

INVESTIGAÇÃO OPERACIONAL

Volume 26 — nº 2 — Dezembro 2006

Publicação Semestral

Editor Principal: José F. Oliveira
Universidade do Porto

Comissão Editorial

| | | |
|---|---|--|
| M. Teresa Almeida Inst. Sup. Econ. e Gestão | J. Rodrigues Dias Univ. de Évora | N. Maculan Univ. Fed., Rio Janeiro |
| C. Henggeler Antunes Univ. de Coimbra | Laureano Escudero IBM, Espanha | Rui Oliveira Inst. Superior Técnico |
| Marcos Arenales Univ. de São Paulo | Edite Fernandes Univ. do Minho | J. Pinto Paixão Univ. de Lisboa |
| Jaime Barceló Univ. de Barcelona | J. Soeiro Ferreira Univ. do Porto | M. Vaz Pato Inst. Sup. Econ. e Gestão |
| Eberhard E. Bischoff Univ. of Wales, Swansea | J. Fernando Gonçalves Univ. do Porto | Mauricio G. Resende AT&T Labs Research |
| C. Bana e Costa Inst. Superior Técnico | Luís Gouveia Univ. de Lisboa | A. Guimarães Rodrigues Univ. do Minho |
| M. Eugénia Captivo Univ. de Lisboa | Rui C. Guimarães Univ. do Porto | António J. L. Rodrigues Univ. de Lisboa |
| Domingos M. Cardoso Univ. de Aveiro | Joaquim J. Júdice Univ. de Coimbra | J. Pinho de Sousa Univ. do Porto |
| João Clímaco Univ. de Coimbra | J. Assis Lopes Inst. Superior Técnico | Reinaldo Sousa Univ. Católica, Rio Janeiro |
| J. Dias Coelho Univ. Nova de Lisboa | Carlos J. Luz Inst. Polit. Setúbal | L. Valadares Tavares Inst. Superior Técnico |
| João P. Costa Univ. de Coimbra | Virgílio P. Machado Univ. Nova de Lisboa | B. Calafate Vasconcelos Univ. do Porto |
| Ruy Costa Univ. Nova de Lisboa | Manuel Matos Univ. do Porto | L. Nunes Vicente Univ. de Coimbra |
| | | Victor V. Vidal Techn. Univ. of Denmark |

Algoritmos de partição e geração de colunas para dimensionamento de lotes de produção

Carina Maria Oliveira Pimentel †
Filipe Pereira e Alvelos †‡
José Manuel Valério de Carvalho †‡

† Centro Algoritmi, Universidade do Minho
carina@dps.uminho.pt
falvelos@dps.uminho.pt
vc@dps.uminho.pt

‡ Departamento de Produção e Sistemas, Universidade do Minho

Abstract

In this paper, we present two algorithms for the multi-item capacitated lot-sizing problem with setup times. In this problem we aim at finding a production plan for several items over a number of time periods that minimizes the production, inventory and setup costs and satisfies all demand requirements without exceeding capacity limits.

Both of the algorithms are based on the application of the Dantzig-Wolfe principle to a classical model of Mixed Integer Programming. In one case, we apply item decomposition and in the other case we apply a period decomposition. In both cases the reformulated models are stronger than the original one. These reformulated models are solved by branch-and-price, which is a combination of column generation and branch-and-bound methods.

We present computational results for a set of instances with different characteristics, to establish comparisons between the two decomposition models. These results are then compared with the classic Mixed Integer Programming formulation solved by the commercial solver Cplex 8.1.

Resumo

Neste artigo apresentam-se dois algoritmos para o problema de lotes de produção multi-artigo capacitado com tempos de preparação. Neste problema pretende-se determinar um plano de produção para vários artigos ao longo de um determinado horizonte temporal, que minimize os custos de produção, de armazenagem e de preparação e respeite restrições de procura e de capacidade.

Os algoritmos baseiam-se na aplicação do princípio de decomposição de Dantzig-Wolfe a um modelo clássico de Programação Inteira Mista. Num dos casos é efectuada uma decomposição por artigo e no outro uma decomposição por período. Em ambos os casos os modelos reformulados são mais fortes do que o modelo original. Os modelos reformulados são resolvidos através do método de partição e geração de colunas, que resulta da combinação do método de geração de colunas com o método de partição e avaliação ("branch-and-bound").

São apresentados resultados de testes computacionais para um conjunto de instâncias com diferentes características, que permitem estabelecer comparações entre os dois modelos de decomposição. Esses resultados computacionais são ainda comparados com a formulação clássica resolvida através do Cplex 8.1, um software comercial para Programação Inteira Mista.

Keywords: Production Planning, Mixed Integer Programming, Branch and Price

Title: Branch and Price Algorithms for Production Lot Sizing

1 Introdução

Neste artigo aborda-se o problema de lotes de produção multi-artigo capacitado com tempos de preparação (LPMAC). Este problema ocorre no âmbito do planeamento da produção de médio prazo, e tem como objectivo a determinação de um plano de produção para vários artigos, habitualmente produtos acabados, ao longo de um determinado horizonte temporal. O plano resultante deverá satisfazer a procura dos clientes e respeitar os limites de capacidade e por outro lado minimizar os custos envolvidos. Visto na perspectiva dos sistemas de planeamento da produção, este problema corresponde ao plano mestre de produção (Pochet, 2001) e pertence à classe de problemas de lotes de produção de nível único, multi-artigo, capacitado e com procura determinística e dinâmica.

Neste trabalho apresentam-se dois métodos de resolução exacta do problema LPMAC baseados em duas decomposições. Em ambas, parte-se de um modelo clássico de Programação Inteira Mista (PIM) e aplica-se o princípio de decomposição de Dantzig-Wolfe (Dantzig and Wolfe, 1960), definindo de diferentes formas os subproblemas. Na primeira decomposição as restrições de capacidade são mantidas no problema mestre, estando cada subproblema associado a um artigo. Para esta decomposição foi já desenvolvido um algoritmo de partição e geração de colunas (Jans, 2002). O nosso trabalho difere na forma como as regras de partição são compatibilizadas com o subproblema. Na segunda decomposição as restrições de equilíbrio de stocks são mantidas no problema mestre, estando cada subproblema associado a um período. Uma contribuição fundamental deste trabalho é o desenvolvimento de um algoritmo de partição e geração de colunas baseado nesta decomposição.

Para resolver a relaxação linear dos modelos reformulados utiliza-se o método de geração de colunas ("column generation") e para resolver o problema inteiro aplica-se o método de partição e geração de colunas ("branch and price").

A motivação para a utilização de métodos de decomposição neste trabalho está relacionada com a potencial vantagem destes métodos em termos da qualidade dos limites inferiores que produzem, comparativamente com os limites que se obtêm resolvendo directamente a formulação clássica de PIM para o LPMAC. Do aumento da qualidade das soluções, resulta potencialmente a redução dos tempos de resolução do problema. Uma outra contribuição deste trabalho está associada à comparação experimental entre dois modelos de decomposição alternativos e entre estes e a formulação clássica resolvida pelo software comercial Cplex 8.1 (ILOG, 2002).

No que respeita à organização do artigo, na Secção 2 apresenta-se uma revisão de bibliografia relativa aos modelos e métodos de resolução para o problema. Na Secção 3 descreve-se o problema LPMAC e apresenta-se uma formulação clássica de PIM para este

problema. Na Secção 4 aplicam-se duas decomposições de Dantzig-Wolfe ao problema e definem-se os problemas mestres e subproblemas associados, bem como a estratégia usada para a obtenção de soluções inteiras. Na Secção 5 apresentam-se resultados computacionais para um conjunto de instâncias com diferentes características, que permitem estabelecer comparações entre os dois modelos de decomposição e um software comercial de PIM e por último, na Secção 6 apresentam-se as conclusões deste trabalho.

2 Revisão Bibliográfica

O primeiro modelo de Programação Inteira para problemas de lotes de produção deve-se a Wagner e Whitin (Wagner and Whitin, 1958), que apresentaram para o problema de lotes de produção de artigo único não capacitado, conhecido na literatura por “*ULS - Uncapacitated Lot Sizing Problem*”, uma formulação de programação matemática e um algoritmo de programação dinâmica, conhecido como algoritmo de Wagner-Whitin.

Existem na literatura (ver, por exemplo, (Drexl and Kimms, 1997) e (Kuik et al., 1994)) quatro modelos principais de PIM para a classe de problemas de lotes de produção de nível único, multi-artigo, com procura determinística e dinâmica e capacitado: o modelo “*CLSP - Capacitated Lot Sizing Problem*”, o modelo “*DLSP - Discrete Lot Sizing and Scheduling Problem*”, o modelo “*CSLP - Continuous Setup Lot Sizing Problem*” e o modelo “*PLSP - Proportional Lot Sizing and Scheduling Problem*”.

Nos problemas de lotes de produção multi-artigo capacitados é habitual estabelecer-se a distinção entre “small bucket problems” (SBP) e “big bucket problems” (BBP). Nos BBP permite-se a produção de vários artigos em cada período de planeamento enquanto que nos SBP considera-se que em cada período de planeamento apenas um artigo pode ser produzido. Os SBP permitem modelar as decisões de escalonamento e são adequados para situações em que existe a necessidade de controlar com rigor a capacidade consumida na preparação enquanto que os BBP utilizam-se ao nível do dimensionamento de lotes, onde normalmente se tomam decisões com base em recursos agregados.

O problema CLSP é uma extensão do problema ULS para o caso capacitado e consequentemente multi-artigo e é um BBP. Os modelos DLSP e CSLP são ambos SBP e integram as decisões de dimensionamento de lotes com as decisões de escalonamento. Enquanto que no CSLP, a produção realizada em cada período pode variar, mas é limitada pela restrição de capacidade, no DLSP, a quantidade produzida em cada período ou é nula, ou tem de ser igual à capacidade total desse período. O PLSP é também um SBP e surgiu na sequência do CSLP. Neste modelo permite-se a produção de dois artigos em cada período com o objectivo de se utilizar toda a capacidade disponível em cada período.

O problema abordado neste artigo (LPMAC) é um CLSP com tempos de preparação. Os trabalhos pioneiros, sobre métodos de resolução para o problema LPMAC devem-se a Manne (Manne, 1958), a Dzielinski e Gomory (Dzielinski and Gomory, 1965) e a Lasdon e Terjung (Lasdon and Terjung, 1971). Em (Manne, 1958) apresenta-se um modelo aproximado de programação linear para o problema. Em (Dzielinski and Gomory, 1965) é aplicada a decomposição de Dantzig-Wolfe ao problema e determina-se o limite inferior do problema reformulado pelo método de geração de colunas. Em (Lasdon and Terjung, 1971) reformula-se o modelo de programação linear proposto por (Manne, 1958) e resolve-se esse novo problema pelo método de geração de colunas. Estas abordagens estão directamente relacionadas com a decomposição por artigo a apresentar na subsecção 4.1, sendo de salientar que, tal como a generalidade das abordagens baseadas em relaxação Lagrangeana ((Chen and Thizy, 1990), (Diaby et al., 1992b), (Merle et al., 1999), (Thizy

and Wassenhove, 1985) e (Trigeiro et al., 1989)), apenas conduzem à obtenção de limites inferiores e não a uma solução óptima inteira. Uma excepção é o trabalho de (Jans, 2002) que aplica a decomposição de Dantzig-Wolfe e o método de geração de colunas para resolver a relaxação linear do problema LPMAC e aplica o método de partição e geração de colunas para determinar a sua solução óptima inteira. Este trabalho está relacionado com o trabalho aqui apresentado no âmbito da decomposição por artigo. Aquilo que o distingue do algoritmo baseado na decomposição por artigo aqui desenvolvido é a utilização de regras de partição diferentes.

Diaby et al. (Diaby et al., 1992a) abordam o problema LPMAC através de uma relaxação Lagrangeana alternativa, baseada na relaxação das restrições de equilíbrio de stocks. Essa abordagem está relacionada com a decomposição por período apresentada na subsecção 4.2. Embora aqui também se aborde uma decomposição em que os subproblemas estão associados a períodos, os métodos aplicados na resolução do problema reformulado, são diferentes. Neste trabalho utiliza-se a decomposição de Dantzig-Wolfe e técnicas de partição e geração de colunas.

Outros métodos específicos, não directamente relacionados com os apresentados neste artigo, têm sido aplicados no LPMAC, sendo de salientar métodos de planos de corte ((Barany et al., 1984), (Belvaux and Wolsey, 2000), (Miller et al., 2000) e (Pochet and Wolsey, 1991)), redefinição de variáveis (Eppen and Martin, 1987) e métodos heurísticos (Karimi et al., 2003).

3 O problema de lotes de produção multi-artigo capacitado com tempos de preparação

O planeamento da produção é uma importante área em qualquer organização industrial, pois permite-lhe lidar de uma forma mais eficiente com as decisões associadas ao fluxo de materiais e com a utilização de pessoas e equipamentos, entre outros. Em qualquer sistema de produção existe normalmente um número extremamente elevado de artigos (ou encomendas) a produzir num conjunto limitado de recursos, aos quais estão associadas datas de entrega acordadas com os clientes que se podem sobrepor e que devem ser cumpridas. O planeamento da produção encarrega-se de planear os recursos e actividades necessárias de modo a permitir a entrega atempada daquilo que é pedido. É neste contexto que o problema LPMAC se torna relevante. Este problema diz respeito às decisões tomadas ao nível do plano mestre de produção, no sistema de planeamento da produção. Em linhas gerais, neste problema procura-se determinar um plano de produção para um conjunto de artigos finais, faseado no tempo, através da consideração de um conjunto de períodos de planeamento. Esse plano indica para cada artigo final as quantidades a produzir desse artigo (que definem um lote) e os períodos em que essas quantidades devem ser produzidas, atendendo a um conjunto de restrições.

Associado a cada plano de produção, existe um custo que engloba três componentes: custos de produção, custos de armazenagem e custos de preparação. O custo de produção pode variar com o artigo e com o período e representa o custo incorrido por cada unidade produzida. O custo de armazenagem representa o custo que se incorre por unidade armazenada e por período de armazenagem, sempre que a decisão é a de produzir antecipadamente para satisfazer procuras de períodos posteriores. Por último, o custo de preparação representa um custo fixo do lote.

No modelo mais estudado do problema de lotes de produção multi-artigo capacitado apenas se consideram os custos de preparação, sendo a preparação contabilizada apenas na função objectivo. Como o tempo de preparação (de máquinas, pessoas, materiais, etc.)

consome parte da capacidade de produção disponível, nesse modelo a capacidade realmente utilizada é necessariamente subestimada. Para muitos dos autores que consideram na formulação do problema apenas o custo de preparação, a inclusão deste tempo no modelo é vista como uma extensão simples. Esta posição é contrariada em (Trigeiro et al., 1989), onde se mostra que o problema com a consideração dos tempos de preparação se torna num problema muito mais difícil de resolver. Com vista à modelação mais precisa do problema, é este último modelo que é abordado neste artigo, considerando-se directamente no modelo a capacidade gasta com a preparação, ao invés de esta ser considerada implicitamente no custo de preparação.

Nos parágrafos que se seguem, apresenta-se a formulação clássica de PIM para o problema LPMAC.

Considerem-se os seguintes conjuntos e parâmetros: I que representa o conjunto de artigos, indexados por $i=1, \dots, n$; J que representa o conjunto de períodos de produção, indexados por $j=1, \dots, m$; p_j^i que representa o custo unitário de produção do artigo i no período j ; q_j^i que representa o custo fixo de preparação do artigo i no período j ; h_j^i que representa o custo unitário de armazenagem do artigo i no final do período j ; d_j^i que representa a procura do artigo i no período j ; c_j que representa a capacidade de produção no período j ; a_j^i que representa a capacidade consumida na produção de uma unidade do artigo i no período j e b_j^i que representa a capacidade consumida na preparação do artigo i no período j .

Considerem-se ainda as seguintes variáveis de decisão: x_j^i que representa a quantidade a produzir do artigo i no período j ; y_j^i que é uma variável binária que assume o valor 1 se o artigo i é produzido no período j , e assume o valor 0 caso contrário e s_j^i que representa o nível de inventário do artigo i no final do período j .

Para um determinado horizonte temporal o objectivo é o de determinar as quantidades a produzir de cada artigo em cada período e as quantidades a armazenar de cada artigo para períodos posteriores, que minimizam os custos de produção, de preparação e de armazenagem e que garantem a entrega atempada dos artigos, a ocorrência de uma preparação sempre que se produza e que a capacidade disponível não é ultrapassada. Matematicamente podemos concretizar este objectivo através da formulação de PIM que se apresenta de seguida, que se designa por formulação clássica.

$$Z_C = \text{Min} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m p_j^i x_j^i + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m q_j^i y_j^i + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m h_j^i s_j^i \quad (C)$$

sujeito a:

$$x_j^i = d_j^i + s_j^i, \quad \forall i \in I \quad (1)$$

$$s_{j-1}^i + x_j^i = d_j^i + s_j^i, \quad \forall i \in I, \forall j \in J \setminus \{1\} \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^n a_j^i x_j^i + \sum_{i=1}^n b_j^i y_j^i \leq c_j, \quad \forall j \in J \quad (3)$$

$$x_j^i \leq \min \left\{ \frac{c_j - b_j^i}{a_j^i}, \sum_{t=j}^m d_t^i \right\} y_j^i, \quad \forall i \in I, \forall j \in J \quad (4)$$

$$s_j^i \geq 0, \quad \forall i \in I, \forall j \in J \quad (5)$$

$$x_j^i \geq 0, \quad \forall i \in I, \forall j \in J \quad (6)$$

$$y_j^i \in \{0, 1\}, \quad \forall i \in I, \forall j \in J. \quad (7)$$

A função objectivo minimiza o custo total. As restrições (1) e (2) são as restrições de equilíbrio de stocks, que garantem que a procura dos clientes em cada período é satisfeita e que relacionam os níveis de inventário de um determinado período com os níveis de inventário do período imediatamente anterior. As restrições (3) são as restrições de capacidade, que forçam o consumo do recurso com a produção e a preparação a não exceder a capacidade disponível no período j . As restrições (4) garantem que uma preparação ocorre se o artigo i for produzido no período j . Estas restrições poderiam ser substituídas por $x_j^i \leq My_j^i$, sendo M um valor constante elevado. Deste modo garantir-se-ia que, sempre que se decidisse produzir o artigo i no período j , deveria ocorrer uma preparação. Para tornar a formulação mais forte, o coeficiente M pode ser substituído por um lado por $\frac{c_j - b_j^i}{a_j^i}$, ou seja, pela quantidade máxima que é possível produzir do artigo i

no período j , e por outro lado por $\sum_{t=j}^m d_t^i$, ou seja, pela soma da procura desde o período em análise (período j) até ao último período de planeamento. Entre os dois coeficientes referidos, deve escolher-se aquele que tiver menor valor, uma vez que a quantidade a produzir do artigo i no período j será limitada por esse valor. As restrições (5) e (6) impõem a condição de não negatividade das variáveis e as restrições (7) forçam as variáveis de preparação a assumir valores binários.

A formulação clássica é constituída por $2nm$ variáveis contínuas, nm variáveis binárias e $m+2nm$ restrições, sem considerar as condições de integralidade e de não negatividade. Lembra-se que n representa o número de artigos e m o número de períodos de planeamento.

4 Decomposições para o problema LPMAC

A qualidade dos limites inferiores de um modelo é um aspecto crucial na resolução de modelos de PIM. É nesse sentido que se aplica aqui a decomposição de Dantzig-Wolfe (Dantzig and Wolfe, 1960), já que esta permite a obtenção de formulações mais fortes para o problema. Do aumento da qualidade do modelo podem resultar melhores intervalos de integralidade e melhores tempos de resolução dos problemas.

A um problema de PIM podem aplicar-se diferentes decomposições de Dantzig-Wolfe, de acordo com as restrições que se considerem na definição do subproblema e do problema mestre. Após a análise da estrutura da formulação clássica do problema LPMAC, identificaram-se duas decomposições de Dantzig-Wolfe alternativas, que se estudaram com o objectivo de aferir a sua eficiência e de estabelecer algumas comparações entre ambas, bem como compará-las com a formulação clássica resolvida através de um software comercial de PIM. Nas subsecções seguintes apresentam-se as duas decomposições.

4.1 Decomposição por Artigo

Na formulação clássica do problema LPMAC apresentada na secção anterior, apenas as restrições de capacidade (3) interligam os artigos a produzir. Se se deixar de considerar estas restrições, o problema decompõe-se num conjunto de (sub)problemas independentes, cada um correspondendo a um problema de lotes de produção de artigo único não capacitado (ULS). Para tirar partido desta estrutura, nesta decomposição, as restrições (3) definem as restrições de ligação, que ficam no problema mestre. O

subproblema é composto pelas restrições (1)-(2) e (4)-(7) e cada subproblema está associado ao problema ULS, existindo n subproblemas diferentes.

4.1.1 Problema Mestre

Para a definição do problema mestre, considere-se o conjunto H que representa o conjunto de planos de produção indexados por $k=1, \dots, t$ e os parâmetros: β_{jk}^i , α_{jk}^i e δ_{jk}^i . β_{jk}^i assume o valor 1 caso exista uma preparação do artigo i no período j no plano de produção k , e assume o valor 0 caso contrário; $i=1, \dots, n$; $j=1, \dots, m$; $k=1, \dots, t$. α_{jk}^i representa a quantidade a produzir do artigo i no período j , no plano de produção k ; $i=1, \dots, n$; $j=1, \dots, m$; $k=1, \dots, t$ e δ_{jk}^i representa o nível de inventário do artigo i no final do período j , no plano de produção k ; $i=1, \dots, n$; $j=1, \dots, m$; $k=1, \dots, t$. Considere-se ainda a variável z_k^i que representa o peso do plano de produção k do artigo i ; $i=1, \dots, n$; $k=1, \dots, t$ e os parâmetros e variáveis de decisão definidas na Secção 3, relativas à formulação clássica.

Da aplicação da decomposição de Dantzig-Wolfe à formulação clássica, resulta um novo problema, que se designa por problema mestre, que tem associadas variáveis de decisão que representam o peso dos pontos extremos dos subproblemas (como o poliedro definido pelas restrições que definem o subproblema é limitado, no problema mestre existirão apenas pontos extremos). Qualquer solução do problema mestre pode então ser expressa através de uma combinação convexa e não negativa dos pontos extremos dos subproblemas. O problema mestre, da decomposição por artigo é do tipo:

$$Z_{PMI} = \text{Min} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^t \left[\sum_{j=1}^m (q_j^i \beta_{jk}^i + p_j^i \alpha_{jk}^i + h_j^i \delta_{jk}^i) z_k^i \right] \quad (PMI)$$

sujeito a:

$$\sum_{k=1}^t z_k^i = 1, \quad \forall i \in I \quad (\pi^i) \quad (8)$$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^t (b_j^i \beta_{jk}^i + a_j^i \alpha_{jk}^i) z_k^i \leq c_j, \quad \forall j \in J \quad (\mu_j) \quad (9)$$

$$z_k^i \geq 0, \quad \forall i \in I, \forall k \in H. \quad (10)$$

Nesta decomposição, a solução dos subproblemas (variáveis de decisão do problema mestre) correspondem a planos de produção. Para um determinado artigo, cada plano de produção indica em que períodos se deve produzir e em que quantidades. As variáveis de decisão z_k^i representam assim a proporção da procura do artigo i que é satisfeita através do plano de produção k . A função objectivo minimiza a soma dos custos totais. As restrições (8) são as restrições de convexidade. Existe uma restrição de convexidade para cada artigo, na qual se força a escolha de uma combinação de planos de produção. Associada a cada restrição de convexidade está uma variável dual π^i . O segundo conjunto de restrições, conjunto (9), diz respeito às restrições de capacidade. Neste conjunto força-se a que a combinação de planos de produção escolhida respeite a capacidade disponível em cada período. Este segundo conjunto tem associadas as variáveis duais μ_j . As restrições (10) forçam as variáveis de decisão a tomarem valores não negativos.

Em termos de dimensão, o problema PMI , comparativamente com o problema C , tem um número mais reduzido de restrições. Enquanto que na formulação clássica existem como vimos anteriormente $m+2nm$ restrições, no problema mestre PMI , este número reduz-se para $n+m$. Já em termos de variáveis, o problema PMI , comparativamente com o

problema C, tem um número gigantesco de variáveis, pelo que se utiliza o método de geração de colunas para o resolver. A ideia subjacente à geração de colunas pode definir-se do seguinte modo: em vez de considerarmos todos os planos de produção dos subproblemas no problema mestre *PMI*, vamos considerar apenas um conjunto restrito desses planos, definindo um problema mestre restrito (PMR) e avaliar se existem planos que não estão actualmente no problema *PMI*, que caso fossem incluídos no problema poderiam melhorar o valor da função objectivo. Os planos de produção que se revelarem atractivos devem ser adicionados ao problema mestre.

Para iniciar o processo iterativo de geração de colunas, o PMR tem de ser um problema válido, visto ter de fornecer variáveis duais aos subproblemas, para fazer a avaliação dos planos de produção atractivos. Para garantir a admissibilidade do PMR incluiu-se nas restrições (8) um conjunto de variáveis artificiais, v^i , associadas a cada artigo e na função objectivo o termo $\sum_{i=1}^n f^i v^i$, onde f^i representa uma penalidade elevada, que torna qualquer solução com variáveis artificiais positivas de pior qualidade que uma solução óptima em termos das variáveis z_{jk}^i . Foram ainda incluídos no primeiro PMR um subconjunto de planos de produção do conjunto de todos os planos de produção dos n subproblemas.

Para recuperar a solução do problema C, a partir de uma solução do problema *PMI* basta aplicar as expressões:

$$x_j^i = \sum_{k=1}^t \alpha_{jk}^i z_k^i \quad (11)$$

$$y_j^i = \sum_{k=1}^t \beta_{jk}^i z_k^i \quad (12)$$

Conhecido o valor das variáveis x_j^i , através das equações (1) e (2), é imediata a determinação do valor das variáveis de decisão auxiliares s_j^i .

4.1.2 Subproblemas

Se μ_j representar o vector de variáveis duais associado ao conjunto de restrições de capacidade (9) e π^i a variável dual associada à restrição i do conjunto de restrições de convexidade (8), os n subproblemas a resolver são definidos por:

$$Z_{SPI} = \text{Min} \sum_{j=1}^m p_j^i x_j^i + \sum_{j=1}^m q_j^i y_j^i + \sum_{j=1}^m h_j^i s_j^i - \sum_{j=1}^m (b_j^i y_j^i) \mu_j - \sum_{j=1}^m (a_j^i x_j^i) \mu_j - \pi^i \text{ (SPI)}$$

sujeito a:

$$x_j^i = d_j^i + s_j^i, \quad (13)$$

$$s_{j-1}^i + x_j^i = d_j^i + s_j^i, \quad \forall j \in J \setminus \{1\} \quad (14)$$

$$x_j^i \leq \min \left\{ \frac{c_j - b_j^i}{a_j^i}, \sum_{t=j}^m d_t^i \right\} y_j^i, \quad \forall j \in J \quad (15)$$

$$x_j^i \geq 0, \quad \forall j \in J \quad (16)$$

$$y_j^i \in \{0,1\}, \quad \forall j \in J \quad (17)$$

$$s_j^i \geq 0, \quad \forall j \in J. \quad (18)$$

Para resolver os subproblemas da decomposição por artigo, pode utilizar-se o algoritmo de programação dinâmica proposto por (Wagner and Whitin, 1958), que resolve em tempo polinomial o problema. Cada subproblema tem associados 2^{m-1} planos de produção e a solução óptima de cada um dos n subproblemas representa um plano de produção relativo ao artigo i . Como no subproblema não existem restrições de capacidade, em todos os planos de produção, quando se toma a decisão de produzir num determinado período, produz-se para satisfazer a procura de um número inteiro de períodos. Estes planos são conhecidos por planos de Wagner-Whitin.

Durante o processo de geração de colunas, enquanto o valor óptimo da função objectivo do subproblema (custo reduzido associado a um plano de produção) for menor do que zero, deverá adicionar-se ao problema mestre uma nova coluna ou variável, que corresponde à solução do subproblema (plano de produção). Em cada iteração, podem portanto ser adicionadas ao problema mestre n novas colunas, caso cada subproblema contribua com uma coluna atractiva.

4.2 Decomposição por Período

Nesta subsecção aborda-se uma decomposição alternativa à decomposição por artigo, que consiste em deixar no problema mestre as restrições de equilíbrio de stocks (1) e (2) e em passar para o subproblema as restrições (3), (4), (6) e (7). Com esta decomposição os subproblemas passam a estar associados aos períodos de planeamento. No nosso melhor conhecimento, esta decomposição foi apenas estudada por (Diaby et al., 1992a), que utilizaram a relaxação Lagrangeana e resolveram o problema reformulado pelo método do subgradiente. Neste trabalho, aplica-se a decomposição de Dantzig-Wolfe e a resolução do problema reformulado é feita pelo método de geração de colunas, que quando combinado com o método de partição e avaliação, permite ainda a obtenção de soluções óptimas inteiras.

4.2.1 Problema Mestre

Para definir o problema mestre da decomposição por período, considerem-se os parâmetros e variáveis da formulação clássica apresentada na Secção 3, o conjunto H que representa o conjunto de padrões de produção indexados por $k=1,\dots,t$ e os parâmetros: β^{ijk} e α^{ijk} . β^{ijk} assume o valor 1 caso exista uma preparação no período j do artigo i , no padrão de produção k e assume o valor 0 caso contrário; $i=1,\dots,n$; $j=1,\dots,m$; $k=1,\dots,t$ e α^{ijk} representa a quantidade a produzir no período j do artigo i , no padrão de produção k ; $i=1,\dots,n$; $j=1,\dots,m$; $k=1,\dots,t$. Considere-se também a variável de decisão z_{ijk} que representa o peso do padrão de produção k do período j ; $j=1,\dots,m$; $k=1,\dots,t$.

O problema mestre que na decomposição por período resulta da aplicação da decomposição de Dantzig-Wolfe, é tal como o da decomposição por artigo constituído por variáveis de decisão que representam pesos de pontos extremos dos subproblemas, pois neste caso o poliedro definido pelas restrições do subproblema é também um conjunto limitado. A diferença é que agora as variáveis representam padrões de produção que estão associados a um período. Cada padrão de produção indica para um determinado período a quantidade que deve ser produzida do “mix” de artigos a processar.

A solução da relaxação linear do problema LPMAC, quando se aplica a decomposição por período, pode ser obtida resolvendo o seguinte problema mestre, aqui designado por *PMJ*:

$$Z_{PMJ} = \text{Min} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m h_j^i s_j^i + \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^t \left[\sum_{i=1}^n (q_j^i \beta_{jk}^i + p_j^i \alpha_{jk}^i) z_{jk} \right] \quad (PMJ)$$

sujeito a:

$$\sum_{k=1}^t z_{jk} \leq 1, \quad \forall j \in J \quad (\pi_j) \quad (19)$$

$$\sum_{k=1}^t \alpha_{1k}^i z_{1k} = d_1^i + s_1^i, \quad \forall i \in I \quad (\mu_1^i) \quad (20)$$

$$s_{j-1}^i + \sum_{k=1}^t \alpha_{jk}^i z_{jk} = d_j^i + s_j^i, \quad \forall i \in I, \forall j \in J \setminus \{1\} \quad (\mu_j^i) \quad (21)$$

$$s_j^i \geq 0, \quad \forall i \in I, \forall j \in J \quad (22)$$

$$z_{jk} \geq 0, \quad \forall j \in J, \forall k \in H. \quad (23)$$

As variáveis de decisão z_{jk} podem ser vistas como a proporção da procura do período j que é satisfeita pelo padrão de produção k . A função objectivo do problema mestre minimiza a soma dos custos totais. As restrições (19) representam as restrições de convexidade. Existe uma restrição de convexidade associada a cada período na qual se força a escolha de uma combinação de padrões de produção. Associada a cada restrição de convexidade está uma variável dual π_j . No caso da decomposição por período, as restrições de convexidade podem ser escritas como uma desigualdade do tipo \leq , em vez da sua forma habitual, na qual estas restrições são escritas como uma igualdade. Esta alteração é possível, devido ao espaço de soluções admissíveis do subproblema *SPJ* (que será definido na subsecção seguinte) incluir a origem. Com esta modificação, excluem-se do problema mestre os padrões de produção que indiquem que para um determinado período nada deve ser produzido. O conjunto de restrições (20) e (21), são as restrições de equilíbrio de stocks. Neste conjunto força-se a que a combinação de padrões de produção escolhida respeite a procura de cada artigo em cada período. Este conjunto tem associadas as variáveis duais μ_j^i . As restrições (22) e (23) impõem a condição de não negatividade das variáveis de inventário e das variáveis de peso, respectivamente.

Quanto à dimensão, o problema *PMJ* tem $m+nm$ restrições. Nesta decomposição o número de variáveis do problema mestre é extremamente elevado, pelo que também se recorre ao método de geração de colunas para resolver o problema *PMJ*.

Devido ao conjunto de restrições de equilíbrio de stocks do primeiro período de planeamento, restrições (20), o primeiro PMR pode não ser válido. Para o validar, associou-se uma variável artificial, v^i , a cada restrição deste conjunto. Estas variáveis podem ser interpretadas como sendo o inventário existente no início do primeiro período de planeamento. À função objectivo, adicionou-se o termo $\sum_{i=1}^n f^i v^i$, onde f^i é um escalar com um valor muito elevado, para garantir que qualquer solução com variáveis artificiais positivas é pior que uma solução óptima em termos das variáveis de peso z_{jk} .

A solução do problema C, pode ser obtida por aplicação das seguintes expressões:

$$x_j^i = \sum_{k=1}^t \alpha_{jk}^i z_{jk} \quad (24)$$

$$y_j^i = \sum_{k=1}^t \beta_{jk}^i z_{jk} \quad (25)$$

4.2.2 Subproblemas

Cada um dos m subproblemas da decomposição por período é definido por:

$$Z_{SPJ} = \text{Min} \sum_{i=1}^n p_j^i x_j^i + \sum_{i=1}^n q_j^i y_j^i - \sum_{i=1}^n x_j^i \mu_j^i - \pi_j \quad (SPJ)$$

sujeito a:

$$\sum_{i=1}^n a_j^i x_j^i + \sum_{i=1}^n b_j^i y_j^i \leq c_j, \quad (26)$$

$$x_j^i \leq \min \left\{ \frac{c_j - b_j^i}{a_j^i}, \sum_{t=j}^m d_t^i \right\} y_j^i, \quad \forall i \in I \quad (27)$$

$$x_j^i \geq 0, \quad \forall i \in I \quad (28)$$

$$y_j^i \in \{0, 1\} \quad \forall i \in I, \quad (29)$$

onde π_j representa a variável dual associada à restrição j do conjunto de restrições de convexidade (19) e μ_j^i representa o vector de variáveis duais associado ao conjunto de restrições de equilíbrio de stocks (conjunto de restrições (20) e (21)).

A função objectivo de cada subproblema representa o custo reduzido associado ao padrão de produção j . No processo de geração de colunas, enquanto os custos reduzidos dos subproblemas forem menores do que zero, deverão adicionar-se ao problema mestre restrito os padrões de produção correspondentes.

Os subproblemas da decomposição por período estão associados ao problema da mochila contínuo com preparações (“continuous knapsack problem with setups”). Este problema foi recentemente abordado em (Perrot and Vanderbeck, 2004), onde é apresentado um algoritmo de programação dinâmica e um algoritmo de partição e avaliação para o problema.

4.3 Pesquisa de Soluções Inteiras

Ao resolver os problemas mestres definidos nas subsecções 4.1.1 e 4.2.1 por geração de colunas, estamos a determinar a solução óptima da relaxação linear dos modelos de decomposição. O valor da solução que se obtém representa portanto um limite inferior para o valor do óptimo inteiro. Como os subproblemas que resultam de ambos os modelos de decomposição não possuem a propriedade da integralidade (Geoffrion, 1974), o limite inferior que se obtém na resolução dos problemas mestres é melhor ou igual que o obtido pela solução da relaxação linear da formulação clássica.

Para recuperarmos uma solução expressa em termos das variáveis de peso para uma solução em termos das variáveis originais da formulação clássica, basta aplicarmos as expressões (11) e (12) no caso da decomposição por artigo e as expressões (24) e (25) caso se trate da decomposição por período. Se, nessa solução, existirem variáveis de preparação, as variáveis y_j , que não sejam binárias, esta solução não corresponde à solução óptima do problema C. Para determinar a solução óptima inteira do problema deverá então recorrer-se ao método de partição e geração de colunas. Este método combina o método de partição e avaliação com o método de geração de colunas (Barnhart et al., 1998) e assenta na resolução de um problema mestre em cada nodo da árvore de pesquisa através do método de geração de colunas.

A estratégia de partição usada neste trabalho, consiste em adicionar ao problema mestre restrições de partição que forçam as variáveis originais de preparação a assumir valores binários. Esta estratégia tem a vantagem de ser geral, podendo ser aplicada a qualquer tipo de problema, garantindo a preservação da estrutura do subproblema nos nodos da árvore de pesquisa.

Quando a solução da raiz da árvore de pesquisa, ou a solução de um determinado nodo não é inteira, e existe interesse em explorá-lo, devem adicionar-se dois novos nodos ao problema. Cada um destes nodos passa a definir um “novo” problema, no qual para além de se considerar o problema mestre actual, se considera também uma das restrições de partição, a seguir apresentadas:

$$\sum_{k \in \bar{H}} \beta_{jk}^i z_k^i = 0 \quad \text{ou} \quad \sum_{k \in \bar{H}} \beta_{jk}^i z_k^i = 1 \quad \text{se decomposição por artigo}$$

$$\sum_{k \in \bar{H}} \beta_{jk}^i z_{jk} = 0 \quad \text{ou} \quad \sum_{k \in \bar{H}} \beta_{jk}^i z_{jk} = 1 \quad \text{se decomposição por período}$$

onde \bar{H} representa o conjunto de planos de produção (se decomposição por artigo) ou de padrões de produção (se decomposição por período) que fazem parte desse problema mestre actual.

Após a adição da restrição de partição, para que os custos reduzidos dos subproblemas a resolver no processo de geração de colunas sejam correctamente determinados, deve alterar-se a função objectivo desses subproblemas, na qual se deve passar a considerar a variável dual associada à restrição de partição que foi adicionada. No caso da decomposição por artigo, se η_j^i representar a variável dual associada à restrição de partição que foi adicionada ao nodo, na função objectivo de cada um dos n subproblemas, apresentada na subsecção 4.1.2, deve subtrair-se o termo seguinte:

$\sum_{j=1}^m y_j^i \eta_j^i$. Se se tratar da decomposição por período e se for τ_j^i a variável dual associada à restrição de partição, na função objectivo de cada um dos m subproblemas apresentados na subsecção 4.2.2 deve subtrair-se o termo: $\sum_{i=1}^n y_j^i \tau_j^i$.

5 Resultados Computacionais

Com o objectivo de avaliar e comparar o desempenho de ambos os algoritmos de partição e geração de colunas e de os comparar com a formulação clássica resolvida pelo software Cplex 8.1 realizaram-se testes computacionais, cujos resultados se apresentam neste capítulo. Para medir o desempenho de cada um dos três métodos, utilizaram-se os

seguintes critérios: qualidade dos limites inferiores (medida através do cálculo dos intervalos de integralidade) e eficiência. Os resultados computacionais foram obtidos através da resolução de um conjunto de 180 instâncias usadas por (Trigeiro et al., 1989), as quais foram geradas com base na variação de quatro características: variabilidade da procura, capacidade utilizada, periodicidade de encomenda (“time between orders”) e tempo de preparação. Na mesma referência podem encontrar-se informações pormenorizadas acerca da forma como estas instâncias foram obtidas. Todas as instâncias consideram 10 artigos e 20 períodos de planeamento.

Em ambos os modelos de decomposição, os problemas mestres quer da raiz da árvore de pesquisa quer de qualquer nodo da árvore, são resolvidos até à optimalidade pelo algoritmo dual do simplex, através do Cplex. Os subproblemas da decomposição por artigo e da decomposição por período são também resolvidos até à optimalidade, usando o Cplex. Os primeiros problemas mestres restritos são definidos através de um conjunto de variáveis artificiais que asseguram a admissibilidade dos mesmos e de um subconjunto de planos de produção no caso da decomposição por artigo e em cada iteração do método de geração de colunas resolvem-se todos os subproblemas até optimalidade e todas as colunas atractivas são adicionadas ao problema mestre restrito.

No método de partição e geração de colunas, quer na decomposição por artigo, quer na decomposição por período, fizeram-se alguns testes preliminares onde se testaram duas estratégias de pesquisa da árvore. Na primeira estratégia utilizou-se a pesquisa primeiro em profundidade e deu-se prioridade ao nodo que tem associado a restrição de partição do tipo \geq e na regra de partição utilizou-se uma estratégia baseada na escolha da variável com parte fraccionária mais próxima de 1. Na segunda estratégia de pesquisa da árvore, também se utilizou a pesquisa primeiro em profundidade, mas deu-se prioridade ao nodo de pesquisa que tem associada a restrição de partição do tipo \leq e na regra de partição utilizou-se uma estratégia baseada na escolha da variável com parte fraccionária mais próxima de 0. Como a primeira estratégia foi a que produziu melhores resultados, na realização dos testes que aqui se apresentam foi esta a estratégia seguida.

Os algoritmos de partição e geração de colunas foram implementados em C++ utilizando a ferramenta *ADDing – Automatic Dantzig-Wolfe Decomposition for INteger column Generation* (Alvelos, 2005). Os testes foram realizados num computador pessoal com um processador Pentium 4 a 2 GHz e com 1 GB de memória.

Na tabela 1 apresentam-se os tempos de resolução da relaxação linear dos dois modelos de decomposição e da formulação clássica resolvida pelo Cplex. Esses tempos estão expressos em segundos e referem-se aos tempos médios de resolução do conjunto de 180 instâncias.

Tabela 1: Tempos Médios: Relaxação Linear

| Método | Tempo Médio (segundos) |
|-----------------------------|------------------------|
| Decomposição por Artigo | 2.39 |
| Decomposição por Período | 21.87 |
| Formulação Clássica - Cplex | 0.03 |

Na resolução do problema inteiro, limitou-se o tempo de resolução a 3600 segundos. Usando a decomposição por período, não se consegue atingir a solução ótima em nenhuma das 180 instâncias no tempo limite estabelecido, encontrando-se apenas

soluções incumbentes. Em 109 das 180 instâncias testadas não se consegue determinar a solução óptima usando quer a decomposição por artigo, quer o Cplex. Existem portanto 71 instâncias que são resolvidas até à optimalidade, considerando o Cplex e/ou a decomposição por artigo. Desta análise conclui-se que em cerca de 40% das instâncias testadas se consegue determinar a solução óptima do problema em menos de uma hora. Com o Cplex consegue-se determinar a solução óptima de 61 instâncias num tempo médio de 307.90 segundos enquanto que com a decomposição por artigo se consegue determinar a solução óptima de 59 instâncias, num tempo médio de 381.90 segundos.

Já em termos de soluções incumbentes, em 49 das 109 instâncias em que não se consegue determinar a solução óptima o Cplex apresenta melhores incumbentes que os modelos de decomposição. Nas restantes 60 instâncias, é a decomposição por artigo que apresenta as melhores soluções incumbentes. As soluções incumbentes da decomposição por período são sempre piores que as soluções incumbentes da decomposição por artigo e do Cplex. Na tabela 2 sumariam-se estes resultados. A segunda coluna da tabela refere-se ao número de instâncias que são resolvidas até à optimalidade por cada um dos métodos e na terceira coluna apresentam-se os tempos médios de resolução dessas instâncias. Na quarta coluna apresentam-se os intervalos médios de integralidade ou GAP's médios de integralidade em percentagem. Os GAP's foram determinados através da seguinte expressão: $\frac{Z_{PI} - Z_{LI}}{Z_{PI}}$, representando Z_{PI} o valor da solução óptima inteira e Z_{LI} o valor do

limite inferior (o valor da solução óptima do nodo da raiz da árvore) de cada um dos três métodos. Nesta análise consideraram-se as 71 instâncias para as quais se obteve a solução óptima inteira. Por último, na quinta coluna quantifica-se o número de instâncias, do conjunto das 109 que não são resolvidas até à optimalidade, em que cada método apresenta melhores soluções incumbentes.

Tabela 2: Resultados Computacionais : Problema Inteiro

| Método | Número Instâncias Resolvidas | Tempo Médio (segundos) | GAP Médio (%) | Número Melhores Incumbentes |
|-----------------------------|------------------------------|------------------------|---------------|-----------------------------|
| Decomposição por Artigo | 59 | 381.90 | 0.16 | 60 |
| Decomposição por Período | 0 | - | 31.25 | 0 |
| Formulação Clássica - Cplex | 61 | 307.90 | 31.37 | 49 |

Analisando os resultados da tabela 1, conclui-se que na decomposição por artigo os tempos médios de resolução da relaxação linear são bastante inferiores aos obtidos com a decomposição por período. Entre a decomposição por artigo e o Cplex, a diferença não é tão significativa, mas o Cplex consegue resolver a relaxação mais rapidamente. A diferença de tempos médios entre a decomposição por artigo e a decomposição por período ronda os 19.50 segundos e entre a decomposição por artigo e o Cplex ronda os 2 segundos. Da análise da tabela 2 depreende-se que em termos do número de instâncias resolvidas até à optimalidade, a diferença entre a decomposição por artigo e a decomposição por período é enorme. Entre a decomposição por artigo e o Cplex considera-se que essa diferença não é significativa. Quanto aos tempos médios de resolução do problema inteiro, como na decomposição por período não se obtém nenhuma solução óptima, nesta análise apenas se consideraram os tempos médios de resolução do conjunto de 59 instâncias da decomposição por artigo e do conjunto de 61 instâncias da decomposição por período. O Cplex é o método que em média apresenta melhores tempos de resolução, não sendo contudo significativa a diferença entre os tempos médios deste método e os tempos médios da decomposição por artigo. Essa diferença é de 74 segundos.

Quanto aos GAP's de integralidade, esta é para nós uma medida de desempenho fundamental, pois permite-nos aferir acerca da qualidade dos modelos desenvolvidos, independentemente da implementação utilizada para os resolver. O modelo da decomposição por artigo é claramente mais forte que o modelo da decomposição por período e que a formulação clássica. Comparando o GAP da decomposição por período com o do Cplex, conclui-se que são ambos semelhantes, embora o GAP da decomposição por período seja um pouco melhor. Para além da análise dos GAP's, a análise das melhores soluções incumbentes, permite-nos também atestar a qualidade das soluções. Quanto mais baixo for o valor da solução incumbente mais próximo estamos do valor da solução óptima inteira. Para o conjunto das 109 instâncias, para as quais não se obtém a solução óptima inteira em 3600 segundos, compararam-se as soluções incumbentes obtidas pelos três métodos na altura em que o tempo limite foi atingido. Dessa análise verificou-se que a decomposição por artigo é a que apresenta para um maior número de instâncias as melhores soluções incumbentes.

Depois de efectuada a análise geral dos resultados obtidos na resolução do conjunto das 180 instâncias, fez-se a análise dos resultados atendendo à variação dos quatro parâmetros das instâncias de teste. Nesta fase consideraram-se como medidas de desempenho os tempos médios de resolução do problema inteiro e os GAP's médios de integralidade. Para o cálculo dos GAP's de integralidade consideraram-se as 71 instâncias para as quais se obteve a solução óptima e consideraram-se os três métodos de resolução. Para o cálculo dos tempos médios de resolução apenas se considerou a decomposição por artigo e o Cplex, já que na decomposição por período não se obteve a solução óptima inteira de nenhuma das instâncias. No caso da decomposição por artigo utilizaram-se as 59 instâncias para as quais se obteve a solução óptima e para o Cplex, utilizaram-se as 61 instâncias que são resolvidas até à optimalidade com este método. Os resultados que se apresentam na tabela 3 e na tabela 4 referem-se a esta análise.

Tabela 3: Resultados Computacionais: com Variação de Parâmetros das Instâncias

| | | Decomposição por Artigo | | Formulação Clássica - Cplex | | Decomposição por Período | |
|----------------------------|-------|-------------------------|---------------------------|-----------------------------|---------------------------|--------------------------|---------------------------|
| | | GAP (%) | N.º Instâncias Resolvidas | GAP (%) | N.º Instâncias Resolvidas | GAP (%) | N.º Instâncias Resolvidas |
| Utilização de Capacidade | Baixa | 0.06 | 37 | 33.25 | 37 | 33.18 | 37 |
| | Média | 0.19 | 28 | 29.74 | 28 | 29.58 | 28 |
| | Alta | 0.66 | 6 | 27.38 | 6 | 27.15 | 6 |
| Variabilidade da Procura | Média | 0.05 | 29 | 32.10 | 29 | 32.03 | 29 |
| | Alta | 0.24 | 42 | 30.87 | 42 | 30.71 | 42 |
| Periodicidade de Encomenda | Baixa | 0.15 | 45 | 25.00 | 45 | 24.94 | 45 |
| | Média | 0.19 | 26 | 42.39 | 26 | 42.18 | 26 |
| | Alta | - | 0 | - | 0 | - | 0 |
| Tempo de Preparação | Baixo | 0.11 | 33 | 31.51 | 33 | 31.37 | 33 |
| | Alto | 0.21 | 38 | 31.25 | 38 | 31.14 | 38 |

Da análise da tabela 3 verifica-se que quando a utilização de capacidade é alta, há poucas instâncias que são resolvidas e que à medida que aumenta a utilização de capacidade o GAP quer da decomposição por período quer do Cplex baixa, sendo que em relação à decomposição por artigo à medida que aumenta a utilização de capacidade, também aumenta o GAP. O efeito no GAP, quando se varia a procura e quando se varia o tempo de preparação, não é significativo se se considerar a decomposição por período e o

Cplex. Na decomposição por artigo as diferenças são mais acentuadas, verificando-se que a passagem de um nível para o nível imediatamente superior, leva a um aumento do GAP. Em relação à variação na periodicidade de encomenda, pode dizer-se que à medida que aumenta a periodicidade de encomenda aumenta significativamente a dificuldade do problema, sendo esse aumento mais acentuado para a decomposição por período e para o Cplex. Esta análise só pode ser baseada nas instâncias com periodicidade baixa e média, já que em nenhuma das instâncias com periodicidade alta se conseguiu obter resultados. Por último, salienta-se que relativamente aos GAP's de integralidade em termos gerais o comportamento da decomposição por período e do Cplex é muito idêntico, face às variações nos parâmetros.

Tabela 4: Resultados Computacionais: com Variação de Parâmetros das Instâncias

| | | Decomposição por Artigo | | Formulação Clássica - Cplex | |
|----------------------------|-------|-------------------------|---------------------------|-----------------------------|---------------------------|
| | | Tempo médio (segundos) | N.º Instâncias Resolvidas | Tempo médio (segundos) | N.º Instâncias Resolvidas |
| Utilização de Capacidade | Baixa | 295.69 | 37 | 267.95 | 27 |
| | Média | 526.90 | 22 | 369.97 | 28 |
| | Alta | - | 0 | 197.98 | 6 |
| Variabilidade da Procura | Média | 155.85 | 27 | 214.49 | 22 |
| | Alta | 572.64 | 32 | 360.59 | 39 |
| Periodicidade de Encomenda | Baixa | 171.40 | 40 | 17.81 | 45 |
| | Média | 825.06 | 19 | 1123.79 | 16 |
| | Alta | - | 0 | - | 0 |
| Tempo de Preparação | Baixo | 505.93 | 30 | 450.64 | 28 |
| | Alto | 253.60 | 29 | 186.79 | 33 |

Na análise dos tempos de resolução do problema inteiro, deverá notar-se que os resultados apresentados na tabela 4 não dizem respeito exactamente às mesmas instâncias, pelo que as comparações que se apresentam de seguida poderão estar enviesadas. Idealmente deveriam considerar-se as mesmas instâncias, mas nesse caso a amostra seria relativamente baixa.

Quando a utilização de capacidade é alta, há poucas instâncias que são resolvidas até à optimalidade e quando a periodicidade de encomenda é alta nenhum dos métodos consegue encontrar soluções óptimas inteiras. Verifica-se que os tempos médios de resolução aumentam significativamente quando se passa de uma utilização de capacidade baixa para média, assim como quando se passa da variabilidade da procura média para a alta e quando se passa da periodicidade de encomenda baixa para a média. Em termos gerais o desempenho da decomposição por artigo é idêntico ao do Cplex, sendo de realçar que nas instâncias com variabilidade da procura média e com periodicidade de encomenda média, os tempos médios de resolução são mais baixos na decomposição por artigo comparativamente com os tempos do Cplex.

6 Conclusões

Neste artigo apresentaram-se e compararam-se dois algoritmos de partição e geração de colunas para a obtenção de soluções óptimas inteiras do problema de lotes de produção multi-artigo capacitado com tempos de preparação. Ambos os algoritmos baseiam-se na

aplicação da decomposição de Dantzig-Wolfe a uma formulação de Programação Inteira Mista clássica para o problema. Num deles, os subproblemas estão associados a períodos e, no outro, os subproblemas estão associados aos artigos.

O modelo de decomposição por artigo permite obter intervalos de integralidade muito baixos, o que nos leva a considerar que existiriam vantagens em investir-se no aumento da eficiência deste modelo em abordagens futuras, nomeadamente ao nível do algoritmo de partição e geração de colunas. Certamente os tempos de resolução poderiam ser reduzidos através da implementação do algoritmo de programação dinâmica proposto por Wagner-Whitin, para resolver os subproblemas e através da implementação de heurísticas para a obtenção de soluções admissíveis de melhor qualidade, quer na raiz da árvore de pesquisa quer nos nodos da árvore.

Para a pesquisa de soluções inteiras propôs-se um esquema de partição baseado nas variáveis originais de preparação, no qual se adicionam restrições de partição ao problema mestre, garantindo-se deste modo a preservação da estrutura do subproblema. Este esquema tem a vantagem de ser geral e de poder ser aplicado a qualquer tipo de problema de Programação Inteira ou de Programação Inteira Mista.

Os testes computacionais realizados mostraram que a decomposição por artigo tem um desempenho claramente superior ao da decomposição por período e que entre a decomposição por artigo e a formulação clássica resolvida pelo Cplex a vantagem da decomposição por artigo em termos de intervalos de integralidade é significativa. Já em termos de tempos de resolução ambos os métodos têm um desempenho similar, embora com o Cplex 8.1 se obtenham em média resultados um pouco melhores.

7 Agradecimentos

Este trabalho foi parcialmente financiado pela Fundação para a Ciência e a Tecnologia, através do projecto POSI/SRI/48873/2002 e decorreu no Centro Algoritmi da Universidade do Minho.

8 Referências

- Alvelos, F. (2005) Branch-and-Price and Multicommodity Flows, PhD Thesis, Universidade do Minho.
- Barany, I., Roy, T. J. V. and Wolsey, L. A. (1984) Strong Formulations for Multi-Item Capacitated Lot Sizing, *Management Science*, Vol. 30, No. 10, pp.1255-1261.
- Barnhart, C., Johnson, E. L., Nemhauser, G. L., Savelsbergh, M. W. P. and Vance, P. H. (1998) Branch-and-Price: Column Generation for Solving Huge Integer Programs, *Operations Research*, Vol. 46, No. 3, pp.316-329.
- Belvaux, G. and Wolsey, L. A. (2000) bc-prod: A Specialized Branch-and-Cut System for Lot-Sizing Problems, *Management Science*, Vol. 46, pp.724-738.
- Chen, W. H. and Thizy, J. M. (1990) Analysis of Relaxations for the Multi-Item Capacitated Lot-Sizing Problem, *Annals of Operations Research*, Vol. 26, pp.29-72.
- Dantzig, G. B. and Wolfe, P. (1960) Decomposition Principle for Linear Programs, *Operations Research*, Vol. 8, pp.101-111.
- Diaby, M., Bahl, H. C., Karwan, M. H. and Zionts, S. (1992a) Capacitated Lot-Sizing and Scheduling by Lagrangean Relaxation, *European Journal of Operational Research*, Vol. 59, pp.444-458.

- Diaby, M., Bahl, H. C., Karwan, M. H. and Zionts, S. (1992b) A Lagrangean Relaxation Approach for Very-Large-Scale Capacitated Lot-Sizing, *Management Science*, Vol. 38, No. 9, pp.1329-1340.
- Drexl, A. and Kimms, A. (1997) Lot Sizing and Scheduling - Survey and Extensions, *European Journal of Operational Research*, Vol. 99, pp.221-235.
- Dzielinski, B. P. and Gomory, R. E. (1965) Optimal Programming of Lot Sizes, Inventory and Labor Allocations, *Management Science*, Series A, Vol. 11, No. 9, pp.874-890.
- Eppen, G. D. and Martin, R. K. (1987) Solving Multi-Item Capacitated Lot-Sizing Problems using Variable Redefinition, *Operations Research*, Vol. 35, No. 6, pp.832-848.
- Geoffrion, A. M. (1974) Lagrangean Relaxation for Integer Programming, *Mathematical Programming Study*, Vol. 2, pp.82-114.
- ILOG (2002) CPLEX 8.1, User's Manual.
- Jans, R. (2002) Capacitated Lot Sizing Problems: New Applications, Formulations and Algorithms, PhD Thesis, Katholieke Universiteit.
- Karimi, B., Ghomi, S. and Wilson, J. (2003) The Capacitated Lot Sizing Problem: a Review of Models and Algorithms, *Omega*, Vol. 31, pp.365-378.
- Kuik, R., Salomon, M. and Wassenhove, L. v. (1994) Batching Decisions: Structure and Models, *European Journal of Operational Research*, Vol. 75, pp.243-263.
- Lasdon, L. S. and Terjung, R. C. (1971) An Efficient Algorithm for Multi-Item Scheduling, *Operations Research*, Vol. 19, No. 4, pp.946-969.
- Manne, A. S. (1958) Programming of Economic Lot Sizes, *Management Science*, Vol. 4, No. 2, pp.115-135.
- Merle, O. d., Goffin, J.-L., Trouiller, C. and Vial, J.-P. (1999) A Lagrangian Relaxation of the Capacitated Multi-Item Lot Sizing Problem Solved with an Interior Point Cutting Plane Algorithm, *Approximation and Complexity in Numerical Optimization: Continuous and Discrete Problems*, Pardalos, P. M. (eds.), Kluwer Academic Publishers.
- Miller, A. J., Nemhauser, G. L. and Savelsbergh, M. W. P. (2000) Solving Multi-Item Capacitated Lot-Sizing Problems with Setup Times by Branch-and-Cut, Technical report CORE Discussion Paper 2000/39.
- Perrot, N. and Vanderbeck, F. (2004) Knapsack Problems with Setups, Technical report U-04.03.
- Pochet, Y. (2001) Mathematical Programming Models and Formulations for Deterministic Production Planning Problems, *Computational Combinatorial Optimization*, Jünger, M. and D. Naddef (eds.), Springer-Verlag.
- Pochet, Y. and Wolsey, L. A. (1991) Solving Multi-Item Lot-Sizing Problems using Strong Cutting Planes, *Management Science*, Vol. 37, pp.53-67.
- Thizy, J. M. and Wassenhove, L. N. V. (1985) Lagrangean Relaxation for the Multi-Item Capacitated Lot Sizing Problem: a Heuristic Implementation, *IIE Transactions*, Vol. 17, pp.308-313.
- Trigeiro, W. W., Thomas, L. J. and McClain, J. O. (1989) Capacitated Lot Sizing with Setup Times, *Management Science*, Vol. 35, No. 3, pp.353-366.
- Wagner, H. and Whitin, T. (1958) Dynamic Version of the Economic Lot Size Model, *Management Science*, Vol. 5, No. 1, pp. 89-96.

Optimização da Exploração de Recursos Térmicos considerando a Restrição de Emissões

João Catalão †
Sílvio Mariano †
Victor Mendes ‡
Luís Ferreira §

† Departamento de Engenharia Electromecânica
UBI – Universidade da Beira Interior
catalao@ubi.pt
sm@ubi.pt

‡ Departamento de Engenharia Electrotécnica e Automação
ISEL – Instituto Superior de Engenharia de Lisboa
vfmendes@isел.pt

§ Departamento de Engenharia Electrotécnica e de Computadores
IST – Instituto Superior Técnico
lmf@ist.utl.pt

Abstract

This paper focuses on the optimal scheduling of thermal power systems. A new methodology based on multiobjective optimisation is proposed for solving the problem considering emission constraints. The numerical results obtained for a case study illustrate the behaviour of the new methodology proposed.

Resumo

Neste artigo é enunciado e descrito o problema de optimização da exploração de recursos térmicos. Uma nova metodologia baseada em optimização multiobjectivo é proposta para a resolução deste problema tendo em consideração a restrição de emissões. Apresentam-se os resultados numéricos obtidos para um caso de estudo e conclui-se sobre o desempenho da nova metodologia proposta.

Keywords: Optimal scheduling, multiobjective optimisation, emission constraints

Title: Optimal scheduling of thermal power systems considering emission constraints.

1 Introdução

Um sistema de produção de energia eléctrica é um sistema complexo e de grande dimensão. O objectivo tradicional deste sistema consiste em satisfazer a procura de energia eléctrica de forma racional, permitindo o bom aproveitamento dos recursos energéticos disponíveis para a produção de energia eléctrica. Para satisfazer a procura de energia eléctrica dispõe-se tipicamente, para além da produção em regime especial, de dois tipos de recursos energéticos: recursos hídricos e recursos térmicos (Catalão, 2006).

Na sua grande maioria, os melhores aproveitamentos hidroeléctricos com viabilidade de exploração, em termos de potência instalada, já se encontram instalados na generalidade dos países desenvolvidos. Este facto tem sido uma das razões que levou a que a cobertura do aumento da procura de energia eléctrica tenha sido realizada, em escala considerável, pela construção de centrais térmicas.

As centrais térmicas podem ser instaladas estrategicamente em zonas bem localizadas relativamente à posição dos centros de consumo, apresentando, dentro das suas capacidades, uma continuidade de serviço em produção que não necessita de ser condicionada como no caso das centrais hídricas, exceptuando as centrais térmicas que têm restrições na quantidade de combustível disponível durante o horizonte temporal.

Contudo, em contraste com as centrais hídricas, as centrais térmicas podem prejudicar acentuadamente o ambiente pela emissão de Gases com Efeito de Estufa (GEE). Estes prejuízos sobre o ambiente são visíveis tanto a nível local como a nível global: disto é exemplo o efeito de estufa atribuído às emissões poluentes para a atmosfera que a queima de combustíveis fósseis pode ocasionar (Bellhouse and Whittington, 1996).

Relativamente à produção hidroeléctrica, existe um custo de operação associado à produção termoeléctrica devido ao custo de combustível utilizado na conversão energética. Ainda, para a produção termoeléctrica existe a necessidade de tomar decisões de natureza discreta, de afectar ou não uma unidade, existindo um custo por gasto de combustível no arranque que depende, no caso das unidades com turbinas a vapor, do tempo de paragem anterior e do facto de se manterem ou não as caldeiras em actividade durante esse tempo de paragem. Quanto maior é o tempo de paragem, maiores são as perdas energéticas no conjunto caldeira-turbina.

A integração da vertente ambiental na política energética, em particular no sector eléctrico, é revestida de importância relevante na actualidade. A energia eléctrica em si é uma energia limpa, no entanto tem associado à sua produção impactes ambientais. As preocupações ambientais que se manifestaram a nível político desde 1972, na primeira Cimeira da Terra realizada em Estocolmo, Suécia, conduziram a estâncias internacionais de debate sobre o meio ambiente no sentido da sua preservação. Assim, em 1992 foi adoptada a Convenção-Quadro das Nações Unidas para as Alterações Climáticas, no decurso da segunda Cimeira da Terra realizada no Rio de Janeiro, Brasil, visando a limitação das emissões de GEE na atmosfera. Posteriormente, em 1997 foi estabelecido o Protocolo de Quioto que formaliza o compromisso dos países industrializados na redução das emissões de GEE.

O Protocolo de Quioto estabelece que as emissões para os países considerados desenvolvidos devem ser reduzidas em 5%, de 2008 a 2012, comparativamente às emissões em 1990, ano de referência. Em concreto, a União Europeia e os seus Estados-membros em conjunto têm o compromisso de redução das emissões de GEE em 8%. Os objectivos de limitação das emissões foram estabelecidos para cada um dos Estados-membros de acordo com as suas especificidades, como por exemplo, o

desenvolvimento económico e os recursos energéticos disponíveis. Portugal tem como meta limitar o aumento das emissões de GEE em 27%, comparativamente aos valores de 1990, meta que actualmente já foi ultrapassada.

O Protocolo de Quioto entrou finalmente em vigor a 16 de Fevereiro de 2005, mais de sete anos após ter sido assinado. A ratificação do acordo pela Federação Russa pôs fim a um longo período de incerteza e cumpriu a última etapa burocrática para que o Protocolo de Quioto passasse finalmente à prática, apesar da recusa dos Estados Unidos da América em ratificá-lo. A entrada em vigor do Protocolo de Quioto obriga à observação de regras estritas para o sector eléctrico, promovendo uma crescente pressão no sentido da internalização dos custos provenientes das emissões de GEE que a queima de combustíveis fósseis pode ocasionar.

Assim, a consideração de novas restrições de âmbito ambiental, em conjunto com as preocupações de cariz económico, é uma necessidade premente para as empresas produtoras de energia eléctrica na exploração dos recursos térmicos disponíveis.

A restrição de emissões tem sido considerada principalmente no problema de despacho económico, onde existe um número considerável de referências bibliográficas recentes (Abido, 2003; Chen and Huang, 2004; Chiang et al., 2005; Dhillon and Kothari, 2000; Hota and Dash, 2004; Muslu, 2004). O problema de despacho económico visa determinar unicamente a produção de energia eléctrica atribuída a cada unidade em serviço. Este problema não decide sobre quais as unidades que devem entrar em produção e quando, i.e., afectadas.

O problema de afectação de unidades visa estabelecer um mapa de operações factível para cada unidade disponível num sistema de produção de energia eléctrica, durante o horizonte temporal considerado, de forma a satisfazer as restrições impostas pelo sistema. Este problema, numa hierarquia decrescente dos prazos, está localizado imediatamente depois do planeamento de médio prazo e antes do problema de despacho económico, pelo que também se denomina de pré-despacho.

Diversas metodologias têm sido propostas na procura da solução óptima para o problema de optimização da exploração de recursos térmicos, nomeadamente para o problema de afectação de unidades (Padhy, 2004). O problema pode ser tipicamente abordado fazendo uso de duas metodologias: programação dinâmica e relaxação Lagrangeana.

A programação dinâmica foi uma das primeiras metodologias utilizadas para a resolução do problema de afectação de unidades (Snyder et al., 1987). A utilização da programação dinâmica permite abordar problemas não convexos e não lineares, assegurando a obtenção da solução óptima. A desvantagem da utilização da programação dinâmica advém da necessidade de se proceder a uma discretização, sendo exigente em termos de capacidade de memória e tempo de computação. Esta desvantagem evolui de forma exponencial com a dimensão do problema, o que constitui a denominada maldição da dimensionalidade associada à programação dinâmica. A aplicação de heurísticas à programação dinâmica permite reduzir o tempo de computação, deixando contudo de assegurar a obtenção da solução óptima. Portanto, a utilização da programação dinâmica só é possível para sistemas termoeléctricos de reduzida dimensão.

Para sistemas termoeléctricos de dimensão considerável é usada a metodologia baseada na relaxação Lagrangeana (Ferreira et al., 1989). A vantagem mais relevante que resulta da utilização desta metodologia reside na decomposição do problema em subproblemas. Assim, a afectação de unidades é obtida pela resolução dos subproblemas associados a cada uma das unidades, sendo as unidades optimizadas individualmente. O termo relaxação está relacionado com o princípio básico da metodologia baseada na

relaxação Lagrangeana, que consiste em ignorar as restrições do tipo global e penalizar a sua violação na função objectivo de forma linear recorrendo a multiplicadores, denominados de multiplicadores de Lagrange. A metodologia baseada na relaxação Lagrangeana não apresenta a desvantagem da maldição da dimensionalidade típica da programação dinâmica, visto que, as exigências em termos de capacidade de memória e tempo de computação evoluem em proporcionalidade directa com a dimensão do problema.

Para o problema de afectação de unidades as referências respeitantes à consideração da restrição de emissões são em número menos significativo e menos recentes (Abdul-Rahman et al., 1996; Gjengedal, 1996; Kuloor et al., 1992). Contudo, se não é considerada a restrição de emissões no problema de afectação de unidades, uma unidade de custo reduzido, mas excessivamente poluente, pode ser privilegiada na afectação.

A União Europeia, como forma de garantir o cumprimento dos compromissos assumidos no âmbito do Protocolo de Quioto, aprovou a Directiva 2003/87/CE de 13 de Outubro de 2003 que cria o mecanismo de Comércio Europeu de Licenças de Emissão. A criação deste mecanismo, que estabelece um tecto de emissões de GEE para um conjunto de sectores industriais e instalações dependendo do tipo de actividade e da sua dimensão, renovou o interesse na consideração da restrição de emissões no problema de afectação de unidades (Catalão et al., 2005; Mendes et al., 2004).

Neste artigo é enunciado e descrito o problema de optimização da exploração de recursos térmicos. Uma nova metodologia baseada em optimização multiobjectivo é proposta para a resolução deste problema tendo em consideração a restrição de emissões. Apresentam-se os resultados numéricos obtidos para um caso de estudo e conclui-se sobre o desempenho da nova metodologia proposta.

2 Formulação do Problema

A notação usada neste artigo para a formulação do problema é apresentada seguidamente:

- k — índice da hora;
- i — índice do recurso;
- m — índice do tipo de reserva;
- n — índice da restrição cumulativa;
- K — número total de horas;
- I — número total de recursos;
- M — número do tipo de reservas consideradas;
- N — número de restrições cumulativas;
- x_{ik} — variável de estado para o recurso i na hora k ;
- p_{ik} — variável correspondente à potência entregue pelo recurso i na hora k ;
- u_{ik} — variável de controlo ou de decisão para o recurso i na hora k ;
- D_k — potência determinada pela procura de energia eléctrica na hora k ;
- R_{mk}^{req} — limite inferior da restrição de capacidade do sistema tipo- m na hora k ;
- H_n^{req} — limite superior da restrição cumulativa tipo- n ;
- X_i^0 — conjunto dos estados iniciais do recurso i ;
- X_i^K — conjunto dos estados finais do recurso i ;
- p_i^{min} — potência mínima entregue pelo recurso i em funcionamento;
- p_i^{max} — potência máxima entregue pelo recurso i em funcionamento;

- C_{ik} — função de custo associada com a afectação do recurso i na hora k ;
- R_{mi} — função que determina a contribuição do recurso i para a restrição de capacidade do sistema tipo- m ;
- H_{ni} — função que determina a contribuição do recurso i para a restrição cumulativa tipo- n ;
- A_{ik} — função de estado associada a cada recurso i na hora k ;
- P_{ik} — função de despacho associada a cada recurso i na hora k ;
- E_{ik} — função de emissão associada com a afectação do recurso i na hora k ;
- x — vector das variáveis de estado;
- p — vector das variáveis contínuas de decisão;
- u — vector das variáveis discretas de decisão;
- \mathcal{F}_{ik} — conjunto das decisões admissíveis para o recurso i na hora k ;
- \mathcal{H}_n — conjunto dos índices dos recursos com restrições cumulativas tipo- n ;
- \mathcal{U}_{ik} — conjunto das variáveis de controlo admissíveis para o recurso i na hora k ;
- \mathcal{P}_{ik} — conjunto das potências admissíveis para o recurso i na hora k ;
- O — conjunto de soluções não dominadas.

O problema de optimização da exploração de recursos térmicos visa estabelecer um mapa de operações factível para cada unidade disponível num sistema de produção de energia eléctrica, durante o horizonte temporal considerado, de forma a satisfazer as restrições impostas pelo sistema. A forma de resolução deste problema consiste na minimização do custo total de operação durante o horizonte temporal de uma semana, sendo o mapa de operações estabelecido com a periodicidade de uma hora.

O problema de optimização da exploração de recursos térmicos corresponde neste artigo a um problema de optimização multiobjectivo. As funções objectivo a serem minimizadas simultaneamente são dadas por:

$$f(x, p, u) = \sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^I C_{ik}(x_{i,k-1}, p_{ik}, u_{ik}) \tag{1}$$

$$g(x, p, u) = \sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^I E_{ik}(x_{i,k-1}, p_{ik}, u_{ik}) \tag{2}$$

A função objectivo em (1) é o custo total de operação, i.e., o custo de operação de todos os recursos durante todas as horas do horizonte temporal. O facto dos termos individualizados serem sempre não negativos implica que o custo total de operação é uma função separável e monótona não decrescente relativamente a cada um dos termos. Este facto garante as condições relativas às propriedades, necessárias e suficientes, que a função objectivo deve possuir para que se possa utilizar a programação dinâmica.

A função de custo C_{ik} considerada corresponde ao custo de combustível associado: à quantidade de energia eléctrica obtida na conversão energética C_{ik}^{op} ; ao gasto de combustível no arranque C_{ik}^{arr} . No caso das unidades com turbinas a vapor, o custo de arranque depende do tempo de paragem anterior e do facto de se manterem ou não as caldeiras em actividade durante esse tempo de paragem. No caso das unidades com turbinas a gás, o custo de arranque é considerado constante.

O custo de combustível na conversão energética pode ser aproximado por um desenvolvimento em série de Taylor até à segunda ordem:

$$C_{ik}^{\text{op}}(p_{ik}, u_{ik}) = (\alpha_i + \beta_i p_{ik} + \gamma_i p_{ik}^2) u_{ik} \quad i \in I \quad k \in K \quad (3)$$

em que α_i , β_i e γ_i são os parâmetros que determinam o custo de combustível na conversão energética para a unidade i .

A função objectivo em (2) é a emissão total na operação, i.e., a emissão proveniente da operação de todos os recursos durante todas as horas do horizonte temporal.

A função de emissão E_{ik} considerada é determinada: pela emissão na conversão energética E_{ik}^{op} ; pela emissão durante o arranque E_{ik}^{arr} . A emissão durante o arranque é função do gasto de combustível nesse arranque.

A emissão na conversão energética pode também ser aproximada por um desenvolvimento em série de Taylor até à segunda ordem:

$$E_{ik}^{\text{op}}(p_{ik}, u_{ik}) = (a_i + b_i p_{ik} + c_i p_{ik}^2) u_{ik} \quad i \in I \quad k \in K \quad (4)$$

em que a_i , b_i e c_i são os parâmetros que determinam a emissão na conversão energética para a unidade i .

O problema de optimização da exploração de recursos térmicos é sujeito a restrições do tipo global e restrições do tipo local, que definem o conjunto das decisões admissíveis. As seguintes restrições descrevem as limitações de exploração associadas aos recursos:

$$\sum_{i=1}^I p_{ik} = D_k \quad k \in K \quad (5)$$

$$\sum_{i=1}^I R_{mi}(x_{ik}, p_{ik}) \geq R_{mk}^{\text{req}} \quad m \in M \quad k \in K \quad (6)$$

$$\sum_{k=1}^K \sum_{i \in \mathcal{H}_n} H_{ni}(x_{i,k-1}, p_{ik}, u_{ik}) \leq H_n^{\text{req}} \quad n \in N \quad (7)$$

em que:

$$(x_{ik}, p_{ik}) = A_{ik}(x_{i,k-1}, u_{ik}) \quad i \in I \quad k \in K \quad (8)$$

com:

$$x_{i0} \in X_i^0 \quad x_{iK} \in X_i^K \quad u_{ik} \in \mathcal{U}_{ik} \quad p_{ik} \in \mathcal{P}_{ik} \quad (9)$$

Em (5) é apresentada a restrição que descreve a satisfação da procura de energia eléctrica em cada hora k , que determina a potência D_k , sem consideração das perdas por efeito de Joule nas linhas de transporte de energia eléctrica. Esta restrição é do tipo global, visto que, todos os recursos podem ser envolvidos na sua satisfação.

Em (6) são apresentadas as restrições de capacidade do sistema em cada hora k . Estas restrições são do tipo global, visto que, existe por hipótese um determinado

conjunto de recursos envolvido na sua satisfação. A capacidade é definida como sendo a reserva mais a produção.

Em (7) são apresentadas as restrições cumulativas durante o horizonte temporal. Estas restrições são do tipo global, visto que, existe por hipótese um determinado conjunto de recursos envolvido na sua satisfação. Limitações nas quantidades de combustível disponíveis ou limitações nas emissões de GEE, relativamente a um conjunto de recursos durante o horizonte temporal, constituem exemplos de restrições cumulativas.

Em (8) são apresentadas as restrições operativas individualizadas para cada recurso, i.e., restrições do tipo local. A função A_{ik} é a função de estado associada a cada recurso i na hora k . Assim, o estado de cada recurso x_{ik} e a potência entregue p_{ik} são determinados pelo estado anterior $x_{i,k-1}$ e pela decisão u_{ik} . A função de despacho P_{ik} faz a correspondência que associa à variável de estado x_{ik} , e à variável de controlo u_{ik} , a variável p_{ik} em todo o seu domínio: $p_{ik} = P_{ik}(x_{ik}, u_{ik})$. A equação (8) pode apresentar dependência relativamente a cada hora, de forma a englobar o carácter dinâmico de alguns recursos.

3 Problema de Optimização Multiobjectivo

O problema que consiste em otimizar simultaneamente um conjunto não singular de funções objectivo é denominado de problema de optimização multiobjectivo (Miettinen, 1999).

O problema de optimização multiobjectivo considerado neste artigo é formulado por:

$$\text{Min } \{f(x, p, u), g(x, p, u)\} \tag{10}$$

sujeito a:

$$(x, p, u) \in F \tag{11}$$

As funções objectivo consideradas são de natureza conflitua, visto que, podem existir soluções admissíveis que não minimizem simultaneamente as funções objectivo, sendo contudo possível identificar soluções que definem compromissos entre as funções objectivo — soluções não dominadas, não inferiores ou óptimas-Pareto.

Uma dada solução admissível é não dominada se e só se não existe outra solução admissível que melhore simultaneamente todas as funções objectivo, i.e. a melhoria num objectivo só pode ser alcançada à custa da degradação do valor do outro objectivo (Pires et al., 2004).

Uma das metodologias utilizadas para a obtenção das soluções não dominadas recorre à soma ponderada das funções objectivo, dada por:

$$h(x, p, u) = w f(x, p, u) + (1 - w) \xi g(x, p, u) \tag{12}$$

em que ξ é o factor de escala para as emissões, em unidade económica por unidade de emissão, e w é o factor de ponderação que determina a combinação convexa em (12), cujo valor tem que satisfazer a relação $0 \leq w \leq 1$ de acordo com a metodologia da soma ponderada das funções objectivo.

A curva determinada pelas soluções não dominadas é denominada de curva de compromisso, ou curva de Pareto.

Após a obtenção do conjunto de soluções não dominadas, graficamente ilustrado pela curva de Pareto, é determinada a variação do decréscimo percentual na emissão total com o incremento percentual no custo total, o que permite escolher uma solução de compromisso.

Cada solução não dominada, identificada pelo índice o , é caracterizada por um custo total e por uma emissão total. Esta solução pertence ao conjunto de soluções não dominadas O , e representa um mapa de operações factíveis, durante o horizonte temporal considerado. O incremento percentual no custo total para cada solução não dominada, relativamente ao custo total mínimo, é dado por:

$$f_{\%}(x^o, p^o, u^o) = \frac{f(x^o, p^o, u^o) - f^{\min}}{f^{\min}} \times 100\% \quad (13)$$

O decréscimo percentual na emissão total para cada solução não dominada, relativamente à emissão verificada para o custo total mínimo, é dado por:

$$g_{\%}(x^o, p^o, u^o) = \frac{g^{\max} - g(x^o, p^o, u^o)}{g^{\max}} \times 100\% \quad (14)$$

Seja definido o parâmetro — taxa de variação ζ — para cada solução não dominada o , relativamente à solução não dominada anterior $o-1$, dado por:

$$\zeta^o = \frac{g_{\%}(x^o, p^o, u^o) - g_{\%}(x^{o-1}, p^{o-1}, u^{o-1})}{f_{\%}(x^o, p^o, u^o) - f_{\%}(x^{o-1}, p^{o-1}, u^{o-1})} \times \frac{f_{\%}^{\max}}{g_{\%}^{\max}} \quad (15)$$

que determina a variação do decréscimo percentual na emissão total com o incremento percentual no custo total, comparativamente à variação máxima.

A esta taxa de variação corresponde um ângulo de declive θ , dado por:

$$\theta^o = \tan^{-1}(\zeta^o) \quad (16)$$

O novo parâmetro, taxa de variação, e o correspondente ângulo de declive possibilitam a escolha apropriada da melhor solução de compromisso entre a solução correspondente ao custo total mínimo e a solução correspondente à emissão total mínima.

O ângulo de declive θ é uma função monótona crescente com o factor de ponderação w , que varia entre 0 e 1. Por um lado, se o ângulo de declive θ é reduzido, o decréscimo percentual na emissão total é inferior ao incremento percentual no custo total. Por outro lado, se o ângulo de declive θ é elevado, o decréscimo percentual na emissão total é superior ao incremento percentual no custo total.

4 Caso de Estudo

O caso de estudo é constituído por um sistema termoeléctrico com onze unidades, descrito na tabela 1, sendo o horizonte temporal de 168 horas. Este sistema termoeléctrico corresponde a um sistema real com dimensão apropriada a abordar o

problema primal de forma directa através da programação dinâmica, assegurando a obtenção da solução óptima.

Tabela 1: Parâmetros das unidades, custos de arranque e restrições de potência

| Unidade i | α_i | β_i | γ_i | a_i | b_i | c_i | C_i^{arr} | p_i^{min} | p_i^{max} |
|-------------|------------|-----------|------------|-------|-------|-------|-------------|-------------|-------------|
| 1 | 1675 | 18.78 | 0.013 | 25.80 | -0.52 | 0.007 | 3350 | 60 | 300 |
| 2 | 1207 | 18.96 | 0.018 | 26.90 | -0.54 | 0.007 | 2415 | 60 | 300 |
| 3 | 2277 | 19.71 | 0.010 | 30.10 | -0.49 | 0.004 | 4553 | 50 | 500 |
| 4 | 2292 | 20.84 | 0.010 | 25.30 | -0.56 | 0.004 | 4584 | 50 | 500 |
| 5 | 2239 | 21.02 | 0.009 | 30.10 | -0.39 | 0.004 | 4479 | 50 | 460 |
| 6 | 2516 | 19.78 | 0.012 | 25.30 | -0.53 | 0.004 | 5032 | 50 | 500 |
| 7 | 1895 | 20.86 | 0.019 | 23.90 | -0.40 | 0.008 | 3789 | 20 | 215 |
| 8 | 1860 | 22.00 | 0.015 | 23.90 | -0.40 | 0.008 | 3720 | 20 | 210 |
| 9 | 1410 | 20.39 | 0.049 | 31.60 | -0.63 | 0.004 | 2821 | 20 | 250 |
| 10 | 1270 | 17.92 | 0.077 | 34.30 | -0.68 | 0.004 | 2539 | 20 | 250 |
| 11 | 1469 | 19.71 | 0.077 | 22.90 | -0.64 | 0.005 | 2937 | 20 | 210 |

O perfil da procura de energia eléctrica é apresentado na figura 1.

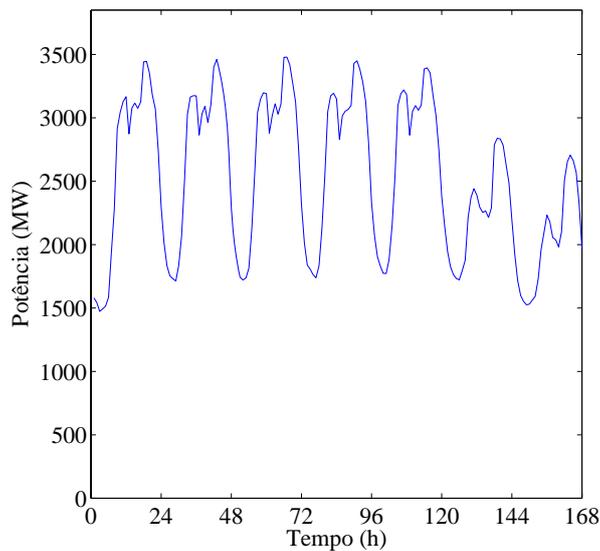


Figura 1: Perfil da procura de energia eléctrica

A nova metodologia proposta foi implementada num computador com processador a 1.6-GHz e 512 MB de RAM, usando linguagem Fortran. Inicialmente, a afectação de unidades é realizada considerando para função objectivo só o custo total ou só a emissão total, i.e., são realizadas duas optimizações para se determinarem as soluções extremas da curva de Pareto: solução correspondente ao custo total mínimo; solução correspondente à emissão total mínima. Posteriormente, o custo total e a emissão total são considerados simultaneamente através da metodologia da soma ponderada das funções objectivo apresentada anteriormente.

A produção horária total para as unidades 1 a 6 e para as unidades 7 a 11 é apresentada, respectivamente, na figura 2 e na figura 3. Neste caso de estudo, as unidades 1 a 6 têm custos mais favoráveis, mas são menos favoráveis relativamente às emissões, comparando com as unidades 7 a 11. Assim, na figura 2 a potência horária total é mais elevada na solução correspondente ao custo total mínimo, enquanto que na figura 3 a potência horária total é mais elevada na solução correspondente à emissão total mínima.

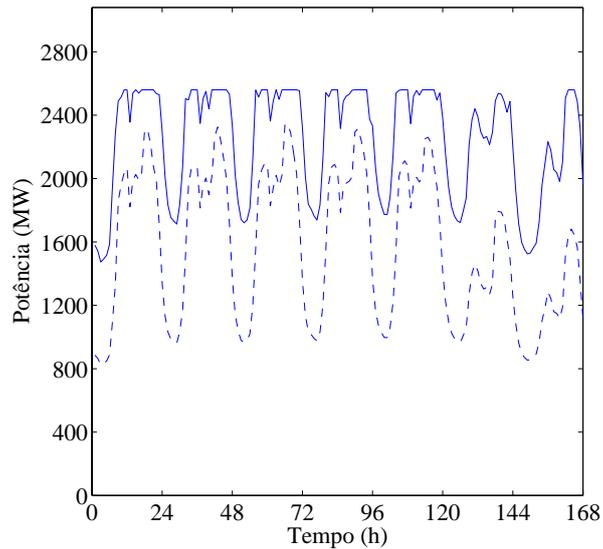


Figura 2: Produção horária total para as unidades 1 a 6; as linhas a traço contínuo e as linhas a traço interrompido representam, respectivamente, a solução correspondente ao custo total mínimo e a solução correspondente à emissão total mínima

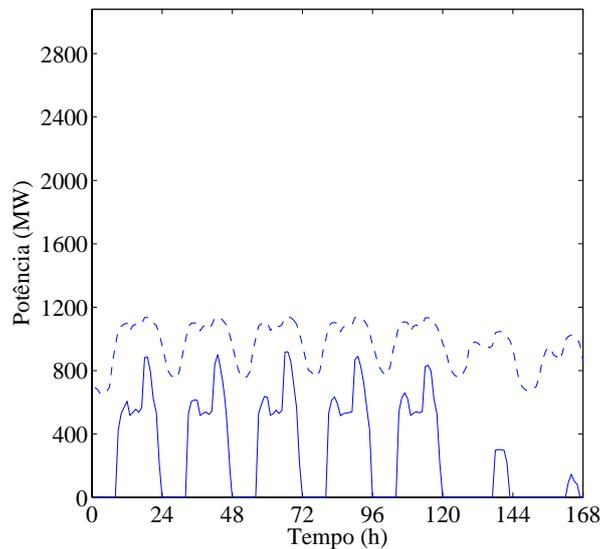


Figura 3: Produção horária total para as unidades 7 a 11; as linhas a traço contínuo e as linhas a traço interrompido representam, respectivamente, a solução correspondente ao custo total mínimo e a solução correspondente à emissão total mínima

Na solução correspondente ao custo total mínimo, as unidades 1 a 6 são afectadas à potência máxima nas horas de ponta, visto que, apresentam menores custos. As unidades 7 a 11 não são afectadas nas horas de vazio, visto que, apresentam maiores custos. Assim, a afectação de unidades segue o perfil da procura de energia eléctrica. Contudo, se os custos de arranque forem aumentados pode existir uma maior tendência para não ligar as unidades e, uma vez ligadas, para não as desligar. A afectação de unidades para o custo total mínimo é apresentada na figura 4.

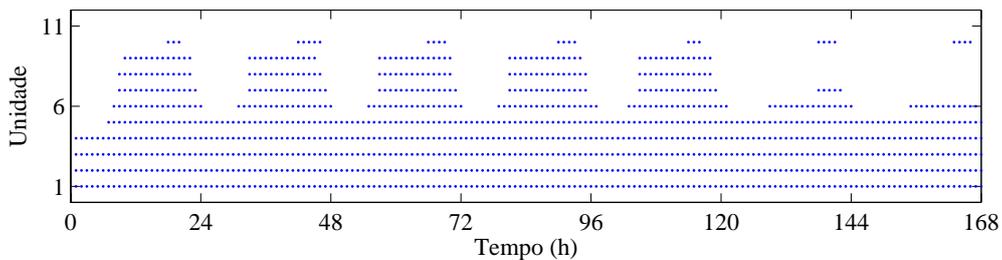


Figura 4: Afectação de unidades para o custo total mínimo; na figura é assinalada com ‘.’ a decisão de afectar a unidade à produção

Na solução correspondente à emissão total mínima, as unidades 1 a 6 são afectadas a potência inferior de forma a minimizar a emissão total, pelo que estas unidades operam em pontos de menor eficiência, sendo expectável um custo total superior. Assim, todas as unidades são afectadas de forma a satisfazer a procura de energia eléctrica. A afectação de unidades para a emissão total mínima é apresentada na figura 5.

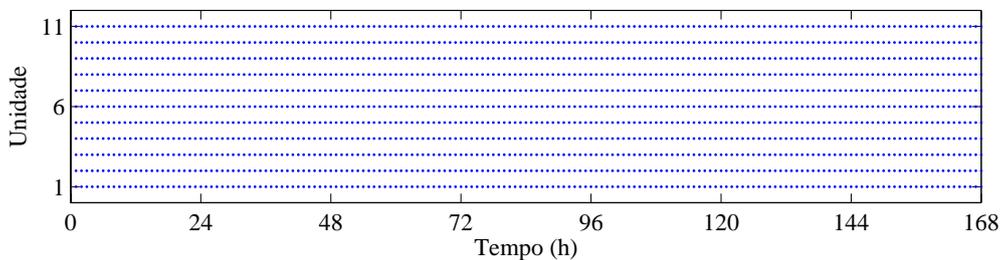


Figura 5: Afectação de unidades para a emissão total mínima; na figura é assinalada com ‘.’ a decisão de afectar a unidade à produção

Nas figuras 6 a 9 são apresentadas as soluções não dominadas da curva de Pareto para o factor de escala $\xi = \{7, 14, 21, 28\}$. Este factor de escala pode corresponder ao preço da licença de emissão de CO₂ para a atmosfera, sendo este preço fornecido pelo mercado de emissões. Assim, são apresentados quatro cenários possíveis para o factor de escala.

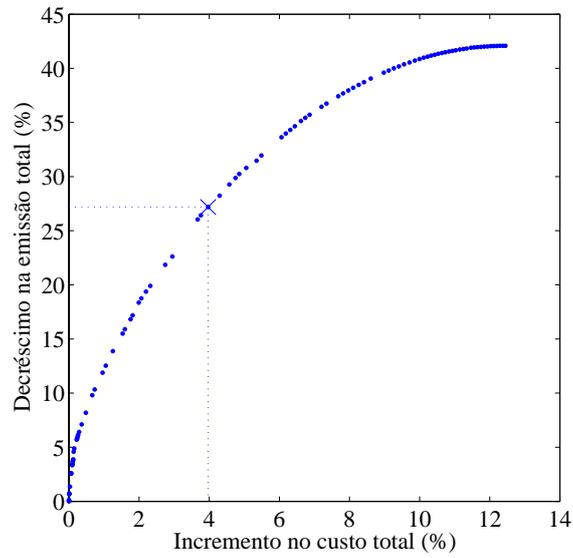


Figura 6: Soluções não dominadas da curva de Pareto para $\xi = 7$; na figura é assinalada com 'x' a solução de compromisso para $\zeta = 1$

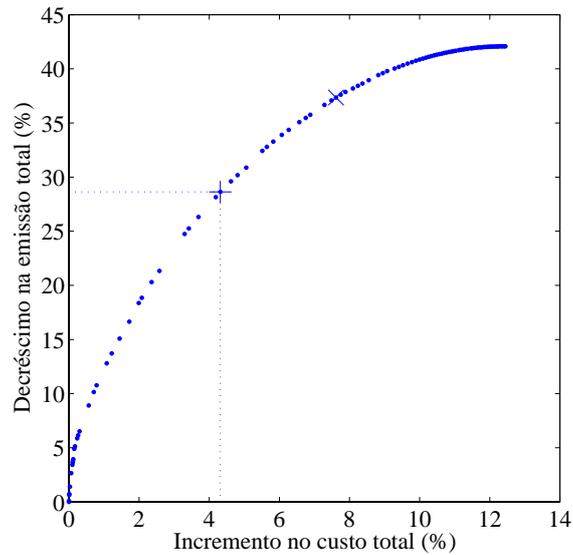


Figura 7: Soluções não dominadas da curva de Pareto para $\xi = 14$; na figura é assinalada com '+' a solução de compromisso para $\zeta = 1$

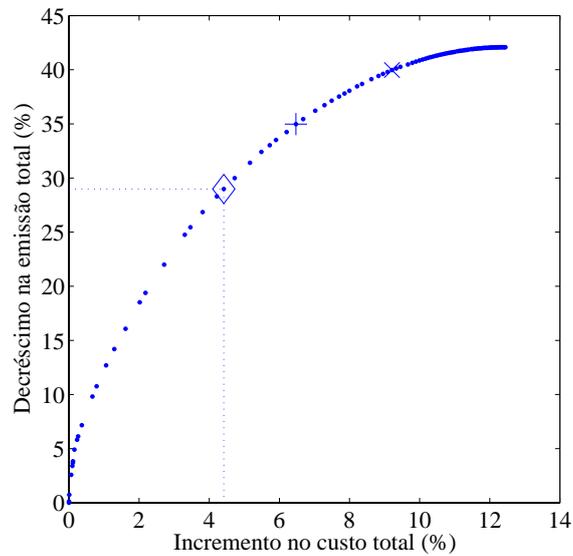


Figura 8: Soluções não dominadas da curva de Pareto para $\xi = 21$; na figura é assinalada com ‘◊’ a solução de compromisso para $\zeta = 1$

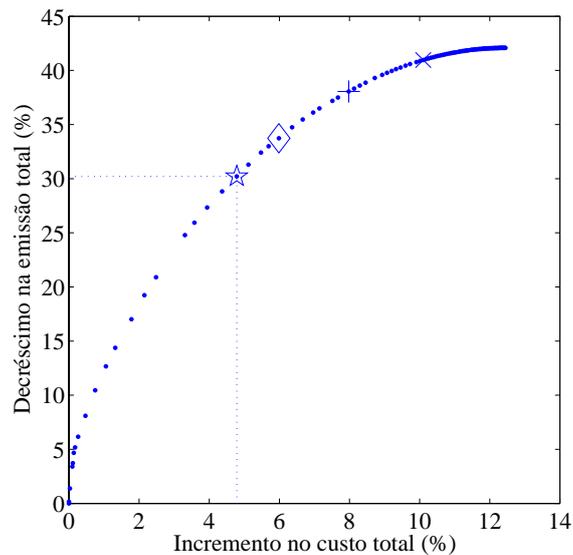


Figura 9: Soluções não dominadas da curva de Pareto para $\xi = 28$; na figura é assinalada com ‘*’ a solução de compromisso para $\zeta = 1$

A curva de Pareto representa um compromisso entre o custo total e a emissão total. Cada uma das 101 soluções não dominadas, apresentadas em consequência da variação do factor de ponderação w entre 0 e 1 com incrementos de 0.01, corresponde a uma afectação de unidades para o horizonte temporal de 168 horas. Esta curva apresenta um ângulo de declive θ cerca de 90° para um factor de ponderação w cerca de 1, pelo que a solução se encontra próxima da solução correspondente ao custo total mínimo. Assim, por exemplo, para um incremento no custo total de 2.0% é obtido um decréscimo na

emissão total de 16.5%. A curva apresenta um ângulo de declive θ cerca de 0° para um factor de ponderação w cerca de 0, pelo que a solução se encontra próxima da solução correspondente à emissão total mínima. Assim, por exemplo, para o mesmo incremento no custo total de 2.0% é obtido apenas um decréscimo na emissão total de 0.9%. Em termos globais, para um incremento no custo total de 12.4% é obtido um decréscimo na emissão total de 42.1%.

As quatro curvas apresentadas permitem ilustrar a variação na distribuição das soluções não dominadas, ao longo da curva de Pareto, em função do factor de escala ξ . O factor de escala aumenta a preponderância da função objectivo emissão total comparativamente à função objectivo custo total, pelo que tende a aumentar o número de soluções não dominadas próximo da solução correspondente à emissão total mínima.

Na tabela 2 são apresentados os resultados comparativos para a afectação de unidades. Assim, à medida que o factor de escala ξ aumenta, a melhor solução de compromisso aproxima-se da solução correspondente à emissão total mínima.

Tabela 2: Resultados comparativos para a afectação de unidades

| Afectação de unidades | Factor de escala | Custo total (\$) | Energia total (MWh) | Emissão total (Mg) |
|----------------------------------|------------------|------------------|---------------------|--------------------|
| Custo total mínimo $w = 1$ | - | 12 994 446 | 425 508 | 601 229 |
| Emissão total mínima $w = 0$ | - | 14 611 950 | 425 508 | 348 237 |
| Melhor solução de compromisso | $\xi = 7$ | 13 510 222 | 425 508 | 437 812 |
| | $\xi = 14$ | 13 555 299 | 425 508 | 429 086 |
| | $\xi = 21$ | 13 568 139 | 425 508 | 426 994 |
| | $\xi = 28$ | 13 589 192 | 425 508 | 423 791 |

O tempo de computação requerido pela nova metodologia proposta é de 270s, correspondendo em média a 2.67s para cada solução não dominada.

5 Conclusões

Perante os novos compromissos internacionais estabelecidos pelo Protocolo de Quioto, os custos provenientes das emissões de GEE devem ser internalizados. Assim, o problema de optimização da exploração de recursos térmicos deve ter em consideração simultaneamente o objectivo económico e o objectivo ambiental.

A resolução deste problema foi obtida através de uma nova metodologia baseada em optimização multiobjectivo, que tem em consideração o conflito entre os objectivos considerados no sentido de suportar a decisão da afectação de unidades em mercado de emissões. A melhor solução de compromisso, entre a solução correspondente ao custo total mínimo e a solução correspondente à emissão total mínima, foi determinada em função de um novo parâmetro apresentado, taxa de variação, e do correspondente ângulo de declive.

Os resultados numéricos confirmam o bom desempenho da nova metodologia proposta, visto que, fornece a curva de Pareto e a melhor solução de compromisso, do conjunto de soluções não dominadas, com um tempo de computação reduzido.

6 Referências

- Abdul-Rahman, K. H., Shahidehpour, S. M., Aganagic, M., and Mokhtari, S. (1996) A Practical Resource Scheduling with OPF Constraints, *IEEE Transactions on Power Systems*, Vol. 11, No. 1, pp. 254-259.
- Abido, M. A. (2003) Environmental/Economic Power Dispatch using Multiobjective Evolutionary Algorithms, *IEEE Transactions on Power Systems*, Vol. 18, No. 4, pp. 1529-1537.
- Bellhouse, G. M. and Whittington, H. W. (1996) Simulation of Gaseous Emissions from Electricity Generating Plant, *International Journal of Electrical Power & Energy Systems*, Vol. 18, No. 8, pp. 501-507.
- Catalão, J., Mariano, S., Mendes, V., and Ferreira, L. (2005) Unit Commitment with Environmental Considerations: A Practical Approach, *Proceedings of the 15th Power Systems Computation Conference*, Liege, Belgium.
- Catalão, J. P. S. (2006) *Novas Metodologias de Optimização em Sistemas de Energia Hidrotérmicos*, Dissertação de Doutoramento, Universidade da Beira Interior, Covilhã.
- Chen, P. -C. and Huang, C. -M. (2004) Biobjective Power Dispatch using Goal-Attainment Method and Adaptive Polynomial Networks, *IEEE Transactions on Energy Conversion*, Vol. 19, No. 4, pp. 741-747.
- Chiang, C. -L., Liaw, J. -H., and Su, C. -T., New Approach with a Genetic Algorithm Framework to Multi-Objective Generation Dispatch Problems, *European Transactions on Electrical Power*, Vol. 15, No. 4, pp. 381-395.
- Dhillon, J. S. and Kothari, D. P. (2000) The Surrogate Worth Trade-Off Approach for Multiobjective Thermal Power Dispatch Problem, *Electric Power Systems Research*, Vol. 56, No. 2, pp. 103-110.
- Ferreira, L. A. F. M., Anderson, T., Imparato, C. F., Miller, T. E., Pang, C. K., Svoboda, A., and Vojdani, A. F. (1989) Short-Term Resource Scheduling in Multi-Area Hydrothermal Power Systems, *International Journal of Electrical Power & Energy Systems*, Vol. 11, No. 3, pp. 200-212.
- Gjengedal, T. (1996) Emission Constrained Unit-Commitment (ECUC), *IEEE Transactions on Energy Conversion*, Vol. 11, No. 1, pp. 132-138.
- Hota, P. K. and Dash, S. K. (2004) Multiobjective Generation Dispatch through a Neuro-Fuzzy Technique, *Electric Power Components and Systems*, Vol. 32, No. 11, pp. 1191-1206.
- Kuloor, S., Hope, G. S., and Malik, O. P. (1992) Environmentally Constrained Unit Commitment, *IEE Proceedings-Generation Transmission and Distribution*, Vol. 139, No. 2, pp. 122-128.
- Mendes, V. M. F., Mariano, S. J. P. S., Catalão, J. P. S., and Ferreira, L. A. F. M. (2004) Emission Constraints on Short-Term Schedule of Thermal Units, *Proceedings of the 39th International Universities Power Engineering Conference*, Bristol, UK.
- Miettinen, K. M. (1999) *Nonlinear Multiobjective Optimization*, Kluwer Academic, Norwell, USA.
- Muslu, M. (2004) Economic Dispatch with Environmental Considerations: Tradeoff Curves and Emission Reduction Rates, *Electric Power Systems Research*, Vol. 71, No. 2, pp. 153-158.
- Padhy, N. P. (2004) Unit Commitment — A Bibliographical Survey, *IEEE Transactions on Power Systems*, Vol. 19, No. 2, pp. 1196-1205.
- Pires, D. F., Martins, A. G., and Antunes, C. H. (2004) Modelo Multiobjetivo para Apoio à Localização de Condensadores em Redes Radiais de Distribuição, *Investigação Operacional*, Vol. 24, No. 2, pp. 139-157.
- Snyder, W. L., Jr., Powell, H. D., Jr., and Rayburn, J. C. (1987) Dynamic Programming Approach to Unit Commitment, *IEEE Transactions on Power Systems*, Vol. PWRS-2, No. 2, pp. 339-350.

Variação da actividade sísmica ao longo do ano na Península Ibérica

Maria Cecília Marques Rodrigues †

† Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências e Tecnologia da
Universidade Nova de Lisboa
mmr@fct.unl.pt

Abstract

The objective is to research on the existence of a significant variation in the number of earthquakes in the Iberian Peninsula throughout the year.

A simulation model for the process of seismic activity in the Iberian Peninsula was used to create a sample of seismic occurrences that would allow to research the existence of a significant variation in the number of earthquakes throughout the year.

Once this variation was detected the periods with greater number of seismic occurrences were identified based on a seismic catalogue.

The existence of a significant variation in the number of seismic occurrences throughout the year was verified. This variation lessened as the seismic magnitude increased. Therefore, February, March, April and June were months in which the highest number of light earthquakes were registered. Earthquakes registering a moderate magnitude occurred mostly in February and October. No significant variation of seismic occurrences was detected throughout the year for earthquakes registering a strong magnitude.

Resumo

Pretende-se averiguar a existência de variação significativa do número de sismos ocorridos na Península Ibérica ao longo do ano. Estudos anteriores apontavam para a existência desta variação, indicando ser mais provável a ocorrência de sismos em certas épocas do ano, não se tendo feito contudo uma análise quantitativa.

Utilizou-se um modelo de simulação do processo de ocorrências sísmicas na Península Ibérica para gerar uma amostra de ocorrências sísmicas que permitisse averiguar a existência de variação significativa do número de sismos ao longo do ano.

Uma vez detectada esta variação, a identificação das épocas com maior número de ocorrências foi efectuada com base num catálogo sísmico.

Estudaram-se separadamente sismos de qualquer magnitude, sismos de fraca, média e forte magnitude.

Constatou-se a existência de variação significativa do número de ocorrências sísmicas ao longo do ano, atenuando-se esta variação à medida que a magnitude dos

sismos aumenta. Deste modo, para sismos de fraca magnitude, a época do ano em que ocorre maior número de sismos corresponde aos meses de Fevereiro, Março Abril e Junho. Para sismos de média magnitude o maior número de ocorrências sísmicas verifica-se nos meses de Fevereiro e Outubro. Para sismos de forte magnitude não se detectou variação significativa de ocorrências sísmicas ao longo do ano.

Palavras Chave: Simulação; Simulação sísmica; Estatística; Aplicações da Investigação Operacional;

Title: The variation in seismic activity throughout the year in the Iberian Peninsula

1 Introdução

O fenómeno sísmico sempre preocupou o homem quer pelo seu caracter destrutivo quer pela sua imprevisibilidade.

Muitos estudos já feitos conseguiram identificar alguns precursores sísmicos, não se conseguindo contudo ainda prever, com janelas temporais pequenas, a ocorrência de abalos sísmicos.

O objectivo deste trabalho consiste em avaliar se existe variação significativa da sismicidade ao longo do ano, isto é, se nalgumas épocas é mais provável a ocorrência de sismos do que noutras e, no caso de se confirmar tal variação, identificar quais as épocas com maior risco de abalos sísmicos.

Há já algum tempo que se suspeitava que, pelo menos nalgumas regiões, a sismicidade não era constante ao longo do ano.

Com efeito, Nunes (Nunes et al., 2001) refere que, nos Açores, em particular no *Rifte* da Terceira (Graciosa, Terceira, S. Miguel e zonas marítimas associadas) os sismos destrutivos ocorrem sobretudo nos meses de Janeiro e Junho. Já anteriormente, Machado (Machado, 1955) tinha constatado que os abalos sísmicos são mais prováveis na vizinhança dos solstícios, ou seja, de Novembro a Janeiro e de Maio a Julho.

Se efectivamente se provar que, em certas épocas do ano, ocorrem mais sismos, poder-se-á considerar que futuramente é mais provável a ocorrência de sismos nalgumas épocas do ano.

A Investigação Operacional, dada a sua natureza interdisciplinar e sistémica, constitui um precioso contributo para a averiguação da existência da referida variação.

Neste trabalho estudou-se a Península Ibérica, bem como a zona adjacente do Oceano Atlântico, isto é, a região delimitada por Longitude 15° W - 4° E , Latitude 34,5° N - 44° N.

Estudaram-se separadamente sismos de qualquer magnitude, fraca, média e forte magnitude.

2 Modelo de simulação utilizado para a geração do processo sísmico

Para a simulação do processo de ocorrências sísmicas na Península Ibérica foi utilizado o modelo proposto por Costa (Costa, 1989), posteriormente calibrado com dados mais recentes.

No modelo adoptado, cada ocorrência é caracterizada por três factores: *Tempo*, *Grandeza* e *Espaço*.

- O factor Tempo é caracterizado pelos valores dos intervalos de tempo entre sismos consecutivos - Dt .

Para a geração do intervalo de tempo até à próxima ocorrência, Dt_i , são utilizados os dois intervalos de tempo precedentes (Dt_{i-2} , Dt_{i-1}), i. e.,

$$(Dt_{i-2}, Dt_{i-1}) \rightarrow Dt_i$$

- A Grandeza - G é caracterizada pelos valores de magnitude Richter associados às ocorrências.

Para gerar a Grandeza da próxima ocorrência, G_i , são utilizados os valores das grandezas dos dois sismos precedentes (G_{i-2} , G_{i-1}), bem como do valor do intervalo de tempo entre essa ocorrência e a precedente (Dt_i), i. e.,

$$(Dt_i, G_{i-2}, G_{i-1}) \rightarrow G_i$$

- O Espaço - E é caracterizado pelo número da *zona sísmica* correspondente ao epicentro da ocorrência. Para gerar a localização da próxima ocorrência, E_i , é utilizado o valor da localização precedente (E_{i-1}) bem como da grandeza da ocorrência (G_i) e o intervalo de tempo entre essa ocorrência e a precedente (Dt_i) i. e.,

$$(Dt_i, G_i, E_{i-1}) \rightarrow E_i$$

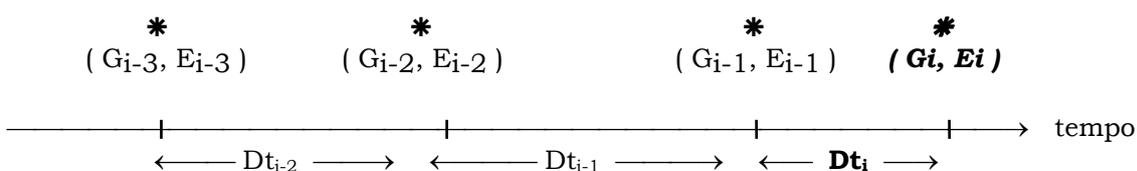


Figura 1: Diagrama representativo do modelo de simulação sísmica utilizado

Assim, para se iniciar a geração do processo de ocorrências sísmicas é necessário atribuir valores a Dt_{i-2} , Dt_{i-1} , G_{i-2} , G_{i-1} e E_{i-1} , ou seja, caracterizar as *condições iniciais*, isto é, o *passado sísmico recente*. No presente trabalho atribuíram-se às condições iniciais valores próximos dos valores médios dos factores intervenientes, partindo-se deste modo de um "cenário sísmico médio". Sabe-se que as condições iniciais têm influência no processo de ocorrências sísmicas mas apenas para horizontes temporais bem mais pequenos do que os utilizados neste estudo. No estudo da influência das condições iniciais, Rodrigues e Costa (Rodrigues e Costa, 1997) verificaram que a influência das condições iniciais diminui à medida que aumenta o horizonte temporal, sendo

praticamente nula para horizontes temporais superiores a 90 dias. Como no presente estudo se vão considerar horizontes temporais bem maiores optou-se por considerar apenas condições iniciais correspondentes a um "cenário sísmico médio".

Para o factor Espaço, adoptou-se a definição de 21 *zonas sísmicas* na Península Ibérica proposta por Costa e Oliveira (Costa, 1989), (Costa e Oliveira, 1991), que abrangem a região delimitada por Longitude 15° W - 4° E , Latitude 34,5° N - 44° N. Estas zonas foram reajustadas por Rodrigues e Costa (Rodrigues e Costa, 1997) por forma a suavizar os seus contornos, relativamente às *zonas sísmicas* propostas por Costa (Costa, 1989)). A figura 2 apresenta as zonas sísmicas reajustadas.

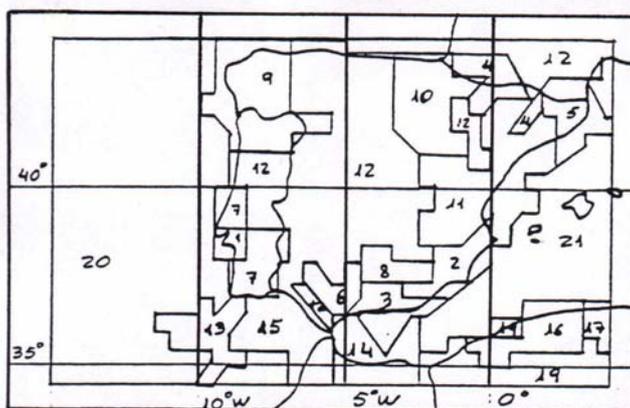


Figura 2: Zonas sísmicas da Península Ibérica

De referir ainda que o catálogo sísmico utilizado na calibração do modelo (Sousa et al, 1992), abrange uma área ligeiramente inferior à do catálogo utilizado aquando da definição das 21 *zonas sísmicas* atrás referidas, o que resulta na eliminação da *zona sísmica* número 18. Embora o número das *zonas sísmicas* passe então a 20, decidiu-se manter a numeração das *zonas sísmicas* anteriormente definida por Costa e Oliveira (Costa, 1989), (Costa e Oliveira, 1991), pelo que, as *zonas sísmicas* utilizadas neste trabalho serão referenciadas de 1 a 17 e de 19 a 21.

3 Metodologia utilizada

Para verificar se existe variação significativa da sismicidade ao longo do ano simulou-se o processo de ocorrências sísmicas na Península Ibérica durante um longo horizonte temporal e registou-se o número de sismos ocorridos em cada mês. Se não houver diferença significativa do número de ocorrências ao longo do ano, a sismicidade "mensal" deverá ter valores idênticos ao longo do ano. Contudo, como nem todos os meses têm o mesmo número de dias, se se procedesse deste modo estar-se-ia a comparar períodos de tempo de durações diferentes.

Ter-se-á então de dividir o ano em períodos de tempo iguais, mas antes disso convém não esquecer que os anos têm 366 ou 365 dias, consoante sejam ou não bissextos. Como cada ano bissexto ocorre de quatro em quatro anos, cada ano tem efectivamente 365.25 dias.

Como o objectivo consiste em dividir o ano em períodos de tempo de igual duração a fim de se poder comparar o número de ocorrências sísmicas em cada um desses períodos, dividiu-se o ano, ou seja, um período de 365.25 dias por doze, obtendo-se assim períodos de tempo de 30.4375 dias, a que chamaremos **células** ou, quando isso não causar confusão **meses**. Desta forma, cada ano terá 12 células de igual duração.

Desde que não haja indicação contrária, neste trabalho os meses do ano corresponderão a períodos de tempo de 30.4375 dias, em que o mês de Janeiro será o período de tempo de 30.4375 dias com início no dia 1 de Janeiro do ano civil, Fevereiro o período de tempo de 30.4375 dias após o período anterior, etc. Esta designação, embora pouco usual não acarreta confusão, já que o objectivo consiste em avaliar a existência de variação significativa da sismicidade em períodos de tempo de igual amplitude ao longo do ano.

A Tabela 1 indica os períodos de tempo após 1 de Janeiro do ano civil e a correspondência adoptada para referir cada mês.

Tabela 1: Correspondência entre períodos de tempo e designação de meses adoptada

| Período de tempo após 1 de Janeiro do ano civil (dias) | Designação de "meses" adoptada |
|--|--------------------------------|
| [0 , 30.4375 [| Janeiro |
| [30.4375, 60.8750 [| Fevereiro |
| [60.8750, 91.3125 [| Março |
| [91.3125, 121.7500 [| Abril |
| [121.7500, 152.1875 [| Maio |
| [152.1875, 182.6250 [| Junho |
| [182.6250, 213.0625 [| Julho |
| [213.0625, 243.5000 [| Agosto |
| [243.5000, 273.9375 [| Setembro |
| [273.9375, 304.3750 [| Outubro |
| [304.3750, 334.8125 [| Novembro |
| [334.8125, 365.2500] | Dezembro |

Seja c_{ij} o valor da sismicidade – número de sismos de qualquer magnitude - correspondente ao mês i no ano j .

Se se simularem N anos o número total de ocorrências em cada célula será

$$S_{i,N} = \sum_{j=1}^N c_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, 12$$

Se não existir variação significativa da sismicidade ao longo do ano a variável aleatória $S_{i,N}$ deverá ter distribuição Uniforme Discreta.

Para testar esta hipótese utilizaram-se os testes de ajustamento do Qui-Quadrado e de Kolmogorov-Smirnov para uma amostra, sendo a hipótese de nulidade:

H_0 : não existe diferença significativa entre os valores de $S_{i,N}$, $i = 1, 2, \dots, 12$.

De notar que embora o teste de Kolmogorov-Smirnov seja normalmente utilizado para distribuições contínuas, não se considerou relevante o erro resultante de o aplicar a valores mensais - células, dado o elevado número de observações em cada uma delas. Segundo Goodman e Kruscal (Goodman e Kruscal, 1954) quando o teste de Kolmogorov-Smirnov é aplicado a distribuições descontínuas o erro resultante é para o lado da segurança, isto é, o teste é conservativo, o que significa, neste caso, que se H_0 é rejeitada com base no teste podemos ter plena confiança na decisão.

Também Conover (Conover, 1971) apresenta uma metodologia para o teste de Kolmogorov-Smirnov que permite obter o valor crítico exacto de uma amostra descontínua, contudo não se achou necessário utilizá-la dada a natureza conservativa do teste.

Pode então concluir-se que se H_0 for rejeitada, com base nos testes estatísticos utilizados, existe diferença significativa nos valores da sismicidade mensal ao longo do ano.

Como também se pretende averiguar se, no caso de haver variação significativa da sismicidade ao longo do ano esta depende da magnitude dos sismos registados, o estudo será dividido em:

- sismos de qualquer magnitude;
- sismos de fraca magnitude - magnitude Richter menor do que 4;
- sismos de média magnitude - magnitude Richter entre 4 e 5 ($4 \leq G < 5$) e
- sismos de forte magnitude - magnitude Richter maior ou igual a 5.

Nas situações em que se detecte existir variação significativa da sismicidade ao longo do ano, a identificação dos meses em que a sismicidade é maior será feita com base no catálogo sísmico utilizado (Sousa et al, 1992), dado que o modelo de simulação do processo de ocorrências sísmicas utilizado não é adequado para tal análise, conforme se explicará na secção seguinte.

4 Variação da sismicidade ao longo do ano na Península Ibérica

4.1 Sismos de qualquer magnitude

Simulou-se o processo de ocorrências sísmicas na Península Ibérica durante 1000 anos, utilizando o modelo de simulação referido anteriormente e registou-se o número de ocorrências sísmicas de qualquer magnitude.

Seja c_{ij} o número de ocorrências sísmicas de qualquer magnitude correspondente à célula i no ano j .

Calculou-se

$$S_{i,1000} = \sum_{j=1}^{1000} c_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, 12$$

Obtendo-se assim 12 valores da variável aleatória $S_{i,1000}$.

Na hipótese da sismicidade não ter variação significativa ao longo do ano, os valores de $S_{i,1000}$, $i = 1, 2, \dots, 12$ deverão ajustar-se a uma distribuição Uniforme Discreta.

Procedeu-se seguidamente ao teste da hipótese:

H0: os valores de $S_{i,1000}$, ($i = 1, 2, \dots, 12$) têm distribuição Uniforme Discreta

usando os testes de ajustamento do Qui-Quadrado e de Kolmogorov-Smirnov para uma amostra.

A tabela 2 apresenta os resultados dos testes estatísticos utilizados, verificando-se que, para um nível de significância de 5%, ambos os testes indicam dever-se rejeitar a hipótese de nulidade. Para um nível de significância de 1%, apenas o teste de Kolmogorov-Smirnov não aconselha rejeitar H0, o que não é de estranhar, visto que como já se disse, na situação estudada o teste é conservativo.

Tabela 2: Resultados da aplicação dos testes estatísticos utilizados considerando sismos de qualquer magnitude ocorridos na Península Ibérica

| Teste do Qui-Quadrado | | Teste de Kolmogorov-Smirnov | |
|-----------------------|-----------------|-----------------------------|-----------------|
| $\alpha = 0.05$ | $\alpha = 0.01$ | $\alpha = 0.05$ | $\alpha = 0.01$ |
| rejeitar H0 | rejeitar H0 | rejeitar H0 | não rejeitar H0 |

α - nível de significância

Conclui-se assim que os valores da variável aleatória $S_{i,1000}$, ($i = 1, 2, \dots, 12$) não se ajustam à distribuição Uniforme, indicando que, no caso de ocorrências sísmicas de qualquer magnitude, existe diferença significativa entre os valores da sismicidade ao longo do ano.

Pretende-se agora identificar quais as células a que correspondem maiores valores de sismicidade.

De notar que, com base na análise efectuada, a $S_{1,1000}$ não corresponde necessariamente o número total de ocorrências registadas no mês de Janeiro, nem a $S_{2,1000}$ corresponde o número total de ocorrências registadas no mês de Fevereiro, etc., dado que o modelo de simulação utilizado gera apenas os intervalos de tempo entre ocorrências consecutivas.

Assim, dado um cenário sísmico inicial: valores de $D_{t_{i-2}}$, $D_{t_{i-1}}$, G_{i-2} , G_{i-1} e E_{i-1} , o modelo permite-nos gerar D_{t_i} , G_i e E_i , ou seja, o intervalo de tempo desde a última até à próxima ocorrência, a Grandeza da próxima ocorrência (expressa em magnitude Richter) e a sua localização (uma das zonas sísmicas do modelo de simulação utilizado). No entanto, é indiferente se se iniciou a contagem do tempo no dia 1 de Janeiro ou noutra data, visto que a sequência de valores gerados não depende do valor inicial do tempo mas sim, como já foi dito, dos intervalos de tempo entre as duas últimas ocorrências.

Levanta-se também a questão de saber se o cenário sísmico inicial poderá influenciar os valores de $S_{i,1000}$ ($i=1, 2, \dots, 12$). No estudo efectuada por Rodrigues e Costa (Rodrigues e Costa,1997) e (Rodrigues, 1998) prova-se que as condições iniciais exercem influência no processo de ocorrências sísmicas mas que essa influência diminui à medida que aumenta o horizonte temporal, sendo praticamente inexistente ao fim de 90 dias.

Como o horizonte temporal utilizado neste trabalho foi de 1000 anos não se coloca a questão da influência das condições iniciais.

Assim, os valores gerados de $S_{i,1000}$ ($i=1, 2, \dots, 12$) irão servir para avaliar a existência de variação significativa de sismicidade ao longo do ano. No caso de se verificar que tal variação é significativa, como aconteceu para sismos de qualquer magnitude na Península Ibérica, a identificação dos meses em que a sismicidade é maior será feita com base em dados reais, mais concretamente com base no catálogo sísmico já referido (Sousa et al, 1992).

No catálogo referido consideraram-se apenas os registos sísmicos após 1 de Janeiro de 1900, dado que os registos anteriores estavam muitas vezes incompletos. Deste modo, nos 91 anos considerados dispõe-se de 11309 registos.

Seja $d_{i,j}$ o número de sismos de qualquer magnitude registados na célula i do ano j , do catálogo utilizado ($i = 1, 2, \dots, 12$ e $j = 1, 2, \dots, 91$). O catálogo permite contabilizar $91 \times 12 = 1092$ valores de sismicidade. Com base nesta amostra, calculou-se o intervalo de confiança a 95% para o valor médio da sismicidade em períodos de 30.4375 dias. Seja $[l_i, l_s]$ esse intervalo.

Os valores médios mensais de sismicidade são

$$S_i = \sum_{j=1}^{91} d_{i,j} / 91, \quad i = 1, 2, \dots, 12,$$

isto é,

$S_1 = \sum_{j=1}^{91} d_{1,j} / 91$ - somatório de todos os valores de sismicidade da primeira célula de cada ano dividido pelo número de anos considerados;

$S_2 = \sum_{j=1}^{91} d_{2,j} / 91$ - somatório de todos os valores de sismicidade da segunda célula de cada ano dividido pelo número de anos considerados;

.....

$S_{12} = \sum_{j=1}^{91} d_{12,j} / 91$ - somatório de todos os valores de sismicidade da décima segunda célula de cada ano dividido pelo número de anos considerados.

Para os valores de S_i ($i = 1, 2, \dots, 12$) que ultrapassem o limite superior do intervalo de confiança para o valor médio da sismicidade em períodos de 30.4375 dias, l_s , considera-se que nesse mês a sismicidade foi elevada.

A figura 3 apresenta os valores de S_i ($i = 1, 2, \dots, 12$) bem como o valor de l_s para sismos de qualquer magnitude registados na Península Ibérica.

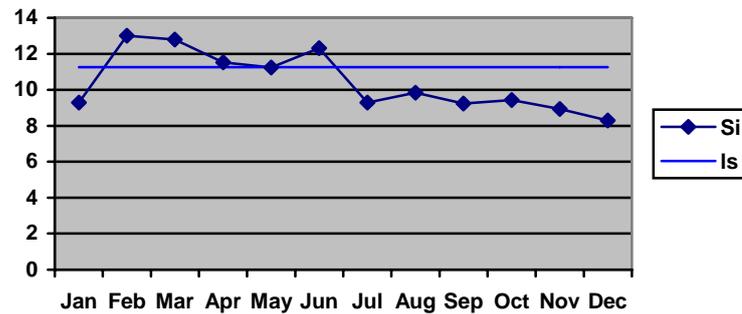


Figura 3: Valores médios mensais do número de sismos de qualquer magnitude ocorridos na Península Ibérica, bem como o valor de Is

Verifica-se a existência de dois picos de sismicidade mais elevada, um logo após o início do ano e outro sensivelmente a meio deste.

Conclui-se assim que a sismicidade mensal na Península Ibérica apresenta variação significativa ao longo do ano, existindo dois picos com sismicidade mais elevada, um nos meses de Fevereiro, Março e Abril e outro no mês de Junho.

4.2 Sismos de fraca magnitude

Tal como no estudo dos sismos de qualquer magnitude, simulou-se o processo de ocorrências sísmicas na Península Ibérica durante 1000 anos, utilizando o modelo de simulação referido e registando-se agora apenas os sismos de fraca magnitude, isto é os sismos com magnitude Richter inferior a 4.

Seja cf_{ij} o número de ocorrências sísmicas de fraca magnitude correspondente à célula i no ano j .

Calculou-se

$$Sf_{i,1000} = \sum_{j=1}^{1000} cf_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, 12$$

Obtendo-se assim 12 valores da variável aleatória $Sf_{i,1000}$.

Na hipótese, do número mensal de sismos de fraca magnitude não ter variação significativa ao longo do ano os valores de $Sf_{i,1000}$, $i = 1, 2, \dots, 12$ deverão ajustar-se a uma distribuição Uniforme Discreta.

Procedeu-se seguidamente ao teste da hipótese:

H_0 : os valores de $Sf_{i,1000}$, ($i = 1, 2, \dots, 12$) têm distribuição Uniforme Discreta

usando os testes de ajustamento do Qui-Quadrado e de Kolmogorov-Smirnov para uma amostra.

Tabela 3: Resultados da aplicação dos testes estatísticos utilizados considerando sismos de fraca magnitude ocorridos na Península Ibérica

| Teste do Qui-Quadrado | | Teste de Kolmogorov-Smirnov | |
|-----------------------|-----------------|-----------------------------|-----------------|
| $\alpha = 0.05$ | $\alpha = 0.01$ | $\alpha = 0.05$ | $\alpha = 0.01$ |
| rejeitar H0 | rejeitar H0 | rejeitar H0 | rejeitar H0 |

α - nível de significância

A tabela 3 apresenta os resultados dos testes estatísticos utilizados, verificando-se a existência de variação significativa do número mensal de sismos de fraca magnitude ao longo do ano. Com efeito, até para um nível de significância de 1%, ambos os testes utilizados conduzem à rejeição da hipótese em estudo.

De notar que a variação agora encontrada foi superior à detectada para sismos de qualquer magnitude, visto que para estes últimos, o teste de Kolmogorov-Smirnov, com nível de significância de 1% não aconselhava a rejeição de H0.

Tal como no estudo de sismos de qualquer magnitude, utilizou-se catálogo sísmico já referido (Sousa et al, 1992), bem como a metodologia referida anteriormente.

Seja $df_{i,j}$ o número de sismos de fraca magnitude registados na célula i do ano j , ($i = 1, 2, \dots, 12$ e $j = 1, 2, \dots, 91$) do catálogo sísmico utilizado. Como já se referiu, o catálogo permite contabilizar $91 \times 12 = 1092$ valores mensais do número de sismos de fraca magnitude. Com base nesta amostra calculou-se o intervalo de confiança a 95% para o valor médio do número de sismos de fraca magnitude em períodos de 30.4375 dias. Seja $[li_f, ls_f]$ esse intervalo.

Os valores médios mensais do número de sismos de fraca magnitude são

$$Sf_i = \sum_{j=1}^{91} df_{i,j} / 91, \quad j = 1, 2, \dots, 12,$$

Para os valores de Sf_i que ultrapassem o valor do limite superior do intervalo de confiança para o valor médio do número de sismos de média magnitude em períodos de 30.4375 dias, ls_f , considera-se que nos correspondentes meses a sismicidade foi elevada.

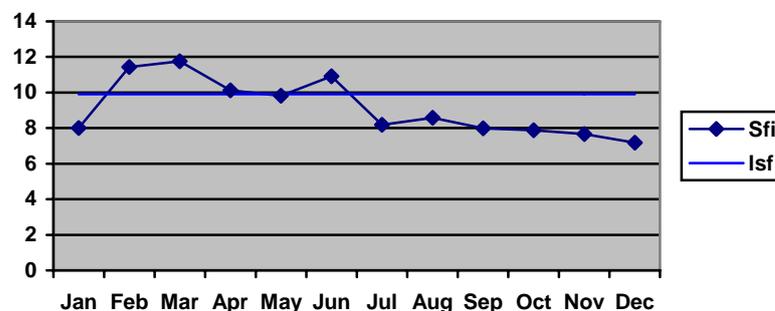


Figura 4: Valores médios mensais do número de sismos de fraca magnitude ocorridos na Península Ibérica, bem como o valor de ls_f

Verifica-se que a variação do número mensal de sismos de fraca magnitude ao longo do ano é muito semelhante à variação do número mensal de sismos de qualquer magnitude. Com efeito, tal como para sismos de qualquer magnitude, o número mensal de sismos de fraca magnitude apresenta dois picos, um logo após o início do ano e outro sensivelmente a meio deste. Ao primeiro pico correspondem os meses de Fevereiro, Março e Abril e ao segundo pico o mês de Junho.

4.3 Sismos de média magnitude

Consideraram-se sismos de média magnitude aqueles cuja magnitude Richter (G) se situou entre 4 e 5, isto é, $4 \leq G < 5$.

Simulou-se o processo de ocorrências sísmicas na Península Ibérica durante 1000 anos, utilizando o modelo de simulação referido registando-se apenas as ocorrências de média magnitude.

Seja cm_{ij} o número de sismos de média magnitude registados na célula i do ano j . Calculou-se

$$Sm_{i,1000} = \sum_{j=1}^{1000} cm_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, 12$$

Considere-se a hipótese:

H_0 : os valores de $Sm_{i,1000}$, ($i = 1, 2, \dots, 12$) têm distribuição Uniforme Discreta

Tal como se tem vindo a fazer, utilizaram-se os testes do Qui-Quadrado e de Kolmogorov-Smirnov para uma amostra, tendo-se obtido os resultados que se apresentam na tabela 4.

Tabela 4: Resultados da aplicação dos testes estatísticos utilizados considerando sismos de média magnitude ocorridos na Península Ibérica

| Teste do Qui-Quadrado | | Teste de Kolmogorov-Smirnov | |
|-----------------------|--------------------|-----------------------------|--------------------|
| $\alpha = 0.05$ | $\alpha = 0.01$ | $\alpha = 0.05$ | $\alpha = 0.01$ |
| rejeitar H_0 | não rejeitar H_0 | rejeitar H_0 | não rejeitar H_0 |

α - nível de significância

Para um nível de significância de 5% ambos os testes indicam que se deve rejeitar a hipótese. Para um nível de significância de 1% ambos os testes aconselham a não rejeitar a hipótese. Comparativamente à análise efectuada para sismos de fraca magnitude, em que ambos os testes aconselhavam a rejeição da hipótese, mesmo com um nível de significância de 1%, identifica-se uma menor variação nos valores de $Sm_{i,1000}$, $i = 1, 2, \dots, 12$. Embora continue a existir variação significativa do número mensal de sismos de média magnitude ao longo do ano, a variação é menos notória do que para os sismos de fraca magnitude.

Tal como anteriormente, para identificar os meses com maior número de sismos de média magnitude utilizou-se o catálogo sísmico.

Seja $dm_{i,j}$ o número de sismos de média magnitude registados na célula i do ano j , ($i = 1, 2, \dots, 12$ e $j = 1, 2, \dots, 91$). Com base na amostra de 1092 valores mensais do número de sismos de média magnitude extraídos do catálogo calculou-se o intervalo de confiança a 95% para o valor médio do número de sismos de média magnitude em períodos de 30.4375 dias. Seja $[l_m, ls_m]$ esse intervalo.

Os valores médios mensais do número de sismos de média magnitude são

$$Sm_i = \sum_{j=1}^{91} dm_{i,j} / 91, \quad i = 1, 2, \dots, 12,$$

Para os valores de Sm_i que ultrapassem o limite superior do intervalo de confiança para o valor médio do número de sismos de média magnitude em períodos de 30.4375 dias, ls_m , considera-se que nesse mês a sismicidade foi elevada.

A figura 5 apresenta os valores de Sm_i ($i = 1, 2, \dots, 12$) bem como o valor de ls_m .

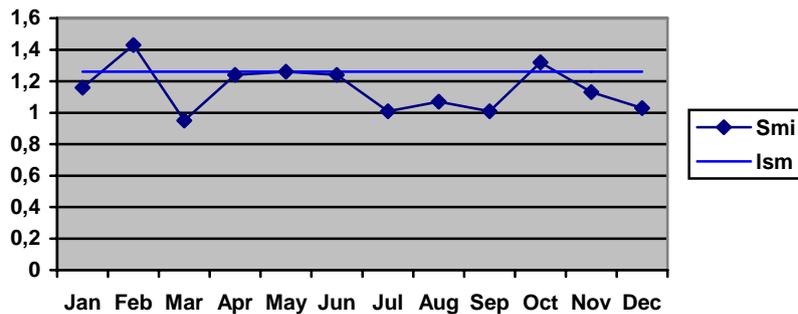


Figura 5: Valores médios mensais do número de sismos de média magnitude ocorridos na Península Ibérica, bem como o valor de ls_m

A distribuição mensal do número de sismos de média magnitude é consideravelmente diferente do que a observada para sismos de qualquer magnitude e fraca magnitude.

Verifica-se a existência de dois picos, o primeiro ocorre no mês de Fevereiro, onde anteriormente também se registavam valores elevados de sismicidade, e o segundo no mês de Outubro.

Conclui-se assim que o número mensal de sismos de média magnitude na Península Ibérica apresenta variação significativa ao longo do ano, embora esta variação seja menos notória do que a detectada para o número de sismos de fraca magnitude.

4.4 Sismos de forte magnitude

Simulou-se o processo de ocorrências sísmicas na Península Ibérica durante 1000 anos, utilizando o modelo de simulação referido e registando-se apenas as ocorrências de forte magnitude.

Seja cfr_{ij} o número de sismos de forte magnitude registados na célula i do ano j .

Calculou-se

$$Sfr_{i,1000} = \sum_{j=1}^{1000} cfr_{ij}, i = 1, 2, \dots, 12$$

Tal como no caso de sismos de magnitudes anteriormente estudadas, se não existir variação significativa do número mensal de sismos de forte magnitude ao longo do ano, os valores de $Sfr_{i,1000}$, $i = 1, 2, \dots, 12$ deverão ajustar-se a uma distribuição Uniforme Discreta.

Considere-se a hipótese:

H₀: os valores de $Sfr_{i,1000}$, ($i = 1, 2, \dots, 12$) têm distribuição Uniforme Discreta.

Utilizaram-se os testes do Qui-Quadrado e de Kolmogorov-Smirnov para uma amostra, tendo-se obtido os resultados que se apresentam na tabela 5.

Tabela 5: Resultados da aplicação dos testes estatísticos utilizados considerando sismos de forte magnitude ocorridos na Península Ibérica

| Teste do Qui-Quadrado | | Teste de Kolmogorov-Smirnov | |
|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|
| $\alpha = 0.05$ | $\alpha = 0.01$ | $\alpha = 0.05$ | $\alpha = 0.01$ |
| não rejeitar H ₀ |

α - nível de significância

Ambos os testes aconselham a não rejeição da hipótese, indicando assim não existir variação significativa do número mensal de sismos de forte magnitude ocorridos na Península Ibérica ao longo do ano.

Este resultado não é de estranhar, visto que no estudo efectuado com sismos de média magnitude se encontrou menor diferenciação do número de ocorrências mensais ao longo do ano do que no estudo efectuado com sismos de fraca magnitude.

5 Conclusões

O objectivo deste estudo foi o de averiguar a existência de variação significativa do número mensal de sismos ocorridos na Península Ibérica ao longo do ano.

Estudaram-se separadamente os sismos de:

- qualquer magnitude,
- fraca magnitude ($G < 4$),
- média magnitude ($4 \leq G < 5$) e
- forte magnitude ($G \geq 5$).

Tanto para os sismos de qualquer magnitude como para os sismos de fraca magnitude, verificou-se que existe variação significativa do número mensal de sismos ao longo do ano, existindo dois picos com sismicidade mais elevada, um nos meses de Fevereiro, Março e Abril e outro no mês de Junho.

Verificou-se também a existência de variação significativa do número mensal de sismos de média magnitude ao longo do ano, embora esta variação seja menos notória do que a detectada para o número de sismos de fraca magnitude. Neste caso, existem dois picos em que o número de sismos de média magnitude é mais elevado, correspondendo aos meses de Fevereiro e Outubro.

Para os sismos de forte magnitude não se detectou variação significativa do número mensal de sismos ao longo do ano na Península Ibérica.

Tabela 6: Meses em que o número de sismos foi elevado na Península Ibérica

| magnitude | Jan | Fev | Mar | Abr | Mai | Jun | Jul | Ago | Set | Out | Nov | Dez |
|-----------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| qualquer | | | | | | | | | | | | |
| fraca | | | | | | | | | | | | |
| média | | | | | | | | | | | | |
| forte | | | | | | | | | | | | |

O quadro 6 apresenta os meses em que o número de sismos foi mais elevado na Península Ibérica.

Conclui-se assim que, na Península Ibérica, a variação mensal do número de sismos ao longo do ano se atenua com o aumento da magnitude considerada, verificando-se que para magnitudes superiores ou iguais a 5 não se detecta variação significativa.

6 Limitações e desenvolvimentos

Uma limitação deste estudo consiste no facto do modelo de geração do processo sísmico utilizado não permitir identificar quais os meses em que se registou maior número de sismos, obrigando assim à utilização de catálogos sísmicos para contornar esta questão.

Um desenvolvimento possível deste trabalho consiste na aplicação deste tipo de estudo a regiões mais pequenas, podendo inclusive utilizar-se a delimitação espacial definida pelas zonas sísmicas adoptadas no modelo de simulação utilizado. Contudo, esta diferenciação, embora permita um estudo mais detalhado, pode ser limitativa no que respeita ao número de sismos registados, sobretudo para sismos de forte magnitude, dado o reduzido número destes em pequenas áreas.

A abordagem seguida neste estudo poderá também ser estendida a outras regiões, permitindo verificar se existe variação significativa da sismicidade ao longo do ano noutras partes do globo, e em caso afirmativo, se as épocas de maior sismicidade correspondem às encontradas na Península Ibérica.

Dado que, como se verificou, na Península Ibérica existem meses em que o número de ocorrências sísmicas é significativamente maior de que noutros, a época do ano poderá ser considerada um precursor sísmico, podendo incorporar um sistema de alarme sísmico, como por exemplo, o proposto por Rodrigues (Rodrigues, 1998) e (Rodrigues, 2002) em que é possível aumentar o número de precursores sísmicos utilizados na atribuição de um grau de alarme sísmico para uma região, durante um horizonte temporal.

7 Referências

- Conover, W. J. (1971) *Practical Nonparametric Statistics*, Wiley, New. York.
- Costa, R. A. (1989) *Modelação do Processo Estocástico Sísmico na Península Ibérica*. Dissertação de Doutoramento. Instituto Superior Técnico. Universidade Técnica de Lisboa.
- Costa, R. A. ; Oliveira, C. S. (1991) *Defining seismic zones in the Ibero Mogrebi Region*. Proc. 9 Th. European Conference on Earthquake Engineering - Moscovo, pp. 279-288.
- Goodman, L.A.; Kruskal, W.H.(1954) *Measures of association for cross classifications*. J. Amer. Statistics. Ass., 49, pp. 732-764.
- Machado, F. (1955) *Alguns aspectos da sismicidade nos Açores*. Boletim da Ordem dos Engenheiros 4 (20), Memória 107, pp. 1-6.
- Nunes, João C.; Forjaz, Victor H.; França, Zilda. (2001) *Principais Sismos Destrutivos no Arquipélago dos Açores - Uma Revisão*. 5º Encontro Nacional de Sismologia e Engenharia Sísmica, Açores, pp. 119-131.
- Rodrigues, M. Cecília M.; COSTA, Ruy A. (1997) *Estudo comparativo da influência das condições iniciais num modelo de simulação do processo de ocorrências sísmicas na Península Ibérica*. *Investigação Operacional*, N°1 Vol. 17, pp. 23-40.
- Rodrigues, M. Cecília M. (1998) *Modelação de um Sistema de Alarme Sísmico para a Península Ibérica*. Dissertação de Doutoramento. Faculdade de Ciências e Tecnologia. Universidade Nova de Lisboa.
- Rodrigues, M. Cecília M. (2002) *Sistema de alarme sísmico baseado na sismicidade local e no passado sísmico recente*. *Investigação Operacional*, N°1 Vol. 22, pp. 119-145.
- Sousa, M.L.; Martins, A.; Oliveira, C.S. (1992) *Compilação de Catálogos Sísmicos na Região Ibérica*. Relatório 36/92 - NDA, Laboratório Nacional de Engenharia Civil, Lisboa.

Um Modelo de Classificação com Solução Aproximada por Técnica de Otimização

Henry Rossi de Almeida

ITA – Instituto Tecnológico da Aeronáutica
São José dos Campos - Brasil
hralmeid@cacapava.com.br

Abstract

In this work we consider the problem about classification of objects (products, individuals, companies) in two or more groups.

The traditional approach is based mainly on models like Logit or Discriminant Analysis. It results in this way, either a cutting score or a measure of distance from the center of each group, defined with the simultaneous use of all the sample.

In this model we consider that the classification variables are limited, inferiorly or superiorly. Through this hypothesis, it results a border for each group, that is the limit of the group.

We intend to determine the border for the group and, also, a value of probabilistic nature for the measure (score) of each unit, relatively to the boundary of the group that it belongs. After that, we do the classification of a new unit, in the group where it presents the greater measure.

Resumo

Neste trabalho consideramos o problema de classificação de objetos (indivíduos, empresas, produtos) em dois ou mais grupos.

A abordagem tradicional se fundamenta principalmente em modelos como Logit ou Análise Discriminante. Resulta deste modo, uma medida estatística – ponto de corte (escore) ou uma medida de distância padronizada ao centro do agrupamento ou uma hipersuperfície de separação – definido com a utilização simultânea de toda a amostra.

No modelo proposto consideramos que as variáveis de classificação são limitadas, inferior ou superiormente. Desta hipótese resulta uma fronteira, limite da região domínio de cada grupo em observação.

Objetivamos determinar as fronteiras dos grupos analisados e, também, um valor de natureza probabilística para a medida de cada unidade observada, que especifique quanto a mesma está inserida em seu respectivo grupo, relativamente à fronteira deste. Em seguida efetuamos o teste para classificar nova unidade, no grupo em que a mesma apresente a maior medida de inserção.

Keywords: Discriminant Analysis, Score Classification, Linear Programming, Data Envelopment Analysis (DEA)

Title: An approximate solution Classification Model through Optimization Techniques

1 Introdução

Neste trabalho abordamos o problema de classificação de unidades (DMU *Decision Making Unit*) em dois ou mais grupos (populações) distintos. Consideramos ainda que as variáveis discriminatórias são contínuas e limitadas, superior ou inferiormente, definindo fronteiras para cada particular grupo.

A motivação do trabalho é apresentar uma proposta complementar ao procedimento adotado em modelos tradicionais, que obtém a medida estatística de classificação utilizando todos os elementos da amostra, indistintamente. Por exemplo, ao procurarmos definir o escore para classificação de um grupo de empresas com característica de solvência e outro de insolvência, através de Análise Discriminante, as empresas com excelente e com péssima situação financeira, onde não residem dúvidas quanto à real classificação, vão influenciar sensivelmente na decisão de classificação de nova unidade de teste. Isto porque afetaram o escore, por terem participado na determinação deste, com a mesma importância dada às empresas em situação financeira duvidosa que, de fato, são aquelas que apresentam dificuldades de classificação. Apesar de todas participarem, como integrantes da amostra, na determinação do escore, apresentaremos um modelo diferenciando a participação de cada DMU.

Com base nas considerações iniciais, não deveremos encontrar nenhuma unidade de determinado grupo, fora da fronteira deste, resultando uma região vazia, seja pelo baixo valor de uma determinada variável com característica favorável ao grupo (que denominaremos variável favorável), seja pelo valor muito elevado de uma determinada variável desfavorável.

Consideramos ainda que uma mesma variável pode ter simultaneamente característica favorável a uma população e desfavorável a outra população. Assim, ao analisarmos uma colônia de microorganismos anaeróbicos, a variável “teor de oxigênio” deve ser considerada uma variável desfavorável a esse grupo, tal que acima de um teor reduzido, haveria impossibilidade de a colônia sobreviver. Já, na análise de uma colônia de microorganismos aeróbicos, “teor de oxigênio” deve ser considerado uma variável favorável para identificação deste grupo e, abaixo de certo nível, esta colônia não sobreviveria.

Os objetivos do presente trabalho, atendendo à nossa motivação, são:

- Determinar as fronteiras que delimitam cada população, a partir da observação dos valores das variáveis favoráveis e desfavoráveis, das amostras de elementos de cada população.
- Determinar uma medida da probabilidade de inserção de cada elemento da amostra em relação à sua fronteira. Deste modo desenvolveremos uma escala de medidas partindo da fronteira para dentro, não aquela usual do centro do agrupamento para fora.
- Classificar novas DMUs na população que apresentar maior medida de inserção em cada fronteira construída.
- Aprimorar as fronteiras, sempre que novas informações assim possibilitarem.

Neste trabalho consideramos que a seqüência de modelagem para classificação deve manter a proposta de [Duda et al, 2001], qual seja:

- Pré-processamento – Para levantamento das características de cada população.
- Extração – Definição das principais características e seus valores.
- Classificação – Tomada de decisão com base nos valores das características.
- Pós-Processamento – Ajuste definitivo, considerando qualidade e custos do sistema.

Para manter esta seqüência vamos necessitar de uma amostra original para calibração do modelo e uma segunda amostra para efetuar classificação e principalmente o pós-processamento, objetivando o aprimoramento das fronteiras originalmente obtidas. Porém estamos considerando que a utilização de um modelo de classificação não se encerra após uso inicial, de modo que o pós-processamento de modelagem deve ser dinâmico e, quando novas informações se agregarem, os parâmetros definidores das fronteiras podem e devem ser atualizados.

Dada a complexidade de cálculo, consideramos fundamental apresentar um procedimento para obtenção de solução aproximada. Nos apoiaremos nas técnicas de otimização, utilizando assim algoritmos conhecidos. Faremos uso de modelos de fronteira, cuja estrutura matemática é semelhante à técnica de Análise de Envoltória de Dados DEA (do inglês *Data Envelopment Analysis*). No entanto adequaremos os resultados para as condições probabilísticas de nosso problema.

O trabalho está organizado da seguinte maneira:

A seção 2 conceitua o que consideramos como variável favorável e variável desfavorável.

A seção 3 desenvolve o modelo a partir da medida de inserção, definida por curvas de mesma probabilidade (ou curvas de indiferença), definidoras de uma escala de medida.

A seção 4 estabelece os procedimentos para obtermos uma solução aproximada e sua utilização com base nos dados da amostra de calibração do modelo.

A seção 5 estabelece a metodologia de classificação, para a solução aproximada.

A seção 6 expõe considerações sobre *outliers* e aprimoramento das fronteiras.

A seção 7 é dedicada a um estudo de caso, com o desenvolvimento do modelo e comparação com outro modelo da literatura, evidenciando situações onde ele não se aplica.

A seção 8 apresenta as conclusões sobre a utilização e do modelo.

2 Definição das Variáveis

Nesta seção apresentamos o conceito adotado para as variáveis atuantes no processo de analisar uma DMU, conforme foi exposto na Seção 1. Assim:

- Se uma variável é favorável à ocorrência de elementos da população, então quanto maior for seu valor numérico para uma DMU, melhor é a condição desta no grupo.
- Se uma variável é desfavorável para a população, então quanto menor for seu valor, melhor é a condição da DMU no grupo.

A Figura 1 explicita uma população influenciada por duas variáveis, uma de característica favorável e outra de característica desfavorável. A situação se traduz em uma região H, definindo o domínio das variáveis VD e VF para esta população, bem como uma região I, onde as condições são extremamente desfavoráveis à ocorrência de uma entidade desta população.

VF = variável favorável (X)

VD = variável desfavorável (Y)

H = Região com ocorrência de DMUs

I = Região ausente de DMUs

y_s = Limite superior da variável Y

x_l = Limite inferior da variável X

Uma variável pode apresentar:

- Característica favorável (X) a uma população e
- Característica desfavorável (Y) a outra população

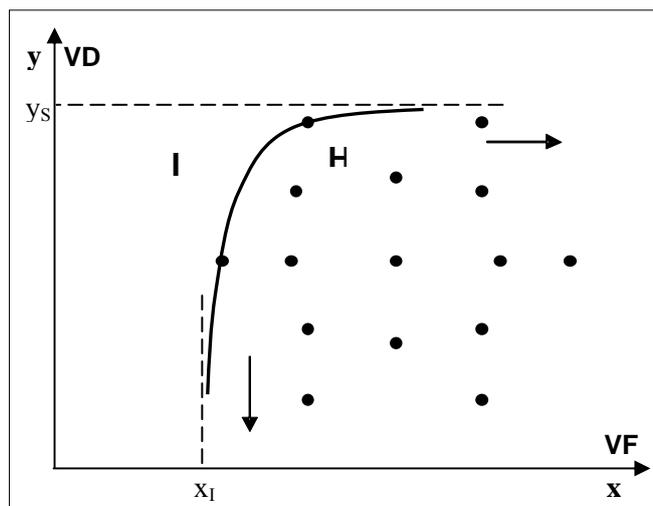


Figura 1 – Região H, domínio das variáveis

2.1 Ajuste das variáveis

Para trabalharmos somente com variáveis de características equivalentes, substituiremos cada valor x_i da variável favorável X_i por $x_i - x_{li}$ e cada valor y_r da variável desfavorável Y_r por $y_{sr} - y_r$, considerando m variáveis favoráveis e s variáveis desfavoráveis.

Resultarão novas variáveis, todas apresentando característica favorável (X) e serão definidas por $X_i = \{x_i \in \mathbb{R} / x_i \geq 0, i = 1, \dots, m+s\}$, delimitando uma região, conforme Figura 2, para o caso de duas variáveis, X_1 e X_2 .

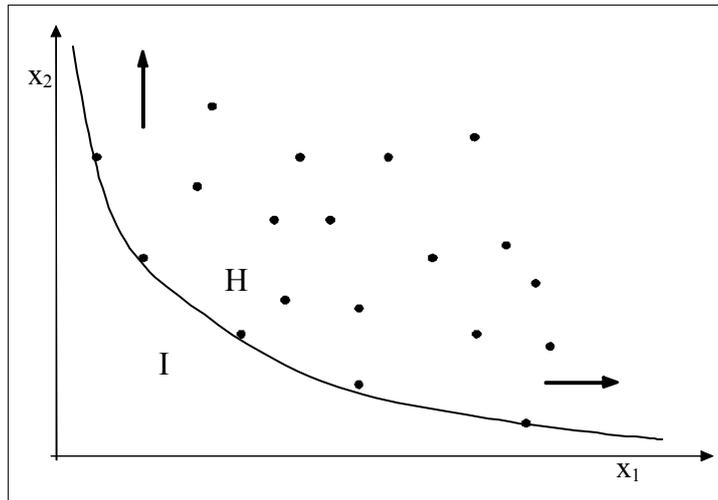


Figura 2 – Região H, domínio das variáveis ajustadas

3 Desenvolvimento de um Modelo Probabilístico de Classificação

Esta seção conceitua o grau de inserção que posiciona uma DMU, medido sobre a função de distribuição de probabilidades (fdp) desta população, relativamente à fronteira. A Figura 3, representando o domínio da fdp conjunta $f(x_1, x_2)$ das variáveis ajustadas X_1 e X_2 , retrata esta situação.

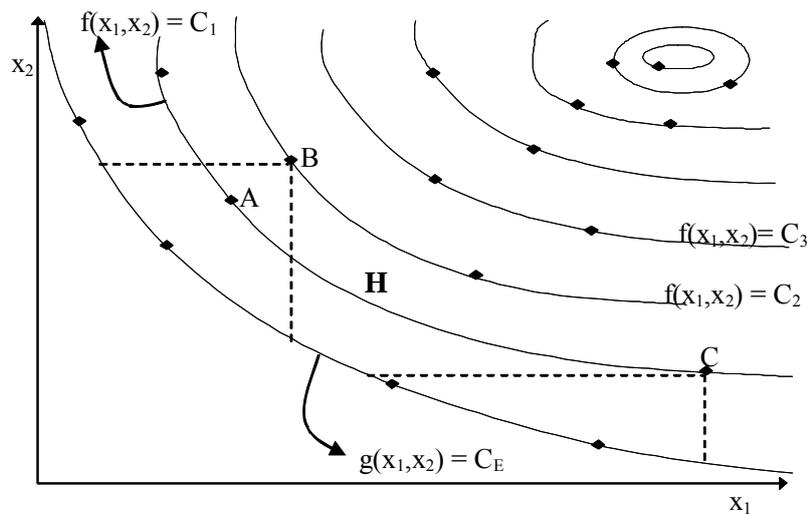


Figura 3 – Domínio da fdp da conjunta $f(x_1, x_2)$

A envoltória definida pela função $g(x_1, x_2) = C_E$ representa a fronteira assintótica aos eixos x_1 e x_2 , estabelecendo o domínio da fdp.

A DMU, representada pelo ponto B, está mais inserida na região H, do que A, pois:
 $x_{1B} > x_{1A}$ e $x_{2B} > x_{2A}$

Se $\iint_B dP$ representa $\iint f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = P(B)$, entre a curva envoltória $f(x_1, x_2) = C_E$ e o ponto B

e $\iint_A dP$ representa $\iint f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = P(A)$, entre a curva envoltória $f(x_1, x_2) = C_E$ e o ponto A,

Então: $x_{1B} > x_{1A}$ e $x_{2B} > x_{2A} \Rightarrow P(x_B) > P(x_A)$

Diferentemente, na comparação entre as DMUs representadas por B e C, teremos:
 $x_{1B} < x_{1C}$ e $x_{2B} > x_{2C}$

Neste caso, as coordenadas não são suficientes para definir uma regra de decisão sobre medida de inserção. Deveremos formular uma nova medida, que será baseada em critérios probabilísticos, para o modelo proposto. Assim:

HIPÓTESE DA PROBABILIDADE:

- Se $\iint_B dP = \iint_C dP \Rightarrow$ **As DMUs B e C estão igualmente inseridas**

- Se $\iint_B dP = \iint_C dP > \iint_A dP \Rightarrow$ **B e C estão mais inseridas que A**

A Hipótese da Probabilidade estabelece as bases para definirmos a Regra de Decisão que estará orientando o processo de classificar nova DMU em determinadas populações candidatas, ou seja, quando ocorre interesse em definir sobre duas ou mais populações, qual aquela em que a DMU deve ser classificada.

3.1 Curvas de indiferença

Conforme exposto na seção anterior, $\iint_B dP$ entre a curva envoltória $g(x_1, x_2) = C_E$ e um particular ponto B define uma probabilidade α . Assim, pontos de mesma probabilidade descrevem curvas no plano das variáveis x_1 e x_2 , conforme Figura 4.

Pelas proposições da seção anterior, estas curvas serão assintóticas aos eixos x_1 e x_2 , pois a probabilidade cai a zero sobre a envoltória e tende a um ao aumentarmos indefinidamente as variáveis (que por hipótese são contínuas e ilimitadas à direita).

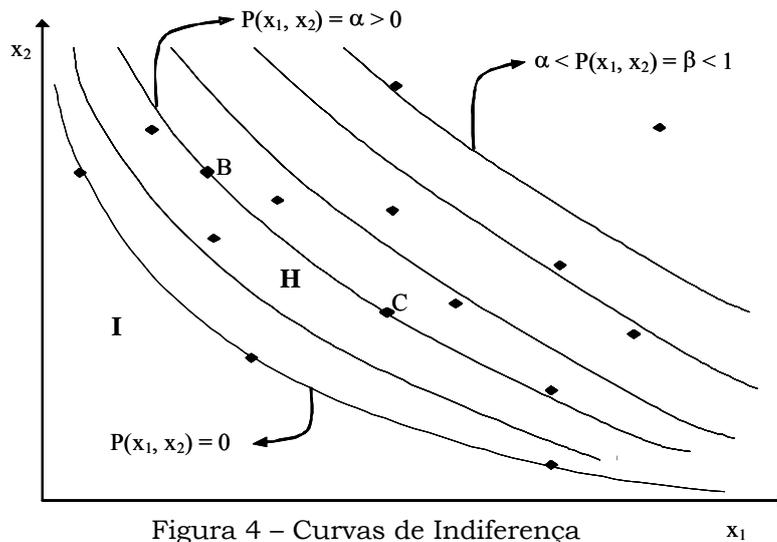


Figura 4 – Curvas de Indiferença

As DMUs representadas pelos pontos B e C na Figura 4, situados sobre a mesma curva, estão, por hipótese, igualmente inseridas dentro do domínio da fdp, pois apresentam a mesma probabilidade α . Trata-se de uma curva de indiferença no posicionamento de B e C.

Para $P(x_1, x_2) = 0$ estamos exatamente sobre a envoltória.

As curvas de indiferença (hipersuperfícies em caso n-dimensional) crescem segundo um gradiente, possibilitando serem utilizadas como medida de inserção, através do valor α .

3.2 Critério para classificação

Em acordo com as definições apresentadas na seção 3.1, podemos estabelecer um critério para classificar DMUs em diversas populações candidatas:

- a) A DMU₀ está sobre a envoltória ou sobre uma curva de indiferença na região H (domínio)
 - Resulta $P(x_1, x_2, \dots, x_{m+s}) = \alpha \geq 0$.
- b) A DMU₀ está fora da região H
 - $\nexists P(x_1, x_2, \dots, x_{m+s})$.

Finalmente:

- A DMU₀ será classificada no grupo que resultar o valor $\beta > \alpha$, para $P(x_1, x_2, \dots, x_{m+s})$ calculado sobre a envoltória e a fdp de cada população.

4 Obtenção de uma Particular Solução Aproximada por Técnica de Otimização

A solução analítica do modelo foi apresentada na seção 3, quando as fdp são conhecidas, resultando o processo final de classificação exposto em 3.2.

No desconhecimento das fdp, podemos obter diversas soluções aproximadas, conforme as hipóteses simplificadoras adotadas. Vamos propor uma aproximação através da função que define as curvas de indiferença.

Quando representamos um ponto I de uma particular curva de indiferença $C_I(\alpha)$, em coordenadas polares, encontramos um ponto correspondente E, sobre a envoltória, de tal modo que $\overline{OI} = k\overline{OE}$, exposto na Figura 5.

A distância radial \overline{EI} entre os diversos pontos da envoltória C_E e uma particular curva de indiferença $C_I(\alpha)$ é função do ângulo diretor θ e da probabilidade α desejada para esta curva, conforme projeção efetuada sobre o plano x_1x_2 da Figura 5:

$$k = f(\alpha, \theta) \quad \alpha = P(x_{1I}, x_{2I}, \dots, x_{(m+s)I}) \text{ na generalização para } m+s \text{ dimensões.}$$

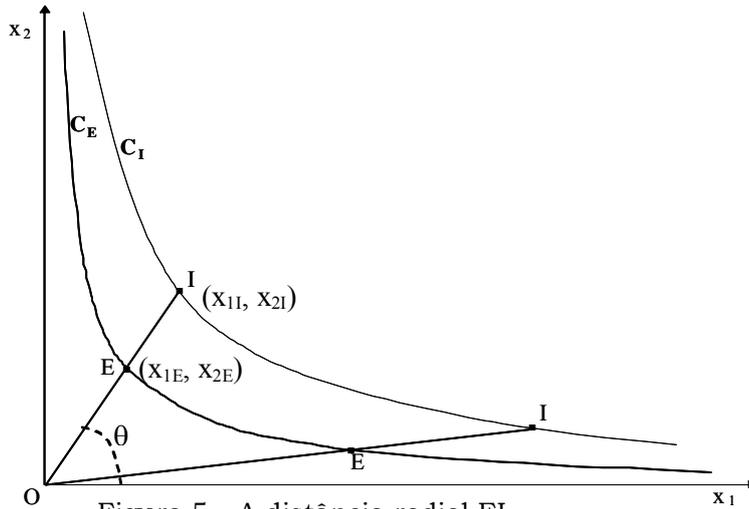


Figura 5 – A distância radial EI

Para todo $E \in$ Envoltória e $I \in C_I(\alpha)$ resulta, para uma dada probabilidade α tal que:

$$\begin{pmatrix} x_{1I} \\ x_{2I} \\ \vdots \\ x_{mI} \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} x_{1E} \\ x_{2E} \\ \vdots \\ x_{mE} \end{pmatrix} \quad \text{e, para o vetor EI:} \quad \begin{pmatrix} x_{1I} - x_{1E} \\ x_{2I} - x_{1E} \\ \vdots \\ x_{mI} - x_{mE} \end{pmatrix} = (k - 1) \begin{pmatrix} x_{1E} \\ x_{2E} \\ \vdots \\ x_{mE} \end{pmatrix}$$

$$\text{Ou: } x_{iI} - x_{iE} = (k - 1) x_{iE} \quad ; \quad i = 1, \dots, m \quad \Rightarrow \quad \frac{x_{iI} - x_{iE}}{x_{iI}} = \frac{k - 1}{k} = h(\alpha, \theta) \quad ; \quad i = 1, \dots, m$$

$$\therefore \frac{x_{1I} - x_{1E}}{x_{1I}} = \frac{x_{2I} - x_{2E}}{x_{2I}} = \dots = \frac{x_{mI} - x_{mE}}{x_{mI}} = h(\alpha, \theta) \tag{1}$$

A posição da curva de indiferença que explicita a probabilidade α desejada, pode ser representada pela medida h da equação (1).

$$\text{Consideremos agora: } \overline{k(\alpha)} = \frac{\int_0^{2\pi} k(\alpha, \theta) d\theta}{\pi/2}$$

Podemos observar que nos casos onde k for independente de θ resulta $k(\alpha, \theta) \equiv \overline{k(\alpha)}$.

Para as fdp em que $k(\alpha, \theta)$ seja contínua e apresente derivadas de qualquer ordem, podemos desenvolver $k(\alpha, \theta)$ em série de Taylor, a partir de um ponto θ_0 . Vamos considerar os casos em que esta série converge, em todo o domínio $0 < \theta < \pi/2$.

Consideremos primeiramente θ_0 de modo que $k(\alpha, \theta_0) = \overline{k(\alpha)}$.

Temos assim (na particularização bidimensional) a série:

$$k(\alpha, \theta) = \overline{k(\alpha)} + \frac{\partial k(\alpha, \theta_0)}{\partial \theta} (\theta - \theta_0) + \frac{\partial^2 k(\alpha, \theta_0)}{\partial \theta^2} \frac{(\theta - \theta_0)^2}{2!} + \dots$$

Deste modo, a utilização de $\overline{k(\alpha)}$, para determinação de $k(\alpha, \theta)$, é o primeiro passo para uma melhora, por aproximações sucessivas, da solução $h(\alpha, \theta)$ da equação (1).

Adotaremos esta solução como definitiva, no desconhecimento de melhores informações sobre a fdp, ou seja, admitindo, por hipótese, que $k(\alpha, \theta)$ independe de θ .

A equação (1) assume então a forma apresentada na equação (2), utilizando $h(\alpha)$ em vez de $h(\alpha, \theta)$, como aproximação para as curvas de indiferença, na generalização para mais que duas dimensões:

$$\frac{X_{11} - X_{1E}}{X_{11}} = \frac{X_{21} - X_{2E}}{X_{21}} = \dots = \frac{X_{m1} - X_{mE}}{X_{m1}} = h(\alpha) \tag{2}$$

Ao utilizarmos h , para compararmos DMUs de um mesmo grupo, teremos uma escala crescente, partindo de zero, indicando quais DMUs estão mais inseridas, pois $h_2 > h_1$ equivale a $\alpha_2 > \alpha_1$ na comparação entre DMU₂ e DMU₁, mesmo desconhecendo α_2 e α_1 .

Quando trabalharmos com duas ou mais populações, ao tentarmos escolher em qual delas classificarmos uma DMU, vamos necessitar uma medida padronizada. Vamos tratar este tópico na seção 4.1, considerando características de dispersão para cada população, visto que, na hipótese acima, não procuramos evidenciar a relação $h = f(\alpha)$, para cada particular grupo.

4.1 Generalização h_G , da escala h de medida

Pretendemos nesta seção estabelecer uma medida relativa de posicionamento das curvas de indiferença, incluindo as características de dispersão para cada população, definindo assim o procedimento para classificação de DMUs em diferentes grupos. Vamos utilizar novamente uma construção bi-dimensional, conforme Figura 6, cientes porém da possibilidade de generalização.

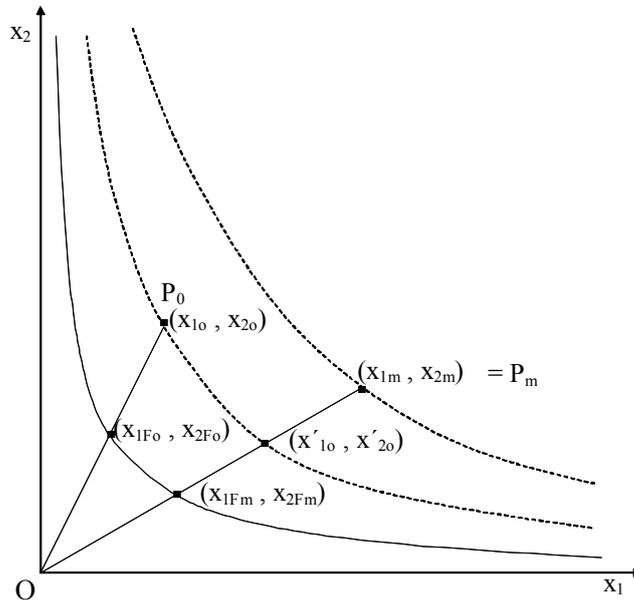


Figura 6 – Posicionamento das Curvas de Indiferença

Na Figura 6, (x_{10}, x_{20}) define a DMU₀ em análise e (x_{1m}, x_{2m}) define o centro P_m da distribuição, estimado pelo ponto médio da amostra. As três curvas representam a fronteira, a curva de indiferença onde se situa a DMU₀ e a curva de indiferença relativa ao ponto médio.

Para a DMU₀ temos, conforme equação (2):

$$h_0 = \frac{X_{10} - X_{1F_0}}{X_{10}} = \frac{X_{20} - X_{2F_0}}{X_{20}}$$

Podemos, pela mesma equação (2), obter h_0 através da DMU de apoio (x'_{10} , x'_{20}), intercessão da a reta \overline{OP}_m com curva de indiferença comum às duas DMUs. Assim:

$$h_0 = \frac{X'_{10} - X_{1F_m}}{X'_{10}} = \frac{X'_{20} - X_{2F_m}}{X'_{20}}$$

$$\therefore x'_{10} = \frac{X_{1F_m}}{(1-h_0)} \quad \text{e} \quad x'_{20} = \frac{X_{2F_m}}{(1-h_0)} \quad (3)$$

Pela equação (2), relativamente ao ponto médio P_m da distribuição:

$$h_m = \frac{X_{1m} - X_{1F_m}}{X_{1m}} = \frac{X_{2m} - X_{2F_m}}{X_{2m}}$$

$$\therefore x_{1F_m} = (1-h_m)x_{1m} \quad \text{e} \quad x_{2F_m} = (1-h_m)x_{2m} \quad (4)$$

Vamos conceituar uma medida h_{G_0} que posicione P_0 em relação à fronteira e também em relação à curva de indiferença onde se localiza o ponto médio P_m .

Definimos assim, considerando que P_0 e (x'_{10} , x'_{20}) estão na mesma curva de indiferença:

$$h_{G_0} = \frac{X'_{10} - X_{1F_m}}{X_{1m} - X_{1F_m}} = \frac{X'_{20} - X_{2F_m}}{X_{2m} - X_{2F_m}} \quad (5)$$

Substituindo (3) e (4) em (5) resulta:

$$h_{G_0} = \frac{\frac{h_0}{1-h_0}}{\frac{h_m}{1-h_m}} \equiv \frac{h_0}{h_m} \frac{1-h_m}{1-h_0} \quad (6)$$

A equação (6) fornece a medida h_{G_0} , que será nosso score, no processo de comparar DMUs. Como h_{G_0} é função apenas de h_0 e h_m , então identifica a curva de indiferença de P_0 , tanto em relação ao extremo como ao centro da distribuição.

Deste modo não determinamos quantitativamente o valor da probabilidade associada a P_0 , conforme exposto no fim da seção anterior. Mas agora podemos comparar a posição da DMU₀ relativamente à diversos grupos candidatos para classificação, onde a mesma se encontra inserida. Isto porque estamos considerando a hipótese de os grupos apresentarem a mesma fdp, diferindo apenas na variância. A medida h_{G_0} tem o efeito de padronizar a dispersão. Resultará um valor de h_{G_0} para cada grupo, posicionando a DMU em uma diferente curva de indiferença, conforme o grupo. A DMU será classificada no grupo que apresentar maior valor de h_{G_0} .

4.2 Estimativas dos limites das variáveis

Esta seção considera que a formulação das variáveis se fará a partir de uma amostra representativa, para cada grupo.

Devemos assim estimar inicialmente os limites de cada variável por grupo. O estimador de máxima verossimilhança para o limite superior de uma variável resulta em

$\hat{Y} = \max(Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$, sendo n o tamanho da amostra. Vamos adotá-lo, embora seja uma estimativa tendenciosa [Meyer P.L., 2000]. Do mesmo modo, o estimador de máxima verossimilhança para o limite inferior de uma variável resulta em $\hat{X} = \min(X_1, X_2, \dots, X_n)$.

Mantendo as características da seção 2.1, substituiremos cada valor X_{ij} de cada variável favorável X_i por $X_{ij} - \hat{X}_i$ e cada valor Y_{rj} da variável desfavorável Y_r por $\hat{Y}_r - Y_{rj}$. Resultarão novas variáveis, todas apresentando característica favorável (X) e serão definidas por $X_i = \{X_i \in \mathbb{R} / X_i \geq 0, i = 1, \dots, m+s\}$, delimitando a região, conforme representado na Figura 7, equivalente à Figura 2, para o caso de duas variáveis, X_1 e X_2 e um particular grupo.

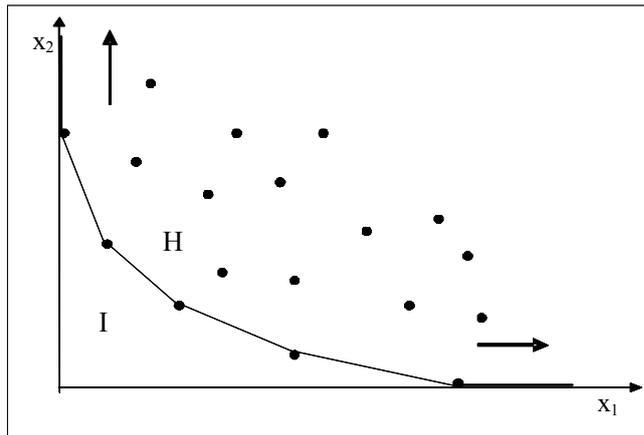


Figura 7 – Região H, domínio das variáveis ajustadas

4.3 Curvas de indiferença – Aproximação por poligonais como escala de medida

Esta seção fornece as bases para contornarmos as dificuldades de integração das fdp, necessário à determinação das curvas de indiferença, para obtenção do escore h da equação (2). Pretendemos obter diretamente o valor de h através de poligonais, cujos vértices estão sobre as curvas de indiferença.

Nos apoiaremos na Figura 8, em uma representação bidimensional, plausível de generalização para m variáveis. A envoltória, obtida a partir da amostra, está apoiada em quatro pontos (DMUs), onde identificamos o ponto P_E de coordenadas (x_{1E}, x_{2E}) . Como determinar os pontos da envoltória em um ambiente m -dimensional será tópico da seção 6.1, quando estivermos expondo o apoio da técnica DEA ao modelo.

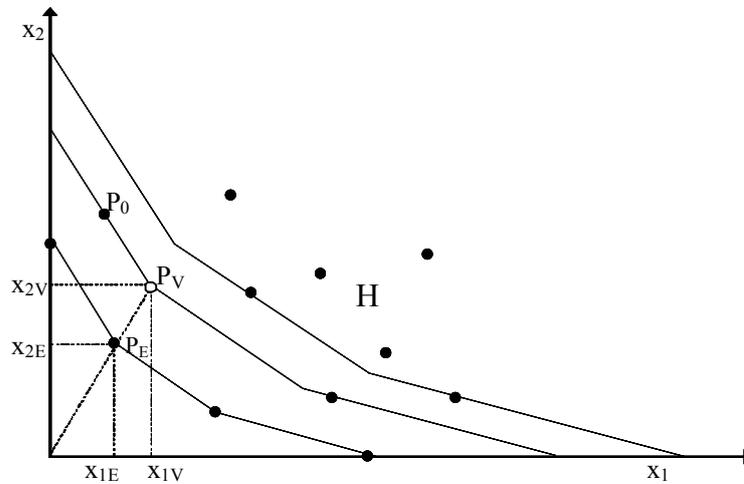


Figura 8 – Poligonais de indiferença

Vamos evidenciar que, quando construirmos as poligonais conforme procedimento abaixo, elas serão representativas das poligonais de indiferença. O procedimento oriunda de uma medida DEA, denominada distância direcional [Joro et al. 1998], que será detalhada na seção 5.1 e aqui introduzida através da Figura 8. A medida, que também denominaremos h , é obtida da equação (7) abaixo:

$$h = (x_{1V} - x_{1E})/x_{1V} = (x_{2V} - x_{2E})/x_{2V} \tag{7}$$

A solução DEA fornece o valor de h que, no caso de somente variáveis favoráveis, resulta:

$h = 0$ para DMUs situadas sobre a envoltória e $0 < h < 1$ para todas DMUs internas.

Na equação (7), x_{1E} e x_{2E} representam as coordenadas do ponto P_E sobre a envoltória e x_{1V} e x_{2V} as coordenadas de um ponto interno P_V , construído pela extrapolação de um segmento de reta que une a origem ao ponto P_E conhecido.

Devemos observar que (7) é a própria expressão da equação (2), que apresentou h .

Podemos assim determinar h para o ponto P_V , por técnica DEA.

Temos assim a relação biunívoca entre a probabilidade α e h , de característica crescente. Todas as DMUs obtidas por extrapolação dos vértices da envoltória, com o mesmo valor de h , apresentam o mesmo valor α e assim, representam os vértices de uma poligonal sobre uma curva de indiferença, podendo ser considerada uma poligonal de indiferença. A partir desta consideração, o ponto P_0 da Figura 8, que, pela técnica DEA, apresenta o mesmo valor de h , por estar sobre a mesma poligonal, deverá ser considerado “tão inserido quanto” o ponto P_V , no domínio H , conceituando a aproximação da curva pela poligonal.

A técnica DEA não nos fornece a relação $\alpha = f^{-1}(h)$, possibilitando obter o valor efetivo da probabilidade associada. No entanto proporciona uma escala monotônica crescente entre h e α , descrevendo as poligonais internas. A generalização através do escore h_G , conforme seção 4.1, possibilitará comparar diversos grupos.

Em posse desta forma de medir, podemos agora iniciar os procedimentos para classificação, que serão expostos a seguir.

5 Procedimentos para classificação

Nesta seção apresentamos os procedimentos para classificação ao utilizarmos o modelo proposto na seção 4.

5.1 O Modelo DEA proposto

A formulação geral deste modelo [Joro et al, 1998], está representada no sistema de equações (8), em forma matricial, onde σ representa a distância direcional, que denominamos h , na equação (1). As variáveis X e Y são denominadas variáveis de *input* e de *output*, respectivamente.

$$\begin{array}{l}
 \max \sigma + \varepsilon 1^T (s^+ + s^-) \\
 \text{s.t} \\
 Y\lambda - \sigma Y_0 - s^+ = Y_0 \\
 X\lambda + \sigma X_0 + s^- = X_0 \\
 1^T \lambda = 1 \\
 \lambda, s^-, s^+ \geq 0 \\
 \varepsilon \geq 0
 \end{array} \quad (8)$$

A solução deste sistema é a unidade virtual (Y_f, X_f) , referência para (X_o, Y_o) , representada exatamente pelo ponto $(Y\lambda, X\lambda)$ quando o vetor λ assumir os valores da solução. O sistema de inequações (8) permite uma particularização, do ponto de vista matemático, ou seja, a utilização somente de variáveis de *input*. Reescrevendo em forma não matricial, para $\varepsilon = 0$ e acertando a denominação σ para h :

$$\begin{array}{l}
 \max h \\
 \text{sujeito a} \\
 \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} + h x_{ij_o} \leq x_{ij_o} \quad i = 1, 2, \dots, m \\
 \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1 \\
 \lambda_j \geq 0
 \end{array} \quad (9)$$

As equações (10) explicitam a solução deste sistema:

$$h = \frac{(x_{ij_o} - x_{ij_f})}{x_{ij_o}} \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (10)$$

Quando posicionamos as assíntotas sobre os eixos, a equação (10) reproduz a equação (2), restabelecendo as variáveis ajustadas conforme seção 4.2.

O PPL definido pelo sistema de equações (9), com solução dada pela equação (10), é a base para construirmos o modelo proposto na seção 4, para classificação, através das técnicas DEA.

5.2 Metodologia de classificação

O objetivo desta seção é, inicialmente, definirmos a medida de posição das DMUs das amostras de calibração de cada grupo, relativamente à sua fronteira e, posteriormente, considerarmos o método para classificar uma DMU teste, relativamente às k fronteiras. Este é.

O procedimento envolve uma série de passos, a saber:

- Efetuar o ajuste das variáveis originais, conforme seção 4.2.
- Executar o PPL dado pelo sistema de inequações (9), para cada população em estudo.
- Todas as DMUs de uma determinada população que apresentem $h = 0$ definirão sua fronteira. O PPL desta população será reformulado, a partir deste momento, contendo somente estas DMUs da fronteira (e uma particular DMU que será testada). Isto porque a contribuição de todas as outras DMUs deixa de ser relevante na determinação da medida h desta particular DMU de teste. Definimos assim o sistema representativo desta população. Este sistema será denominado PPL_e para esta população (PPL definido sobre envoltória desta população).
- Obteremos tantos PPL_e , quanto forem as populações em estudo.
- Caso se objetive avaliar uma nova entidade frente a uma certa população, ela o será através do PPL_e desta.

O PPL_e para cada população, contendo m restrições, formadas pelas m variáveis, terá a seguinte forma, ao testar a DMU:

PPL_e

O índice zero será assumido por cada DMU a ser testada.
O índice j refere-se às entidades da envoltória da particular população em teste.

max h
sujeito a

$$\sum_{j \in \text{Envoltória}} \lambda_j x_{ij} + hx_{i0} \leq x_{i0} \quad i = 1, \dots, m \quad (\text{m linhas})$$

$$\sum_{j \in \text{Envoltória}} \lambda_j = 1$$

$$\lambda_j \geq 0$$

(11)

Adotaremos o conceito de Comparação Bilateral [Cooper et al, 2000] em DEA, para testar uma nova DMU:

- A DMU é introduzida apenas como dado adicional x_{ij_0} (índice zero), nas inequações do PPL_e da população em que ela será testada, após ajuste das variáveis conforme seção 4.2.

- A DMU não deve ser introduzida como uma restrição adicional em $\sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij}$, nas inequações do PPL_e . Deste modo fica impossibilitado a inclusão desta DMU como uma entidade de envoltória, ou seja, impedindo modificação na forma atual da envoltória (índice $j \neq 0$).

Este conceito foi proposto por [Seiford e Zhu, 1998], complementando a proposta de [Troutt et al, 1996], em teste de uma entidade frente a uma única população, para verificar se a entidade testada pertencia ou não à população. Em vez da distância direcional h , utilizou-se diretamente a medida DEA de eficiência CCR, obtendo-se eficiência superior a um (100%) caso não pertencesse, porém não resultou uma escala adequada de medida, para classificação frente a duas ou mais populações.

- Definição de h :
 - a) A entidade (DMU) está sobre a envoltória atual ou no interior da região H (domínio)
 - Resulta PPL_e viável com $h \geq 0$
 - b) Uma nova entidade está fora da região H
 - Resulta PPL_e viável com $h < 0$.

- Classificação de novas entidades

Uma vez definidas as fronteiras que delimitam as populações em estudo, as DMUs atuais e novas, de quaisquer das populações, poderão ser testadas para:

- Verificação da possibilidade de uma região comum a duas ou mais populações.
 - DMUs que estão dentro da região comum, conforme sugerido na Figura 9, apresentarão $h_k \geq 0$ quando medidas em relação a cada uma das k fronteiras, das k populações. Observar que na Figura 9, a região comum está apresentada com as variáveis originais, antes do ajuste.
 - DMUs que estão fora de uma das fronteiras apresentarão $h_k < 0$ em relação a esta fronteira.
- Classificação de nova DMU através dos respectivos PPL_e de cada população (Equações 11), determinando em qual população esta DMU deve ser classificada, caso a mesma não esteja localizada na região comum. A classificação obedece o Critério do Maior h_G , ou seja, a nova DMU será classificada no grupo onde o PPL_e resultar maior h_G , após generalizarmos o valor de h , conforme seção 4.1.

Na representação geométrica da Figura 9 temos duas populações onde as variáveis V_1 e V_2 se comportam como variáveis favoráveis para a População I (a redução delas abaixo de um limite mínimo inviabiliza a ocorrência de elementos da População I) e como variáveis desfavoráveis à População II (o aumento delas acima de um limite máximo inviabiliza a ocorrência de elementos da População II).

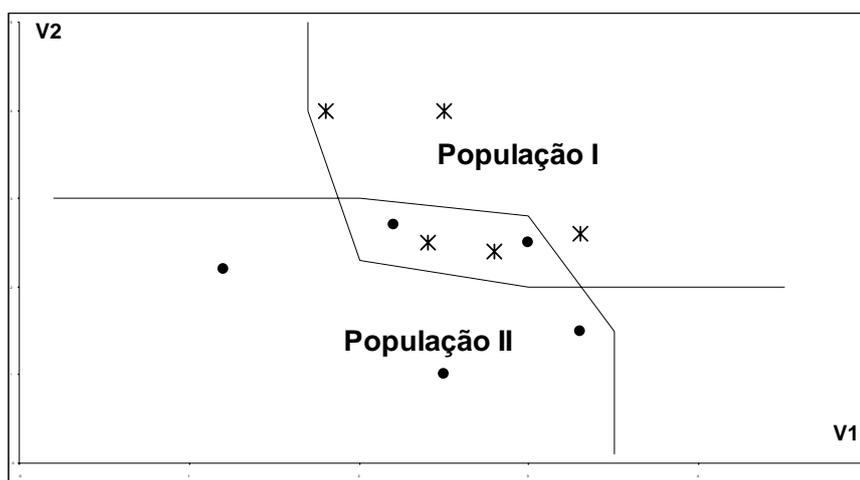


Figura 9 – Distribuição de duas Populações. Variáveis não ajustadas

A Figura 9 apresenta uma zona comum, onde é possível, para uma DMU, determinarmos um valor de h_G , em relação à cada uma das duas envoltórias, separadamente.

Para k grupos, utilizamos h_{Gk} para explorar a possibilidade de classificar uma nova DMU em uma das k populações (aquela que apresentar maior valor para h_{Gk}), em um ambiente m dimensional, representado pelas m variáveis. Um grande facilitador resulta da existência de diversos algoritmos para solução DEA, possibilitando obter h_k para todas as DMUs, em relação a todas as fronteiras, sem grandes dificuldades, agilizando o processo de classificação. A obtenção de h_{Gk} é resultado de uma simples transformação algébrica sobre h_k .

6 Outliers e aprimoramento dinâmico das fronteiras

A fronteira de cada grupo é de importância fundamental no modelo proposto. Assim, o seu reconhecimento deve ser considerado sob diversos aspectos. Este fato é tópico desta seção.

6.1 O problema de *outliers* no estabelecimento das fronteiras

No nosso caso o problema adquire fundamental importância, pois a existência prévia de um *outlier* na amostra original pode alterar totalmente o delineamento das fronteiras e conseqüentemente o processo de classificação.

O conceito de *outlier* pode ser considerado dentro do exposto na Figura 10.

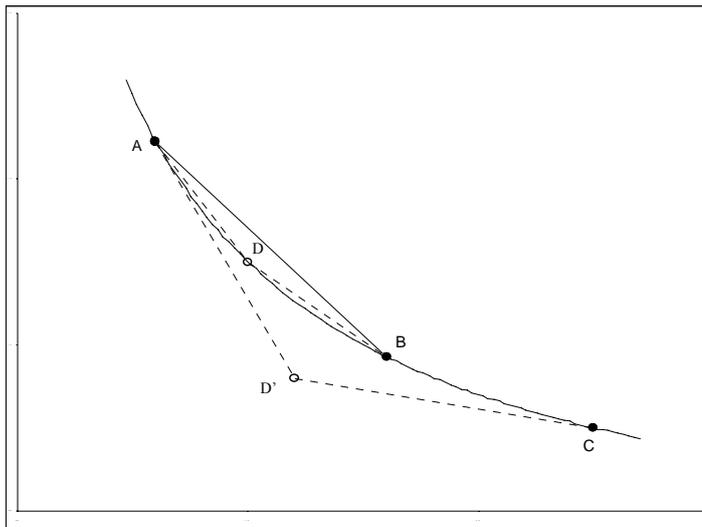


Figura 10 – Presença de *outliers*

- Supomos que a poligonal formada pelas DMUs **A**, **B**, **C** garantam a melhor representação disponível da curva envolvente, obtida da amostra original.
- A DMU **D'** é um *outlier*, deslocando a envolvente de sua real posição. Pode tratar-se de uma DMU de outra população, não sendo recomendável sua introdução na envolvente.

Trata-se de um problema ligado à análise de *outliers* em DEA, visto estarmos nos apoiando nesta técnica para definição da fronteira. A identificação de *outliers* em DEA é um problema abordado com bastante profundidade [Pastor, Ruiz and Sirvent, 1999].

[Forni, 2002] fez um longo e bem estruturado esforço dirigido à identificação de estudos efetuados com enfoque sobre *outliers*.

[Troutt et al, 1996], em um estudo para concessão de crédito, através da técnica DEA, propôs que a fronteira fosse determinada com a orientação de especialistas financeiros, ponderando sobre a massa original de dados, evitando assim a introdução de *outliers*, em análise caso a caso das empresas da amostra.

“*Outliers*” muito fora do centro do agrupamento podem ser identificados através da distância de Mahalanobis [Duda et al, 2001], supondo em primeira aproximação que ocorra uma distribuição normal das DMUs, mesmo conhecendo a hipótese original de estarmos determinando a fronteira de uma distribuição truncada. Porém, “*outliers*” próximos da envolvente não serão identificados e, estes são os mais preocupantes, pois modificam a fronteira.

6.2 A possibilidade de “*feed back*”

Objetivamos, quando do desenvolvimento do modelo, atender situações de uso continuado, por exemplo, na análise de solvência de empresas para concessão de crédito, de modo que a introdução de novas informações seja inerente ao processo. Estas informações devem contribuir positivamente para ajustes, levando ao estabelecimento de soluções mais confiáveis em decisões subseqüentes.

O aprimoramento das fronteiras, com a introdução de novas DMUs, passa a ser fundamental, possibilitando a melhora de performance em novas decisões de classificação. A possibilidade de uma nova DMU produzir uma redefinição para melhor da fronteira, ou modificar para pior por se tratar de um *outlier*, deve levar ao aprofundamento de análises dirigidas a esta identificação.

Possibilidades de introdução de novas DMUs na fronteira foram apresentadas [Almeida, 2000], sugerindo que uma DMU pode ser considerada de fronteira, se sua introdução não elimina atuais DMUs de fronteira e ainda melhora o processo de classificação de uma massa de dados destinada à verificação do modelo, como a DMU **D** da Figura 10.

Sugerimos que a DMU **D** produz melhoria no delineamento da envoltória, sendo viável sua introdução. Assim, esta possibilidade de *feed back* constitui nossa resposta para garantir atualizações constantes nos parâmetros do modelo.

7 Um particular estudo de caso

Vamos aqui apresentar um particular problema envolvendo dois grupos onde, como base de dados, utilizamos um exemplo desenvolvido em livro [Hair et al, 1998]. Este exemplo, constituído de 14 variáveis, foi adotado ao longo do livro para apresentar diversas técnicas.

Para o problema de classificação baseado em análise discriminante, os autores procuraram discriminar a variável X_{11} , a partir das variáveis discriminatórias X_1 , X_3 e X_7 , identificadas como as mais adequadas para este fim.

Neste caso procura-se interpretar como empresas clientes efetuam suas compras, ou seja, se baseadas apenas nas características específicas do produto ou se empregam a análise do valor total da compra. A empresa fornecedora pode então alterar apresentações de vendas e benefícios oferecidos, conforme a característica de cada empresa compradora, melhorando a performance de vendas. Assim:

X_1 – Velocidade de entrega dos pedidos.

X_3 – Flexibilidade de preços. Como os representantes avaliam a política de preços da empresa.

X_7 – Qualidade do produto.

X_{11} – Variável com duas categorias. $X_{11} = 0$ se o comprador se baseia apenas nas características específicas do produto (identificado como comprador do grupo 0) e $X_{11} = 1$ se emprega a análise do valor total da compra (comprador do grupo 1).

Da amostra, constituída de 100 observações, os autores utilizaram parte (60 observações) para calibrar o modelo e outra parte para validar o modelo (40 observações).

Utilizando o mesmo conjunto de dados, podemos adotar, em nosso modelo, que as variáveis de classificação apresentam características opostas em relação aos dois grupos, ou seja, quando favoráveis em um grupo resultam desfavoráveis em outro e, vice versa. Tal não se deve necessariamente à relação existente entre os dois grupos, mas pela simples possibilidade de melhor explorarmos a característica discriminatória destas variáveis. Assim:

As variáveis X_1 e X_3 são de fato favoráveis ao grupo 1, pois os compradores deste grupo analisam a compra em seu todo e não apenas as especificações do produto. Quanto maior seu valor, mais atrai o comprador. Para o grupo 0 elas são de importância menor e, vamos considerá-las como “desfavoráveis”, para melhor explorar a característica discriminatória destas pois, nos valores muito altos, se encontram os compradores do

grupo 1, podendo supor *outlier* a presença de um comprador do grupo 0. A variável X_7 é extremamente favorável ao grupo 0 e, pelas mesmas razões apresentadas para X_1 e X_3 , vamos considerá-la como “desfavorável” ao grupo 1. A construção desta fronteira, melhor ilustrada no início da seção 7.1, não é uma restrição ao uso do modelo pois, de uma maneira geral, as variáveis são idealizadas probabilisticamente ilimitadas, mas na prática são limitadas superior e inferiormente. Porém, a fronteira assim obtida, pode ser conceitualmente criticada, face ao desenvolvimento proposto na seção 3, sendo defensável devido aos bons resultados práticos.

A Tabela 1 apresenta os resultados obtidos com os dados de calibração, para análise discriminante, conforme apresentado pelos autores.

A Tabela 2 apresenta os resultados obtidos com os dados de calibração, conforme modelo proposto.

Tabela 1 - Amostra de Calibração - Análise Discriminante

| | | Classificado | | | |
|-----------|-------|--------------|----|-------|----------|
| | | G0 | G1 | Total | % Acerto |
| Observado | G0 | 21 | 1 | 22 | 95,5% |
| | G1 | 4 | 34 | 38 | 89,5% |
| | Total | 25 | 35 | 60 | 91,7% |

Tabela 2 - Amostra de Calibração - Modelo proposto

| | | Classificado | | | |
|-----------|-------|--------------|----|-------|----------|
| | | G0 | G1 | Total | % Acerto |
| Observado | G0 | 21 | 1 | 22 | 95,5% |
| | G1 | 2 | 36 | 38 | 94,7% |
| | Total | 23 | 37 | 60 | 95,0% |

A Tabela 3 apresenta os resultados obtidos sobre a amostra de validação, ao utilizarmos nosso modelo. Verifica-se que uma observação do grupo 0 e outra do grupo 1 não puderam ser classificadas, pois apresentaram $h_G < 0$ relativamente às duas fronteiras, ou seja, se apresentaram fora dos dois grupos.

Tabela 3 - Amostra de Validação - Fronteiras originais

| | | Classificado | | | |
|-----------|-------|--------------|----|-------------------|-------|
| | | G0 | G1 | Sem Classificação | Total |
| Observado | G0 | 14 | 3 | 1 (*) | 18 |
| | G1 | 2 | 19 | 1 (*) | 22 |
| | Total | 16 | 22 | 2 | 40 |

(*) DMU 57 do grupo 0 e DMU 76 do grupo 1

Este é o momento de analisarmos se estas duas observações tem característica *outlier* ou podem ser utilizadas para aperfeiçoamento das envoltórias. Deste modo, o próprio modelo evidencia quais novas DMUs devem ser utilizadas na análise.

No caso da DMU 57, a introdução na envoltória em nada alterou as DMUs originalmente definidoras da envoltória. Também em nada alterou a classificação das amostras de calibração e de validação, salvo o fato de agora, a mesma se mostrar incluída no grupo 0, no teste de validação.

Já a inclusão da DMU 76 colocou as DMUs 82 e 84, originalmente de envoltória, ligeiramente fora da mesma, com $h_{G82} = 0,02$ e $h_{G84} = 0,03$. Quanto ao resto, em nada alterou a classificação das amostras de calibração e de validação, salvo o fato de agora a mesma se mostrar incluída no grupo 1, no teste de validação.

Vamos considerar então a possibilidade de atualizarmos as fronteiras. O resultado na amostra de validação se encontra nas tabelas 4 e 5, evidenciando resultado positivo para o modelo proposto, frente análise discriminante.

Tabela 4 - Amostra de Validação - Análise Discriminante

| | | Classificado | | | |
|-----------|-------|--------------|----|-------|----------|
| | | G0 | G1 | Total | % Acerto |
| Observado | G0 | 15 | 3 | 18 | 83,3% |
| | G1 | 3 | 19 | 22 | 86,4% |
| | Total | 18 | 22 | 40 | 85,0% |

Tabela 5 - Amostra de Validação – Modelo proposto, fronteiras atualizadas

| | | Classificado | | | |
|-----------|-------|--------------|----|-------|----------|
| | | G0 | G1 | Total | % Acerto |
| Observado | G0 | 15 | 3 | 18 | 83,3% |
| | G1 | 2 | 20 | 22 | 90,9% |
| | Total | 17 | 23 | 40 | 87,5% |

Finalmente estamos apresentando, na Tabela 6, os resultados do modelo, quando aplicado a toda a amostra de validação com fronteiras atualizadas.

Tabela 6: Resultados sobre a amostra de verificação

| Amostra de Análise | Condição real | Front. Grupo 0 h_{G0} | Front. Grupo 1 h_{G1} | Classificação | |
|--------------------|---------------|----------------------------|----------------------------|-----------------------|-----------|
| | | | | Critério: Maior h_G | Resultado |
| 3 | G0 | 0,33 | < 0 | G0 | ERRO |
| 4 | G0 | 0,53 | < 0 | G0 | |
| 10 | G0 | 0,21 | < 0 | G0 | |
| 27 | G0 | 0,45 | < 0 | G0 | |
| 30 | G0 | 0,05 | < 0 | G0 | |
| 34 | G0 | 0,41 | < 0 | G0 | |
| 35 | G0 | < 0 | 0,48 | G1 | |
| 37 | G0 | 0,67 | < 0 | G0 | |
| 40 | G0 | 1,07 | < 0 | G0 | |
| 41 | G0 | 0,87 | < 0 | G0 | |
| 57 | G0 | 0 | < 0 | G0 | |
| 60 | G0 | 0,35 | < 0 | G0 | |
| 75 | G0 | 0,54 | < 0 | G0 | |
| 83 | G0 | 1,27 | < 0 | G0 | |
| 85 | G0 | < 0 | 0,48 | G1 | |
| 87 | G0 | < 0 | 0,48 | G1 | |
| 94 | G0 | 1,11 | < 0 | G0 | |
| 98 | G0 | 1,14 | < 0 | G0 | |
| 9 | G1 | < 0 | 0,43 | G1 | ERRO |
| 16 | G1 | < 0 | 1,65 | G1 | |
| 18 | G1 | < 0 | 0,70 | G1 | |
| 19 | G1 | < 0 | 0,85 | G1 | |
| 21 | G1 | < 0 | 0,75 | G1 | |
| 22 | G1 | < 0 | 1,13 | G1 | |
| 38 | G1 | < 0 | 0,48 | G1 | |
| 44 | G1 | < 0 | 1,90 | G1 | |
| 46 | G1 | < 0 | 0,99 | G1 | |
| 55 | G1 | < 0 | 1,09 | G1 | |
| 56 | G1 | 0,35 | < 0 | G0 | |
| 62 | G1 | < 0 | 1,71 | G1 | |
| 63 | G1 | < 0 | 0,49 | G1 | |
| 64 | G1 | < 0 | 0,06 | G1 | |
| 66 | G1 | < 0 | 0,66 | G1 | |
| 69 | G1 | < 0 | 1,39 | G1 | |
| 74 | G1 | < 0 | 0,48 | G1 | |
| 76 | G1 | < 0 | 0,00 | G1 | |
| 77 | G1 | < 0 | 1,11 | G1 | |
| 78 | G1 | < 0 | 1,48 | G1 | |
| 91 | G1 | 0,29 | < 0 | G0 | |
| 100 | G1 | < 0 | 0,93 | G1 | |

7.1 Considerações sobre as fronteiras no Estudo de Caso

Como todo modelo desenvolvido para classificação, existem limitações a serem observadas.

No modelo aqui desenvolvido, pode ocorrer que dois grupos apresentem todas as variáveis com as mesmas características, como na Figura 11, onde as duas variáveis são favoráveis aos dois grupos. Neste caso pode ocorrer que a fronteira de um grupo fique inserida na região domínio do outro grupo e, se a variância do grupo interno (grupo b) for maior ou igual a do grupo externo, o critério da probabilidade não se aplica, pois levaria à classificação de todas DMUs no grupo externo (grupo a). Com relação ao grupo interno, conseguiria apenas identificar as DMUs fora da região H_b , domínio deste grupo.

Uma alternativa seria considerar que, para o grupo externo, ocorre também uma limitação superior das variáveis, fornecendo outra fronteira (tracejada na Figura 11), generalizando a conceituação de envoltória do grupo externo, adotando que as variáveis são limitadas, inferior e superiormente. Trabalharmos com esta nova fronteira para o grupo externo. Na seção 7, apesar de a situação não se ter configurado tão drástica, adotamos este procedimento, para obtermos a maior eficiência discriminatória das variáveis, conforme as justificativas que foram apresentadas.

Das considerações acima verificamos que o modelo, com as fronteiras originalmente propostas na seção 3, atinge eficiência máxima na discriminação de dois grupos, quando estes apresentam características opostas. Um exemplo desta situação são os casos de “*Credit Scoring*”, onde as variáveis favoráveis ao grupo de empresas solventes se apresentam desfavoráveis ao grupo de empresas insolventes e vice-versa, dispensando considerações adicionais sobre construção de novas envoltórias.

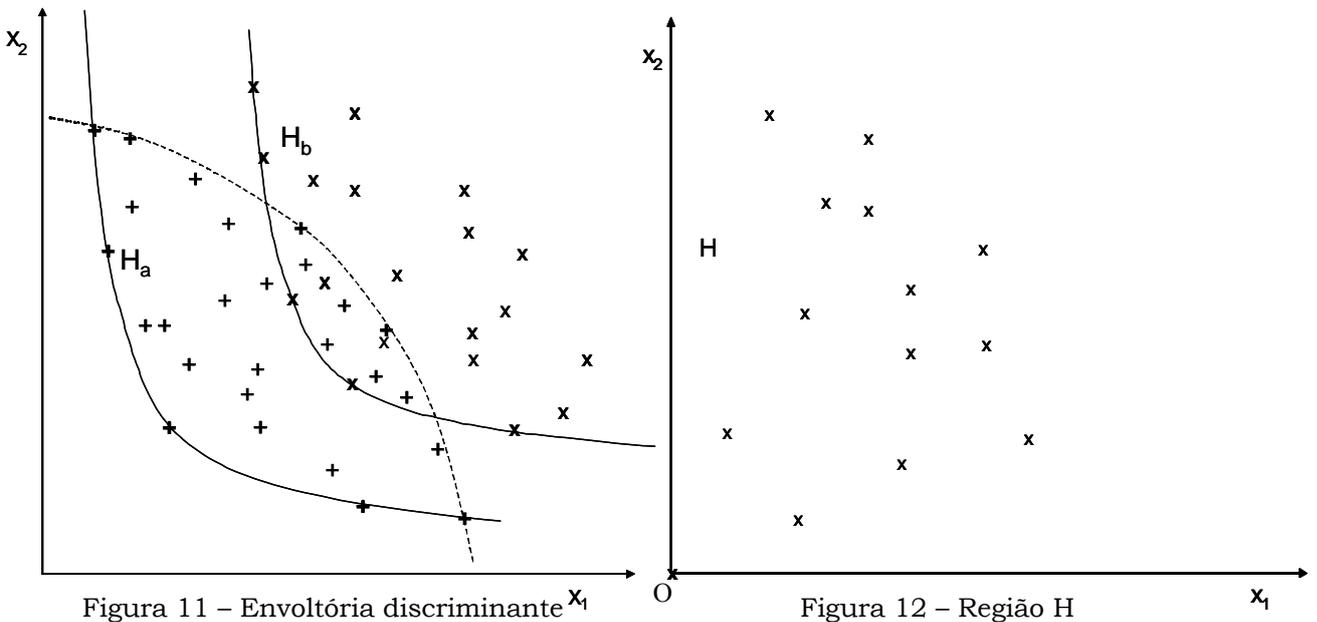


Figura 11 – Envoltória discriminante x_1

Figura 12 – Região H

Temos outra limitação, ao utilizamos a solução aproximada, quando o valor mínimo de todas as variáveis ajustadas ocorre para a mesma DMU. A região H incluirá a origem no processo de ajuste das variáveis, conforme Figura 12. Neste caso a medida h não pode ser definida na equação 7.

Porém pretendemos realçar que desenvolvemos um modelo para atender ao requisito de existência de fronteira, originada no fato de as variáveis serem limitadas. Nos preocupamos em evitar o erro de classificação de DMUs fora da fronteira, possibilitando a tomada de decisão em situações limites. Procuramos minimizar o erro Tipo 2 [Costa Neto, 2002], ao estabelecermos um limite para tomada de decisão. Por exemplo, em casos de *Credit Scoring*, para uma empresa espacialmente localizada fora da fronteira de solvência, ou seja, tratando-se efetivamente de uma empresa condenada à insolvência

(caso a fronteira esteja corretamente definida), não estaríamos incorrendo em erro Tipo 2, ou seja, aceitarmos que a empresa seja solvente, sendo falsa esta hipótese, apoiando o fornecimento de crédito à mesma.

8 Conclusões

A apresentação de um caso envolvendo dois grupos, na seção 7, possibilitou a verificação de pontos importantes considerados durante o desenvolvimento do modelo, como:

- capacidade de identificação de *outliers*,
- independência dos parâmetros do modelo face ao tamanho das populações de cada grupo,
- evitar erro de classificação de DMUs fora da fronteira ($h < 0$).
O erro Tipo 2, conforme exposto em 7.1, é minimizado, ao ficar estabelecido um limite real (as fronteiras dos grupos) para tomada de decisão,
- possibilidade de melhoria das fronteiras com introdução de dados novos.

A possibilidade de ajustes contínuos da fronteira originalmente estabelecida, conforme novas informações ocorram, melhorando a performance na tomada de novas decisões, é um ponto altamente positivo do modelo.

Deste modo, a possibilidade de levarmos as fronteiras em consideração, ou seja, efetuarmos as análises partindo da fronteira para o interior (e não do centro do agrupamento para fora), através da distância direcional h , é uma alternativa para classificarmos adequadamente as DMUs que estão próximas, mas fora das fronteiras. Estas DMUs são normalmente o foco para uma boa classificação, pois aquelas localizadas próximas aos centros dos diversos agrupamentos normalmente são corretamente classificadas por todas as técnicas de classificação.

9 Referências Bibliográficas

- Almeida, H.R. [2000] Análise de Envoltória de Dados na Decisão de Concessão de Crédito, Anais do XXXII Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional, Outubro, Viçosa MG.
- Cooper W.W., Seiford L.M., Tone K. [2000] Data Envelopment Analysis – A Comprehensive Text with Models, Applications, References and DEA-Solver Software, Boston: Kluwer Academic Publishers, Second Printing.
- Costa Neto P.L. [2002] Estatística, Editora Edgard Blücher Ltda
- Duda R.O., Hart P.E., Stork D.G. [2001] Pattern Classification, John Wiley & Sons Inc.
- Forni A.L.C. [2002] On the Detection of Outliers in Data Envelopment Analysis Methodology, Tese de Mestrado, Instituto Tecnológico de Aeronáutica, São José dos Campos, Brasil
- Hair J.F.J., Anderson R.E., Tatham L.T., Black W.C. [1998] Multivariate Data Analysis, Prentice Hall, Fifth Edition
- Joro T., Korhonen P., Wallenius J. [1998] Structural Comparison of Data Envelopment Analysis and Multiple Objective Linear Programming, *Management Science* 44:7, 962-970
- Meyer P.L. [2000] Probabilidade Aplicada à Estatística, 2ª Edição, Editora LTC SA
- Pastor T. J., Ruiz L.J. and Sirvent I. [1999] A statistical test for detecting influential observation in DEA, *European Journal of Operational Research* 115 (1999) 542-554
- Seiford L.M. and Zhu J. [1998] An Acceptance System Decision Rule With Data Envelopment Analysis, *Computers Ops Res.* Vol.25 Nº 4, pp 329-332
- Troutt M. D., Rai A., Zhang A. [1996] “The Potential use of DEA for Credit Applicant Acceptance Systems, *Computers Ops Res.* Vol.23 Nº 4, pp 405-408

Avaliação da Aquisição de um Ativo de Tecnologia da Informação Através do Método dos Mínimos Quadrados de Monte Carlo

André Fichel Nascimento [†]
Tara Keshar Nanda Baidya [‡]

[†] Depto. de Eng. Industrial, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro (PUC-Rio)
Rua Marquês de São Vicente, 225, Gávea, Rio de Janeiro, RJ, Brasil
fichel@gmail.com

[‡] Depto. de Eng. Industrial, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro (PUC-Rio)
Rua Marquês de São Vicente, 225, Gávea, Rio de Janeiro, RJ, Brasil
baidya@ind.puc-rio.br

Abstract

In this article, a project based on the acquisition of an information technology asset is valued through the real options theory. The contemplated model takes into account uncertainty in costs and benefits to be generated. A numerical solution based on Monte Carlo simulation was developed in order to test the approach.

Resumo

Neste artigo, avalia-se um projeto de aquisição de um ativo de tecnologia de informação, utilizando-se a teoria das opções reais. O modelo adotado admite incerteza quanto aos benefícios e custos do projeto. Para se avaliar o modelo, desenvolveu-se uma solução numérica baseada na simulação de Monte Carlo.

Keywords: Project Valuation, Real Options, Least Squares Monte Carlo Method, Monte Carlo Simulation, Information Technology (IT).

Title: Valuing the Acquisition of an Information Technology Asset Through the Least Squares Monte Carlo Method

1 Introdução

A avaliação de investimentos em tecnologia da informação, ou TI, é considerada por muitos um tabu. Em geral, este tipo de investimento é repleto de incertezas e muitas vezes os ativos são intangíveis, o que dificulta a quantificação de benefícios e custos. No entanto, a adoção de um modelo e o uso da teoria de opções reais pode facilitar a avaliação desses investimentos.

O presente trabalho é parte da dissertação de mestrado de Nascimento (2005), e tem como objetivo aplicar a teoria das opções reais a investimentos de aquisição de ativos de tecnologia da informação. Para isso, primeiramente, adota-se um modelo de opções reais relacionado a investimentos de aquisição de TI. O modelo é descrito em maiores detalhes na próxima seção. Na seção seguinte, utiliza-se um método de simulação de Monte Carlo para desenvolver uma solução numérica para o modelo adotado. Este trabalho enfatiza o desenvolvimento desta solução numérica. Em seguida, elabora-se uma aplicação e testa-se o modelo apresentado. Os resultados numéricos da aplicação são mostrados e comentados na penúltima seção do artigo. Por último, são apresentadas as conclusões obtidas com este estudo.

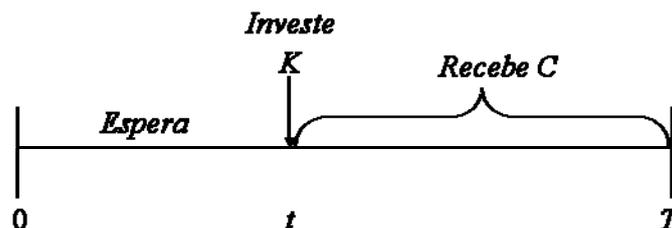
Em estudo semelhante a este, Schwartz e Zozaya (2000) propuseram um modelo para avaliar investimentos em TI utilizando a teoria das opções reais. O modelo em questão é baseado no trabalho de Schwartz e Moon (2000), que avaliam investimentos em pesquisa e desenvolvimento (P&D) baseados em opções reais. Tanto o modelo de Schwartz e Moon (2000) quanto o de Schwartz e Zozaya (2000), baseiam-se no modelo de custos de Pindyck (1993) para representar as incertezas de custo.

O modelo introduzido por Schwartz e Zozaya (2000) agrega tanto a incerteza dos custos quanto à incerteza dos fluxos de caixa do projeto. Um diferencial deste modelo em relação a outros modelos, no entanto, é que neste, considera-se a possibilidade de declínio (ou aumento) nos custos dos ativos de TI. Tal característica permite captar, por exemplo, uma evolução tecnológica e o efeito imediato de obsolescência da tecnologia antiga ou substituída. Esse fenômeno é comum para alguns tipos de *hardware*, como os microprocessadores, que são constantemente atualizados. A atualização desses componentes traz um efeito imediato de desvalorização para o produto antigo. Outro diferencial do modelo de Schwartz e Zozaya (2000) é que os autores classificam os projetos de TI como projetos de aquisição e projetos de desenvolvimento. Cada tipo de projeto está associado a um modelo diferente, porém, ambos compõem o caso geral de um projeto genérico de TI.

O modelo adotado neste trabalho baseia-se no modelo de Schwartz e Zozaya (2000) para projetos de aquisição de TI. No entanto, a principal diferença entre os modelos está no procedimento numérico utilizado para avaliar as aplicações. Schwartz e Zozaya (2000) utilizaram métodos de diferenças finitas para avaliar os projetos de TI, tanto de desenvolvimento quanto de aquisição. Já neste artigo, desenvolveu-se uma solução numérica baseada no método de mínimos quadrados de Monte Carlo, desenvolvido por Longstaff e Schwartz (2001), para avaliar um projeto de aquisição de TI.

2 Modelo para Projetos de Aquisição

Supõe-se que uma empresa deseja adquirir um ativo de TI. A aquisição consiste em um investimento onde a empresa tem a opção de incorrer em um custo K para obter um ativo de TI. O valor de K só será conhecido com certeza no instante em que se investir no projeto. No entanto, há incerteza sobre as mudanças futuras de K . Uma vez adquirido o ativo, a empresa receberá, até o término da vida útil (T) do mesmo, um conjunto de fluxos de caixa (C), que representam os benefícios diferenciais atrelados à aquisição do ativo de TI. O diagrama do projeto de aquisição pode ser visto na figura 1.



Fonte: Schwartz e Zozaya (2000), p.4

Figura 1: Diagrama do projeto de TI de aquisição

A oportunidade de se investir em um projeto de aquisição de TI é semelhante a uma opção de compra, ou *call*, americana. A qualquer momento pode-se investir no projeto, adquirindo-se um ativo de TI, o que equivale a exercer a opção de compra. A diferença é que o preço de exercício varia estocasticamente e o ativo base acumula após o exercício da opção. Neste modelo, o investimento é instantâneo, mas os benefícios do ativo adquirido não. Os benefícios são distribuídos à firma investidora desde o instante em que o ativo é adquirido até o instante em que a tecnologia não permite mais a geração de renda econômica. O custo para se adquirir o ativo de TI, K , segue o seguinte processo:

$$dK = \delta K dt + \gamma K dw \quad (1)$$

Na equação acima, δ mede a mudança nos custos de TI, γ é a volatilidade dos custos e dw é um incremento de Wiener possivelmente correlacionado com o mercado.

Uma vez tendo investido no projeto, a empresa passa a desfrutar dos benefícios do ativo de TI adquirido. Tais benefícios vêm na forma de fluxos de caixas diferenciais C . A evolução destes fluxos de caixa no tempo é dada por:

$$dC = \alpha C dt + \phi C dx, \quad (2)$$

onde ϕ é a volatilidade instantânea correspondente às mudanças proporcionais a C , α é o parâmetro de tendência do processo e dx é um incremento de Wiener, possivelmente correlacionado com o mercado. Admite-se que os processos das variáveis de estado possam estar correlacionados. Sendo assim, pode-se escrever:

$$dw dx = \rho_{dw dx} dt \quad (3)$$

2.1 Valor do Ativo de TI

Em um instante τ qualquer, onde $0 \leq \tau \leq T$, o valor do ativo de TI pode ser calculado como sendo o valor presente esperado da soma dos fluxos de caixa futuros, medidos a partir do momento em que o ativo é adquirido até o final do último intervalo T , onde a tecnologia ainda proporciona a geração dos fluxos. Portanto, em tempo contínuo, o valor do ativo de TI no instante τ é dado por:

$$V(C, \tau) = \hat{E} \left[\int_{\tau}^T C(t) e^{-r t} dt \right], \quad (4)$$

onde r é a taxa de desconto livre de risco. Observa-se que, como o ativo só pode ser adquirido após o investimento, o valor de V independe de K .

Mantendo a mesma linha do modelo anterior, o processo dos fluxos de caixa diferenciais é ajustado ao risco de acordo com a seguinte expressão:

$$dC = (\alpha - \eta_c) C dt + \phi C dx \Rightarrow dC = \alpha^* C dt + \phi C dx \quad (5)$$

Na expressão (5), α^* é o parâmetro de tendência ajustado ao risco e η_c é o prêmio de risco associado ao processo.

O valor do ativo pode enfim ser obtido utilizando-se o processo ajustado ao risco acima e resolvendo-se a integral da fórmula (4). Pode-se verificar que o valor esperado sobre a integral no intervalo (τ, T) é dado por:

$$V(C, \tau) = \frac{C}{r - \alpha^*} \left[1 - e^{-(r - \alpha^*)(T - \tau)} \right] \quad (6)$$

Neste caso, assume-se que $\alpha^* < r$. A expressão acima nada mais é que o valor presente de uma série geométrica finita em tempo contínuo. Analisando-se a expressão, não é difícil perceber que, como T é finito, o valor do projeto diminui cada vez que o investimento é adiado. O instante T pode ser interpretado como o término da vida útil do ativo de TI.

2.2 Valor da Oportunidade de Investimento

Ao contrário do valor do ativo de TI, o valor da oportunidade de investimento depende de ambas as variáveis de estado, C e K . Por isso, a volatilidade destas variáveis tem influência direta sobre a decisão ótima de investimento. Assim como C , K é um valor esperado de uma variável aleatória e, portanto, deve estar associado a um prêmio de risco. O processo de K pode ser ajustado ao risco da seguinte forma:

$$dK = (\delta - \eta_k)Kdt + \gamma Kdw \quad (7)$$

Nesta equação, η_k é o prêmio de risco associado ao processo de K .

Para se obter o valor ótimo da oportunidade de investimento, utiliza-se novamente a equação de Bellman para tempo contínuo, cujo valor na região de continuação é dado por:

$$rF(C, K, t) = \frac{1}{dt} \hat{E}[dF] \quad (8)$$

onde $F(C, K, t)$ representa o valor da oportunidade de investimento em um instante t e $0 \leq t \leq T$.

A seguir, utiliza-se o lema de Itô para se obter uma expressão para dF . Então, substituindo-se a expressão para dF na equação de Bellman e rearranjando os termos, obtém-se a seguinte equação diferencial parcial:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \phi^2 C^2 F_{CC} + \frac{1}{2} \gamma^2 K^2 F_{KK} + \rho_{dwdx} \phi \gamma CK F_{CK} + (\alpha - \eta_c) CF_C \\ & + (\delta - \eta_k) KF_K + F_t - rF = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

A solução da equação (9) deverá satisfazer as seguintes condições de contorno:

$$F(C, K, T) = 0 \quad (10)$$

$$F(C, K, t) \geq \max[0, V(C, t) - K(C, t)] \quad (11)$$

A condição (10) indica o fim da vida útil do ativo TI, e conseqüentemente o fim da geração de renda econômica através do mesmo. Já a condição (11) garante a não negatividade dos valores de $F(C, K, t)$. Uma análise mais detalhada sobre o desenvolvimento matemático deste modelo pode ser vista na dissertação de mestrado de Nascimento (2005).

3 Solução Numérica

Para solucionar este modelo, neste estudo, optou-se por implementar uma solução numérica baseada no método LSM (*Least-Squares Monte Carlo Method*), de Longstaff e Schwartz (2001). Estudos recentes, como os de Nascimento (2005) e Frota (2003), mostram que o método LSM é numericamente eficiente, preciso e flexível em relação a outros métodos numéricos de avaliação de opções americanas. Pelo fato deste modelo considerar um investimento pontual, a solução implementada é simples e o método LSM requer poucas adaptações. Os algoritmos desenvolvidos para os projetos com e sem a opção de espera estão relacionados a seguir.

3.1 Valor do Projeto com Opção de Espera

Antes de se aplicar o método LSM, deve-se simular os caminhos para as variáveis de estado. No modelo para projetos de aquisição de TI, ambas variáveis consideradas seguem o MGB (Movimento Geométrico Browniano). Para gerar estes caminhos, discretizou-se os processos de K e C como a seguir:

$$K(t + \Delta t) = K(t) \exp \left[\left((\delta - \eta_k) - \frac{\gamma^2}{2} \right) \Delta t + \gamma (\Delta t)^{1/2} \varepsilon_1 \right] \quad (12)$$

$$C(t + \Delta t) = C(t) \exp \left[\left(\alpha^* - \frac{\phi^2}{2} \right) \Delta t + \phi (\Delta t)^{1/2} \varepsilon_2 \right] \quad (13)$$

Com isso, cada um dos N caminhos simulados é representado por um vetor com $n = \frac{T}{\Delta t}$ datas de exercício. O passo seguinte consiste no cálculo do fluxo de caixa do projeto para o instante final, T . Neste instante, o valor do *payoff* deverá ser dado por:

$$\pi(T) = \max [V(T) - K(T), 0] \quad (14)$$

Para todos os caminhos, o valor do projeto no instante final é igual ao fluxo de caixa recebido no mesmo instante, isto é, $V(T) = C(T)$. Isto ocorre porque não há geração de fluxo de caixas após o instante final. Para todos os instantes anteriores, o valor do ativo é acumulativo, e deverá ser dado por:

$$V(i, j) = \exp(-r\Delta t)V(i, j+1) + C(i, j)\Delta t, \quad (15)$$

onde i representa o caminho simulado e j o instante analisado.

A seguir, prossegue-se para o instante j que imediatamente antecede o vencimento do projeto e regride-se o valor futuro descontado $\exp(-r\Delta t)V(i, j+1)$ com funções das variáveis de estado K e C . O conjunto de funções base utilizado para a regressão é um polinômio de nove termos, mais uma constante, incluindo termos cruzados das variáveis de estado e termos até o grau três. Dessa forma, o valor estimado pela regressão é dado pela expressão a seguir:

$$\begin{aligned} \hat{V}(i, j) = & \alpha_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_1^2 + \alpha_4 x_1 x_2 + \alpha_5 x_2^2 \\ & + \alpha_6 x_1^3 + \alpha_7 x_1^2 x_2 + \alpha_8 x_1 x_2^2 + \alpha_9 x_2^3 \end{aligned} \quad (16)$$

Na expressão (16) acima os valores dos coeficientes α_0 a α_n são calculados pela regressão. As variáveis x_1 e x_2 acima representam os fluxos de caixa e os custos de investimento, respectivamente, para o caminho e instante analisados. O valor $\hat{V}(i, j)$, estimado pela regressão, representa o valor de continuação do projeto.

Uma vez executada a regressão, comparam-se os valores de continuação obtidos com os valores de exercício no instante atual. Para todos os caminhos onde o valor de exercício é maior, exerce-se a opção de investimento e atualiza-se a regra ótima de exercício. Já para os caminhos onde o valor de continuação é maior, o fluxo de caixa é nulo e adia-se o investimento.

Em seguida, progride-se recursivamente para trás e, para cada instante, repete-se o procedimento anterior, atualizando-se a matriz de fluxos de caixa e a regra ótima de investimento. Uma vez finalizado o procedimento, aplica-se a regra ótima aos fluxos de caixa do projeto e obtém-se o valor presente dos fluxos resultantes. O valor do projeto com a opção de espera será dado então pela média dos valores presentes obtidos em cada simulação.

3.2 Valor do Projeto sem Opção de Espera

Para se obter o valor do projeto sem a opção de espera, primeiramente deve-se calcular o valor presente do ativo de TI para o instante inicial. Para isso, calcula-se a matriz de valores do ativo para todas as datas de exercício. A seguir, calculam-se os fluxos de caixa resultantes do investimento, para a primeira data de exercício, e descontam-se novamente os valores para instante zero. Como neste caso não há opção de espera, o *payoff* do instante inicial será dado por:

$$\pi(1) = V(1) - K(1)$$

Para este procedimento, considerou-se que o exercício, assim como o fluxo de caixa, ocorrem sempre ao final de cada período. Com isso, o final do período inicial se dá no instante um. O valor do projeto sem a opção de espera é dado então pela média dos fluxos de caixa no instante inicial trazido ao valor presente.

4 Aplicação: Aquisição de um Sistema de Gerência de Estoque

Considera-se que uma empresa atacadista de autopeças esteja disposta a investir em um sistema de gerenciamento de estoque. A empresa pretende adquirir um sistema de gestão operacional de seu depósito ou armazém, também, conhecido como *Warehouse Management System* (WMS). Para isso, a empresa espera investir R\$ 300 mil, entre consultoria, *software* e *hardware*. Uma vez tendo efetuado o investimento, a empresa passaria a adquirir, desde já, os benefícios do ativo de TI. Assume-se que, se a empresa adquirisse o sistema WMS, a mesma passaria a economizar R\$50.000 por ano, entre mão de obra e gastos operacionais. Supõe-se, no entanto, que o sistema oferecido à empresa encontre-se totalmente depreciado daqui a dez anos, tornando-se obsoleto após este período. Isto significa dizer que o ativo de TI tem uma vida útil de 10 anos, e que após este período, não deverá proporcionar mais renda econômica à empresa.

O investimento tem característica irreversível e deverá ser exercido pontualmente. No entanto, admite-se que a empresa possui uma opção de adiar o investimento até o momento mais propício para a sua execução, ou até o final da vida útil do ativo de TI. Embora a opção de espera evite a possibilidade de um prejuízo, quanto mais a empresa esperar para investir, menos benefícios a mesma desfrutará, pois a vida útil do projeto é fixa.

Supõe-se que os custos e fluxos de caixa do projeto ambos sigam o movimento geométrico browniano, estando assim de acordo com o modelo anteriormente descrito. Para os custos, considerou-se uma volatilidade de 0,20, enquanto que para o fluxo de caixa, admitiu-se uma volatilidade de 0,30. O parâmetro de tendência dos fluxos de caixa foi considerado negativo e igual a -0,02. Assim, a redução dos fluxos refletirá a depreciação do ativo de TI no tempo. Já o parâmetro que mede as mudanças nos custos de ativos de TI para o projeto foi estimado baseado em uma suposição. Supõe-se que, por conta da rápida evolução tecnológica, os custos do investimento caem exponencialmente, em média, 50% a cada cinco anos. Assim, a taxa de mudança nos custos pode ser obtida da seguinte forma:

$$\exp(-\delta\tau) = 0,5 \quad \therefore \quad \exp(-5\delta) = 0,5 \quad \Rightarrow \quad -5\delta = \ln(0,5) \quad \Rightarrow \quad \delta \cong -0,14$$

A taxa livre de risco adotada foi de 5% a.a. e o prêmio de risco do fluxo de caixa foi de 3% a.a. Por simplicidade, assumiu-se que o prêmio de risco relacionado aos custos e a correlação entre custo e fluxo de caixa são ambos iguais a zero. Na tabela 1 seguir, relacionam-se os parâmetros do modelo, adotados para este exemplo:

Tabela 1: Parâmetros do exemplo numérico do projeto de aquisição de um ativo de TI

| Parâmetro | Símbolo | Valor |
|--|----------|-------------------|
| Custo de investimento esperado | K | R\$300 mil |
| Taxa de mudança nos custos de ativos de TI | δ | -0,14 |
| Volatilidade dos custos | γ | 0,2 |
| Prêmio de risco dos custos | η_K | 0 |
| Fluxo de caixa estimado | C | R\$50 mil por ano |
| Parâmetro de tendência | α | -0,02 |
| Volatilidade do fluxo de caixa | ϕ | 0,30 |
| Prêmio de risco do fluxo de caixa | η_C | 3% a.a. |
| Tempo de vida útil do ativo de TI | T | 10 anos |
| Taxa livre de risco | r | 5% a.a. |
| Correlação entre as incertezas de custo e fluxo de caixa | ρ | 0 |

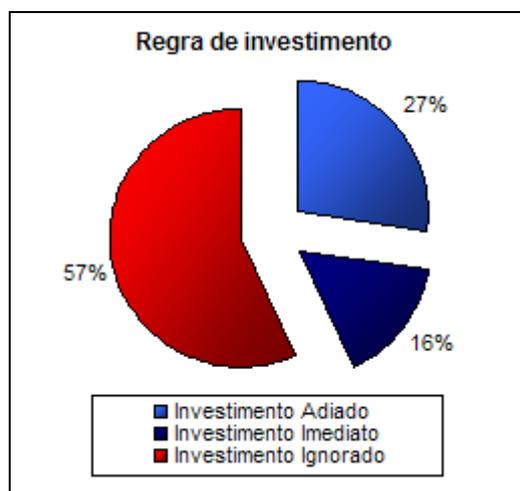
Fonte: Nascimento (2005)

4.1 Resultados Numéricos

Para se obter os resultados numéricos, utilizou-se a solução numérica descrita anteriormente. Para simulação, utilizou-se cinco repetições de uma simulação com 50.000 caminhos para se obter o valor do projeto. Com isso, o valor do projeto é dado pela média das cinco execuções. Cada intervalo de tempo foi discretizado em 10 partes, sendo que os fluxos de caixa só aparecem ao final de cada período. Da mesma forma, o investimento é exercível também ao final dos períodos. Para o cálculo do valor da oportunidade de investimento, utilizou-se como função base para as regressões um polinômio de nove termos, além de uma constante, onde foram incluídos termos cruzados das variáveis de estado e termos até o grau três.

Os resultados obtidos mostraram que o valor da oportunidade de investimento foi, em média, igual a R\$70.831, com um desvio padrão abaixo de 1%. Já a média do VPL (Valor Presente Líquido) foi bem inferior, ficando por volta dos R\$20 mil. Com isso, o valor da opção de espera representa, em média, mais de 70% do valor da oportunidade de investimento e mais que o dobro do VPL. A opção de espera é, portanto, extremamente

valiosa neste exemplo e seu valor não deve ser descartado. Uma das razões para que este valor seja tão grande está implícita na figura 2, onde se ilustra o resultado da regra ótima de investimento da simulação.



Fonte: Nascimento (2005)

Figura 2: Diagrama da regra ótima de investimento do projeto com opção de espera

Observando-se o diagrama da regra de investimento, primeiramente, nota-se que a grande maioria dos caminhos foi ignorada. Em outras palavras, dos 50.000 caminhos simulados, em mais da metade não houve sequer investimento. Sendo assim, para estes caminhos, adiou-se o investimento até o último instante e, neste, decidiu-se por adiá-lo permanentemente. Imagina-se que para o cálculo do VPL, estes caminhos tenham sido exercidos e, portanto, acumulou-se prejuízo. O fato de a opção de espera limitar estas perdas torna o valor da oportunidade bastante alto, assim como o valor da opção. Repara-se também, que o percentual de investimentos adiados é quase o dobro do percentual de exercícios imediatos. Esse fenômeno também contribuiu para o alto valor da opção de espera. Maiores detalhes sobre os resultados numéricos desta simulação, incluindo-se um estudo de análise de sensibilidade dos parâmetros do modelo, são encontrados na dissertação de mestrado de Nascimento (2005).

5 Conclusões

No presente trabalho, conseguiu-se avaliar um projeto de aquisição de um ativo de TI com êxito. Embora a aplicação elaborada não tenha sido baseada em um caso real, a quantificação de valores e resultados numéricos indica que, tecnicamente, é possível avaliar investimentos deste tipo utilizando-se o modelo e o procedimento numérico adotados. Em termos práticos, no entanto, é preciso adequar os parâmetros do modelo à realidade dos projetos. As características de investimentos reais podem incluir outras variáveis e/ou outras opções reais, desconsideradas neste estudo. Neste caso, sugere-se a extensão do modelo apresentado. Esta é uma recomendação para trabalhos futuros.

Com relação ao procedimento numérico utilizado, constatou-se que a adaptação do método LSM para avaliar a aquisição de um ativo de TI foi feita de forma bastante direta, já que o custo de investimento é incorrido de forma pontual. Analisando-se os resultados numéricos, pôde-se perceber o valor estratégico obtido através da simulação de Monte Carlo e das opções reais. Tal valor tem sublim importância para o tomador de decisões e é fundamental para a decisão de orçamentação de capital.

6 Agradecimentos

Este trabalho não teria sido concebido sem o suporte da CAPES e do Departamento de Engenharia Industrial da PUC-Rio.

7 Referências

Frota, A. E. F. (2003) Avaliação de Opções Americanas Tradicionais e Complexas. 2003. 143f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Industrial), Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro.

Longstaff, F.A.; Schwartz, E.S. (2001) Valuing American Options By Simulation: A Simple Least-Square Approach. *Review of Financial Studies*, v.14, n.1, pp.113-147.

Nascimento, A. F. (2005) Avaliação de Investimentos em Tecnologia da Informação: uma Perspectiva de Opções Reais. 2005. 151f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Industrial), Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro.

Pindyck, R.S. (1993) Investments of Uncertain Cost. *Journal of Financial Economics*. Vol. 34, pp. 53-76.

Schwartz, E.S.; Moon, M. (2000) Evaluating Research and Development Investments, in Project Flexibility, Agency, and Competition. Oxford University Press: New York, pp. 85-106

Schwartz, E. S.; Zozaya-Gorostiza, C. (2000) Valuation of Information Technology Investments as Real Options. In: American Finance Association 2001 Meeting, 2001, New Orleans. Disponível em: <<http://ssrn.com/abstract=246576>> Acesso em: 11 mar. 2004

Escores de Variáveis Latentes: Uma Opção para o Índice ANEEL de Satisfação do Consumidor

Evandro Luiz Mendes †
Tufi Machado Soares ‡
Reinaldo Castro Souza †

† Depto. Eng. Elétrica - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro
Rio de Janeiro – RJ – Brazil
evandro@ons.org.br
reinaldo@ele.puc-rio.br

‡ Depto. Estatística – Universidade Federal de Juiz de Fora
Juiz de Fora – MG – Brazil
tufi@estatística.ufjf.br

Abstract

Structural Equation Models with unobservable variables and measurement error have been used in the production of customers satisfaction indexes to evaluate products and services quality as well as the economic performance of companies, sectors and nations. Previous studies pointed out the PLS (Partial Least Square) better than Maximum Likelihood method to estimate parameters in marketing applications, mainly because of data marketing feature. However, no study has shown the effects of estimation methods in the latent variable scores, specially, in the satisfaction scores. The objective of this study is to analyze the effects of estimation methods in the satisfaction scores based on the IASC model (Customer Satisfaction Index of Brazilian Electricity Regulatory Agency). The data and true scores will be generated by Monte Carlo Simulation and the estimated scores will be compared to the true ones through the following information measures: linear correlation, mutual information and an empirical information measure.

Resumo

Modelos de equações estruturais com variáveis latentes e erros de medidas vêm sendo empregados na produção de índices de satisfação de consumidores para avaliar a qualidade dos produtos e serviços bem como o desempenho econômico de empresas, setores e até de nações. Por se tratar de aplicações do marketing, estudos anteriores apontaram o PLS (*Partial Least Square*) como o método mais adequado para estimação dos parâmetros frente ao método da Máxima Verossimilhança, devido principalmente às características peculiares dos dados dessa natureza. No entanto, nenhum estudo retratou os impactos dos métodos de estimação nos escores das variáveis latentes, em particular, nos escores da satisfação. Portanto, este estudo tem por objetivo analisar os efeitos dos principais métodos de estimação de modelos de equações estruturais nos escores da satisfação tendo como base o modelo do IASC (Índice ANEEL de Satisfação do

Consumidor). Os escores serão estimados a partir de dados simulados, gerados *a priori* os escores verdadeiros. Os escores estimados serão avaliados em relação aos verdadeiros através das seguintes medidas de informação: correlação linear, informação mútua e uma medida empírica de informação.

Keywords: Structural Equation Models, Latent Variable Score, Empirical Information Measure.

Title: Latent Variable Scores: An Option for Customer Satisfaction Index of Brazilian Electricity Regulatory Agency.

1 Introdução

O modelo da satisfação do consumidor baseado em métodos de equações estruturais foi proposto por Fornell *et al* (1996), fundamentado principalmente nos trabalhos de Churchill e Suprenant (1982), Fornell (1992) e Anderson *et al* (1994). Nesse modelo a satisfação do consumidor é definida como uma variável latente de caráter multidimensional. Além da própria satisfação, esse modelo tem a capacidade de avaliar os seus construtos relacionados que são: qualidade percebida, expectativas dos consumidores, valor percebido, reclamações, lealdade ao fornecedor, além de suas inter-relações. Esse modelo vem sendo empregado para avaliar a satisfação do consumidor americano (ACSI - *American Customer Satisfaction Index*) e do consumidor europeu (ECSI - *European Customer Satisfaction Index*). O índice de satisfação é definido como uma ponderação dos atributos de avaliação da satisfação pelos respectivos parâmetros estruturais. A vantagem desta aplicação é que essa ponderação não é subjetiva, mas calculada a partir dos padrões de resposta dos entrevistados (*cf.* Marchetti e Prado, 2001). No Brasil, esse modelo foi adotado pela ANEEL para estimar a satisfação dos consumidores residenciais de energia elétrica, com o objetivo de avaliar os serviços prestados pelas concessionárias de energia elétrica. O IASC (Índice ANEEL de Satisfação do Consumidor) também é utilizado no cálculo do Fator X, nas revisões tarifárias anuais das concessionárias.

Os modelos de equações estruturais se constituem numa vasta classe de modelos que incluem variáveis latentes, erros de medidas nas variáveis dependentes e independentes, múltiplos indicadores, causas recíprocas, simultaneidade e interdependência. Os métodos incluem como casos especiais: procedimentos para análise confirmatória de fatores, regressão múltipla, análise de caminhos (path), modelos de dados dependentes no tempo, estrutura de covariâncias, modelos recursivos e não recursivos para dados de corte e dados longitudinais. Os modelos de equações estruturais são úteis para resolver problemas no marketing e nas tradicionais áreas de sociologia, psicologia, educação e econometria (*cf.* Jöreskog e Sörbom, 1982).

As Estimativas das variáveis latentes, também conhecidas como seus escores, são úteis na análise de diagnósticos bem como na interpretação dos fatores, podendo também ser utilizadas como dados de entrada nos modelos para análises subseqüentes (*cf.* Johnson & Wichern, 1998). Por exemplo, pesquisadores podem utilizar fatores como variáveis independentes em modelos de regressão múltipla, fazendo uso dos seus escores para estimar os parâmetros (*cf.* Lastovicka & Thamodaran, 1991). Nos modelos de equações estruturais os escores podem ser utilizados com as seguintes finalidades: agrupamento e/ou ordenação de indivíduos, estimação da matriz de distúrbios para estudo de sua distribuição, estimação de relacionamentos não lineares entre variáveis latentes, estimação de regressões lineares de escores com variáveis observadas, etc (*cf.* Jöreskog, 2000).

Os escores nos modelos de equações estruturais podem ser estimados diretamente através da metodologia do PLS (*cf.* Dijkstra, 1983), ou indiretamente através da metodologia de Jöreskog no LISREL (*cf.* Jöreskog, 2000). No PLS, os escores são definidos como uma combinação linear exata dos seus indicadores empíricos, sendo estimados antes das relações estruturais do modelo. No LISREL os escores são definidos tal como na análise fatorial, porém levando-se em consideração as relações entre as variáveis latentes do modelo. Neste caso, os escores são estimados após os parâmetros estruturais. No entanto, a metodologia de Jöreskog assegura que os parâmetros estruturais terão as mesmas estimativas, não importando se eles foram estimados por qualquer um dos métodos de estimação do LISREL (ULS – Mínimos Quadrados não Ponderados, GLS – Mínimos Quadrados Generalizados ou ML - Máxima Verossimilhança) ou através de regressões lineares com as variáveis latentes utilizando os seus escores como dados de entrada (*cf.* Jöreskog, 2000).

Portanto, o objetivo deste artigo será avaliar os escores da satisfação estimados através do PLS e do LISREL. Os escores estimados serão comparados com os verdadeiros através das seguintes medidas de informação: correlação linear, informação mútua e uma medida empírica de informação (*cf.* anexo). Os dados e os escores verdadeiros serão gerados através de simulações de Monte Carlo, definindo-se *a priori* os parâmetros estruturais do modelo e as distribuições de probabilidades das variáveis latentes exógenas, erros de medidas e distúrbios aleatórios. Através das simulações, uma extensa gama de modelos será analisada com o objetivo de estabelecer a metodologia de estimação de escores mais apropriada para cada tipo de modelo. Os escores brutos da satisfação, representados pelas próprias notas simuladas aos respectivos indicadores da satisfação, também serão utilizados neste estudo para fins de análise de sensibilidade.

Este artigo está dividido em quatro seções. A primeira apresenta o modelo da satisfação do consumidor utilizado pela ANEEL. A segunda apresenta a metodologia de simulação utilizada para gerar os dados. A terceira apresenta os resultados da análise comparativa entre as metodologias e a última a conclusão do artigo, trazendo comentários sobre os resultados observados. A teoria sobre os modelos de equações estruturais e respectivos métodos de estimação de escores tratados neste artigo poderá ser vista em Bollen (1989), Jöreskog (1982 e 2000), Fornell e Larcker (1981) e Dijkstra (1983). Por último, vale ressaltar que os interesses deste artigo estão centrados na estimação dos escores da satisfação em detrimento da interpretação dos parâmetros estimados - procedimento normalmente realizado para validar e/ou acompanhar os aspectos teóricos subjacentes ao modelo.

2 O Modelo de Satisfação do Consumidor

A Agência Nacional de Energia Elétrica (ANEEL) desenvolveu o IASC com o objetivo de avaliar a qualidade das empresas do ponto de vista do consumidor residencial. Este índice foi definido a partir de uma pesquisa sobre satisfação do consumidor e vem sendo aplicado junto aos clientes residenciais de todas as concessionárias de distribuição de energia elétrica desde julho de 2000. Sendo este índice uma medida numérica unidimensional, ele permite que a ANEEL avalie as empresas sem recorrer a detalhes operacionais. O índice é construído a partir de um levantamento que procura obter a impressão que o consumidor tem em relação aos serviços prestados e à eficiência da concessionária no momento de prestar informações e atender o cliente.

O IASC é baseado no congênere americano ACSI (*American Customer Satisfaction Index*). O objetivo do ACSI é medir a qualidade dos bens e serviços como fruto das experiências dos consumidores. O valor do índice para uma determinada empresa reproduz o seu mercado atendido significando uma medida geral do total de compras e da experiência de consumo (*cf.* Fornell *et al.*, 1996). A premissa básica do ACSI é ser uma medida da satisfação global do consumidor, uniforme e comparável, cuja metodologia de

estimação segue duas propriedades fundamentais. Primeiro, a metodologia deve reconhecer que a satisfação não pode ser medida diretamente por se tratar de uma variável latente (não observada). Segundo, a satisfação não deve ser medida somente na forma direta da experiência de consumo, mas também em conjunto com os seus processos subseqüentes.

A Figura 1 exibe o modelo do IASC e o da avaliação dos escores da Satisfação. Os círculos representam as variáveis latentes e os retângulos os seus respectivos indicadores. As linhas que unem as variáveis latentes definem os relacionamentos entre elas e o sentido da causa e efeito e as que ligam as variáveis observadas às latentes definem os indicadores pelos quais as variáveis latentes se manifestam.

De acordo com a Figura 1a, o modelo do IASC estabelece as seguintes relações: Valor Percebido = $f(\text{Qualidade Percebida})$; Satisfação = $f(\text{Qualidade Percebida e Valor Percebido})$; Confiança = $f(\text{Qualidade Percebida e Satisfação})$; Fidelidade = $f(\text{Confiança e Satisfação})$. Todos os construtos do modelo são avaliados por meio de três indicadores cada, exceto a Confiança no Fornecedor que é avaliada por quarto. Os dados para o cálculo do IASC são obtidos através de uma pesquisa de opinião onde cada questão avalia um tipo de serviço prestado pela concessionária numa escala de 1 a 10. O valor de cada indicador é representado pela média aritmética das notas atribuídas às respectivas questões (cf. Marchetti e Prado, 2001).

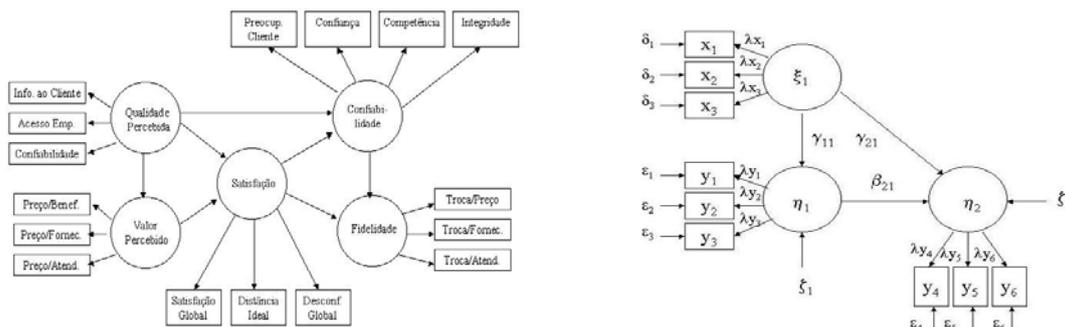


Figura 1: a) Modelo do IASC

b) Modelo de Avaliação da Satisfação

Como o objetivo deste artigo é avaliar os escores da satisfação do consumidor, então o modelo analisado resumirá a satisfação do consumidor somente em função dos seus antecedentes, conforme o diagrama da Figura 1b, onde:

- | | |
|-------------------------------------|--|
| ξ_1 = Qualidade percebida | y_1 = Preço / Benefício |
| η_1 = Valor percebido | y_2 = Preço / Fornecimento |
| η_2 = Satisfação do consumidor | y_3 = Preço / Atendimento |
| x_1 = Informação ao cliente | y_4 = Satisfação global |
| x_2 = Acesso a empresa | y_5 = Distância de uma empresa ideal |
| x_3 = Confiabilidade | y_6 = Desconformidade Global |

Um modelo de equações estruturais é definido conforme a equação 1. A primeira equação é a parte estrutural do modelo e as outras duas são as equações das medidas (cf. Bollen, 1989). Aqui não estão sendo considerados os interceptos das equações.

$$\eta = \beta\eta + \Gamma\xi + \zeta$$

$$\mathbf{y} = \Lambda_y\eta + \varepsilon$$

$$\mathbf{x} = \Lambda_x\xi + \delta$$
(1)

Representando explicitamente a equação 1 para o modelo da Figura 1b, têm-se as seguintes equações em forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \beta_{21} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \gamma_{11} \\ \gamma_{21} \end{bmatrix} \xi_1 + \begin{bmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \lambda x_3 \end{bmatrix} \xi_1 + \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda y_1 & 0 \\ \lambda y_2 & 0 \\ \lambda y_3 & 0 \\ 0 & \lambda y_4 \\ 0 & \lambda y_5 \\ 0 & \lambda y_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} \quad (4)$$

De acordo com o PLS, os escores da satisfação do consumidor são obtidos através da equação 5 (cf. Fornell *et al*, 1996).

$$\hat{\text{IASC}}_j = \sum_{i=1}^6 w_i y_{ij} \quad \forall j = 1 \dots n \quad (5)$$

Onde: w_i s são os pesos associados aos indicadores da satisfação (η_2) estimados pelo PLS, y_{ij} são as notas atribuídas pelos respondentes aos indicadores da satisfação; n é o tamanho da amostra. Os escores brutos da satisfação são calculados fazendo $w_i = 1$.

De acordo com a metodologia de Jöreskog, os escores da satisfação são obtidos através da equação 6 (cf. Jöreskog, 2000).

$$\hat{\text{IASC}}_j = \mathbf{U} \mathbf{D}^{1/2} \mathbf{Z}^{-1} \mathbf{D}^{1/2} \mathbf{U}' \mathbf{A}' \mathbf{\Theta}^{-1} \mathbf{y}_j \quad \forall j = 1 \dots n \quad (6)$$

Onde: o vetor \mathbf{y} contém as notas atribuídas aos indicadores da satisfação e os demais vetores e matrizes formam a matriz de coeficientes que é aplicada aos indicadores.

Através das equações 5 e 6, o IASC será obtido para cada indivíduo da amostra e comparado com os valores verdadeiros através das três medidas de informação mencionadas acima. Os dados e os escores verdadeiros serão gerados através de simulações de Monte Carlo.

3 Simulação de Monte Carlo

O método de simulação de Monte Carlo foi empregado por diversos pesquisadores para resolver inúmeras questões acerca dos modelos de equações estruturais, principalmente sobre os métodos de estimação PLS e LISREL. Por exemplo, Goodhue *et al* (2006) analisaram as estimativas do PLS e do LISREL em pequenas amostras para diversos valores de relações entre as variáveis no modelo, Cassel *et al* (1999) compararam os vieses das estimativas do PLS e do LISREL, Fornell e Bookstein (1982) identificaram soluções impróprias em alguns modelos nas estimativas do LISREL, mas não no PLS, causadas pelas características peculiares dos dados oriundos do marketing, Fornell e Larcker (1981)

avaliaram as estatísticas de ajuste do modelo no LISREL, em particular a estatística χ^2 , para diferentes estruturas de correlações dos dados, Bagozzi (1977) explorou o uso de modelos de equações estruturais no planejamento e análise de dados experimentais de marketing.

O método requer que a simulação parta de um modelo verdadeiro pré-especificado. Logo, os parâmetros estruturais e das medidas do modelo e as distribuições das variáveis latentes exógenas, dos erros de medidas e dos distúrbios aleatórios serão fixados, tendo-se como referência os valores obtidos nos estudos realizados com dados reais dos levantamentos do IASC. Com o apoio de geradores de números aleatórios, as amostras de dados serão geradas para cada modelo especificado. Neste problema, amostras de tamanho 1000 serão geradas para os nove indicadores do modelo da Figura 1b ($\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_6$), que equivale a 1000 questionários preenchidos com os valores dos indicadores calculados.

Os parâmetros estruturais γ_{11} , γ_{21} e β_{21} serão selecionados no intervalo [0,2 ; 0,8] e os parâmetros das medidas λ_{xi} e λ_{yi} no intervalo [0,5 ; 0,8]. Todos os parâmetros estão limitados ao intervalo [0 ; 1].

A variável latente exógena, erros de medidas e distúrbios aleatórios serão gerados a partir de distribuições Normais com média zero e variância constante: $\xi_1 \sim N(0,1)$; $\delta_i \sim N(0, \sigma_{\delta_i}^2)$; $\epsilon_i \sim N(0, \sigma_{\epsilon_i}^2)$; $\zeta_i \sim N(0, \sigma_{\zeta_i}^2)$.

As variáveis latentes η_1 e η_2 serão calculadas para cada indivíduo da amostra através das equações 7 e 8 e a amostra de dados será gerada através das equações 9, 10 e 11. Os escores verdadeiros da satisfação de cada modelo simulado estarão representados pela variável η_2 e serão utilizados na avaliação dos escores estimados.

$$\eta_1 = \gamma_{11} \xi_1 + \zeta_1 \quad (7)$$

$$\eta_2 = \beta_{21} \eta_1 + \gamma_{21} \xi_1 + \zeta_2 \quad (8)$$

$$\mathbf{x}_i = \lambda_{xi} \xi_1 + \delta_i \quad \forall i = 1, 2 \text{ e } 3 \quad (9)$$

$$\mathbf{y}_i = \lambda_{yi} \eta_1 + \epsilon_i \quad \forall i = 1, 2 \text{ e } 3. \quad (10)$$

$$\mathbf{y}_i = \lambda_{yi} \eta_2 + \epsilon_i \quad \forall i = 4, 5 \text{ e } 6. \quad (11)$$

Para garantir a identificabilidade do modelo (*cf.* Bollen, 1989), as seguintes condições serão observadas: (1) A identificação da equação das medidas será realizada considerando as variâncias das variáveis latentes e observadas iguais a 1 (um). Essa condição será inserida na simulação dos dados da seguinte forma: as variâncias dos erros de medidas bem como as dos distúrbios aleatórios serão especificadas através das equações 12, 13, 14 e 15, fazendo com que as variâncias dos dados gerados sejam iguais a 1 (um); (2) A identificação da equação estrutural atenderá à regra Recursiva, pois a matriz Ψ (matriz de covariâncias dos distúrbios aleatórios) é diagonal e a matriz β é triangular inferior por definição.

$$\sigma_{\delta_i}^2 = 1 - \lambda_{xi}^2 \quad \forall i = 1, 2 \text{ e } 3 \quad (12)$$

$$\sigma_{\epsilon_i}^2 = 1 - \lambda_{yi}^2 \quad \forall i = 1, 2, \dots, 6 \quad (13)$$

$$\sigma_{\zeta_1}^2 = 1 - \gamma_{11}^2 \quad (14)$$

$$\sigma_{\zeta_2}^2 = 1 - (\beta_{21}\gamma_{11} + \gamma_{21})^2 + (\gamma_{11}^2 - 1) \beta_{21}^2 \quad (15)$$

A terminologia e a notação adotada por Fornell (*cf.* Fornell & Larcker, 1981) serão utilizadas neste artigo para categorizar as amostras simuladas. Seja então, \mathbf{R}_{xx} a matriz ($q \times q$) de correlações da variável \mathbf{x} , \mathbf{R}_{yy} a matriz ($p \times p$) de correlações da variável \mathbf{y} e \mathbf{R}_{xy} a matriz ($q \times p$) de correlações das variáveis \mathbf{x} e \mathbf{y} . O termo *Teoria* refere-se à significância estatística das correlações em \mathbf{R}_{xy} . Por exemplo, se todos os termos de \mathbf{R}_{xy} são estatisticamente significantes então os dados gerados terão valor teórico para o modelo. Se pelo menos uma das correlações é não significativa, então o modelo não deve ser aplicado aos dados. O termo *Medida* refere-se à significância estatística dos termos das matrizes \mathbf{R}_{xx} e \mathbf{R}_{yy} , onde altas correlações indicam que as medidas atendem aos requisitos de validade e confiabilidade. Através dessa categorização as amostras simuladas poderão ser interpretadas, tal como as pesquisas de opinião. A condição é que a matriz de correlações dos dados seja *positivo-definida* e as reduções permitidas nessas correlações, com o objetivo de piorar as condições teóricas e/ou das medidas do modelo, serão inseridas de tal forma que a matriz de correlações resultantes ainda será: (1) *positivo-definida*, (2) internamente consistente, ou seja, até certo ponto \mathbf{R}_{xy} deve ser função de \mathbf{R}_{xx} e \mathbf{R}_{yy} , e (3) grandes o suficiente para serem empiricamente identificadas na estimação por Máxima Verossimilhança (condição necessária para o LISREL).

O processo da simulação de Monte Carlo foi codificado no *MATLAB*, inclusive os métodos de estimação dos parâmetros do modelo estrutural da satisfação (ML, OLS, GLS e PLS). Também foram codificados no *MATLAB*: a metodologia de Jöreskog de estimação de escores de variáveis latentes, o cálculo da informação mútua entre duas variáveis e o cálculo da medida empírica de informação (*cf.* anexo). Esta simulação fez uso de algumas funções dos *Toolboxes* do *MATLAB*, dentre elas: *normrnd* (gerador de amostras com distribuição Normal), *binornd* (gerador de amostras com distribuição Binomial) e *fmincon* (retorna o mínimo de uma função multivariada, não-linear, com restrições).

4 Resultados

As simulações foram realizadas de quatro formas distintas, combinando variações dos parâmetros estruturais (*Teoria*) com variações dos parâmetros dos indicadores (*Medidas*). Os casos simulados foram: (1) mudanças nas relações estruturais mantendo as relações dos indicadores constantes e com um alto grau de confiabilidade; (2) igual à simulação anterior, porém reduzindo-se a confiabilidade dos indicadores da satisfação; (3) igual à primeira simulação, porém introduzindo-se uma assimetria na distribuição da variável latente exógena para reduzir ainda mais as correlações entre as variáveis \mathbf{x} e \mathbf{y} ; (4) igual à simulação anterior, porém reduzindo a confiabilidade dos indicadores da satisfação.

Os resultados foram analisados de duas formas distintas: (1) através da ANOVA (análise de variância) com o teste *Post Hoc de Scheffé* para comparações múltiplas - este teste é empregado para identificar diferenças significativas nas variáveis quando o teste-*F* for superior ao critério de significância estatístico adotado (por exemplo, $p < 0,05$) assumindo a hipótese de variâncias iguais entre os grupos (*cf.* Martins, 1996). O objetivo foi verificar se as variações nos parâmetros estruturais causaram impactos nas medidas de informação; (2) através do teste-*t* para amostras pareadas nos resultados da medida empírica de informação. O objetivo foi comparar a metodologia do PLS com a de Jöreskog

(com os parâmetros estimados por ML) através da quantidade de informação dos escores estimados em relação aos verdadeiros, em cada tipo de modelo.

4.1 Simulação 1

As condições consideradas foram as seguintes:

- Os parâmetros estruturais γ_{11} , γ_{21} e β_{21} foram combinados assumindo, cada um deles, os valores: 0,2, 0,4, 0,6 e 0,8. Os valores menores (0,2 e 0,4) produzem amostras mais fracas em termos de *Teoria* e os valores maiores (0,6 e 0,8) produzem amostras mais fortes em termos de *Teoria*.
- Todos os parâmetros das medidas λ_{xi} e λ_{yi} foram fixados em 0,8 para todas as combinações do item anterior (este valor representa um alto grau de confiabilidade das medidas).
- As distribuições dos erros dos indicadores, dos ruídos aleatórios e da variável latente exógena foram assumidas Normais com média zero e variâncias definidas de acordo com as equações 12 a 15.
- Para cada combinação do item 1, foram geradas 20 amostras independentes de tamanho 1000, totalizando 1280 amostras. Dessas amostras, somente 723 atenderam às condições necessárias de ajuste: $\chi^2 \geq 0.05$ e GFI e AGFI ≥ 0.90 . Em cada amostra foram calculadas as seguintes medidas de informação: correlação linear, informação mútua e a medida empírica de informação entre os escores estimados e os verdadeiros.

Os resultados encontram-se listados nas Tabelas 1 e 5. A Tabela 1 mostra as diferenças significativas nas médias dos valores das medidas de informação identificadas pelo teste de *Scheffé*, considerando como critério de significância estatístico $p < 0,05$.

Observando as colunas da tabela, foram identificadas duas médias distintas devido às mudanças no parâmetro γ_{11} (Qualidade \rightarrow Valor) e três médias distintas devido às mudanças nos parâmetros γ_{21} (Qualidade \rightarrow Satisfação) e β_{21} (Valor \rightarrow Satisfação) na metodologia de Jöreskog. Na metodologia do PLS este fato se verificou somente através da informação empírica. Logo, pode-se afirmar que os escores da satisfação são mais influenciados por mudanças nos parâmetros γ_{21} e β_{21} do que no parâmetro γ_{11} .

Observando as linhas da tabela, as médias identificadas através do PLS foram distintas das médias de Jöreskog. Entretanto, as médias de Jöreskog não se alteraram devido aos três métodos de estimação dos parâmetros (ULS, GLS e ML), em cada medida de informação e em cada valor do fator. Logo, pode-se afirmar que os escores do PLS diferem dos escores de Jöreskog no que tange à quantidade de informação relativa aos escores verdadeiros. Em relação ao escore bruto, nota-se que ele não é sensível às mudanças nas relações estruturais do modelo, revelando-se como uma medida não eficaz para avaliar a satisfação do consumidor quando a mesma é definida através de um modelo estrutural.

Tabela 1: Teste ANOVA

| ANOVA - Teste Post Hoc de Scheffe - Médias Distintas Identificadas | | | | | | | | | | | | | | | | |
|--|-----|------------|-----|----|------|-------|------------------|-----|----|------|-------|---------------------|-----|----|-------|-------|
| γ_{11} | N | Correlação | | | | | Informação Mútua | | | | | Informação Empírica | | | | |
| | | ULS | GLS | ML | PLS | Bruto | ULS | GLS | ML | PLS | Bruto | ULS | GLS | ML | PLS | Bruto |
| 0,2 | 229 | 0,92 | | | 0,91 | 0,91 | 1,45 | | | 1,35 | 1,38 | 18,53 | | | 17,71 | 4,82 |
| 0,4 | 177 | 0,93 | | | | | 1,49 | | | | | 18,03 | | | | |
| 0,6 | 177 | 0,93 | | | | | 1,49 | | | | | 18,53 | | | | |
| 0,8 | 140 | 0,94 | | | | | 1,54 | | | | | 19,64 | | | | |
| γ_{21} | N | Correlação | | | | | Informação Mútua | | | | | Informação Empírica | | | | |
| 0,2 | 229 | 0,92 | | | 0,91 | 0,91 | 1,44 | | | 1,36 | 1,38 | 18,10 | | | 17,74 | 4,82 |
| 0,4 | 177 | 0,93 | | | | | 1,49 | | | | | 18,82 | | | | |
| 0,6 | 177 | 0,93 | | | | | 1,49 | | | | | 18,82 | | | | |
| 0,8 | 140 | 0,94 | | | | | 1,54 | | | | | 19,64 | | | | |
| β_{21} | N | Correlação | | | | | Informação Mútua | | | | | Informação Empírica | | | | |
| 0,2 | 229 | 0,92 | | | 0,91 | 0,91 | 1,42 | | | 1,36 | 1,38 | 17,72 | | | 20,62 | 4,82 |
| 0,4 | 177 | 0,93 | | | | | 1,46 | | | | | 18,42 | | | | |
| 0,6 | 177 | 0,93 | | | | | 1,46 | | | | | 18,42 | | | | |
| 0,8 | 140 | 0,94 | | | | | 1,57 | | | | | 20,12 | | | | |

OBS: As colunas ULS, GLS e ML correspondem aos métodos de estimação dos parâmetros do modelo utilizados pela metodologia de Jöreskog.

Em relação às medidas de informação adotadas como critério de avaliação dos escores estimados, a medida empírica refletiu uma quantidade maior de diferenças significativas (médias distintas) no PLS face às variações nas relações estruturais, motivo pelo qual ela foi escolhida para o teste-t (vide Tabela 5).

Os resultados da comparação entre os escores estimados pelo PLS e os escores de Jöreskog (com os parâmetros estimados por ML) podem ser vistos na coluna “Simulação 1” na Tabela 5 (ver anexo). Este estudo produziu 27 combinações de relações entre as variáveis latentes, entretanto em duas combinações as amostras produzidas não atenderam às condições necessárias para o ajuste do modelo, sobrando, portanto, 25 combinações válidas. Na primeira coluna da tabela, o termo *Fraca* significa que a variável latente assumiu valores entre 0,2 e 0,4, o termo *Média* significa valores entre 0,4 e 0,6 e o termo *Forte* significa valores entre 0,6 e 0,8. Por exemplo, na primeira linha da tabela, o termo $\gamma_{11} = Fraca$, $\gamma_{21} = Fraca$ e $\beta_{21} = Fraca$ corresponde à seguinte relação estrutural: ($\gamma_{11} = 0,2$ ou $\gamma_{11} = 0,4$) e ($\gamma_{21} = 0,2$ ou $\gamma_{21} = 0,4$) e ($\beta_{21} = 0,2$ ou $\beta_{21} = 0,4$).

Logo, de acordo com a tabela, observa-se que nos casos onde as diferenças entre as médias foram significantes, o PLS superou a metodologia de Jöreskog somente em cinco combinações. Este fato ocorreu principalmente quando as relações entre as variáveis latentes assumiram valores mais fracos. A única exceção ocorreu na combinação “*Forte – Fraca – Fraca*”. De um modo geral, a metodologia de Jöreskog produziu escores com maior informação quando o modelo da satisfação retratou relações mais fortes entre as variáveis latentes. Nos modelos com relações fracas entre as variáveis latentes o PLS se destacou. Ocorreram apenas dois casos onde as diferenças entre as médias foram não significantes. Neste caso, não há distinção entre as metodologias. As combinações “*Forte – Forte – Forte*” e “*Média – Forte – Forte*” produziram amostras que não atenderam às condições necessárias para o ajuste do modelo.

4.2 Simulação 2

Foram consideradas as mesmas hipóteses anteriores com exceção da redução no valor da relação λ_{y4} para 0,5 (associação entre a variável latente “Satisfação” com o indicador “Distância de uma empresa ideal”), com o objetivo de reduzir a confiabilidade dos indicadores da satisfação. Nesta simulação foram gerados 741 casos válidos. Os resultados encontram-se listados nas Tabelas 2 e 5.

A Tabela 2 mostra as diferenças significativas nas medidas de informação (médias distintas) identificadas pelo teste de *Scheffé* ($p < 0,05$). De acordo com a tabela, a única diferença observada em relação à simulação anterior foi a quantidade de médias distintas identificadas: duas no parâmetro γ_{11} (Qualidade \rightarrow Valor), três no parâmetro γ_{21} (Qualidade \rightarrow Satisfação) e quatro no parâmetro β_{21} (Valor \rightarrow Satisfação), indicando que os escores da satisfação são mais influenciados por mudanças nos parâmetros β_{21} , γ_{21} e γ_{11} respectivamente. As médias do PLS novamente foram distintas das médias de Jöreskog, no entanto a robustez da metodologia de Jöreskog em relação aos três métodos de estimação (ULS, GLS e ML) se manteve apesar da redução da confiabilidade das medidas da satisfação.

Os resultados da comparação entre os escores estimados pelo PLS e os escores de Jöreskog (com os parâmetros estimados por ML) podem ser vistos na coluna “Simulação 2” na Tabela 5. Com a redução na confiabilidade das medidas da satisfação o PLS superou a metodologia de Jöreskog em sete combinações, incluindo casos onde as relações assumiram valores médios e fortes. O mesmo também se observa nos casos onde as diferenças entre as médias foram não significantes - as relações entre as variáveis latentes também assumiram valores médios e fortes. Contudo, mesmo com a redução na confiabilidade nas medidas da satisfação a metodologia de Jöreskog ainda produziu escores com maior informação quando o modelo da satisfação retratou relações mais fortes entre as variáveis latentes. Nos modelos com relações fracas entre as variáveis latentes o PLS continuou se destacando.

Tabela 2: Teste ANOVA

| ANOVA - Teste <i>Post Hoc</i> de <i>Scheffe</i> - Médias Distintas Identificadas | | | | | | | | | | | | | | | | |
|--|-----|------------|-----|----|------|-------|------------------|-----|----|------|-------|---------------------|-----|----|-------|-------|
| γ_{11} | N | Correlação | | | | | Informação Mútua | | | | | Informação Empírica | | | | |
| | | ULS | GLS | ML | PLS | Bruto | ULS | GLS | ML | PLS | Bruto | ULS | GLS | ML | PLS | Bruto |
| 0,2 | 238 | 0,90 | | | 0,88 | 0,86 | 1,32 | | | 1,15 | 1,10 | 16,20 | | | 17,38 | 4,5 |
| 0,4 | 180 | | | | | | | | | | | | | | | |
| 0,6 | 175 | | | | | | 1,37 | | | | | 17,00 | | | | |
| 0,8 | 148 | 0,91 | | | | | | | | | | | | | | |
| γ_{21} | N | Correlação | | | | | Informação Mútua | | | | | Informação Empírica | | | | |
| 0,2 | 238 | 0,90 | | | 0,88 | 0,86 | 1,29 | | | 1,12 | 1,10 | 15,83 | | | 19,39 | 4,5 |
| 0,4 | 180 | | | | | | 1,34 | | | | | 16,50 | | | | |
| 0,6 | 175 | 0,91 | | | | | 1,43 | | | | | 17,87 | | | | |
| 0,8 | 148 | 0,92 | | | | | | | | | | 15,21 | | | | |
| β_{21} | N | Correlação | | | | | Informação Mútua | | | | | Informação Empírica | | | | |
| 0,2 | 238 | 0,90 | | | 0,88 | 0,86 | 1,27 | | | 1,12 | 1,10 | 15,54 | | | 19,77 | 4,5 |
| 0,4 | 180 | 0,91 | | | | | 1,32 | | | | | 16,27 | | | | |
| 0,6 | 175 | 0,92 | | | | | 1,36 | | | | | 16,75 | | | | |
| 0,8 | 148 | 0,93 | | | | | 1,46 | | | | | 18,29 | | | | |

OBS: As colunas ULS, GLS e ML correspondem aos métodos de estimação dos parâmetros do modelo utilizados pela metodologia de Jöreskog.

4.3 Simulação 3

Foram consideradas as mesmas hipóteses da primeira simulação com exceção da variável latente exógena, que foi gerada a partir de uma distribuição assimétrica, conforme a equação 16.

$$Z = \alpha Z_1[\sim N(0,1)] + (1-\alpha) Z_2[\sim N(2,1)] \tag{16}$$

Onde $\alpha \sim \text{Bernoulli}(0,3)$

O objetivo foi piorar as condições do modelo em relação à *Teoria*. Nesta simulação foram gerados somente 453 casos válidos porque em muitas amostras geradas, o método ML de estimação dos parâmetros não convergiu - a matriz (Σ) tornou-se *não invertível* ($|\Sigma| \approx 0$). Os resultados encontram-se listados nas Tabelas 3 e 5.

A Tabela 3 mostra as diferenças significativas nas medidas de informação (médias distintas) identificadas pelo teste de *Scheffé* ($p < 0,05$). De acordo com a tabela, os escores da satisfação foram mais influenciados por mudanças nos parâmetros γ_{21} e β_{21} do que no parâmetro γ_{11} . Novamente as médias identificadas através do PLS distinguíram-se das médias de Jöreskog e a robustez da metodologia de Jöreskog em relação aos três métodos de estimação (ULS, GLS e ML) não foi alterada com a aplicação de uma assimetria na variável latente exógena.

Tabela 3: Teste ANOVA

| ANOVA - Teste <i>Post Hoc</i> de <i>Scheffe</i> - Médias Distintas Identificadas | | | | | | | | | | | | | | | | |
|--|-----|------------|-----|----|------|------------------|------|-----|----|------|---------------------|-------|-----|----|-------|-------|
| γ_{11} | N | Correlação | | | | Informação Mútua | | | | | Informação Empírica | | | | | |
| | | ULS | GLS | ML | PLS | Bruto | ULS | GLS | ML | PLS | Bruto | ULS | GLS | ML | PLS | Bruto |
| 0,2 | 183 | 0,93 | | | 0,92 | 0,92 | 1,47 | | | 1,38 | 1,41 | 18,40 | | | 18,28 | 4,94 |
| 0,4 | 114 | | | | | | | | | | | | | | 19,33 | |
| 0,6 | 112 | | | | | | | | | | | | | | | |
| 0,8 | 44 | | | | | | | | | | | | | | | |
| γ_{21} | N | Correlação | | | | Informação Mútua | | | | | Informação Empírica | | | | | |
| 0,2 | 183 | 0,92 | | | 0,92 | 0,92 | 1,45 | | | 1,35 | 1,41 | 18,18 | | | 20,33 | 4,94 |
| 0,4 | 114 | | | | | | | | | | | | | | 17,34 | |
| 0,6 | 112 | | | | | | | | | | | | | | 18,90 | |
| 0,8 | 44 | | | | | | | | | | | | | | 20,54 | |
| β_{21} | N | Correlação | | | | Informação Mútua | | | | | Informação Empírica | | | | | |
| 0,2 | 183 | 0,92 | | | 0,92 | 0,92 | 1,45 | | | 1,36 | 1,40 | 18,01 | | | 20,68 | 4,95 |
| 0,4 | 114 | | | | | | | | | | | | | | 18,37 | |
| 0,6 | 112 | | | | | | | | | | | | | | 18,91 | |
| 0,8 | 44 | | | | | | | | | | | | | | 20,20 | |

OBS: As colunas ULS, GLS e ML correspondem aos métodos de estimação dos parâmetros do modelo utilizados pela metodologia de Jöreskog.

Os resultados da comparação entre os escores estimados pelo PLS e os escores de Jöreskog (com os parâmetros estimados por ML) podem ser vistos na coluna “Simulação 3” na Tabela 5. De acordo com a tabela, a assimetria introduzida na distribuição da variável latente exógena também não alterou a capacidade da metodologia de Jöreskog de produzir escores com maior informação do que o PLS, principalmente quando o modelo da satisfação retratou relações médias e fortes entre as variáveis latentes. Nos modelos com relações fracas entre as variáveis latentes o PLS continuou se destacando.

4.4 Simulação 4

Foram consideradas as mesmas hipóteses da terceira simulação com exceção de uma redução no valor da relação λ_{y4} para 0,5 com o objetivo de piorar também as condições das *Medidas* além da *Teoria*. Os resultados encontram-se listados nas Tabelas 4 e 5.

A Tabela 4 mostra as diferenças significativas nas medidas de informação (médias distintas) identificadas pelo teste de *Scheffé* ($p < 0,05$). De acordo com a tabela, os escores da satisfação foram mais influenciados por mudanças nos parâmetros γ_{21} , β_{21} e γ_{11} respectivamente. Novamente as médias identificadas através do PLS foram distintas das médias de Jöreskog e a robustez da metodologia de Jöreskog em relação aos três métodos de estimação (ULS, GLS e ML) não foi alterada com a aplicação de uma assimetria na variável latente exógena e uma redução na confiabilidade das medidas da satisfação.

Tabela 4: Teste ANOVA

| ANOVA - Teste <i>Post Hoc</i> de Scheffe - Médias Distintas Identificadas | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|-----|------------|-----|----|-----|-------|------------------|-----|----|-----|-------|---------------------|-----|----|-----|-------|
| γ_{11} | N | Correlação | | | | | Informação Mútua | | | | | Informação Empírica | | | | |
| | | ULS | GLS | ML | PLS | Bruto | ULS | GLS | ML | PLS | Bruto | ULS | GLS | ML | PLS | Bruto |
| 0,2 | 210 | 0,91 | | | | | 1,34 | | | | | 16,75 | | | | |
| 0,4 | 150 | | | | | | | | | | | | | | | |
| 0,6 | 132 | | | | | | | | | | | | | | | |
| 0,8 | 63 | | | | | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | 1,38 | | | | | | | | | |
| γ_{21} | N | Correlação | | | | | Informação Mútua | | | | | Informação Empírica | | | | |
| | | ULS | GLS | ML | PLS | Bruto | ULS | GLS | ML | PLS | Bruto | ULS | GLS | ML | PLS | Bruto |
| 0,2 | 210 | 0,90 | | | | | 1,30 | | | | | 15,60 | | | | |
| 0,4 | 150 | 0,91 | | | | | 1,34 | | | | | 16,74 | | | | |
| 0,6 | 132 | 0,92 | | | | | 1,39 | | | | | 17,35 | | | | |
| 0,8 | 63 | 0,94 | | | | | 1,52 | | | | | 19,50 | | | | |
| | | | | | | | 0,89 | | | | | 1,12 | | | | |
| | | | | | | | 0,90 | | | | | 1,14 | | | | |
| | | | | | | | 0,88 | | | | | 1,17 | | | | |
| β_{21} | N | Correlação | | | | | Informação Mútua | | | | | Informação Empírica | | | | |
| | | ULS | GLS | ML | PLS | Bruto | ULS | GLS | ML | PLS | Bruto | ULS | GLS | ML | PLS | Bruto |
| 0,2 | 210 | 0,90 | | | | | 1,31 | | | | | 16,04 | | | | |
| 0,4 | 150 | 0,91 | | | | | 1,36 | | | | | 16,80 | | | | |
| 0,6 | 132 | | | | | | | | | | | | | | | |
| 0,8 | 63 | | | | | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | 1,20 | | | | | 15,45 | | | | |
| | | | | | | | 1,16 | | | | | 19,68 | | | | |
| | | | | | | | 1,13 | | | | | 16,94 | | | | |
| | | | | | | | 1,47 | | | | | 18,84 | | | | |

OBS: As colunas ULS, GLS e ML correspondem aos métodos de estimação dos parâmetros do modelo utilizados pela metodologia de Jöreskog.

Os resultados da comparação entre os escores estimados pelo PLS e os escores de Jöreskog (com os parâmetros estimados por ML) podem ser vistos na coluna “Simulação 4” na Tabela 5. De acordo com a tabela, a assimetria introduzida na distribuição da variável latente exógena e a redução na confiabilidade das medidas da satisfação não alteraram a capacidade da metodologia de Jöreskog de produzir escores com maior informação do que o PLS, principalmente quando o modelo da satisfação retratou relações médias e fortes entre as variáveis latentes. Nos modelos com relações fracas entre as variáveis latentes o PLS continuou se destacando.

5 Conclusão

O verdadeiro propósito do IASC é retratar tanto o aspecto multidimensional da satisfação do consumidor residencial em relação aos serviços oferecidos pelas concessionárias (relações) quanto o grau da satisfação propriamente dito. Uma vez caracterizada as relações dos antecedentes e das conseqüências da satisfação através dos parâmetros estruturais do modelo, o processo de avaliação das concessionárias poderá ser efetuado apenas pelas pesquisas de opinião junto aos consumidores ao longo do tempo, garantindo a equalização para a comparabilidade dos escores da satisfação. Com os parâmetros do modelo estimados, as mudanças nas estimativas do IASC serão proporcionadas através das notas dos entrevistados às questões da pesquisa.

Neste artigo foram avaliados os escores da satisfação estimados pelo PLS e pela metodologia de Jöreskog considerando os parâmetros estimados por ULS, GLS e ML. Os escores estimados foram comparados com os verdadeiros através da correlação linear, informação mútua e medida empírica da informação. Os dados e os escores verdadeiros foram gerados através de simulações, definindo-se a priori as relações estruturais do modelo e as distribuições de probabilidades dos erros das medidas, distúrbios aleatórios e da variável latente exógena. Através das simulações procurou-se retratar as possíveis relações entre as variáveis latentes no modelo da satisfação, em particular as que atendiam satisfatoriamente às condições teóricas para a aplicação do modelo de equações estruturais. As reduções nas correlações dos dados representaram perdas no aspecto teórico do modelo e também no aspecto da confiabilidade das medidas da satisfação.

Pelos resultados observados, constatou-se que a metodologia de Jöreskog para a estimação de escores se manteve robusta em relação aos três métodos de estimação dos

parâmetros do modelo (ULS, GLS e ML), isto é, a opção por um desses três métodos não incorreu em perda de informação dos escores estimados em relação aos escores verdadeiros. Além disso, constatou-se que esta metodologia produziu escores com maior informação do que o PLS, principalmente quando as relações entre as variáveis latentes no modelo da satisfação atingiram os patamares médios e fortes, ou seja, maiores ou iguais a 0,6. Este resultado se manteve inclusive nos casos onde houve a redução na confiabilidade das medidas da satisfação e também nos casos onde ocorreram assimetrias na distribuição da variável latente exógena. Por outro lado, o PLS produziu escores com maior informação do que a metodologia de Jöreskog quando as relações entre as variáveis latentes se mantiveram nos patamares fracos, ou seja, menores ou iguais a 0,4.

Constatou-se também de que os escores da satisfação foram mais influenciados devido às variações nos parâmetros que ligam o construto Qualidade Percebidas e o Valor Percebido à Satisfação do que devido às variações no parâmetro que liga o construto Qualidade Percebida ao Valor Percebido. Nesta análise verificou-se inclusive que a metodologia do PLS produziu escores diferentes da metodologia de Jöreskog, fato constatado através das diferenças significativas nas médias dos valores das medidas de informação.

Por último, segundo os resultados apresentados pelas pesquisas da ANEEL, as relações entre a Qualidade Percebida, Valor Percebido e Satisfação ficaram em torno de $\gamma_{11} = Fraca$, $\gamma_{21} = Forte$ e $\beta_{21} = Fraca$. Portanto, pelos resultados apresentados aqui, a metodologia de Jöreskog seria a mais apropriada para a estimação dos escores da satisfação, para essas condições dos dados.

6 Referências

- Anderson, E.W. Fornell, C. (2000) Foundations of the American customer satisfaction index. *Total Quality Management*, 11, S869-S881.
- Anderson, E.W. Fornell, C. Lehmann, D.R. (1994) Customer satisfaction, market share, and profitability: findings from Sweden. *Journal of Marketing*, 58, 53-66.
- Anderson, E.W. Sullivan, M.W. (1996) The antecedents and consequences of customer satisfaction for firms. *Marketing Science*, 12, 125-143.
- Bagozzi, R.P. (1977) Structural equation models in experimental research. *Journal of Marketing*, 14, 209-226.
- Bollen, K.A. (1989) *Structural equations with latent variables*. Wiley.
- Cassel, C. Hackl, P. Westlund A. (1999) Robustness of partial least-squares method of estimating latent variable quality structures. *Journal of Applied Statistics*, 26, 435-446.
- Churchill, G.A. Surprenant, C. (1982) An investigation into the determinants of customer satisfaction. *Journal of Marketing Research*, 19, 491-504.
- Dijkstra, T. (1983) Some comments on maximum likelihood and partial least squares methods. *Journal of Econometrics*, 22, 67-90.
- GoodHue, D. Lewis, W. Thompson, R. (2006) PLS, small sample size and statistical power in MIS research. *Proceedings of the 39th Hawaii International Conference on System Sciences*.
- Fornell, C. (1992) A national customer satisfaction barometer: The swedish experience. *Journal of Marketing*, 56, 6-21.
- Fornell, C Bookstein F.L. (1982) Two structural equation models: LISREL and PLS applied to consumer exit-voice. *Journal of Marketing Research*, 19, 440-452.
- Fornell, C. Johnson, M.D. Anderson, E.W. Cha, J. Bryant, B.E. (1996) The american customer satisfaction index: nature, purpose, and findings. *Journal of Marketing*, 60, 7-18.

Fornell, C. Larcker, D.F. (1981) Structural equation models with unobservable variables and measurement error. *Journal of Marketing Research*, 18 (February), 39-50.

Fornell, C. Larcker, D.F. (1981) Structural equation models with unobservable variables and measurement error: algebra e statistics. *Journal of Marketing Research*, 18 (August), 382-388.

Gujarati, D.N. (2000) *Econometria básica*. Makron Books, 3ª Edição.

Haykin, S. (1999) *Neural Networks - a comprehensive foundation*, Second Edition. Prentice-Hall.

Johnson, R.A. Wichern, D.W. (1998) *Applied multivariate statistical analysis*, Fourth Edition. Prentice-Hall.

Jöreskog, K.G. Sörbom, D. (1982) Recent developments in structural equation modeling. *Journal of Marketing Research*, 19, 404-416.

Jöreskog, K.G. (2000) Latent variable scores and their uses. *LISREL 8.30*, 168-171.

Lastovicka, J.L. Thamodaran, K. (1991) Common factor score estimates in multiple regression problems. *Journal of Marketing Research*, 28, 105-112.

Marchetti, R. Prado, P.H.M. (2001) Avaliação da satisfação do consumidor utilizando o PLS: um modelo aplicado ao setor elétrico brasileiro. *Anais ENANPAD*.

Marchetti, R. Prado, P.H.M. (2001) Um tour pelas medidas da satisfação do consumidor e da qualidade percebida. *RAE - FGV*.

Martins, G. A. Fonseca, J. S. (1996) *Curso de Estatística*. Atlas, 6ª Edição.

7 Anexo

7.1 Medida Empírica de Informação

O objetivo desta medida é ser mais geral do que a informação mútua e a correlação linear. Ela é baseada na variância dos escores estimados em relação aos verdadeiros e o resultado final dessa medida retrata a informação total dos escores estimados. Esta medida é avaliada na escala da satisfação, ao longo da distribuição dos escores verdadeiros, dividindo-se a distribuição em intervalos regulares com um número fixo de percentis (no problema em questão cada intervalo foi definido com 5 percentis). Valores altos dessa medida indicam que os escores estimados estão mais próximos dos verdadeiros. Esta medida foi definida através das seguintes equações:

$$I_j(\hat{\theta}) = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\hat{\theta}_{ji} - \theta_{ji})^2}} \quad (28)$$

$$I = \sum_{j=1}^p (I_j(\hat{\theta}) \cdot \delta_j) \quad (29)$$

Onde: n = tamanho da amostra, p = quantidade de intervalos (divisões) tomados na distribuição dos escores verdadeiros e δ é o tamanho do intervalo na escala da satisfação. O somatório dentro da raiz na equação 28 também é conhecido como RMSE (Root Mean Square Error) e é uma estatística muito utilizada na avaliação dos desvios entre os valores estimados e os verdadeiros.

7.2 Comparação dos escores (PLS x Jöreskog com ML)

Tabela 5: Comparação dos Escores (PLS x Jöreskog com ML)

| Teste- <i>t</i> para Amostras Pareadas - Medida Empírica de Informação | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|--|-------------|-------------|-------|-------|-------|------|-------------|-------|-------|-------|------|-------------|-------|-------|-------|------|-------------|-------|-------|-------|------|
| Relação | Estatística | Simulação 1 | | | | | Simulação 2 | | | | | Simulação 3 | | | | | Simulação 4 | | | | |
| | | n | ML | PLS | Dif. | Sig. | n | ML | PLS | Dif. | Sig. | n | ML | PLS | Dif. | Sig. | n | ML | PLS | Dif. | Sig. |
| Fraca/Fraca/Fraca | Média | 139 | 17,24 | 20,99 | -3,75 | 0,00 | 142 | 14,99 | 20,56 | -5,57 | 0,00 | 130 | 17,55 | 20,79 | -3,24 | 0,00 | 139 | 15,28 | 20,13 | -4,86 | 0,00 |
| | DP | | 0,89 | 3,51 | | | | 0,78 | 3,63 | | | | 0,86 | 3,26 | | | | 0,81 | 3,79 | | |
| Fraca/Fraca/Média | Média | 139 | 17,63 | 18,07 | -0,44 | 0,00 | 140 | 15,61 | 17,02 | -1,41 | 0,00 | 111 | 17,99 | 18,25 | -0,26 | 0,08 | 133 | 15,85 | 16,82 | -0,97 | 0,00 |
| | DP | | 0,97 | 1,41 | | | | 0,88 | 1,99 | | | | 0,98 | 1,23 | | | | 1,01 | 1,79 | | |
| Fraca/Fraca/Forte | Média | 126 | 18,71 | 16,76 | 1,94 | 0,00 | 128 | 16,83 | 15,32 | 1,51 | 0,00 | 87 | 19,08 | 16,84 | 2,23 | 0,00 | 111 | 17,18 | 15,49 | 1,69 | 0,00 |
| | DP | | 1,41 | 1,18 | | | | 1,47 | 0,97 | | | | 1,49 | 1,39 | | | | 1,75 | 0,87 | | |
| Fraca/Média/Fraca | Média | 138 | 17,70 | 18,10 | -0,39 | 0,01 | 147 | 15,61 | 17,05 | -1,44 | 0,00 | 117 | 18,20 | 18,26 | -0,06 | 0,65 | 132 | 16,10 | 16,91 | -0,81 | 0,00 |
| | DP | | 0,95 | 1,44 | | | | 0,89 | 1,82 | | | | 0,92 | 1,13 | | | | 1,14 | 1,66 | | |
| Fraca/Média/Média | Média | 128 | 18,30 | 16,83 | 1,48 | 0,00 | 125 | 16,38 | 15,43 | 0,95 | 0,00 | 84 | 18,77 | 17,10 | 1,67 | 0,00 | 109 | 16,89 | 15,55 | 1,34 | 0,00 |
| | DP | | 1,10 | 1,08 | | | | 1,04 | 0,94 | | | | 1,15 | 1,24 | | | | 1,39 | 0,81 | | |
| Fraca/Média/Forte | Média | 76 | 19,38 | 15,84 | 3,54 | 0,00 | 74 | 17,53 | 14,67 | 2,86 | 0,00 | 42 | 19,89 | 15,54 | 4,34 | 0,00 | 62 | 18,28 | 14,95 | 3,33 | 0,00 |
| | DP | | 1,41 | 1,39 | | | | 1,51 | 0,62 | | | | 1,71 | 1,55 | | | | 1,68 | 0,72 | | |
| Fraca/Forte/Fraca | Média | 122 | 18,70 | 16,79 | 1,92 | 0,00 | 130 | 16,70 | 15,51 | 1,19 | 0,00 | 70 | 19,02 | 17,41 | 1,61 | 0,00 | 96 | 17,70 | 15,80 | 1,90 | 0,00 |
| | DP | | 1,33 | 1,09 | | | | 1,44 | 0,96 | | | | 1,29 | 0,96 | | | | 1,70 | 0,75 | | |
| Fraca/Forte/Média | Média | 74 | 19,26 | 15,81 | 3,46 | 0,00 | 72 | 17,46 | 14,82 | 2,64 | 0,00 | 39 | 19,72 | 16,35 | 3,37 | 0,00 | 56 | 18,58 | 15,20 | 3,38 | 0,00 |
| | DP | | 1,33 | 1,23 | | | | 1,49 | 0,76 | | | | 1,39 | 1,52 | | | | 1,65 | 0,77 | | |
| Fraca/Forte/Forte | Média | 19 | 19,61 | 14,69 | 4,92 | 0,00 | 18 | 17,85 | 14,30 | 3,55 | 0,00 | 10 | 20,66 | 14,55 | 6,11 | 0,00 | 14 | 18,88 | 14,56 | 4,32 | 0,00 |
| | DP | | 1,13 | 0,55 | | | | 0,82 | 0,58 | | | | 0,91 | 0,84 | | | | 0,91 | 0,59 | | |
| Média/Fraca/Fraca | Média | 143 | 17,33 | 21,01 | -3,68 | 0,00 | 142 | 15,10 | 20,44 | -5,34 | 0,00 | 122 | 17,54 | 20,50 | -2,96 | 0,00 | 126 | 15,45 | 20,09 | -4,64 | 0,00 |
| | DP | | 0,90 | 3,70 | | | | 0,78 | 3,93 | | | | 0,93 | 2,95 | | | | 0,86 | 3,77 | | |
| Média/Fraca/Média | Média | 140 | 17,97 | 17,96 | 0,00 | 0,98 | 140 | 15,84 | 16,70 | -0,86 | 0,00 | 95 | 18,30 | 18,38 | -0,08 | 0,64 | 113 | 16,23 | 16,72 | -0,49 | 0,02 |
| | DP | | 1,12 | 1,40 | | | | 1,04 | 1,92 | | | | 1,13 | 1,09 | | | | 1,23 | 1,56 | | |
| Média/Fraca/Forte | Média | 103 | 18,82 | 17,05 | 1,77 | 0,00 | 104 | 16,81 | 15,37 | 1,44 | 0,00 | 56 | 19,38 | 17,46 | 1,92 | 0,00 | 83 | 17,46 | 15,65 | 1,81 | 0,00 |
| | DP | | 1,22 | 0,76 | | | | 1,34 | 0,80 | | | | 1,09 | 0,93 | | | | 1,67 | 0,73 | | |
| Média/Média/Fraca | Média | 146 | 17,98 | 17,95 | 0,04 | 0,81 | 146 | 15,81 | 16,73 | -0,92 | 0,00 | 94 | 18,27 | 18,22 | 0,05 | 0,73 | 119 | 16,46 | 16,88 | -0,42 | 0,05 |
| | DP | | 1,20 | 1,31 | | | | 1,03 | 1,78 | | | | 1,03 | 0,96 | | | | 1,33 | 1,47 | | |
| Média/Média/Média | Média | 111 | 18,64 | 17,10 | 1,54 | 0,00 | 106 | 16,54 | 15,39 | 1,15 | 0,00 | 48 | 18,92 | 17,55 | 1,37 | 0,00 | 77 | 17,35 | 15,81 | 1,54 | 0,00 |
| | DP | | 1,14 | 0,69 | | | | 1,03 | 0,82 | | | | 1,16 | 0,74 | | | | 1,37 | 0,68 | | |
| Média/Média/Forte | Média | 37 | 19,09 | 16,87 | 2,22 | 0,00 | 35 | 17,07 | 14,94 | 2,13 | 0,00 | 11 | 19,61 | 17,00 | 2,61 | 0,00 | 25 | 17,80 | 15,35 | 2,44 | 0,00 |
| | DP | | 0,75 | 0,63 | | | | 0,91 | 0,52 | | | | 1,27 | 0,99 | | | | 0,97 | 0,64 | | |
| Média/Forte/Fraca | Média | 108 | 18,85 | 17,06 | 1,79 | 0,00 | 109 | 16,72 | 15,46 | 1,26 | 0,00 | 48 | 19,27 | 17,48 | 1,79 | 0,00 | 73 | 17,77 | 15,99 | 1,79 | 0,00 |
| | DP | | 1,33 | 0,77 | | | | 1,15 | 0,89 | | | | 1,37 | 0,77 | | | | 1,56 | 0,64 | | |
| Média/Forte/Média | Média | 37 | 19,16 | 16,92 | 2,24 | 0,00 | 35 | 16,91 | 14,98 | 1,93 | 0,00 | 11 | 19,71 | 17,26 | 2,45 | 0,00 | 23 | 18,49 | 15,76 | 2,74 | 0,00 |
| | DP | | 1,19 | 0,66 | | | | 0,82 | 0,58 | | | | 1,28 | 0,63 | | | | 0,91 | 0,58 | | |
| Média/Forte/Forte | Média | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - |
| | DP | | - | - | | | | - | - | | | | - | - | | | | - | - | | |
| Forte/Fraca/Fraca | Média | 145 | 17,34 | 20,84 | -3,50 | 0,00 | 150 | 15,20 | 20,36 | -5,16 | 0,00 | 91 | 17,57 | 20,54 | -2,97 | 0,00 | 96 | 15,55 | 20,01 | -4,46 | 0,00 |
| | DP | | 0,87 | 3,55 | | | | 0,83 | 3,96 | | | | 0,96 | 2,91 | | | | 0,94 | 3,60 | | |
| Forte/Fraca/Média | Média | 139 | 18,18 | 17,76 | 0,41 | 0,03 | 144 | 16,32 | 16,67 | -0,35 | 0,16 | 70 | 18,43 | 18,32 | 0,11 | 0,60 | 81 | 16,64 | 16,75 | -0,11 | 0,71 |
| | DP | | 1,35 | 1,36 | | | | 1,63 | 1,86 | | | | 1,27 | 1,03 | | | | 1,63 | 1,58 | | |
| Forte/Fraca/Forte | Média | 101 | 19,57 | 16,88 | 2,70 | 0,00 | 102 | 17,82 | 15,24 | 2,58 | 0,00 | 38 | 19,80 | 17,45 | 2,36 | 0,00 | 52 | 18,16 | 15,68 | 2,48 | 0,00 |
| | DP | | 1,73 | 0,79 | | | | 1,78 | 0,78 | | | | 1,40 | 0,88 | | | | 2,08 | 0,72 | | |
| Forte/Média/Fraca | Média | 123 | 18,38 | 17,83 | 0,55 | 0,02 | 128 | 16,31 | 16,62 | -0,31 | 0,24 | 60 | 18,30 | 18,29 | 0,01 | 0,99 | 79 | 16,69 | 16,78 | -0,09 | 0,75 |
| | DP | | 1,67 | 1,29 | | | | 1,71 | 1,74 | | | | 1,16 | 0,95 | | | | 1,55 | 1,54 | | |
| Forte/Média/Média | Média | 103 | 19,39 | 16,88 | 2,50 | 0,00 | 106 | 17,63 | 15,31 | 2,32 | 0,00 | 28 | 19,23 | 17,63 | 1,60 | 0,00 | 50 | 18,12 | 15,70 | 2,42 | 0,00 |
| | DP | | 1,56 | 0,72 | | | | 1,77 | 0,82 | | | | 1,43 | 0,77 | | | | 1,76 | 0,67 | | |
| Forte/Média/Forte | Média | 33 | 19,89 | 16,46 | 3,42 | 0,00 | 35 | 18,60 | 14,89 | 3,71 | 0,00 | 7 | 20,43 | 17,00 | 3,43 | 0,00 | 15 | 19,21 | 15,25 | 3,96 | 0,00 |
| | DP | | 1,02 | 0,59 | | | | 1,32 | 0,58 | | | | 1,34 | 0,91 | | | | 1,50 | 0,57 | | |
| Forte/Forte/Fraca | Média | 71 | 19,66 | 16,91 | 2,75 | 0,00 | 71 | 17,63 | 15,24 | 2,39 | 0,00 | 27 | 19,53 | 17,43 | 2,10 | 0,00 | 47 | 18,27 | 15,77 | 2,50 | 0,00 |
| | DP | | 1,65 | 0,76 | | | | 1,75 | 0,78 | | | | 1,54 | 0,88 | | | | 2,05 | 0,69 | | |
| Forte/Forte/Média | Média | 36 | 20,46 | 16,81 | 3,64 | 0,00 | 35 | 18,53 | 14,84 | 3,69 | 0,00 | 3 | 21,38 | 17,25 | 4,13 | 0,02 | 14 | 19,34 | 15,55 | 3,79 | 0,00 |
| | DP | | 1,29 | 0,71 | | | | 1,45 | 0,48 | | | | 0,76 | 0,89 | | | | 1,13 | 0,63 | | |
| Forte/Forte/Forte | Média | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - |
| | DP | | - | - | | | | - | - | | | | - | - | | | | - | - | | |

REVISTA INVESTIGAÇÃO OPERACIONAL

Política Editorial

Investigação Operacional (IO) é a revista científica da APDIO - Associação Portuguesa de Investigação Operacional. A política editorial da IO é publicar artigos originais e de elevada qualidade que contribuam para a teoria, metodologia, técnicas e software de Investigação Operacional e a sua aplicação a diferentes campos. A Revista também publica artigos com revisões relevantes de temas de IO. Casos de sucesso na aplicação a problemas práticos são especialmente bem vindos.

Processo de Aceitação

Todos os manuscritos submetidos para publicação são revistos e aceites apenas com base na avaliação da sua qualidade, importância e adequação à política editorial. Será responsabilidade do Editor interpretar a avaliação dos revisores. A contribuição de cada artigo deve estar claramente evidenciada na Introdução. Critérios como a relação com literatura existente, comprimento e estilo do artigo são tidos em consideração. Uma indicação clara da viabilidade de aceitação do artigo é habitualmente dada na primeira fase de revisão do artigo.

Será requerido aos autores de um artigo aceite que transfiram os direitos de autoria para a APDIO, que assegurará a mais ampla disseminação possível de informação. Os volumes da Revista são publicados em papel, e distribuídos a todos os associados da APDIO, e em formato electrónico na rede SciELO - Scientific Electronic Library Online.

Resumos dos Artigos indexados em

IAOR - International Abstracts in Operations Research

Instruções aos Autores

1. *Submeter artigos* para publicação ao editor principal, de preferência por e-mail em Microsoft Word ou "Portable Document Format" (PDF) para jfo@fe.up.pt, ou por correio normal (quatro cópias) para o seguinte endereço: Prof. José Fernando Oliveira, Departamento de Engenharia Electrotécnica e de Computadores, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, Rua Dr. Roberto Frias, 4200-465 PORTO, Portugal.
2. *Língua.* Os artigos devem ser escritos em Português, Inglês ou Espanhol.
3. *Os Manuscritos* devem ser impressos. Numerar as páginas consecutivamente.
4. *A primeira página* do manuscrito escrito em português ou em espanhol deve ter a seguinte informação: (a) Título; (b) nome, e-mail e afiliação institucional dos autores; (c) um resumo; (d) palavras-chave; (e) título em inglês (f) um resumo em inglês; (g) palavras-chave em inglês; (h) identificação do autor correspondente. Se o manuscrito for escrito em inglês, a primeira página deve ter a seguinte informação: (a) Título em inglês; (b) nome, e-mail e afiliação institucional dos autores; (c) um resumo em inglês; (d) palavras-chave em inglês; (e) identificação do autor correspondente.

5. *Agradecimentos*, incluindo informação sobre apoios, dever ser colocados imediatamente antes da secção de referências.
6. *Notas de rodapé* devem ser evitadas.
7. *Formulas* que são referenciadas devem ser numeradas consecutivamente ao longo do manuscrito como (1), (2), etc. do lado direito.
8. *Figuras*, incluindo grafos e diagramas, devem ser numerados consecutivamente em numeração árabe.
9. *Tabelas* devem ser numeradas consecutivamente em numeração árabe.
10. *Referências*. Citar apenas as mais relevantes e listar só as que são citadas no texto. Indicar as citações no texto através de parênteses rectos, e.g., [4]. No final do artigo listar as referências alfabeticamente por apelido do primeiro autor e numerá-las consecutivamente, de acordo com o seguinte formato: Artigos: autore(s), título, nome e volume da revista (ou livro, mas neste caso incluir o nome dos editores), ano e páginas. Livros: Autor(es), título, editor, ano.
11. *Artigos aceites* devem ser enviados pelo autor ao editor, de preferência na forma de um ficheiro fonte em LaTeX com ficheiros EPS para as figuras, juntamente com um ficheiro PDF ou Postscript. Em alternativa, ficheiros fonte em Word são também aceites. Para garantir uma boa qualidade gráfica, as figuras devem ser em formato vectorial; formatos raster como JPG, BMP, GIF, etc. devem ser evitados.
12. *Provas dos artigos* serão enviadas por e-mail como ficheiros PDF para o autor correspondente. Corrigir as provas cuidadosamente, e restringir as correcções apenas aos pontos em que as provas diferem do manuscrito. Desvios à versão aceite pelo editor são apenas possíveis com a autorização prévia e explícita do editor. Trinta separatas de cada artigo são enviados gratuitamente ao autor correspondente.

Informação sobre a Publicação

Investigação Operacional (ISSN 0874-5161) está registada na Secretaria de Estado da Comunicação Social sob o número 108335. Os volumes da Revista são publicados em papel, e distribuídos a todos os associados da APDIO, e em formato electrónico na rede SciELO - Scientific Electronic Library Online. O preço da assinatura anual é de 25 euros. Os volumes são enviados por correio normal. Informação adicional sobre assinaturas pode ser solicitada ao Secretariado da APDIO- CESUR, Instituto Superior Técnico, Av. Rovisco Pais, 1049-001 LISBOA, Portugal. Tel. +351 218 407 455 - www.apdio.pt - apdio@cesur.civil.ist.utl.pt

JOURNAL INVESTIGAÇÃO OPERACIONAL

Editorial Policy

Investigação Operacional (IO) is the scientific journal of APDIO - Associação Portuguesa de Investigação Operacional (the Portuguese Operational Research Association). The editorial policy of IO is to publish high quality and original articles that contribute to theory, methodology, techniques and software of Operational Research (OR) and its application to different fields. It also publishes articles with relevant reviews of OR subjects. Cases of successful application of OR to practical problems are specially welcome.

Acceptance Process

All manuscripts submitted for publication are refereed and accepted only on the basis of its quality, importance and adequacy to the editorial policy. It will be the responsibility of the Editor to interpret the referee's assessment. The contribution of each paper should be clearly stated in the introduction. Criteria such as relationship with existing literature, length and style are taken into account. A clear indication on the suitability of a manuscript is usually provided after the first round of refereeing. The authors of an accepted paper will be asked to transfer its copyright to the publisher, which will ensure the widest possible dissemination of information. The volumes of the journal are published in hardcopies, which are distributed to all APDIO associates, and in electronic format in SciELO - Scientific Electronic Library Online.

Articles are abstracted/indexed in

IAOR - International Abstracts in Operations Research

Instructions to Authors

1. *Submit papers* for publication to the main editor, preferably by e-mail in Microsoft Word or "Portable Document Format"(PDF) to jfo@fe.up.pt, or by ordinary mail (four copies) to the following address: Prof. José Fernando Oliveira, Departamento de Engenharia Electrotécnica e de Computadores, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, Rua Dr. Roberto Frias, 4200-465 PORTO, Portugal.
2. *Language.* Papers must be written in Portuguese, English or Spanish.
3. *Manuscripts* should be typewritten or typeset. Number the pages consecutively.
4. *The first page* of the manuscript written in English should contain the following information: (a) Title; (b) names, e-mails and institutional affiliations of the authors; (c) an abstract; (d) keywords (f) identification of the corresponding author.
5. *Acknowledgements*, including support information, should be placed prior to the references section.
6. *Footnotes* should be avoided.

7. *Formulas* that are referred to should be numbered consecutively throughout the manuscript as (1), (2), etc. on the right.
8. *Figures*, including graphs and diagrams, should be numbered consecutively in Arabic numbers.
9. *Tables* should be numbered consecutively in Arabic numbers.
10. *References*. Cite only the most relevant references and list only those cited in the text. Indicate citations in the text by bracketed numbers, e.g., [4]. At the end of the paper list the references alphabetically by the surname of the first author and number them consecutively, according to the following formats: Articles: author(s), title, name and number of the journal (or book, but in this case include the editors names), year, pages. Books: Author(s), title, publisher, year.
11. *Accepted papers* are to be sent by the author to the editor, preferably in the form of a source file in LaTeX and EPS files for the figures together with a PDF or postscript file. Alternatively, source files in Word are also accepted. To ensure good publishing quality the figures should be in vector formats; raster formats like JPG, BMP, GIF, etc. should be avoided.
12. *Page proofs* will be e-mailed as a PDF file to the corresponding author. Correct proofs carefully, and restrict corrections to points at which the proof is at variance with the manuscript. Deviations from the version accepted by the editor are only possible with the prior and explicit approval of the editor. Thirty offprints of each paper are supplied free of charge to the corresponding author.

Publication information

Investigação Operacional (ISSN 0874-5161) is registered in the *Secretaria de Estado da Comunicação Social* under number 108335. The volumes of the journal are published in hardcopies, which are distributed free of charge to all APDIO associates, and in electronic format in SciELO - Scientific Electronic Library Online. Subscription price is 25 euros. Issues are sent by standard mail. Additional subscription information is available upon request from APDIO Secretariat - CESUR, Instituto Superior Técnico, Av. Rovisco Pais, 1049-001 LISBOA, Portugal. Tel. +351 218 407 455 - www.apdio.pt - apdio@cesur.civil.ist.utl.pt

ÍNDICE

| | |
|--|-----|
| C. Pimentel, F. Alvelos, J. Carvalho <i>Algoritmos de partição e geração de colunas para dimensionamento de lotes de produção</i> | 129 |
| J. Catalão et al. <i>Optimização da Exploração de Recursos Térmicos considerando a Restrição de Emissões</i> | 147 |
| M. Rodrigues <i>Varição da actividade sísmica ao longo do ano na Península Ibérica</i> | 163 |
| H. Almeida <i>Um Modelo de Classificação com Solução Aproximada por Técnica de Otimização</i> | 179 |
| A.F. Nascimento, T.K.N. Baidya <i>Avaliação da Aquisição de um Ativo de Tecnologia da Informação Através do Método dos Mínimos Quadrados de Monte Carlo</i> | 201 |
| E.L. Mendes, T.M. Soares, R.C. Souza <i>Escores de Variáveis Latentes: Uma Opção para o Índice ANEEL de Satisfação do Consumidor</i> | 211 |