método da função penalidade

O objectivo do método da função penalidade é converter qualquer problema com restrições num problema que, não tendo restrições, tem a mesma solução óptima. Tal é conseguido através de uma modificação da função objectivo original, por forma a penalizar acentuadamente soluções que não pertençam ao domínio das soluções admissíveis, $\{x_a\}_p$. Um problema com a forma

$$\begin{cases} \text{minimizar} & : U = f(\{x_i\}) \\ \text{sujeito} & : g_k(\{x_i\}) \geq G_k \quad (k = 1, \dots, K) \end{cases}$$

é convertido num problema equivalente, sem restrições, com a função objectivo dada por

$$\begin{aligned}
 U^* &= F(\{x_i\}) \\
 &= f(\{x_i\}) + M \cdot \sum_k p_k(\{x_i\})
 \end{aligned}$$

onde

M : é uma constante com um valor elevado relativamente a $f(\{x_i\})$;

$p_k(\{x_i\})$: é uma função que toma o valor zero quando a restrição k do problema original é satisfeita e que cresce com $|g_k(x_i) - G_k|$ quando a restrição é violada.

A escolha habitual de $p_k(\{x_i\})$ para restrições de igualdade é

$$p_k(\{x_i\}) = [g_k(\{x_i\}) - G_k]^2.$$

No caso de desigualdades,

$$p_k(\{x_i\}) = \begin{cases} [g_k(\{x_i\}) - G_k]^2, & \text{se a restrição é violada} \\ 0, & \text{se a restrição é satisfeita} \end{cases}$$

Estas funções $p_k(\{x_i\})$ têm a virtude de serem extremamente simples. Podem, no entanto, ser infinitas de forma diversa.

Na Fig. 3 ilustra-se o método da função penalidade considerando um problema do tipo

$$\begin{cases} \text{minimizar} & : U = f(x) \\ \text{sujeito a} & : x \leq a \end{cases}$$

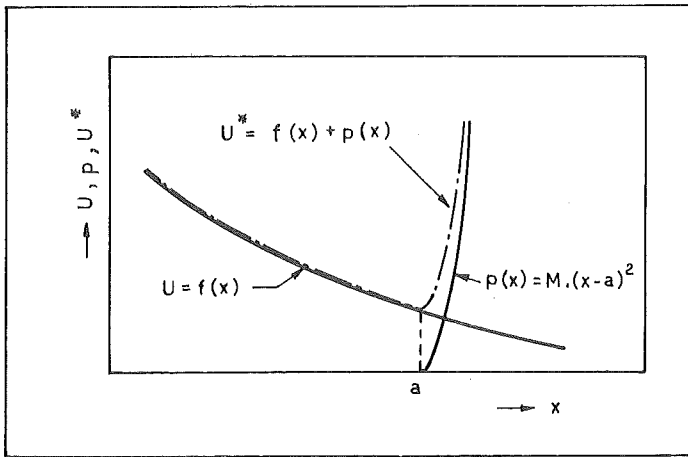


Fig. 3 - Ilustração do método da função penalidade.

Na prática verifica-se que a minimização de U^* pode ser problemática, se for atribuído a M um valor excessivamente elevado e se, por outro lado, o processo de pesquisa se iniciar longe do ponto óptimo. Uma das formas de contornar esta dificuldade é efectuar uma série de minimizações para uma sequência de valores de M progressivamente mais elevados, iniciando cada minimização no ponto óptimo obtido na minimização anterior. A taxa de variação de M não parece ser crítica, mas um factor multiplicativo de cerca de 5 será adequado. Em Wismer e Chattergy (7), Box et al (1) e Himmelblau (5) podem encontrar-se referências a esta ou a outras técnicas que visam otimizar funções em domínios restritos.

No exemplo da Fig. 3, a restrição foi definida de uma forma analítica. No entanto, faz-se notar que o método da função penalidade pode aplicar-se no caso geral em que, nas restrições $g_k(\{x_i\}) \geq G_k$, as funções $g_k(\{x_i\})$ não sejam explicitáveis analiticamente. De facto, é suficiente conhecer os valores particulares destas funções em cada um dos pontos do caminho seguido na optimização (o que pode ser obtido via simulação). A partir daqueles valores $g_k(\{x_i^0\})$ podem-se avaliar as penalidades $p_k(\{x_i^0\})$ e, finalmente, pode-se obter $U^* = F(\{x_i^0\})$.

4.2 - Problemas estocásticos : método da imagem fixa

Até ao presente admitiu-se que, para cada conjunto de valores particulares $\{x_i^0\}$, se podiam definir, sem erro, os valores correspondentes de $U = f(\{x_i^0\})$ e $g_k(\{x_i^0\})$. Ora, tal não sucede nos problemas estocásticos, quando se recorre à simulação para avaliar aquelas funções. Para ilustrar esta situação, consideremos um problema estocástico em que se adopta como medida de utilidade do sistema em causa o valor esperado do seu custo de operação por unidade de tempo. Em notação simbólica, virá

$$U = E(c) = f(\{x_i\}).$$

Para cada solução particular $\{x_i^0\}$, podem obter-se, via simulação, estimativas do valor esperado $U = E(c)$. A estimativa obtida a partir de cada corrida de simulação seguirá uma distribuição que se pretende que seja centrada em torno de U (tal sucederá se o modelo não introduzir nenhum enviesamento no processo de estimação).

Na tentativa de minimizar $U = E(c)$, a eficiência do algoritmo de optimização experimental utilizado, será seriamente afectada pelas diferenças aleatórias entre os valores de U associados a diferentes pontos $\{x_i\}$ e as es-

timativas correspondentes, \hat{U} , obtidas a partir de sucessivas corridas de simulação independentes. O efeito destas diferenças é equivalente a uma mudança permanente da forma da função a otimizar, à medida que a pesquisa procede. Daqui resulta que :

- (i) o caminho seguido pode passar várias vezes pelo mesmo ponto sem convergir (uma vez que, devido aos erros de estimação, a função pode ser avaliada de forma diferente num mesmo ponto $\{x_i^0\}$, em estádios distintos do processo de pesquisa) ;
- (ii) o algoritmo pode convergir para um ponto que não seja um 'ótimo verdadeiro' (mas apenas um ótimo de uma 'configuração transitória' da função estimada).

Estas dificuldades podem ser contornadas recorrendo ao que designamos por método da imagem fixa. A ideia central do método é garantir que, ao longo de todo o processo de pesquisa, todas as simulações são corridas com o mesmo comprimento e com a mesma sequência de números aleatórios (ou com as mesmas sequências, quando haja mais do que uma em cada simulação). O objectivo deste procedimento é conseguir que, se no decurso da pesquisa, a função for avaliada duas vezes no mesmo ponto, então as estimativas de U obtidas via simulação são idênticas. Por outras palavras, a função original $U=f(\{x_i\})$ é substituída por uma imagem fixa, que é então otimizada. Como é evidente, o método de pesquisa utilizado pode efectuar esta optimização de uma forma tão eficiente como para qualquer (outra) função determinística. Apenas resta verificar se a imagem adoptada representa com fidelidade a função original ou se, pelo contrário, são introduzidas distorsões significativas neste processo de representação.

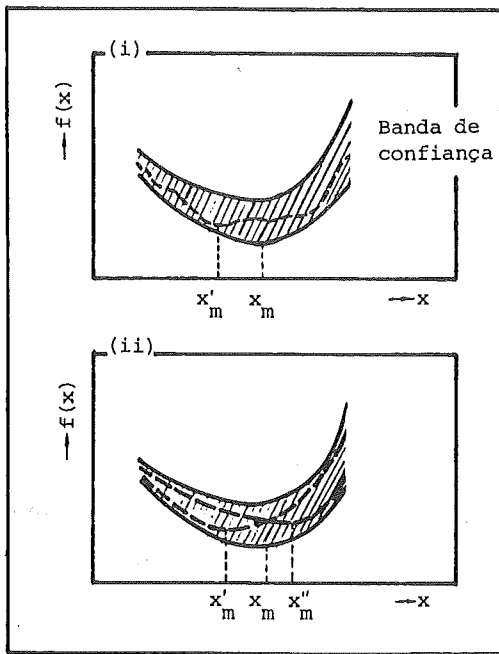


Fig. 4 - Distorsões introduzidas na forma da função a minimizar.

Há dois tipos básicos de distorsões que podem conduzir à convergência para um ponto a distância significativa do verdadeiro óptimo da função. Eles são ilustrados na Fig. 4, considerando o caso mais simples de uma otimização unidireccional.

No diagrama (i), a função original $U = f(x)$, que se admite estar localizada a meio da banda de confiança representada, é substituída por uma imagem 'enrugada'. Tal pode conduzir à convergência do processo de pesquisa para um mínimo local x'_m que seja distante do mínimo verdadeiro x_m .

No diagrama (ii) ilustra-se o outro tipo básico de distorsão - translação da imagem em relação à função original - que pode também conduzir a estimativas demasiado pobres do mínimo verdadeiro. Como é manifesto, as distorções efectivamente introduzidas no processo de representação da função por uma imagem podem ser híbridos dos tipos considerados.

As distorções introduzidas podem ser reduzidas a níveis aceitáveis, actuando no comprimento das simulações. O efeito de aumentar este comprimento - o que se consegue à custa de um aumento do esforço computacional - é diminuir a dispersão das estimativas da função $U = f(\{x_i\})$ em torno dos seus valores verdadeiros e, portanto, diminuir a probabilidade de cometer erros significativos na selecção da solução óptima.

Na prática, haverá que procurar atingir um compromisso aceitável entre a fidelidade da solução seleccionada, por um lado, e o esforço computacional requerido no processo de pesquisa, por outro. A escolha de tal compromisso terá que ser efectuada por tentativas, actuando no comprimento das simulações, terá que ser efectuada por tentativas, actuando no comprimento das simulações, e testando, em cada caso, se as soluções obtidas são significativamente afectadas :

- (i) por mínimos locais (quer da função original, quer decorrentes do processo de representação daquela função por uma imagem) : haverá que verificar que, iniciando o processo de optimização em pontos diferentes e segundo direcções de pesquisa distintas, se atinjam soluções finais idênticas (ou quase idênticas) ;
- (ii) pela escolha de uma imagem particular da função : haverá que verificar que as soluções finais não dependam significativamente da escolha das sequências de números aleatórios a a-

doptar (tal facto significará que diferentes imagens, associadas a diferentes escolhas de números aleatórios, representam adequadamente a função original).

5. LIMITAÇÕES E POTENCIALIDADES DO MÉTODO DE SIMULAÇÃO-OPTIMIZAÇÃO

A aplicação do método de simulação-optimização requer um elevado esforço computacional. As razões de tal facto são evidentes :

- (i) por um lado, por mais eficiente que o método de pesquisa seja, o número de pontos em que a função a otimizar tem que ser avaliada é normalmente elevado ;
- (ii) por outro lado, cada avaliação da função impõe a realização de uma simulação.

A grande limitação do método reside precisamente no elevado esforço de cálculo que ele implica. Mesmo quando se recorra a computadores (e linguagens) que permitam velocidades de cálculo elevadas, haverá sempre que procurar maximizar a eficiência do método. Tal implica, por um lado, a escolha de um algoritmo de optimização experimental eficiente (o método de Powell-DSC é uma escolha excelente) e, por outro, a adopção de um modelo de simulação também eficiente (isto é, um modelo que permita, com um comprimento de simulação reduzido, avaliar de forma precisa a função $U = f(\{x_i\})$ e, quando necessário, as funções $g_k(\{x_i\})$).

É importante observar que existe uma situação em que, pela natureza destas funções, a sua avaliação pela via da simulação não se pode realizar de forma eficiente, o que pode inviabilizar a aplicação do método de simulação-optimização. Tal situação ocorre quando os valores que aquelas funções tomam es-

tão directamente associados à ocorrência de acontecimentos raros. Ilustremos esta situação, considerando um problema de stocks, probabilístico, envolvendo vários produtos inter-relacionados e que seja formulado da forma seguinte:

$$\begin{cases} \text{Minimizar} & : U = E(c) = f(\{x_i\}) & (i = 1, \dots, l) \\ \text{sujeito a} & : g_k(\{x_i\}) \leq \beta_k & (k = 1, \dots, l) \end{cases}$$

onde :

$U = E(c)$: valor esperado do custo anual da operação de armazenagem ;

$\{x_i\}$: variáveis controláveis (dimensão das encomendas, stocks de segurança) ;

β_k : taxa de rotura admissível para cada produto k (a taxa de rotura pode definir-se, por exemplo, como o número médio de vezes em que o stock de cada produto se esgota em cada ano de operação do sistema).

As funções $g_k(\{x_i\})$ definem as taxas de rotura dos vários produtos como função das variáveis controláveis. Admitamos que tais funções não podem ser explicitadas analiticamente, havendo que recorrer à simulação para as avaliar.

Suponhamos ainda que as taxas de rotura admissíveis são fixadas, para os diferentes produtos, em 1 rotura/ano. No contexto da operação global de um sistema em que ocorram vários eventos por dia, a ocorrência de uma rotura de um produto assumirá, se a respectiva taxa admissível for respeitada, o carácter de um evento raro (poderão passar-se vários anos sem que ocorra uma rotura).

Para que cada função $g_k(\{x_i\})$ possa ser estimada com um mínimo de precisão, haverá que simular o comportamento do sistema por um período muito longo (em que ocorrerão muitos eventos), por forma a que se consiga registar a ocorrência

cia de um número significativo de roturas. Ora tal simulação envolverá um esforço computacional particularmente elevado, o que poderá impossibilitar a utilização do método de simulação-optimização.

Uma outra limitação do método decorre do facto de ele apenas garantir a convergência para um óptimo local e não para o óptimo global da função objectivo. Crê-se que esta limitação não é particularmente grave pois são relativamente invulgares os problemas de decisão em que a função objectivo tem mais do que um mínimo local ou mais do que um máximo local. Por outro lado, se tal suceder, o problema poderá normalmente ser resolvido iniciando o processo de optimização em pontos distintos e/ou segundo direcções de pesquisa diferentes. Esta forma de resolver o problema implicará, naturalmente, um aumento significativo do esforço computacional envolvido.

Apesar das limitações referidas, que podem frequentemente ser ultrapassadas com bom senso e alguma imaginação, o método de simulação-optimização tem enormes potencialidades.

Combinando a técnica de simulação (utilizada como meio de avaliar políticas de decisão) com um algoritmo de pesquisa (utilizado no processo de selecção da melhor política), o método estende as fronteiras da optimização a problemas de decisão de extrema complexidade, não abordáveis por métodos convencionais. A nossa experiência, descrita em trabalho anterior (3), demonstra-o claramente.

AGRADECIMENTOS

O autor agradece todo o apoio do Dr. Brian Kingsman, da Universidade de Lancaster (Reino Unido), que orientou o trabalho de doutoramento em que foram desenvolvidas algumas das ideias expressas neste artigo.

Igualmente é devida uma palavra de agradecimento à Comissão Permanente INVOTAN e à NATO Scientific Affairs Division (Bruxelas), pelo apoio financeiro prestado, e ao INIC, pela concessão de uma equiparação a bolseiro no estrangeiro.

BIBLIOGRAFIA

- 1 - Box, M.J., D.J. Davies e W.H. Swann, *Non Linear Optimization Techniques*, ICI Monograph nº 5, Oliver & Boyd, Edimburgo (1969)
- 2 - Coggins, G.F., *Univariate Search Methods*, ICI, Central Instrument Research Laboratory, Research Note 64/11 (1964)
- 3 - Guimarães, R.C., *National Planning of Commodity Import Operations : The Case of Portugal's Feed Grain Imports*, Tese de Ph.D., Departamento de Investigação Operacional, Universidade de Lancaster (1981)
- 4 - Himmelblau, D.M., *Uniform Evaluation of Unconstrained Optimization Techniques*, em *Numerical Methods for Non-Linear Optimization* (Lootsma, F.A., Ed.), pp. 67-97, Academic Press, Londres (1972)
- 5 - Himmelblau, D.M., *Applied Nonlinear Programming*, McGraw-Hill, Nova York (1972)

- 6 - Powell, M.J.D., *An Efficient Method for Finding the Minimum of a Function of Several Variables without Calculating Derivatives*, Computer Journal, Vol. 7, pp. 155-162 (1964-1965)
- 7 - Wismer, D.A. e R. Chattergy, *Introduction to Nonlinear Optimization - A Problem Solving Approach*, North Holland, Nova York (1978).

OPTIMIZAÇÃO NUMÉRICA - ALGORITMO DE POWELL

JOSÉ CARLOS M. MAIA

IST/CESUR, Av. Rovisco Pais, 1000 Lisboa

Resumo

Apresenta-se uma rotina FORTRAN IV para optimização numérica de funções, com ou sem restrições, utilizando o algoritmo de Powell.

1. INTRODUÇÃO

O algoritmo de Powell é um dos mais simples e mais utilizados para optimização numérica de funções sem restrições. A optimização efectua-se por pesquisa directa no valor da função a optimizar, não se tornando necessário o cálculo de derivadas, embora o número de avaliações da função seja relativamente elevado.

Quando se pretende otimizar um problema com restrições (lineares ou não), é ainda possível utilizar o algoritmo através do método das funções de penalidade. A rotina apresentada exige que todas as restrições sejam do tipo menor ou igual a zero.

A estratégia de pesquisa do algoritmo de Powell encontra-se descrita em :

"Otimização Numérica de Funções - Método de Powell", José Carlos Maia, João Brito - comunicação apresentada ao I congresso da APDIO, publicada em Investigação Operacional 82.

2. EXEMPLO DE UTILIZAÇÃO DO ALGORITMO

Pretendendo-se minimizar :

$$f(x_1, x_2) = (x_1 - 1.0)^2 + (x_2 - 3.0)^2 + 20.0$$

sujeita às seguintes restrições :

$$g_1 : 5.0 - x_1 \leq 0.0$$

$$g_2 : 12.0 - x_1 - x_2 \leq 0.0$$

O algoritmo depois de executar 10 iterações em que a função e as restrições foram calculadas 238 vezes encontra o ponto ótimo $x_1 = 5.71$, $x_2 = 6.29$ a que corresponde o valor da função $f(x_1, x_2) = 53.0082$.

Os parâmetros utilizados foram os seguintes :

- Ponto inicial : $x_1 = 0.0$, $x_2 = 0.0$
- Passos iniciais das variáveis ("steps") : $\delta_{x_1} = 0.1$, $\delta_{x_2} = 0.1$
- Matriz das direções : paralela aos eixos coordenados
- Pesos das restrições : $P_{g_1} = 1\ 000$, $P_{g_2} = 1\ 000$
- Critério de paragem : erro relativo das variáveis inferior a 0.1%

3. ORGANIZAÇÃO DA ROTINA

Embora seja referida apenas uma rotina, na realidade existem as seguintes rotinas :

- POWELL - Rotina do algoritmo de Powell
- FURES - Rotina do método das funções de penalidade
- PRINTE - Rotina de impressão de vectores e matrizes
- FX - Rotina de cálculo da função e das restrições, que para cada problema deve ser codificada pelo utilizador.

Os argumentos de chamada da rotina são descritos na codificação, como comentários.

4. LISTAGEM DAS ROTINAS DO ALGORITMO

```

SUBROUTINE POWELL(N,M,N1,WK,MA,PR,FX,DI,PO,ST,AX,PH,R)
C
C      N      NUMERO DE VARIABEIS DE DECISAO
C      M      NUMERO DE RESTRICOES ACTIVAS OU NAO
C      N1     NUMERO DE VARIABEIS + 1
C      WK     OBJECTIVO PRETENDIDO:
C              WK = 1      MINIMIZACAO
C              WK = -1     MAXIMIZACAO
C      MA     NUMERO MAXIMO DE ITERACOES
C      PR     RESULTADOS INTERMEDIOS:
C              PR = 1     IMPRESSAO EM TODOS OS PASSOS
C              PR = 0     IMPRESSAO NO FINAL DE CADA
C                          ITERACAO
C      FX     NOME DA ROTINA DE CALCULO DA FUNCAO E DAS
C              RESTRICOES
C      DI     MATRIZ DAS DIRECCOES [MATRIZ(NxN1)]:
C              SE A PRIMEIRA COLUNA DESTA MATRIZ FOR
C              TODA NULA ENTAO SERA ATRIBUIDA A
C              MATRIZ IDENTIDADE A MATRIZ DI. CADA
C              UMA DAS COLUNAS DESTA MATRIZ E UMA
C              DIRECCAO.
C      PO     ESTIMATIVAS INICIAIS DAS VARIABEIS [VECTOR(N)]
C              NO FIM DA OPTIMIZACAO CONTEM AS COORDENADAS
C              DO PONTO OPTIMO.
C      ST     ESTIMATIVAS INICIAIS DOS INCREMENTOS DAS
C              VARIABEIS [VECTOR(N1)].
C              SE ALGUM DOS INCREMENTOS FOR NULO
C              SER-LHE-A ATRIBUIDO O VALOR UNITARIO.
C      PH     PESOS DAS RESTRICOES NA FUNCAO OBJECTIVO
C              [VECTOR(M)]:
C              VALORES SEMPRE POSITIVOS E GRANDES
C      R      VALORES DAS RESTRICOES NO PONTO ONDE FOI
C              CALCULADA A FUNCAO [VECTOR(M)].
C      AX     AREA AUXILIAR DE TRABALHO [VECTOR(N)].
C
C

```

```

REAL DI(N,N1),PO(N),ST(N1),AX(N),PH(M),R(M)
REAL DS,FU,F4,YE,F1,FS,GA,SP,FK,F2,F3,W0
INTEGER N,M,N1,WK,MA,PR,NF,IT,I,MX,LI,MM,J
EXTERNAL FX

```

```

C
C      VERIFICACAO DAS CONDICOES INICIAIS
C
C      DO 1 I=1,N
C      IF (DI(I,1).NE.0.0) GO TO 4
1     CONTINUE
C      DO 3 I=1,N
C      IF (ST(I).EQ.0.0) ST(I)=1.0
C      DO 2 J=1,N
2     DI(I,J)=0.0
3     DI(I,I)=1.0
C
C      IMPRESSAO DOS VALORES INICIAIS DOS PARAMETROS

```

```

C
4  WRITE(3,5)
5  FORMAT('0''0',10X,'MATRIZ DAS DIRECCOES')
   CALL PRINTE (DI,N,N)
   WRITE(3,8)
8  FORMAT('0''0',10X,'ESTIMATIVAS INICIAIS DAS VARIABEIS')
   CALL PRINTE (PO,1,N)
   WRITE(3,14)
14 FORMAT('0''0',10X,'INCREMENTOS INICIAIS DAS VARIABEIS')
   CALL PRINTE (ST,1,N)
   IF (M.EQ.0) GO TO 26
   WRITE(3,22)
22 FORMAT('0''0',10X,'PESOS DAS RESTRICcoes NA FUNCAO')
   CALL PRINTE (PH,1,M)
26 WRITE(3,28)
28 FORMAT('1')

C
C           PRIMEIRO VALOR DA FUNCAO
C
NF=0
F1=FURES(N,M,WK,PR,FX,PO,R,PH,NF)

C
C           INICIO DAS ITERACOES
C
DO 800 IT=1,MA

C
C           RESERVA AS COORDENADAS DO PONTO INICIAL DA
C           ITERACAO TODOS OS "STEPS" QUE FOREM NULOS
C           SAO CORRIGIDOS PARA A UNIDADE.
C
DO 56 I=1,N
IF (ABS(ST(I)).LE.1.0E-6) ST(I)=1.0
56 AX(I)=PQ(I)

C
C           RESERVA O VALOR DA FUNCAO NO INICIO DA NOVA
C           ITERACAO. A PRIMEIRA DIRECCAO A SUBSTITUIR E
C           POR DEFEITO A PRIMEIRA. O INCREMENTO MAXIMO
C           SEGUNDO CADA DIRECCAO E POR DEFEITO NULO.
C
FS=F1
MX=1
GA=0.0

C
C           INICIO DA OPTIMIZACAO UNIDIRECCIONAL
C           SEGUNDO O METODO D.S.C.
C
DO 520 LI=1,N1

C
C           RESERVA O MELHOR VALOR SEGUNDO A DIRECCAO
C           ANTERIOR E TOMA-SE UM NOVO STEP
C           CORRESPONDENTE A NOVA DIRECCAO.
C
FK=F1
SP=ST(LI)

```

```

C          INCREMENTO DAS COORDENADAS DAS VARIAVEIS
C          SEGUNDO A DIRECCAO ESPECIFICADA (LI) E
C          CALCULO DO VALOR DA FUNCAO.
C
146 DO 146 I=1,N
      PO(I)=PO(I)+SP*DI(I,LI)
      F2=FURES(N,M,WK,PR,FX,PO,R,PH,NF)
C
C          TESTE SE O INCREMENTO TOMADO POR DEFEITO ESTA
C          OU NAO A MELHORAR O VALOR DA FUNCAO OBJECTIVO
C
      IF (F2.LE.F1) GO TO 180
      DO 100 I=1,N
100 PO(I)=PO(I)-2*SP*DI(I,LI)
      F3=FURES(N,M,WK,PR,FX,PO,R,PH,NF)
C
C          TESTE SE FOI ENCONTRADO UM MINIMO OU SE
C          O SENTIDO DO INCREMENTO DAS VARIAVEIS
C          DEVE MUDAR.
C
      IF (F3.LE.F1) GO TO 160
      W0=F2
      F2=F1
      F1=F3
      F3=W0
C
C          FOI ENCONTRADO UM MINIMO DA FUNCAO (F2)
C          E OS VALORES DAS COORDENADAS DEVEM
C          CORRESPONDER A ESSE PONTO.
C
      DO 148 I=1,N
148 PO(I)=PO(I)+SP*DI(I,LI)
      GO TO 300
C
C          O INCREMENTO PASSA A DAR-SE NO OUTRO SENTIDO
C
160 SP=-SP
      F2=F1
165 F1=F2
      F2=F3
C
C          CALCULAM-SE VALORES DA FUNCAO SEMPRE NA MESMA
C          DIRECCAO E SENTIDO, COM "STEPS" CADA VEZ
C          MAIORES ATE QUE SE PASSE PARA ALEM DO MINIMO
C          SEGUNDO ESSA DIRECCAO.
C
180 SP=SP+SP
      DO 190 I=1,N
190 PO(I)=PO(I)+SP*DI(I,LI)
      F3=FURES(N,M,WK,PR,FX,PO,R,PH,NF)
      IF (F3.LE.F2) GO TO 165
C
C          CALCULO DO VALOR DA FUNCAO NUM PONTO A MEIO
C          DO ULTIMO INCREMENTO DE MODO A TENTAR
C          ENCONTRAR UM MINIMO.

```

```

C
      SP=SP/2
      DO 200 I=1,N
200    PO(I)=PO(I)-SP*DI(I,LI)
      F4=FURES(N,M,WK,PR,FX,PO,R,PH,NF)

C
C          CALCULOU-SE O VALOR MINIMO (F2) LADEADO POR
C          DOIS VALORES DA FUNCAO A ESQUERDA E A DIREITA
C          DO MINIMO (F1 e F3). REDETERMINAM-SE AS
C          COORDENADAS DO MINIMO ENCONTRADO.
C
      IF (F4.GT.F2) GO TO 210
      F1=F2
      F2=F4
      GO TO 300
210    F3=F4
      DO 220 I=1,N
220    PO(I)=PO(I)-SP*DI(I,LI)

C
C          DETERMINACAO DO "STEP" A TOMAR NO CALCULO DAS
C          COORDENADAS DO PONTO CORRESPONDENTE AO MINIMO
C          DA PARABOLA INTERPOLADA NOS TRES MELHORES
C          PONTOS.
C
300    YE=2*(F1-2*F2+F3)
      S=0
      IF (ABS(YE).LE.1.E-15) GO TO 400

C
C          COORDENADAS E VALOR DA FUNCAO CALCULADAS NO
C          PONTO MINIMO.
C
      S=SP*(F1-F3)/YE
      IF (ABS(S).LE.1.0E-6) GO TO 400
      DO 340 I=1,N
340    PO(I)=PO(I)+S*DI(I,LI)
      F1=FURES(N,M,WK,PR,FX,PO,R,PH,NF)

C
C          VALOR MINIMO DA FUNCAO (F1) E COORDENADAS
C          DESSE PONTO.
C
      IF (F1.LE.F2) GO TO 400
      F1=F2
      DO 360 I=1,N
360    PO(I)=PO(I)-S*DI(I,LI)

C
C          NA PROXIMA ITERACAO O VALOR DO "STEP"
C          SERA 1/4 DO VALOR ACTUAL:
C
400    ST(LI)=ST(LI)/4

C
C          CALCULO DO MAXIMO VALOR DO INCREMENTO ENTRE
C          OS MELHORES VALORES DA FUNCAO SEGUNDO DUAS
C          DIRECCOES SUCESSIVAS (GA) COM RESERVA DA
C          ULTIMA DIRECCAO (MX).
C

```

```

IF ((FK-F1).LE.GA) GO TO 440
MX=LI
GA=FK-F1
440 FU=F1*WK
WRITE(3,450) IT,NF,FU
450 FORMAT ('0''0', 'NUMERO DE ITERACOES ',I3,10X,
1 'NUMERO DE CALCULOS DA FUNCAO ',I6/10X,
2 'VALOR DA FUNCAO ',G20.10)
WRITE(3,480)
480 FORMAT('0',10X,'VALORES DAS VARIAVEIS')
CALL PRINTE (PD,1,N)
IF (LI.NE.N) GO TO 520

C
C      FOI OPTIMIZADA A ULTIMA DIRECCAO E DETERMINA-SE
C      EM SEGUIDA A NECESSIDADE DE INTRODUIR A
C      DIRECCAO CONJUGADA, QUE ORIGINARA AINDA UMA
C      OPTIMIZACAO SEGUNDO ESSA DIRECCAO.
C

DO 490 I=1,N
490 PO(I)=2*PO(I)-AX(I)
F2=FURES(N,M,WK,PR,FX,PD,R,PH,NF)
F3=FK-F1-GA
F4=FK-F2

C
C      BASTA QUE UMA DAS CONDICOOES SEGUINTE SEJA
C      VERDADEIRA PARA QUE SEJA DISPENSAVEL A
C      DIRECCAO CONJUGADA.
C

IF (F2.GE.FK.OR.(FK-2*F1+F2)*F3**2.GE.0.5*GA*F4**2)
1 GO TO 600
F1=F2
MM=MX

C
C      DETERMINACAO DO VETOR SEGUNDO A DIRECCAO
C      CONJUGADA CALCULO DA DISTANCIA ENTRE OS
C      PONTOS INICIAL E FINAL DA ITERACAO.
C

DS=0.0
DO 500 I=1,N
500 DS=DS+(PO(I)-AX(I))**2
DS=SQRT(DS)
ST(N1)=DS/10.0
DO 510 I=1,N
510 DI(I,N1)=(PO(I)-AX(I))/DS

C
C      PROSSEGUE A OPTIM. SEGUNDO A DIRECCAO SEGUINTE
C
520 CONTINUE

C
C      DEPOIS DA OPTIMIZACAO SEGUNDO A DIRECCAO
C      CONJUGADA ELIMINA-SE A DIRECCAO DE MAXIMO
C      INCREMENTO (MX=MM) E JUNTA-SE A DIRECCAO
C      CONJUGADA NA ULTIMA LINHA DA MATRIZ DAS
C      DIRECCOES (DI). O "STEP" SEGUNDO A DIRECCAO
C      CONJUGADA TOMA-SE IGUAL A 1/10 DA DISTANCIA
C      ENTRE OS PONTOS INICIAL E FINAL DA ITERACAO.
C

```

```

DO 580 J=MM,N
ST(J)=ST(J+1)
DO 580 I=1,N
580 DI(I,J)=DI(I,J+1)
GO TO 700

C
C           AS COORDENADAS DEVEM SER COLOCADAS NO PONTO
C           OPTIMO CALCULADO NESTA ITERACAO.
C
600 DO 620 I=1,N
620 PO(I)=(PO(I)+AX(I))/2

C
C           TESTE SE FOI SATISFEITO O CRITERIO DE PARAGEM
C           (APENAS EM TERMOS DOS VALORES DAS VARIAVEIS)
C
700 DO 720 I=1,N
IF (ABS(PO(I)-AX(I)).GT.ABS(PO(I)/1000.0)) GO TO 800
720 CONTINUE
GO TO 830

C
C           PASSA-SE PARA A ITERACAO SEGUINTE ATE QUE SE
C           CHEGUE AO NUMERO MAXIMO DE ITERACOES (MA).
C
800 CONTINUE

C
C           IMPRESSAO DOS RESULTADOS TENDO-SE ATINGIDO O
C           MAXIMO NUMERO DE ITERACOES SEM GARANTIR A
C           EXISTENCIA DE ESTACIONARIDADE LOCAL.
C
IT=IT-1
WRITE (3,810)
810 FORMAT ('1', 'NUMERO MAXIMO DE ITERACOES EXECUTADO SEM',
1 ' SE TER ATINGIDO A ESTACIONARIDADE LOCAL')
WRITE (3,820)
820 FORMAT ('0',10X, 'MATRIZ DAS DIRECCOES')
CALL PRINTE (DI,N,N)

C
C           IMPRESSAO DOS RESULTADOS SE FOI ATINGIDO UM
C           PONTO DE ESTACIONARIDADE LOCAL E INFORMACAO
C           COMPLEMENTAR SE ESSE PONTO NAO FOI ATINGIDO.
C
830 WRITE (3,840)
840 FORMAT ('0',10X, 'VALORES DAS RESTRICAOES')
CALL PRINTE (R,1,M)
WRITE (3,850)
850 FORMAT ('0',10X, 'VALORES DAS VARIAVEIS')
CALL PRINTE (PO,1,N)
FU=F1*WK
WRITE (3,860) IT,FU,NF
860 FORMAT ('0'/'0', 'VALOR DA FUNCAO CALCULADO AO FIM DE',
1 ' IS, ' ITERACOES ',G20.10/,1X,
2 ' NUMERO DE CALCULOS DA FUNCAO ',I6)
RETURN
END

```

REAL FUNCTION FURES(N,M,WK,PR,FX,PO,R,PH,NF)

C
C CALCULO DA FUNCAO OBJECTIVO COM RESTRICOES
C INCLUIDAS.
C

REAL PO(N),R(M),PH(M),FF,Z
INTEGER N,M,WK,NF,PR,I
EXTERNAL FX

C
C CALCULO DA FUNCAO E DAS RESTRICOES
C

FF = WK * FX (N,M,PO,R)
NF=NF+1

C
C COMBINACAO DO VALOR DA FUNCAO COM OS VALORES
C DAS RESTRICOES PELO METODO DAS FUNCÕES DE
C PENALIDADE.
C

Z=FF
IF (M.EQ.0) GO TO 20
DO 10 I=1,M
IF(R(I).LT.0.0) GO TO 10
Z=Z+PH(I)*R(I)**2
10 CONTINUE
20 FURES=Z

C
C IMPRESSAO DO VALOR DA FUNCAO E
C DAS RESTRICOES (SE PR=1)
C

IF (PR.EQ.0) RETURN
FF=FF*WK
Z=Z*WK
WRITE(3,30) FF,Z
30 FORMAT('0','VALOR DA FUNCAO SEM RESTRICOES ',G20.10/
1 1X,'VALOR DA FUNCAO COM RESTRICOES ',G20.10)
WRITE(3,40)
40 FORMAT('0',10X,'VALORES DAS VARIAVEIS')
CALL PRINTE (PO,1,N)
WRITE(3,50)
50 FORMAT('0',10X,'VALORES DAS RESTRICOES')
CALL PRINTE (R,1,M)
RETURN
END


```
SUBROUTINE PRINTE (X,M,N)
```

```
C
C           A ROTINA EFECTUA A IMPRESSAO DE UMA MATRIZ OU
C           VECTOR DE N LINHAS POR M COLUNAS, SE O NUMERO
C           DE ELEMENTOS POR LINHA FOR SUPERIOR A 12 SERAO
C           IMPRESSAS TANTAS LINHAS QUANTAS AS NECESSARIAS
C           ATE SE ATINGIR O VALOR M. A ROTINA PRESSUPOE
C           UM CABECALHO PREVIAMENTE IMPRESSO.
C
```

```
REAL X(N,M)
INTEGER I,J,N,M
WRITE (3,10) (J,J=1,N)
10  FORMAT('0',(4X,8I9/))
   IF (M.EQ.1) GO TO 100
   DO 30 I=1,M
   WRITE (3,40)
   WRITE (3,50) I,(X(J,I),J=1,N)
30  CONTINUE
   RETURN
40  FORMAT (1X)
50  FORMAT (1X,I4,4X,8G9.2,(/8X,8G9.2))
```

```
C           IMPRESSAO DE UM VECTOR ( SE M=1 ).
```

```
C
C
C 100  WRITE (3,40)
      WRITE (3,50) M,(X(J,M),J=1,N)
      RETURN
      END
```

```
REAL FUNCTION FX (N,M,X,R)
```

```
C
C           VALOR DA FUNCAO A OPTIMIZAR
C           VALORES DAS RESTRICÕES
C           N
C           NUMERO DE VARIÁVEIS
C           M
C           NUMERO DE RESTRICÕES
```

```
C           CALCULO DA FUNCAO DE N VARIÁVEIS E
C           DAS M RESTRICÕES DO VECTOR R
```

```
C
C           REAL X(N),R(M)
C           INTEGER N,M
C           R(1)=5.0-X(1)
C           R(2)=12.0-X(1)-X(2)
C           FX=(X(1)-1.0)**2+(X(2)-3.0)**2+20.0
C           RETURN
C           END
```

PESQUISA OPERACIONAL

Vol. 2, Nº 2, Dezembro 1982

Uma Revisão de Fundamentos da Simulação : O Uso Incorreto de Amostragem Aleatória Simples

Eduardo Saliby..... 1

Multiple Assignment Problems

G. Finke 17

Variáveis Ordenadas por Grupos

Maria Luiza Villares e Nelson Maculan Filho 29

Critérios de Rentabilidade Monetária e Critérios de Necessidade Social

Carlos Eduardo de Senna Figueiredo 49

Índice da Revista de Administração 57

Normas e Recomendações para Contribuições 58

	Pg.
. EDITORIAL	1
. CARTA DO PRESIDENTE DA IFAC	4
. CARTA DO PRESIDENTE DA IFORS	7
. NOTÍCIAS	9
. OPTIMIZING A PUMP-PIPE SYSTEM - <i>José António Soeiro Ferreira.</i> <i>e René Victor Valqui Vidal</i>	13
. SIMULAÇÃO - OPTIMIZAÇÃO - <i>Rui Campos Guimarães</i>	29
. OPTIMIZAÇÃO NUMÉRICA - ALGORITMO DE POWELL - <i>José Carlos Maia</i>	53
. INDICE DE PESQUISA OPERACIONAL	64



Associação Portuguesa para o Desenvolvimento
da Investigação Operacional.

CÉSUR – Instituto Superior Técnico – Avenida Rovisco Pais
1000 Lisboa – Telef. 882992