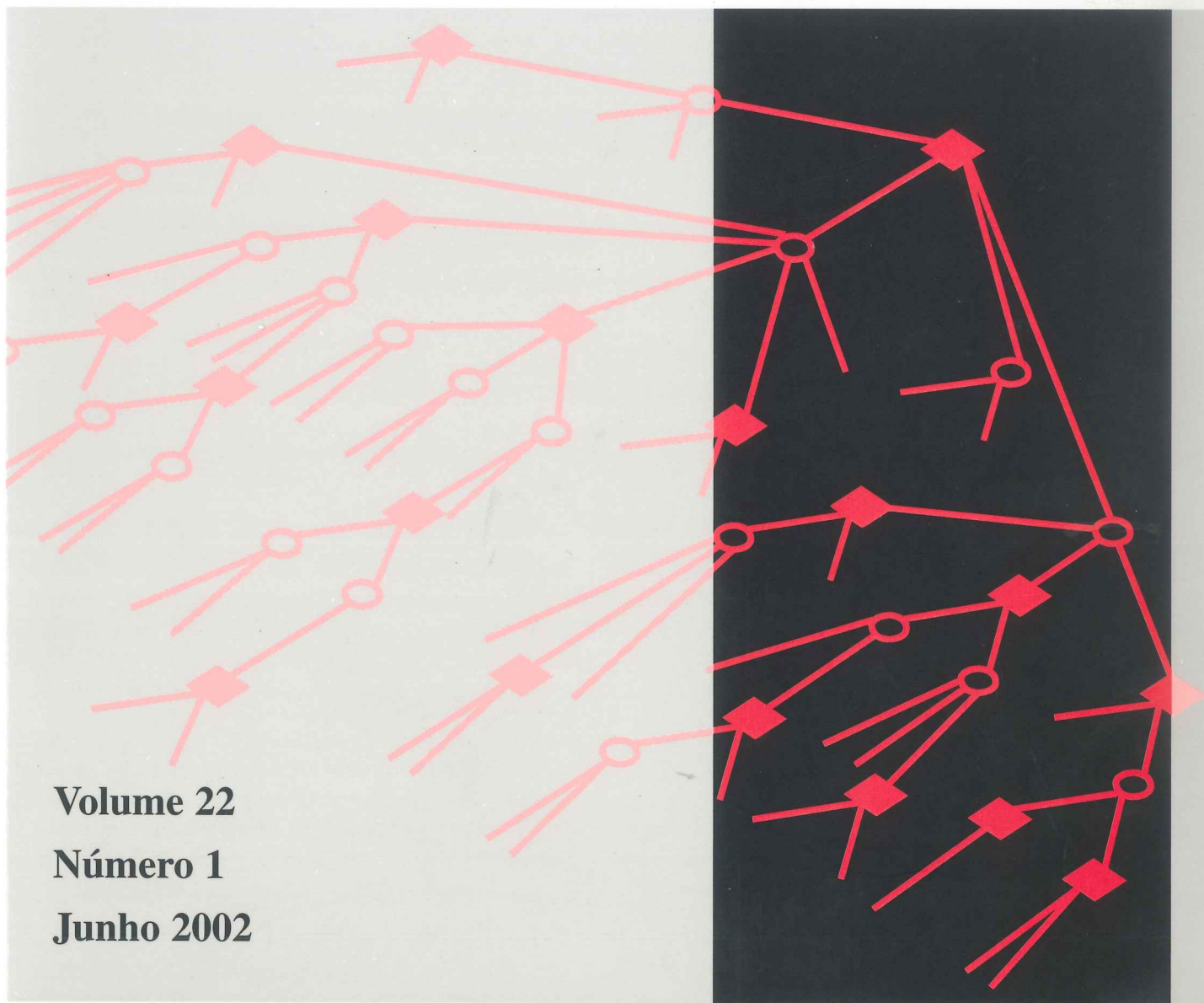


# *Investigação Operacional*



**Volume 22**

**Número 1**

**Junho 2002**

# INVESTIGAÇÃO OPERACIONAL

Propriedade:

APDIO — Associação Portuguesa de Investigação Operacional

## *ESTATUTO EDITORIAL*

*<<Investigação Operacional>>, órgão oficial da APDIO cobre uma larga gama de assuntos reflectindo assim a grande diversidade de profissões e interesses dos sócios da Associação, bem como as muitas áreas de aplicação da I. O. O seu objectivo primordial é promover a aplicação do método e técnicas da I.O. aos problemas da Sociedade Portuguesa.*

*A publicação acolhe contribuições nos campos da metodologia, técnicas, e áreas de aplicação e software de I. O. sendo no entanto dada prioridade a bons casos de estudo de carácter eminentemente prático.*

Patrocinadores

**Fundação Calouste Gulbenkian**

**FCT**

Fundação para a Ciência e a Tecnologia

MINISTÉRIO DA CIÊNCIA E DA TECNOLOGIA

Apoio do Programa Operacional Ciência, Tecnologia,  
Inovação do Quadro Comunitário de Apoio III.

ISSN n° 0874-5161

Dep. Legal n° 130 761 / 98

Execução Gráfica: J. F. Macedo - Astrografe

700 Ex.

2002/06

# INVESTIGAÇÃO OPERACIONAL

Volume 22 — nº 1 — Junho 2002

Publicação Semestral

Editor Principal: Joaquim J. Júdice  
Universidade de Coimbra

## Comissão Editorial

M. Teresa Almeida Inst. Sup. Economia e Gestão	Laureano Escudero IBM, Espanha	José F. Oliveira Univ. do Porto
C. Henggeler Antunes Univ. de Coimbra	Edite Fernandes Univ. do Minho	Rui Oliveira Inst. Superior Técnico
Jaime Barceló Univ. de Barcelona	J. Soeiro Ferreira Univ. do Porto	J. Pinho Paixão Univ. de Lisboa
C. Bana e Costa Inst. Superior Técnico	J. Fernando Gonçalves Univ. do Porto	M. Vaz Pato Inst. Sup. Economia e Gestão
M. Eugénia Captivo Univ. de Lisboa	Luís Gouveia Univ. de Lisboa	A. Guimarães Rodrigues Univ. do Minho
Domingos M. Cardoso Univ. de Aveiro	Rui C. Guimarães Univ. do Porto	António J. L. Rodrigues Univ. de Lisboa
João Clímaco Univ. de Coimbra	J. Assis Lopes Inst. Superior Técnico	J. Pinho de Sousa Univ. do Porto
J. Dias Coelho Univ. Nova de Lisboa	Carlos J. Luz Inst. Polit. Setúbal	Reinaldo Sousa Univ. Católica, Rio Janeiro
João P. Costa Univ. de Coimbra	Virgílio P. Machado Univ. Nova de Lisboa	L. Valadares Tavares Inst. Superior Técnico
Ruy Costa Univ. Nova de Lisboa	Manuel Matos Univ. do Porto	B. Calafate Vasconcelos Univ. do Porto
J. Rodrigues Dias Univ. de Évora	N. Maculan Univ. Fed., Rio Janeiro	Luís N. Vicente Univ. de Coimbra

A Revista "INVESTIGAÇÃO OPERACIONAL" está registada na Secretaria de Estado da Comunicação Social sob o nº 108335.

Esta Revista é distribuída gratuitamente aos sócios da APDIO. As informações sobre inscrições na Associação, assim como a correspondência para a Revista devem ser enviadas para a sede da APDIO - Associação Portuguesa de Investigação Operacional - CESUR, Instituto Superior Técnico, Av. Rovisco Pais, 1049-001 Lisboa.

Este Volume foi subsidiado por:

**Fundação para a Ciência e Tecnologia (FCT)**

**Fundação Calouste Gulbenkian**

Assinatura: 25 Euros



## Estruturas de vizinhança e procura local no problema da clique máxima

Luis Cavique §      César Rego †      Isabel Themido\*‡

§ ESCS - Instituto Politécnico de Lisboa  
lcavique@escs.ipl.pt

† HCES - University of Mississippi, USA  
crego@bus.olemiss.edu

‡ Instituto Superior Técnico

---

### Abstract

The Maximum Clique is a NP-hard problem aiming at finding the largest complete sub-graph in a given graph. In this approach we intend to find a lower bound for the maximization problem.

Firstly, the neighborhood structures are defined according to the feasibility and the type of move. Secondly, based on the created structures the constructive and the improvement heuristics are explained. Initially we describe two constructive heuristics (primal and dual) proposed by Johnson [1974] and a heuristic that uses Tabu Search, developed by Soriano and Gendreau [1996], that we call Primal Tabu. Afterwards a new heuristic is presented, named Dual Tabu due to its working with non-feasible solutions. This new heuristic, still based on the defined neighborhood structures, incorporates an oscillation strategy that drags the solution from the feasible solution space to the non-feasible space and vice-versa.

The computational results with DIMACS clique benchmark instances presented are obtained with a hybrid heuristic Primal-Dual Tabu, that takes advantage of the complementary strategies.

### Resumo

A clique máxima é um problema NP-difícil, onde se pretende encontrar o sub-grafo completo com o maior número de vértices num grafo. Nesta abordagem pretende-se encontrar um limite inferior no problema de maximização.

Distinguem-se em primeiro lugar as estruturas de vizinhanças quanto à sua admissibilidade e ao tipo de movimento. Com base nas estruturas criadas são explicadas as heurísticas construtivas e de melhoramentos. São descritas, inicialmente, duas heurísticas construtivas (primal e dual) propostas por Johnson [1974] e uma heurística que recorre

---

\*Publicado postumamente.

à Procura Tabu, desenvolvida por Soriano e Gendreau [1996], que designámos por Tabu Primal. Em seguida apresenta-se uma nova heurística, que nomeámos de Tabu Dual por actuar sobre soluções não admissíveis. Esta nova heurística, ainda com base nas referidas estruturas de vizinhança, incorpora uma estratégia de oscilação que arrasta a solução do espaço de soluções admissível ao espaço não admissível e vice-versa.

São apresentados e discutidos os resultados computacionais de um conjunto de problemas de teste da DIMACS utilizando uma heurística híbrida Tabu Primal-Dual, que tira partido da complementaridade das estratégias.

**Keywords:** maximum clique problem, neighborhood structures, hybrid heuristics

**Title:** Neighborhood structures and local search for the maximum clique problem

---

## 1 Introdução

Dado o grafo não orientado  $G = (V, A)$ , então  $G_1 = (V_1, A_1)$  denomina-se sub-grafo de  $G$  se  $V_1 \subseteq V$  e  $A_1 \subseteq A$ , onde cada arco de  $A_1$  incide nos vértices de  $V_1$ ; por outro lado,  $G$  denomina-se por super-grafo de  $G_1$ . Um sub-grafo  $G_1$  diz-se completo se existir um arco para todos os pares de vértices. Um sub-grafo completo denomina-se também por clique. Uma clique é maximal, se não está contido numa outra clique. No problema da clique máxima (PCM) pretende-se encontrar o sub-grafo completo com o maior número de vértices num grafo  $G$ . O número de clique  $\omega(G)$ , representa a cardinalidade da maior clique de  $G$ .

Neste artigo na secção 2 apresenta-se o Problema da Clique Máxima enquadrado com outros problemas da teoria dos grafos, realçando-se em seguida a abordagem heurística. Uma das primeiras abordagens referidas na literatura ficou a dever-se a Johnson [1974], para encontrar um limite inferior no problema de maximização, utilizando técnicas heurísticas. Em desenvolvimentos mais recentes, Soriano e Gendreau [1996] utilizando a Procura Tabu, desenvolvem um algoritmo com o qual obtiveram resultados com pequenos desvios ao óptimo e com tempos de computação reduzidos.

Na secção 3 sistematizam-se as duas abordagens, classificando em primeiro lugar as estruturas de vizinhanças quanto à sua admissibilidade (primal e dual) e ao tipo de movimento (inserção, remoção ou troca). Em seguida são apresentadas as heurísticas Primais e Duais. É apresentada ainda, uma nova heurística, Tabu Dual, que tem a capacidade de recuperar sub-grafos e encontrar cliques utilizando o espaço de soluções não admissíveis. Esta heurística, ainda com base nas referidas estruturas de vizinhança, incorpora uma estratégia de oscilação que percorre o espaço de soluções admissível passando temporariamente por espaços de soluções não admissíveis. Por fim, é apresentada uma heurística híbrida Tabu Primal-Dual, que tira partido da complementaridade das estratégias.

Na secção 4 são apresentados e comparados os resultados computacionais das três heurísticas apresentadas: a heurística Tabu Primal, Tabu Dual e da heurística híbrida Tabu Primal-Dual. Finalmente, na secção 5 são apresentadas algumas conclusões.

## 2 O Problema da Clique Máxima PCM

O PCM é um problema importante de optimização combinatória que tem um conjunto vasto de aplicações: análise de mercado [Roy 1970], selecção de projectos [Christofides 1975] e teoria da transmissão de sinais [Berge 1991]. O interesse por este problema levou à realização de um concurso de análise experimental de algoritmos denominado Second DIMACS Implementation Challenge: Clique, Coloring and Satisfiability [Johnson e Trick 1996]. O PCM é ainda interessante já que se relaciona com vários problemas da teoria dos grafos.

### 2.1 Teoria de Grafos

Num grafo  $G=(V,A)$  um vértice cobre um arco se esse arco incide no vértice, da mesma forma, um arco cobre os dois vértices onde incide. Um conjunto de vértices que cubram todos as arestas de  $G$  chama-se Cobertura por Vértices (“vertex cover”). O número de cobertura por vértices  $\beta(G)$  é dado pela cardinalidade do menor conjunto do referido problema. Quando um conjunto de arestas cobre todos os vértices de  $G$  chama-se Cobertura por Arestas. A cardinalidade do conjunto de Cobertura de Arestas de menor cardinalidade é expressa por  $\beta'(G)$ .

Dominância é um conceito diferente de cobertura, onde os elementos dominantes e dominados são do mesmo tipo, isto é, ou vértices ou arestas. No problema de Dominância de Vértices cada vértice domina-se a ele próprio e a todos os vértices adjacentes. De forma análoga à resolução do problema da Dominância de Arestas devolve o conjunto de arestas que são adjacentes a todas as arestas de  $G$ . O problema de dominância é de minimização e os números de dominância  $\sigma(G)$  e  $\sigma'(G)$  correspondem respectivamente ao número de dominância de vértices (ou número de estabilidade externa) e ao número de dominância de arestas.

A noção de independência é oposta à de dominância, a dominância usa os elementos adjacentes e a independência os elementos não adjacentes. O conjunto de vértices, cujos pares de vértice não são adjacentes é chamado o Conjunto Independente de Vértices. O número de independência  $\alpha(G)$  (ou número de estabilidade interna) é dado pela cardinalidade do maior Conjunto Independente de Vértices. O Conjunto de Independência de Arestas define-se como o conjunto de arestas não adjacentes; este problema é também conhecido como o de Emparelhamento (“matching”), sendo a maior cardinalidade do conjunto de arestas emparelhados expressa por  $\alpha'(G)$ .

Os problemas de determinação do número de clique, do número de independência e do número cobertura por vértices, estão profundamente inter-relacionados, podendo-se até considerar visões diferentes do mesmo problema [Garey e Johnson 1979]:

- i) O número de clique é igual ao número de independência do grafo complementar:  $\omega(G)=\alpha(G^c)$ .
- ii) A soma do número de independência com o número cobertura por vértices é igual à cardinalidade do conjunto dos vértices:  $\alpha(G)+\beta(G)=|V|$ .

O número cromático  $\chi(G)$  representa o menor número de cores necessárias para colorir os vértices de um grafo  $G$ , de modo a que vértices adjacentes tenham cores diferentes. Um

limite superior para o número de clique é dado pelo número cromático. Um limite superior de simples computação é dado pelo maior grau dos vértices do grafo  $\Delta(G)$ . Para encontrar um limite inferior do número de clique, igualmente sem esforço de cálculo, recorre-se ao Teorema de Turan. Assim, resumindo o número de clique tem os seguintes limites superiores e inferiores, onde  $n$  é o número de vértices do grafo e  $d_i$  o grau do vértice  $i$ :

$$\sum 1/(n-d_i) \leq \omega(G) \leq \chi(G) \leq \Delta(G)+1$$

Os limites superiores e inferiores podem ainda ser dados pelas relações de cobertura, dominância e independência, da seguinte forma [McHugh 1990]:

$$\sigma(G) \leq \alpha(G) \leq \beta'(G)$$

$$\sigma'(G) \leq \alpha'(G) \leq \beta(G)$$

A cobertura e independência são complementares, conforme mostra a relação de Galai [McHugh 1990]:

$$\alpha(G) + \beta(G) = |V|$$

$$\alpha'(G) + \beta'(G) = |V|$$

O número mínimo de cliques cuja união é igual a  $|V|$  representa-se por  $\theta(G)$ , também definido como a cobertura mínima de  $G$  com cliques. Como a estabilidade interna tem no máximo um vértice em cada clique da partição, diz-se que  $\alpha(G) \leq \theta(G)$  e da mesma forma  $\omega(G) \leq \chi(G)$ .

A cobertura mínima de conjuntos independentes é dada por  $\theta(G^c)$  podendo concluir-se das expressões anteriores que  $\theta(G^c) = \chi(G)$ . Como foi visto, o número de clique é igual ao número de independência do grafo complementar  $\omega(G) = \alpha(G^c)$ . Resumidamente teremos que para qualquer grafo  $G$ , se verificam as seguintes igualdades com os grafos complementares:

$$\theta(G) = \chi(G^c)$$

$$\omega(G) = \alpha(G^c)$$

Dado um grafo  $G=(V,A)$  e denotando  $G_U$  o sub-grafo de  $G$  induzido pelo subconjunto de vértices  $U$ , tal que  $U \subseteq V$ ,  $G$  diz-se perfeito [Berge 1991] se e só se qualquer que seja o subconjunto de vértices  $U$  se verificar uma das seguintes igualdades:

$$\omega(G_U) = \chi(G_U)$$

ou

$$\alpha(G_U) = \theta(G_U)$$

Dadas todas estas motivações para o PCM, é também conhecido que se trata de um problema de difícil resolução sendo classificado como NP- difícil [Garey e Johnson 1979], o que quer dizer, ser pouco provável que exista um algoritmo que o resolva em tempo polinomial.

Existem duas abordagens clássicas de resolução: a primeira através dos limites superiores [Luz 1996] associada a técnicas enumerativas de “branch-and-bound” e a segunda através de limites inferiores utilizando algoritmos de procura local.

## 2.2 Abordagem heurística

Para encontrar os limites inferiores a primeira abordagem heurística é proposta por Johnson [1974]. A utilização da Procura Tabu neste problema foi introduzida por Frieden, Hertz e Werra [1989] no algoritmo STABULUS, uma técnica que procura conjuntos independentes em grafos de grandes dimensões. Gendreau, Salvail e Soriano [1993] apresentam três versões de um algoritmo que utiliza a Procura Tabu: com uma lista tabu, com duas listas tabu e uma terceira versão com o Tabu Probabilístico. Este algoritmo é também apresentado no Concurso da DIMACS em Soriano e Gendreau [1996]. Battiti e Protasi [1995] inspirados no algoritmo de Gendreau et al. [1993] desenvolvem um algoritmo onde implementam a Procura Tabu Reactiva.

As heurísticas de Johnson [1974] fazem duas abordagens distintas ao espaço de soluções: a primeira desenvolve-se no espaço de soluções admissíveis e a segunda no espaço de soluções duais. Isto é, a primeira heurística inicia a clique com um conjunto vazio, incrementando vértices que tenham o maior número de vértices adjacentes à solução, terminando o procedimento quando não é possível incluir mais vértices, isto é, quando encontra uma clique maximal. A segunda heurística parte de uma solução não admissível, em que o sub-grafo em causa inclui todos os vértices do grafo; em cada iteração vão sendo removidos os vértices com menos ligações ao sub-grafo, até encontrar uma clique. Notemos que neste último caso não existe a garantia de ser uma clique maximal, isto é, a clique encontrada pode estar incluída numa clique maximal.

Mais recentemente Soriano e Gendreau [1996] apresentam um algoritmo de Procura Tabu para o problema da clique máxima onde utilizam estruturas de vizinhança de adição e remoção de vértices. O algoritmo alterna a função de remoção de vértices quando não se torna possível adicionar um novo vértice, fazendo uso da lista tabu para evitar ciclicidade e recorrendo ainda a técnicas de diversificação contínua baseadas num vector de frequências dos vértices visitados.

## 3 Apresentação das heurísticas para o PCM

Nesta secção procura-se sistematizar as duas abordagens referidas, classificando em primeiro lugar as estruturas de vizinhanças e em seguida as heurísticas conhecidas para encontrar limites inferiores, concluindo com a apresentação de um novo algoritmo, que reutiliza as estruturas de vizinhança definidas.

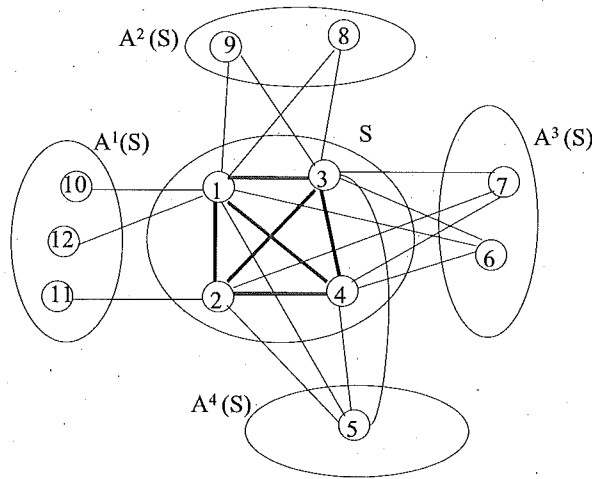


Figura 1: Clique S e conjunto de nós adjacentes  $A^i(S)$

### 3.1 Estruturas de vizinhança

O conjunto  $A(S)$  de vértices adjacentes a algum vértice da solução corrente  $S$  está representado na figura 1. Definindo  $n=|S|$  e  $A^i(S)$  como o subconjunto de vértices com  $i$  arestas incidentes em  $S$ ,  $A(S)$  pode decompor-se em subconjuntos da seguinte forma:  $A(S) = \cup A^i(S)$ , com  $i=(1, \dots, n)$ . A cardinalidade do conjunto dos vértices  $|V|$  é igual à soma dos vértices adjacentes à solução  $A(S)$  e aos não adjacentes  $A^0(S)$ , teremos então que  $|V| = \sum |A^i(S)| + n$ , com  $i=(0, \dots, n)$ . Para o algoritmo são considerados sub-conjuntos com interesse  $A^n(S)$  e  $A^{n-1}(S)$ . Se  $A^n(S) \neq \emptyset$  torna-se possível aumentar um vértice à solução, incrementando o número de clique. Para  $A^{n-1}(S) \neq \emptyset$  existe a possibilidade de troca de um vértice do clique  $S$  por um vértice de  $A^{n-1}(S)$ . Para qualquer outro sub-conjunto  $A^{n-m}(S) \neq \emptyset$  a possibilidades de troca é de  $m$  vértices da solução  $S$  por um vértice de  $A^{n-m}(S)$ .

Define-se por vizinhança de uma solução  $S$ , denotada por  $V(S)$ , o conjunto de soluções  $S'$  que podem ser obtidas a partir de  $S$ . Também, a transição de uma solução  $S$  para uma solução  $S'$  é designado por 'movimento'. As estruturas de vizinhanças para o PMC são classificadas segundo a sua admissibilidade e o tipo de movimento.

Quanto à admissibilidade: se a solução corrente  $S$  e a próxima solução  $S'$  são cliques denominamos a vizinhança como primal  $V_p$ , se estamos na presença de algum sub-grafo que não é completo chamamos à vizinhança dual  $V_d$ . A vizinhança primal encontra-se na primeira heurística de Johnson e na meta-heurística de Soriano e Gendreau e a vizinhança dual na segunda heurística Johnson. Quanto ao tipo de movimento consideram-se os movimentos de adição e remoção de vértices  $v$  do sub-grafo, representando as vizinhanças por  $V^+$  e  $V^-$ .

Combinando as duas classificações, obtemos quatro estruturas de vizinhança, da seguinte forma:

- $V_p^+(S) = \{S' : S' = S \cup \{v\}, v \in A^n(S), S \text{ e } S' \text{ são cliques}\}$
- $V_p^-(S) = \{S' : S' = S \setminus \{v\}, v \in S, S \text{ e } S' \text{ são cliques}\}$
- $V_d^+(S) = \{S' : S' = S \cup \{v\}, v \in A^n(S), S \text{ e } S' \text{ não são necessariamente cliques}\}$
- $V_d^-(S) = \{S' : S' = S \setminus \{v\}, v \in S, S \text{ e } S' \text{ não são necessariamente cliques}\}$



Tabela 1: Exemplificação das vizinhanças para o grafo da Figura 1

	Solução antes	Vizinhança	Solução depois
Adicionar 5	{1,2,3,4}	$V_p^+(S)$	{1,2,3,4,5}
Remover 1	{1,2,3,4,5}	$V_p^-(S)$	{2,3,4,5}
Adicionar 6	{1,2,3,4,5}	$V_d^+(S)$	{1,2,3,4,5,6}
Remover 1	{1,2,3,4,5,6}	$V_d^-(S)$	{2,3,4,5,6}
Adicionar 6 e remover 3	{1,2,3,4}	$V_p^0(S)$	{1,2,4,6}

Desenvolvemos ainda uma outra estrutura de vizinhança que reúne as duas estratégias primais, definida por vizinhança de troca de vértices, que se define em seguida:

$$V_p^0(S) = \{S': S' = S \cup \{v_1\} \setminus \{v_2\}, v_1 \in A^{n-1}(S), v_2 \in S, S \text{ e } S' \text{ são cliques}\}$$

Na tabela 1 exemplificam-se movimentos referentes às cinco estruturas de vizinhança aplicadas ao grafo da figura 1. Através da vizinhança  $V_p^+(S)$  encontra-se a clique maximal: no exemplo partindo da solução {1,2,3,4} encontra a solução {1,2,3,4,5}, acrescentado o vértice 5 que pertence ao conjunto do vértices adjacentes  $A^n(S)$ . A estrutura  $V_p^-(S)$  remove um vértice do sub-grafo: no exemplo é removido o vértice 1, resultando a clique {2,3,4,5}.

Nas estruturas de vizinhança classificadas como duais,  $S$  e  $S'$  não são obrigatoriamente soluções admissíveis. A vizinhança  $V_d^+(S)$  pode partir de uma solução admissível (sub-grafo completo) mas a solução final é certamente não admissível (sub-grafo não completo): no exemplo é acrescentado o vértice 6 à clique {1,2,3,4,5} resultando um grafo não completo. O resultado da estrutura de vizinhança  $V_d^-(S)$  são sub-grafos (completos ou não): no exemplo foi retirado o vértice 1 resultando o sub-grafo {2,3,4,5,6}; a aplicação desta vizinhança ao devolver uma clique não garante que este seja maximal.

Nas estruturas de vizinhança duais, as soluções  $S$  e  $S'$  são não admissíveis, contudo, podem individualmente uma delas ser admissível. Isto é, ao aplicar a estrutura de vizinhança  $V_d^+$ , a clique maximal  $S$ , através da adição de um vértice  $S \cup \{v\}$ , é devolvido um sub-grafo que não é uma clique. Para o caso da estrutura  $V_d^-$ , dada uma solução  $S$  não admissível, através da remoção de um vértice  $S \setminus \{v\}$  pode resultar uma clique  $S'$ .

Finalmente para a estrutura de vizinhança  $V_p^0$  é realizada uma troca no espaço de soluções admissível do vértice 3 pelo vértice 6, resultando uma clique com a mesma dimensão.

## 3.2 Heurísticas primais e duais

### 3.2.1 Heurísticas construtivas

A heurística construtiva é iniciada num ponto qualquer  $S$ , pertencendo  $S$  ao espaço de soluções  $X$ ,  $S \in X$ . A nova solução  $S'$  é escolhida na vizinhança  $V(S)$ . Isto implica que a cada  $S \in X$  está associado  $V(S) \subseteq X$ . A escolha da nova solução  $S'$  é dada pela melhor solução do conjunto de soluções de  $V(S)$ . Num problema de maximização, sendo  $f(S)$  a função avaliação das soluções, existe nova solução  $S'$  se e só se a nova solução melhorar a solução corrente,  $f(S') > f(S)$ , caso contrário o processo termina.

1)	variável de entrada S: $S = \emptyset$ ; variável de saída S: S é clique;
2)	procedimento repetir se $V_p^+(S) \neq \emptyset$ escolher o melhor $S'$ ; actualizar S; até $V_p^+(S) = \emptyset$ ; fim do procedimento.

Figura 2: Heurística Primal

1)	variável de entrada S: $S = V$ ; variável de saída S: S é clique;
2)	procedimento repetir escolher o melhor $S'$ em $V_d^-(S)$ ; actualizar S; até S ser uma clique; fim do procedimento.

Figura 3: Heurística Dual

Assim, com a Heurística Primal (figura 2) ou primeira heurística de Johnson, a solução S é afectada inicialmente com um conjunto vazio, repetindo-se o processo de aplicação de um única estrutura de vizinhança  $V_p^+$  até encontrar uma clique maximal.

O critério de escolha do vértice a incluir no clique é dado pelo vértice que, ao ser incluído na clique, gerará a solução  $S'$  com maior  $|A^n(S')|$ . Assim podemos definir como limite superior do número da clique:  $|S'| + |A^n(S')|$ .

A Heurística denominada Dual (figura 3) ou segunda heurística de Johnson vai utilizar a estrutura de vizinhança  $V_d^-$ . A solução S é iniciada com todos os vértices V do grafo  $G=(V,A)$ , repetindo-se as iterações até se encontrar uma solução admissível, sem a garantia que seja uma clique maximal.

O critério de escolha do vértice a remover é dado pelo vértice que tem menos ligações em S, isto é, para o sub-grafo S vai ser escolhido o vértice com menor grau.

### 3.2.2 Heurística Tabu Primal

Como forma de explorar mais eficazmente a procura local recorreremos à Procura Tabu, cujos resultados obtidos para um conjunto vasto de problemas tem demonstrado as suas grandes possibilidades, atingindo frequentemente soluções óptimas ou próximas das óptimas. Ao contrário das heurísticas construtivas as meta-heurísticas, nomeadamente as Heurísticas Tabu foram, especialmente concebidas para evitar óptimos locais, mesmo que isso implique uma degradação

1)	variável de entrada S: S é clique ou $S = \emptyset$ ; variável de saída S*: S* é clique;
2)	procedimento $S^* \leftarrow S$ ; enquanto não exceder o número de iterações repetir se $Vp^+(S) \setminus T \neq \emptyset$ escolher o melhor S'; senão se $Vp^0(S) \setminus T \neq \emptyset$ escolher o melhor S'; senão escolher o melhor S' em $Vp^-(S)$ e actualiza T; actualizar $S \leftarrow S'$ ; se $ S  >  S^* $ então $S^* \leftarrow S$ ; fim do ciclo enquanto; fim do procedimento.

Figura 4: Heurística Tabu Primal

temporária da função de avaliação.

A Procura Tabu é uma meta-heurística para a resolução de problemas combinatórios que guia a pesquisa local para fora de óptimos locais tendo a capacidades de explorar novas regiões. Trata-se de um procedimento iterativo que mantém uma lista dos movimentos mais recentemente efectuados, excluindo nas iterações seguintes a execução de movimentos que levem a visitar soluções já conhecidas.

A grande vantagem desta abordagem é uma utilização de memórias flexíveis em contraste com estruturas rígidas de memória de grande dimensão do tipo 'Branch-and-Bound' ou com a inexistência de memória como no 'Simulated Annealing'. As estruturas de memória geralmente utilizadas são a memória de curta duração, materializada na lista Tabu T e uma memória de longa duração MLD que regista a frequência dos movimentos ao longo do conjunto de iterações.

Resumidamente, ao implementar um heurística Tabu devem ser considerados três aspectos: a função objectivo  $f(S)$ , os tipos de movimentos expressos através de  $V(S)$ , e finalmente os tipos de memórias tabu T e de longa duração MLD. Ver em Glover e Laguna [1997] uma descrição detalhada.

A heurística Tabu Primal (figura 4) baseia-se no algoritmo de Soriano e Gendreau que recorre às técnicas da Procura Tabu e articula as estruturas de vizinhança  $Vp^+$  e  $Vp^-$ . Enquanto é possível incrementar vértices utilizam-se movimentos de  $Vp^+$ , quando tal já não é possível recorre-se à vizinhança  $Vp^-$ , retirando um vértice.

Na nossa implementação foi introduzido o movimento de trocas de vértices, suportado pela estrutura de vizinhança  $Vp^0$ . A integração nos algoritmos desta estrutura de vizinhança mostrou-se muito eficiente, já que permite manter o valor da função objectivo durante um maior conjunto de iterações. As heurísticas que não utilizam  $Vp^0$ , recorrem apenas às estruturas  $Vp^-$  e  $Vp^+$ ; na presença de uma clique maximal é aplicada a estrutura  $Vp^-$  não existindo a garantia que na iteração seguinte se possa utilizar a vizinhança  $Vp^+$ , degradando assim a função objectivo. Em resumo,  $Vp^0$  garante explicitamente a continuidade do valor da função objectivo, enquanto que a associação de  $Vp^-$  e  $Vp^+$  só implicitamente o mantém.

Nesta heurística foi utilizada uma única lista tabu T, que regista os vértices que foram

retirados da clique (TabuDrop); mesmo para valores grandes de  $|T|$  existe um conjunto grande de vértices que podem ser escolhidos para serem acrescentados à clique. Uma lista tabu contendo os vértices acrescentados ao clique (TabuAdd), exigiria o conhecimento da solução óptima para um dimensionamento adequado.

Como forma de diversificar a busca, complementando a memória de curta duração baseada nos movimentos mais recentes, utiliza-se a memória de longa duração MLD baseada na frequência. Devemos distinguir dois tipos de frequência [Glover e Laguna 1997]: a frequência "residente" e a frequência "transiente". A frequência residente está relacionada com o número de vezes que um atributo (vértice ou aresta) ocorre nas soluções, durante um conjunto de iterações. Por outro lado a frequência transiente relaciona-se com o número de vezes que um atributo foi manipulado por movimentos (inserção, remoção ou troca), durante um conjunto de iterações. Foi adoptada uma estratégia de diversificação contínua utilizando uma MLD residente, que regista o número de vezes que cada vértice pertenceu às diferentes soluções. O valor devolvido pela MLD para um determinado vértice  $v$ , designado  $MLD(v)$ , apresenta-se padronizado da seguinte forma:

$$MLD(v) = n^{\circ} \text{ ocorrências do vértice } v / n^{\circ} \text{ da iteração corrente do algoritmo}$$

A função avaliação é confrontada com a informação do passado dada pela  $MLD(v)$  e com a possibilidade de futuras ligações dada por  $A^n(S')$ . O critério de escolha do vértice  $v$  de entrada tem em consideração o número de ligações com  $A^n(S')$  sendo penalizado pelo número de vezes que o vértice já entrou na solução,  $\eta$  é o factor penalidade. O vértice a ser escolhido é dado por:

$$v_i = \arg \max \{ |SU\{v_i\}| + |A^n(SU\{v_i\})| - \eta \cdot MDL(v_i) : v_i \in A^n(S) \setminus T \}$$

A função objectivo para a remoção de um vértice, vai considerar o vértice da solução  $S$  que têm menos ligações. Sendo  $d$  o grau do vértice  $v_i$ , a escolha irá recair no vértice  $v_i = \arg \min \{d(v_i) \mid v_i \in S\}$ .

### 3.2.3 Heurística Tabu Dual

A heurística Tabu Dual apresenta duas características fundamentais que justificam a sua apresentação: o seu carácter geral relativamente às variáveis de entrada e a pesquisa de diferentes espaços de soluções utilizando Estratégias de Oscilação [Glover, Laguna 1997].

#### Capacidade de generalização

O carácter mais geral da heurística Tabu Dual, relativamente à heurística Tabu Primal, resulta de tanto tratar soluções admissíveis como não admissíveis. As suas variáveis de entrada podem incluir tanto cliques (como na heurística Tabu Primal) como sub-grafos não completos.

O algoritmo da Figura 5 ao receber como variável de entrada uma solução não admissível, trata primeiro de recuperar a solução, isto é, passar para o espaço das soluções admissíveis utilizando a estrutura de vizinhança  $Vd^-$ . Em seguida são efectuados um conjunto de movimentos por forma de melhorar a solução combinando as estruturas de vizinhança  $Vp^+$ ,  $Vp^0$  e  $Vd^+$ .

### Estratégia de Oscilação

O métodos tradicionais de pesquisa local de soluções desenvolvem-se até atingir um nível crítico, geralmente um óptimo local, parando normalmente a seguir. Algumas heurísticas mais competitivas, procuram criar movimentos de recuo e avanço na tentativa de encontrar nova melhoria. Em vez de parar ou recuar relativamente ao limite crítico, a Estratégia de Oscilação altera as regras de selecção de movimentos, permitindo ultrapassar o nível crítico, entrando em regiões não admissíveis.

Definimos região admissível (ou primal)  $R_p$  como uma reunião de sequências de vizinhanças de soluções admissíveis  $V_p(S)$ , dada por  $R = \cup V_p(S_i)$ , com  $i=(1,..,n)$ . Definimos ainda, que o espaço de soluções  $X$  é igual à reunião de conjunto de regiões admissíveis, dado por  $X = \cup R_{p_i}$ , com  $i=(1,..,m)$ . Para regiões admissíveis disjuntas ou não convexas conforme definidas em [Kelly et al. 1993] é de todo o interesse utilizar estruturas de vizinhanças de soluções não admissíveis. A utilização de trajectórias em regiões não admissíveis (ou duais)  $R_d$ , permite visitar regiões admissíveis muito distantes umas das outras, diversificando muito a pesquisa, aumentando assim as possibilidades de encontrar melhores soluções. Define-se for fim, como “profundidade” em  $R_d$  o grau de não admissibilidade da solução, i.e. o número de vezes que um atributo é acrescentado com movimentos  $V_d(S)$ .

A Estratégia de Oscilação alterna a visita a regiões admissíveis  $R_p$  com não admissíveis  $R_d$ , podendo ainda utilizar profundidades diferentes. Aproximando-se e distanciando-se do nível crítico repetidas vezes, a trajectória da função objectivo cria um padrão com um movimento ondulatório (Figura 6). O controlo sobre a trajectória de soluções é provocado pela alternância de regras (ou estruturas de vizinhança) escolhidas, provocando sequências sucessivas de movimento construtivos e destrutivos em regiões admissíveis  $R_p$  e não admissíveis  $R_d$ .

A Estratégia de Oscilação difere ainda da Estratégia de Diversificação não só na forma como é alterada a função objectivo  $f(S)$  mas também por atravessar regiões não admissíveis. Na estratégia de diversificação a função objectivo é penalizada com a informação contida na MLD, mantendo-se na região  $R_p$ . Na estratégia de oscilação produz melhoramentos na função objectivo, relaxando em contrapartida algumas das restrições do problema e usando regiões não admissíveis  $R_d$ . Na figura 6 depois dos patamares onde se repete o mesmo valor de  $f(S)$  é activada a estratégia de oscilação com uma profundidade igual a um, melhorando a função objectivo e passando o clique a um sub-grafo não completo.

Em seguida apresenta-se a heurística Tabu Dual na Figura 5, que utiliza as estruturas de vizinhança  $V_p^+$ ,  $V_p^0$ ,  $V_d^+$  e  $V_d^-$ , que passamos a descrever.

Em primeiro lugar são declaradas as variáveis de entrada e saída: a variável de entrada é um sub-grafo (completo ou não completo), sendo sempre devolvido uma clique.

O procedimento repete-se num ciclo durante um número máximo de iterações verificando a condição de admissibilidade da solução corrente  $S$ . Se a solução é uma clique através da estrutura de vizinhança  $V_p^+$  testa-se a possibilidade de aumentar o número de clique. Caso não se possa incrementar a solução, ao utilizar a estrutura de vizinhança  $V_p^0$ , explora-se a região de soluções admissíveis, com movimentos de troca. No último caso não sendo permitidas inserções nem trocas, utiliza-se a Estratégia de Oscilação e insere-se um vértice no sub-grafo, através da estrutura de vizinhança  $V_d^+$ . Quando se trata de recuperar o sub-grafo, a estrutura

1) variável de entrada  $S$ :  $S$  é sub-grafo;  
 variável de saída  $S^*$ :  $S^*$  é clique;

2) procedimento  
 $S^* \leftarrow \emptyset$ ;  
 enquanto não exceder o número de iterações repetir  
   se  $S$  é uma clique então  
     { se  $Vp^+(S) \setminus T \neq \emptyset$  escolher o melhor  $S'$ ;  
       senão se  $Vp^0(S) \setminus T \neq \emptyset$  escolher o melhor  $S'$ ;  
       senão escolher o melhor  $S'$  em  $Vd^+(S)$ ;}  
   senão escolher o melhor  $S'$  em  $Vd^-(S)$  e actualizar  $T$ ;  
   actualizar  $S \leftarrow S'$ ;  
   se  $|S| > |S^*|$  e  $S$  é uma clique então  $S^* \leftarrow S$ ;  
 fim do ciclo enquanto;  
 fim do procedimento.

Figura 5: Heurística Tabu Dual

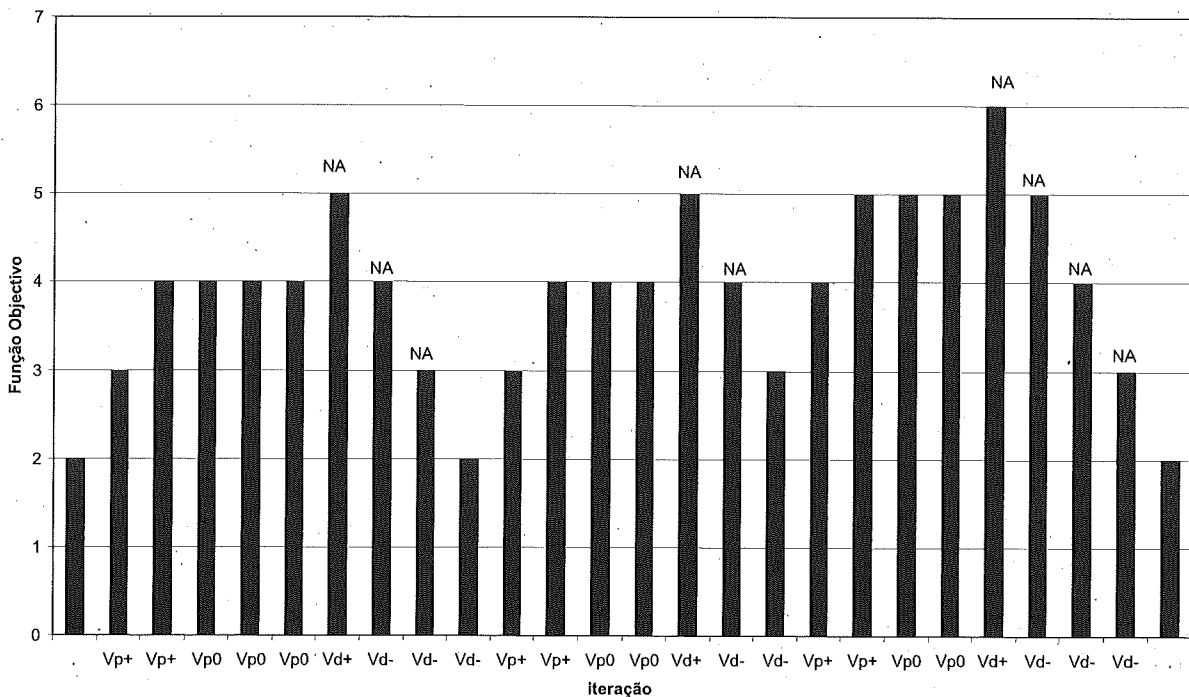


Figura 6: Trajectória oscilante no espaço de soluções admissíveis e não admissíveis (NA) com indicação das vizinhanças



de vizinhança  $Vd^-$  é usada, retirando os vértices que não pertencem à clique.

Como vimos anteriormente a trajetória típica para esta heurística apresenta um perfil ondulatório, representado na figura 6. Partindo de uma solução admissível é aplicada a estrutura de vizinhança  $Vp^+$  até encontrar um clique maximal. Repete-se um conjunto de trocas  $Vp^0$ , surgindo de onde em onde a possibilidade de incrementar o número da clique. A estratégia de oscilação de profundidade igual a 1 é iniciada com a estrutura  $Vd^+$ , repetindo-se uma sequência de  $Vd^-$  até encontrar uma nova clique, voltando o padrão da oscilação a uma solução admissível longe de qualquer óptimo local.

### 3.2.4 Heurística Híbrida Tabu Primal-Dual

Nesta secção discutimos brevemente as características das várias meta-heurísticas existentes, apresentamos uma taxonomia. De seguida descrevem-se dois operadores para combinação de heurísticas híbridas. No final apresentamos a heurística híbrida para o Problema da Clique Máxima.

A utilização de meta-heurísticas baseadas em procura local exige a definição das estruturas de vizinhança e a um conhecimento profundo do problema, tendo a vantagem de intensificar a busca em regiões específicas.

Por outro lado as meta-heurísticas baseadas em populações têm a vantagem de ter uma maior independência relativamente ao problema, não necessitando de conhecer qualquer das suas idiossincrasias. A técnica mais divulgada são os Algoritmos Genéticos dentro dos algoritmos evolutivos, devendo ser ainda referido o "Scatter Search".

Por fim podemos referir a mais antiga de todas as meta-heurísticas, baseada na repetição de uma qualquer técnica de pesquisa (heurística ou aleatória) com soluções de partida diferentes, denominada multi-partida ("multi-start"). Técnicas de pesquisa como o GRASP desenvolvem esta estratégia com muito êxito.

Por forma a modelar as arquitecturas de híbridos propomos a utilização de dois operadores: multiplicativo e aditivo, que passamos a explicar. Se existe uma hierarquização das heurísticas i.e. se a primeira chama a segunda um conjunto de vezes, utilizamos o operador multiplicativo. Por exemplo a estratégia de multi-partida MP para uma heurística H pode ser expressa da seguinte forma:  $MP * (H)$ .

Por outro lado podemos executar uma sequência de heurísticas, em que o resultado da primeira é a solução inicial da segunda, utilizando um operador aditivo. Um exemplo bastante referido é o seguinte: dada uma solução inicial criada a partir de um heurística construtiva HC melhorar a solução com uma técnica de Procura Tabu PT, resultando a expressão  $HC+PT$ .

A criação de híbridos vai tão longe quanto for necessário. Podemos associar Algoritmos Genéticos com Procura Tabu com uma Heurística Construtiva de diversas formas: utilizando o Algoritmo Genético como supervisor de uma pesquisa local,  $AG*(HC+PT)$ . Podemos ainda utilizar uma heurística multi-partida ao nível superior e criar uma sequência de heurísticas onde o resultado de uma Procura Tabu é desenvolvido por um Algoritmo Genético que retorna a solução a uma nova Procura Tabu, expresso da seguinte forma  $MP*(HC+PT+GA+PT)$ .

Numa tentativa de hierarquizar as meta-heurísticas: a um nível superior está com certeza

a estratégia de multi-partida, a um nível intermédio as técnicas baseadas em populações e ao nível mais operacional a pesquisa local. Exemplo  $MP^*(GA^*(HC+PT))$ .

No decorrer da análise dos resultados computacionais, relativamente à qualidade da solução, para as heurísticas Tabu Primal e Tabu Dual constatou-se que nenhuma das heurísticas dominava ou era dominada pela outra [Tabela 2]. A expressão heurística dominada é utilizada no sentido da decisão multi-critério que passamos a descrever. A heurística X domina Y se e só se  $f(X[i]) \geq f(Y[i]) : \forall i$  e  $f(X[i]) > f(Y[i]) : \exists i$ , sendo i uma determinada instância. A heurística X diz-se não dominada por Y, se não existir qualquer heurística Y que domine X. Por fim, duas heurísticas *não são comparáveis* se não se verificar a dominância de X por Y e de Y por X.

Como é vulgar na análise de heurísticas: heurísticas diferentes produzem usualmente resultados diferentes para cada um dos problemas de teste. No nosso caso a heurística Tabu Primal comporta-se melhor com determinadas instâncias e a Tabu Dual com outras, sendo o inverso também verdadeiro. Como forma de ultrapassar este problema desenvolvemos uma abordagem híbrida que inclui as duas heurísticas.

Assim para o nosso caso foi utilizada uma estratégia multi-partida ao nível superior, e uma combinação das heurísticas descritas Tabu Primal e Tabu Dual à qual denominámos a Heurística Híbrida Primal-Dual, que se resume na expressão seguinte:

$$\text{Multi-Partida} * (\text{Tabu Dual} + \text{Tabu Primal} + \text{Tabu Dual})$$

Os resultados computacionais, obtidos com a combinação das duas heurísticas na Heurística Híbrida Primal-Dual, dominam os resultados obtidos da heurística Tabu Primal e da heurística Tabu Dual, pelo que julgamos do maior interesse a criação de meta-heurísticas híbridas como forma de tirar partido da complementaridade de diferentes estratégias.

## 4 Análise experimental

Para apresentar a qualidade dos algoritmos, devemos evidenciar três factores: os detalhes da implementação, os dados utilizados para teste e os resultados computacionais.

### 4.1 Detalhes da implementação

O programa foi desenvolvido na linguagem C num compilador Borland C/C++ e os resultados foram obtidos num PC Pentium 200MHz.

O procedimento híbrido Tabu Primal-Dual é chamado 10 vezes pelo procedimento Multi-partida. O número de iterações para a heurística Tabu Primal e para o Tabu Dual é igual ao número de vértices do grafo. Para a dimensão da lista tabu |T| foi adoptado o valor da  $\sqrt{|V|}$ , sendo |V| o número de vértices do grafo  $G=(V,A)$ .

## 4.2 Dados utilizados para teste

Para obter os resultados computacionais, foram escolhidos 22 exemplos, que representassem 7 famílias de grafos da Dimacs Benchmark, disponíveis via ftp de dimacs.rutgers.edu.

Os exemplos incluem os grafos “brock”, de muito difícil resolução, já que contêm cliques escondidas por cliques mais pequenas [Brockington e Culberson 1996], desviando a procura local para soluções não-ótimas. Incluem-se os grafos de Sanchis - “san” - que foram construídos com vista a dificultar a sua resolução e ainda grafos da família “c\_fat”, “hamming”, “johnson”, “MANN” e “p\_hat”.

## 4.3 Resultados computacionais

Os resultados computacionais apresentados na Tabela 2, são caracterizados pelo valor das soluções (sol) e pelos tempos de computação requeridos, expressos em segundos: tempo até à melhor solução (tam) e o tempo total (tot) limitado pelo valor de 300 segundos. Quando  $tot=tam$  é encontrada a solução óptima, por outro lado quando  $tot>tam$  e  $tot < 300$  foram esgotadas o número de iterações. Existem portanto três condições de fim: ou é encontrada a solução óptima ou ultrapassou o número de iterações ou ainda por limitação de tempo. Os tempos computacionais com indicação de zero, resultam de tempos inferiores a um segundo.

Na mesma Tabela 2 identificam-se: o número de vértices dos grafos, a densidade dos grafos, a solução óptima, os resultados publicados por Soriano e Gendreau [1996] (SG-TS) e os resultados da nossas implementações para os algoritmos Tabu Primal (T\_Primal), Tabu Dual (T\_Dual) e Tabu Primal-Dual (T\_Primal\_Dual).

Relativamente aos tempos computacionais, torna-se difícil comparar os nossos resultados com outras heurísticas, já que foram utilizados computadores com características diferentes; contudo as heurísticas T\_Primal, T\_Dual e T\_Primal\_Dual apresentam valores da mesma ordem de grandeza dos apresentados em SG-TS. Os tempos médios para atingir a melhor solução de T\_Primal e T\_dual são equivalentes, cerca de 20 segundos, apresentando o T\_Primal\_Dual valores médios superiores na ordem dos 30 segundos.

Relativamente aos valores das soluções usaremos a noção de dominância em multi-critério. T\_Primal e T\_dual não são comparáveis, já que T\_Primal não domina T\_Dual e T\_Dual não domina T\_Primal, para tal contribuem as instâncias “brock200\_2” e “san400\_0.7\_1” que apresentam os valores de 11-10 e 35-40 respectivamente. A heurística híbrida T\_Primal\_Dual acaba por dominar T\_Primal, T\_Dual e os valores publicados SG-TS, já que encontra a solução óptima na instância “brock200\_2”.

## 5 Conclusões e trabalhos futuros

Foram classificadas as estruturas de vizinhanças segundo a sua admissibilidade e o tipo de movimento para o Problema da Clique Máxima. Depois são explicadas, com base na referidas estruturas, não só as heurísticas baseadas em Procura Tabu, como é comum, mas também as heurísticas construtivas.

Tabela 2: Resultados Computacionais do Problema da Clique Máxima para exemplos da DIMACS

instância	nº nós	dens. %	OPTIMA	SG-TS		T Primal			T Dual			T Primal-Dual		
			sol	sol	tam	sol	tam	tot	sol	tam	tot	sol	tam	tot
brock200_2.clq	200	49	12	11	2	11	1	8	10	1	9	12	2	2
brock200_4.clq	200	65	17	16	1	16	2	12	16	1	13	16	5	16
brock400_2.clq	400	75	29	24	13	24	57	95	23	21	105	24	19	97
brock400_4.clq	400	75	33	25	75	24	9	95	25	42	105	25	94	94
c-fat200-2.clq	200	16	24	24	0	24	8	8	24	1	1	24	3	3
c-fat200-5.clq	200	42	58	58	1	58	3	3	58	6	6	58	11	11
c-fat500-1.clq	500	4	14	14	0	14	4	4	14	6	6	14	15	15
c-fat500-10.clq	500	37	126	126	6	126	57	57	126	77	77	126	107	107
hamming6-4.clq	64	34	4	4	0	4	1	1	4	0	0	4	0	0
hamming8-4.clq	256	64	16	16	0	16	2	2	16	2	2	16	4	4
johnson16-2-4.clq	120	76	8	8	0	8	1	1	8	0	0	8	1	1
johnson32-2-4.clq	496	88	16	16	1	16	20	20	16	20	20	16	29	29
MANN_a9.clq	45	91	16	16	0	16	0	0	16	0	0	16	0	0
MANN_a27.clq	378	99	126	125	8	125	158	300	125	160	300	125	173	300
p_hat300-1.clq	300	24	8	8	1	8	1	1	8	4	4	8	6	6
p_hat300-2.clq	300	49	25	25	1	25	2	2	25	3	3	25	6	6
p_hat500-1.clq	500	25	9	9	1	9	6	6	9	7	7	9	19	19
san200_0.7_1.clq	200	70	30	30	11	30	4	4	30	4	4	30	7	7
san200_0.9_1.clq	200	90	70	70	31	70	7	7	70	7	7	70	8	8
san400_05_1.clq	400	50	13	13	44	13	12	12	13	15	15	13	31	31
san400_0.7_1.clq	400	70	40	40	25	35	36	121	40	27	27	40	66	66
san400_0.9_1.clq	400	90	100	100	4	100	52	52	100	54	54	100	60	60
valores médios	302,68	58,32	36,09	35,36	10,23	35,09	20,14	36,86	35,27	20,82	34,77	35,41	30,27	40,09

A heurística proposta por Soriano e Gendreau [1996], denominada neste trabalho por Tabu Primal é expandida levando à criação de uma segunda heurística, a Tabu Dual. Esta última heurística, ainda com base nas referidas estruturas de vizinhança, incorpora a implementação da estratégia de oscilação, apresentada de uma forma inovadora.

Dado que não existe dominância dos resultados computacionais de nenhuma das heurísticas, foi criada uma heurística híbrida que tira partido dos pontos fortes das duas estratégias. Para além de introduzirmos uma nova forma de modelar as arquitecturas de híbridos, julgamos que esta abordagem se pode estender a um conjunto vasto de problemas, para os quais existem diferentes heurísticas não dominadas entre si.

Os resultados computacionais da heurística híbrida Primal-Dual mostram-se comparáveis aos publicados na literatura. Para os grafos de Sanchis são alcançadas as soluções óptimas e mesmo para as difíceis instâncias “brock” são obtidos valores competitivos.

Os algoritmos apresentados neste artigo, são utilizados em trabalhos subsequentes [Cavique, Rego e Themido 2002] como suporte a algoritmos baseados em populações. Estes algoritmos têm em comum a noção combinação de soluções. Para o nosso problema, dado que da combinação de cliques diferentes dificilmente resulta um clique, o algoritmo Tabu Dual é utilizado para recuperar soluções não admissíveis.

## 6 Bibliografia

- [1] Battiti R, Protasi M, “Reactive Local Search for the Maximum Clique Problem”, *International Computer Science Institute*, Berkeley, CA TR-75-052 (1995).
- [2] Berge C, *Graphs*, 3<sup>rd</sup> edition, North-Holland (1991).
- [3] Brockington M and Culberson J.C, ‘Camouflaging independent sets in quasi-random graphs’ in *Clique, Coloring and Satisfiability*, Second Implementation Challenge DIMACS, Johnson DS, Trick MA (Eds.), (1996) pp. 75-89.
- [4] Cavique L, Rego C, Themido I, “A Scatter Search Algorithm for the Maximum Clique Problem” Kluwer Academic Publishers (2002) pp.227-244.
- [5] Christofides N, *Graph theory: an algorithm approach*, Academic Press (1975).
- [6] Friden C, Hertz A, D de Werra, “STABULUS: A technique for finding stable sets in large graphs with tabu search”, *Computing*, 42, (1989) pp. 35-44.
- [7] Garey MR, Johnson DS, *Computers and intractability: a guide to the theory of NP-completeness*, New York, W.H. Freeman & Co (1979).
- [8] Gendreau M, Soriano P, Salvail L “Solving the maximum clique problem using tabu search approach” in *Annals of Operations Research*, eds F Glover, M Laguna, E Taillard, D de Werra, J.C. Baltzer AG Science Publishers, vol.41, (1993) pp.385-403.
- [9] Glover F, Laguna M, *Tabu Search*, Kluwer Academic Publishers (1997).
- [10] Johnson DS, “Approximation algorithms for combinatorial problems”, *Journal of Computer and System Sciences*, vol.9, (1974) pp. 256-278.
- [11] Johnson DS, Trick MA eds, *Clique, Coloring and Satisfiability – Second Implementation Challenge DIMACS*, AMS (1996).
- [12] McHugh, JA, *Algorithm Graph Theory*, Prentice-Hall Inc (1990).

- [13] Kelly J.P. , P.L.Golden , A.A. Assad, "Large-scale controlled rounding using tabu search with strategic oscillation" in *Annals of Operations Research*, eds F Glover, M Laguna, E Taillard, D de Werra, J.C. Baltzer AG Science Publishers, vol. 41, (1993) pp. 69-84.
- [14] Luz C, "Um novo majorante para o número de independência de um grafo obtido por técnicas de programação quadrática" Tese de Doutoramento, Universidade de Aveiro (1996).
- [15] Roy B, *Algèbre moderne et théorie des graphes*, tome 2, Dunod, Paris (1970).
- [16] Soriano P, Gendreau M, "Tabu search algorithms for the maximum clique" in *Clique, Coloring and Satisfiability – Second Implementation Challenge DIMACS*, Johnson DS, Trick MA eds, AMS, (1996) pp.221-242.



## Uma heurística para apoio à geração de serviços de motoristas em transportes colectivos

José Miguel Couto \*

Jorge Pinho de Sousa \*

\* Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto / INEGI  
jsousa@fe.up.pt

---

### Abstract

In this paper a flexible and interactive heuristic for the bus crew scheduling problem is presented. The problem of crew scheduling arises in the context of the broader process of operational planning and control of urban transportation services. An introduction to the global problem, together with a reference to the GIST Decision Support System in which the heuristic is being tested, are presented.

The crew scheduling problem is then described, and the way the problem is handled in the Public Transportation Company of Porto – STCP – is presented (this is the case study used in this work). The “run-cutting” heuristic method developed here is then described with detail. Particular attention is paid to the interactive nature of the approach adopted. This interaction is achieved with the aid of some specially designed interfaces; that allow “what-if” type analyses and the generation of better solutions. The solutions can then be visualised with a software component allowing their evaluation and the test of the heuristic.

Several real instances were solved. Their resolution show that the software developed in this work can be a useful tool for helping the planning process. Finally, a critical overview of the work is presented and future areas of research are identified.

### Resumo

Neste artigo, apresenta-se uma heurística construtiva, flexível e interactiva, para o problema da geração de serviços de motoristas em transportes colectivos urbanos. Este problema insere-se no problema mais geral do planeamento e controlo dos transportes colectivos urbanos. Assim, é feito o enquadramento do problema, e apresentado um Sistema de Apoio à Decisão, sistema GIST, no âmbito do qual a heurística está a ser testada.

De seguida, descreve-se o problema da geração de serviços de tripulações, e a maneira como ele é tratado na STCP (Sociedade de Transportes Colectivos do Porto), empresa que constituiu o caso de estudo tratado neste artigo.

Seguidamente, descreve-se a heurística desenvolvida, do tipo “run-cutting”, “inspirada” nos procedimentos tradicionais, e que é parcialmente controlada pelo utilizador, através de uma interface para parametrização do algoritmo. Esta interacção desempenha um papel importante no processo de planeamento, já que permite vários tipos de análise “what-if” e, como resultado, o melhoramento iterativo e a afinação das soluções. As soluções obtidas

podem ser visualizadas e editadas através de uma aplicação gráfica que possibilita a sua avaliação por parte do planeador, bem como facilita o teste do algoritmo.

Testes computacionais, com problemas de dimensão e complexidade realistas, permitem concluir que a aplicação desenvolvida pode de facto constituir uma ferramenta útil para apoiar o processo de planeamento. É finalmente tecida uma apreciação crítica ao trabalho desenvolvido, referindo-se áreas que merecem ser exploradas no seu seguimento.

**Keywords:** Heuristics, Decision Support Systems, Public Transportation Planning

**Title:** A heuristic for the bus driver scheduling problem

---

## 1 Enquadramento

A geração de serviços do pessoal tripulante constitui uma fase importante do processo global de planeamento e controlo de transportes colectivos de passageiros. O problema, como um todo, é complexo e de grande dimensão, exigindo portanto a utilização de ferramentas informáticas capazes de facilitar e agilizar a sua resolução.

Desde há várias décadas que existe trabalho, em termos de algoritmos e de sistemas informáticos, para resolver este problema [6]. Em particular, no nosso país, duas instituições universitárias (INEGI / Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto e ICAT / Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa) têm, no âmbito de um consórcio envolvendo cinco empresas, vindo a desenvolver um Sistema integrado de Apoio à Decisão para o planeamento operacional de transportes colectivos - sistema GIST [1]. Todo o planeamento, desde a definição da rede de transportes até à criação dos horários de trabalho dos tripulantes para cada viatura em cada linha, pode ser feito com o sistema GIST, que proporciona um ambiente visual amigável, e diversas funcionalidades que facilitam, em muito, a tarefa do planeador.

O sistema GIST dispõe de um algoritmo de geração de serviços (horários de trabalho dos tripulantes) que consiste basicamente em gerar um número importante de serviços admissíveis, transformando o problema num problema de *cobertura de conjuntos*, e em utilizar depois técnicas de optimização (parcial). A solução obtida pode conter *viagens sobrecobertas*, isto é, cobertas por mais do que um serviço. Relativamente ao desempenho deste algoritmo, os planeadores consideram em geral que o tempo de execução é elevado, a parametrização é relativamente complexa e os resultados não são frequentemente satisfatórios.

É precisamente para tentar melhorar a qualidade das soluções geradas automaticamente, que têm sido desenvolvidos novos algoritmos de resolução, entre os quais a heurística do tipo "*run-cutting*" que constitui a parte central deste trabalho. Esta heurística foi desenvolvida na perspectiva de vir a integrar o sistema GIST, e considerando como caso de estudo a Sociedade de Transportes Colectivos do Porto (STCP).

## 2 Serviços de tripulações

### 2.1 Conceitos

*Turno*: Conjunto dos trajectos que uma viatura realiza durante um dia.

*Horário de viaturas*: Conjunto de *turnos* a realizar num dia e numa linha (ou num conjunto de linhas tratadas como uma só, para efeitos de planeamento das viaturas).

*Ponto de rendição*: Nó da rede de transportes, onde é permitida a troca dos tripulantes das viaturas. Estações de recolha e terminos também são, normalmente, *pontos de rendição*.

*Tramo*: Percurso definido por um *ponto de rendição* de início e outro de fim (“adjacente” ao primeiro) e o tempo que separa os dois. Um *tramo* define a menor “porção de trabalho” que uma tripulação pode realizar.

*Grupo de tramos*: Um *grupo de tramos* é o conjunto de todos os *tramos* gerados a partir de um ou mais horários de viaturas (tratados em conjunto).

*Tempo de preparação e tempo de recolha*: Quando o turno começa ou acaba numa estação de recolha, é acrescentado no início do turno, o *tempo de preparação* (da viatura) e no fim do turno, o *tempo de recolha*. Esses tempos são incorporados nos primeiros *tramos*, quando da criação do *grupo de tramos*, e destinam-se à execução de tarefas nas estações de recolha: verificação da viatura, abastecimento, limpeza, etc.

*Serviço*: Um *serviço* é constituído por um conjunto ordenado de *tramos*, e corresponde ao período de trabalho que uma tripulação (motoristas) realiza durante um dia.

*Tipo de serviço*: Os *serviços* podem ser de diferentes *tipos*, de acordo com um conjunto de regras que os caracterizam. A um *serviço* pode-se exigir que tenha apenas uma etapa, que não tenha uma duração inferior a 3 horas nem superior a 5 horas, que só tenha início depois das 20 horas, etc.

*Grupo de serviços*: O conjunto dos *serviços* realizados num determinado *grupo de tramos* determina um *grupo de serviços*.

### 2.2 Operações

Uma vez definidos os *turnos*, definem-se os *serviços* das tripulações de maneira a cobrir os *horários das viaturas*. Ao longo do trajecto que a viatura percorre no seu *turno*, apenas pode haver mudança de tripulação em alguns dos nós (*pontos de rendição*), e ao menor intervalo durante o qual não pode haver mudança de tripulação está associado um *tramo*. Os *turnos* de um *horário de viaturas* são então divididos em *tramos* (o conjunto constitui um *grupo de tramos*), sobre os quais se constituem os *serviços*.

O número de *serviços* das tripulações, tal como o número de *turnos*, deve ser mínimo. Neste caso, a importância da minimização do número de *serviços* é ainda maior do que no caso das viaturas, já que para a empresa o custo do pessoal tripulante representa uma parte

substancial do custo total de operação.

Numerosas restrições incidem sobre a geração dos *serviços*, tornando esta fase do planeamento a mais crítica do processo, devido à sua complexidade e ao seu elevado peso nos custos totais de planeamento. As restrições decorrem da legislação laboral, dos acordos com os trabalhadores e de preferências, tanto da empresa como dos tripulantes. Estas restrições envolvem as durações máximas e mínimas das etapas de um *serviço*, os horários permitidos para refeições, tempos médios de trabalho efectivo desejados, número de mudanças de viatura, preferência de determinados *tipos de serviço* em determinadas horas do dia, etc.

### 3 Geração “manual” de serviços de tripulações

Para ilustrar os procedimentos “manuais” de geração de serviços (que constituem a base da heurística desenvolvida no âmbito deste trabalho), foi utilizada uma aplicação informática designada por *Bancada de Serviços* [2]. Esta aplicação “importa” os dados relativos aos serviços, da base de dados do sistema GIST e apresenta-os graficamente. As suas funcionalidades de edição e visualização são de grande utilidade nos processos de concepção e desenvolvimento, uma vez que se podem construir vários problemas (ao retirar e incluir serviços, tramos ou pontos de rendição) e depois visualizar as soluções criadas pelos algoritmos geradores de serviços. Esses dados trabalhados podem ser depois “exportados” para a base de dados do GIST.

A Bancada de Serviços tem como objectivo servir de suporte para o teste e a avaliação de algoritmos de geração de serviços, mas engloba também funcionalidades que permitem criar esses serviços “manualmente”. É então possível criar serviços que o planeador pretenda incluir em determinado grupo de serviços, e a partir daí, gerar serviços automaticamente para os restantes tramos livres.

#### 3.1 Grupo de tramos

A geração dos serviços do pessoal tripulante tem como ponto de partida um horário de viaturas, que é previamente “importado” da base de dados do GIST. Na figura 1, representa-se o tempo num eixo, e à esquerda os turnos deste horário de viaturas. Neste exemplo, temos 6 turnos identificados por “60-1” a “60-6”. Os traços verticais à esquerda e à direita dos turnos representam as estações de recolha ou terminos por onde passa cada viatura a determinada hora do dia. No turno “60-3”, por exemplo, a viatura começa as viagens às 5h35 na Estação de Recolha de Francos e acaba o dia na mesma estação, às 21h23. A informação detalhada sobre os nós e sobre as horas exactas que representam os traços pode ser acedida pelo utilizador, chamando uma janela que a aplicação tem para o efeito. Estes tempos nas estações de recolha já têm incorporados os tempos de preparação e recolha.

De seguida, procede-se à identificação dos locais onde é possível fazer a rendição das tripulações e das horas em que as viaturas passam por eles. Com isso, ficam determinados todos os possíveis pontos de rendição no horário de viaturas. Na figura 1, os traços pequenos representam outros possíveis pontos de rendição, mas que estão desactivados. Os pontos de rendição podem ser activados e desactivados, conforme a conveniência do planeador ou por imperativo exterior (obras no local, impossibilidade temporária de se utilizar o local, etc.).

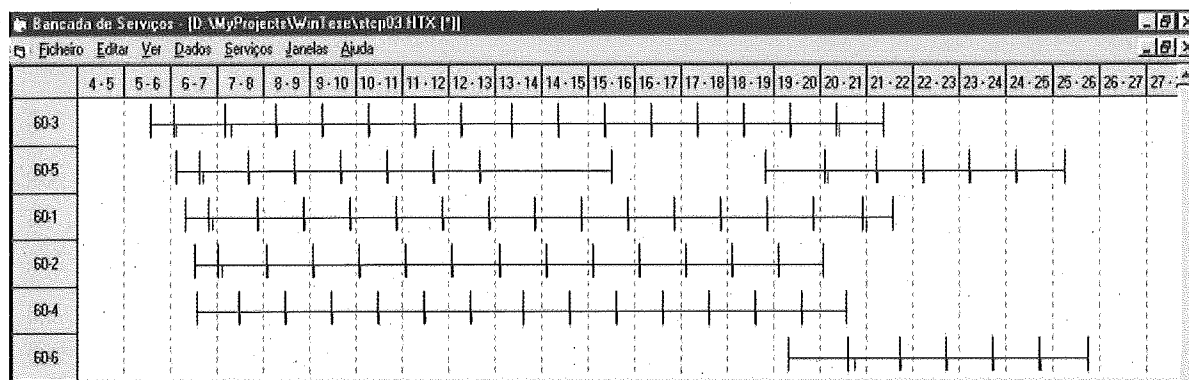


Figura 1: Grupo de tramos de um horário de viaturas

Uma vez identificados os pontos de renção e as horas a que as viaturas passam por eles, ficam determinados os tramos. Os tramos são a unidade mínima de trabalho de uma tripulação numa viatura, sendo representados por traços horizontais que unem os pontos de renção, estações de recolha e terminos. Toda a informação até agora apresentada constitui o que se denomina por um *grupo de tramos*.

### 3.2 Tipos de serviço

Para gerar os serviços, é ainda necessário dispor de um conjunto de *tipos de serviço* permitidos. Cada empresa de transportes tem um conjunto de tipos de serviço, resultantes dos acordos colectivos de trabalho e de eventuais acordos entre as empresas e os sindicatos. Os serviços podem ter uma ou mais etapas.

Os tipos de serviço são caracterizados por:

- uma designação;
- durações mínima e máxima de cada etapa;
- durações mínima e máxima do intervalo que separa as etapas – a *folga*;
- duração efectiva, mínimo e máximo (tempo de condução apenas);
- duração total, mínimo e máximo (inclui a folga entre etapas);
- tempo mínimo para refeição;
- durações mínima e máxima das pequenas interrupções de serviço (pequenas interrupções que ainda são contadas como tempo efectivo);
- número máximo de pequenas interrupções de serviço;
- obrigatoriedade do serviço começar/terminar numa estação de recolha;
- especificação de como tratar o tempo de deslocação na folga (este problema é tratado no artigo mais adiante);
- períodos nos quais o início e fim do serviço não podem ter lugar.

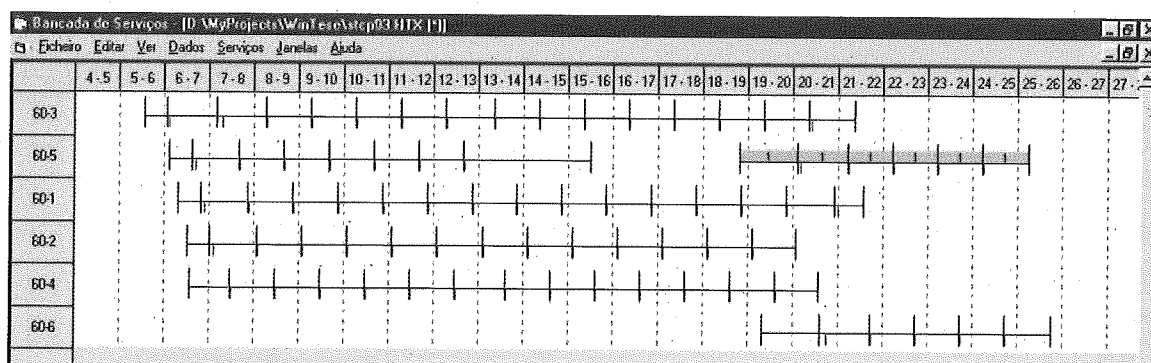


Figura 2: Construção de um serviço com uma única etapa

Caso o serviço tenha apenas uma etapa, não existem naturalmente as restrições que se referem à folga. E a duração mínima e máxima da etapa coincide com a duração mínima e máxima efectiva e total, pelo que é usual nestes casos utilizar apenas as durações efectivas. Para além destas restrições, é também possível associar aos tipos de serviço um tempo máximo de horas extras permitido.

Uma outra restrição a ter em conta e que incide sobre todos os tipos de serviço é o horário permitido para as refeições. Tanto o horário de almoço como o de jantar estão enquadrados por um limite inferior e superior. Neste caso, o horário permitido para almoço e para o jantar é comum a todos os tipos de serviço.

Se a localização dos nós no fim de uma etapa e no início da etapa seguinte não coincidirem, os tripulantes terão de deslocar-se de um para o outro. Assim, haverá que considerar esse tempo de deslocação como fazendo parte da folga, da etapa anterior ou da etapa seguinte. Quando este tempo de deslocação é considerado "significativo" pela empresa, ele é atribuído a uma das etapas. Também é possível haver tempo de deslocação em serviços com uma única etapa desde que essa etapa cubra tramos em mais do que um turno.

### 3.3 Construção dos serviços

É possível agora construir os serviços para o grupo de tramos escolhido. O que se pretende obter é um conjunto de serviços que obedeça a todas as regras previamente impostas (em particular pelos diferentes tipos de serviços) e que cubra a totalidade dos tramos do grupo. O resultado final é um *horário de serviços*.

### 3.4 Exemplo

Na figura 2, no turno "60-5" existe um conjunto de tramos que poderá constituir um serviço em uma etapa (assinalado a sombreado). Ao cobrir esses tramos pelo serviço "1", deve-se verificar se todas as restrições do tipo de serviço escolhido são verificadas, e que o local e hora de fim de cada tramo coincide com o local e hora de início do tramo seguinte. Suponhamos que a duração mínima da etapa única para este tipo de serviço é de 5 horas e a máxima de 7 horas e que o tempo mínimo para refeição é de 50 minutos. Suponhamos ainda que este



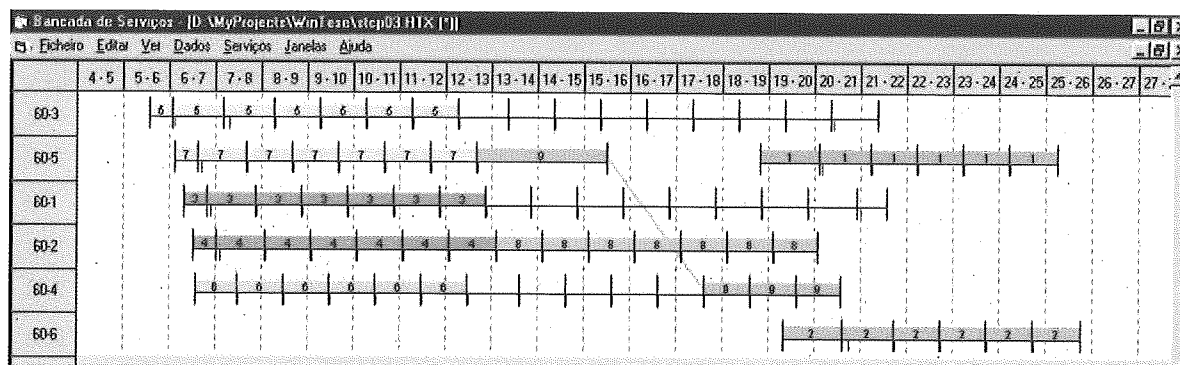


Figura 3: Construção de um serviço com duas etapas

serviço é do tipo nocturno e que portanto não pode ter início antes das 18 horas. Neste caso, o serviço deve incluir espaço para uma refeição, o jantar, que só pode ter lugar entre as 18h e as 21h. Este serviço tem início às 18h50 e fim às 25h15; tendo portanto uma duração de 6h25, o que está dentro dos limites permitidos. O intervalo de tempo permitido para o jantar, não coberto pelo serviço, vai das 18h às 18h50, ou seja os 50 minutos mínimos necessários. Não existem pequenas interrupções de serviço. Além disso, o serviço não tem início antes das 18h. Supondo que o tipo de serviço não implica qualquer obrigatoriedade de início e/ou fim numa estação de recolha, o serviço é admissível e pode ser guardado.

Pode-se ainda construir outro serviço deste tipo no turno “60-6”, mas não nos restantes turnos, porque tais serviços violariam certamente a restrição de não se iniciarem antes das 18h, uma vez que a etapa única deve ter pelo menos 5 horas de duração. É no entanto possível construir serviços com uma única etapa, mas do tipo diurno. Haverá que considerar, neste caso, o intervalo de tempo permitido para o almoço.

Depois de se ter construído o serviço “7”, o turno “60-5” fica com o último tramo não coberto com um serviço, pelo que se procederá à tentativa de construção de um tipo de serviço com mais etapas. Neste caso, haverá que obedecer às durações mínimas e máximas de cada etapa e da folga, verificar se existe tempo de deslocação entre as etapas e contabilizá-lo devidamente.

Os serviços vão então sendo construídos em sequência, até cobrirem todos os tramos (se tal for possível). Se tal não for possível apenas com os tipos de serviço escolhidos, algum serviço poderá ter que cobrir alguns tramos que outro serviço já cobriu (pelo que um dos tripulantes ficará inactivo durante esse tempo), ou então esses tramos serão cobertos pelo que se denomina *bocados* (pequenos serviços que são indesejáveis para a empresa, porque muito caros, e mal aceites pelos tripulantes).

Mesmo para um horário de serviços pequeno como este, o número de verificações das restrições que é preciso efectuar torna a sua elaboração penosa e demorada. Naturalmente que o problema se agrava bastante se, por exemplo, se adicionar a este horário de viaturas mais uma dezena de turnos e a possibilidade de serem construídos cinco tipos de serviço diferentes. Assim, a geração de serviços do pessoal tripulante, apesar da sua simplicidade conceptual, requer necessariamente a utilização de recursos informáticos e algoritmos não triviais.

Mesmo que as soluções obtidas pelo computador tenham uma “qualidade” algo inferior

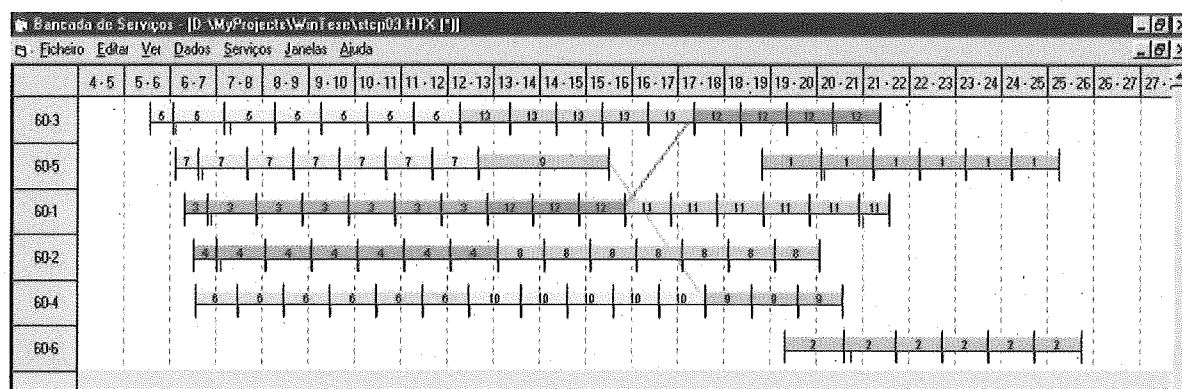


Figura 4: Horário de serviços completo

às produzidas manualmente por um planeador experiente, a velocidade da sua elaboração é claramente compensadora. Além do mais, o planeador pode, em pouco tempo, melhorar significativamente a solução obtida por computador, bastando para isso modificar e criar alguns serviços.

#### 4 Caso de estudo

A Sociedade de Transportes Colectivos do Porto (STCP) serve toda a área urbana do Porto e também uma grande parte da área suburbana. A rede estende-se por cerca de 700km e pode ser representada por cerca de 140 nós. O número de linhas exploradas é actualmente de 71, dispondo a empresa de uma frota de cerca de 590 viaturas e de 1350 tripulantes.

Até há alguns anos, todo o processo de planeamento era feito manualmente, mas desde 1995, o sistema GIST passou a ser utilizado de uma forma regular. Tal resultou, de imediato, em melhorias significativas nos tempos de planeamento e nos documentos gerados (relatórios, visualização gráfica, etc.).

O sistema permite ainda utilizar os “procedimentos manuais”, apoiados pelas ferramentas disponibilizadas pelo sistema informático. Os *pontos de rendição* e os *tramos* são criados com o sistema GIST, e mesmo a geração manual dos serviços é feita utilizando os recursos gráficos do sistema. Mas, de facto, a única componente automática utilizada para a geração de serviços consiste na verificação das restrições impostas pelo tipo de serviço e das restrições mais gerais (como os intervalos para refeição). A geração automática (realizada por algoritmos bastante mais sofisticados do que o apresentado neste trabalho) é vista, frequentemente, como de difícil parametrização, relativamente demorada, e produzindo soluções que, em geral, não satisfazem completamente o planeador.

Existem na empresa duas *categorias* de serviços: *seguido* (com uma única etapa) e com *duas etapas*. Da primeira categoria fazem parte três *tipos de serviço*, e da segunda dois *tipos de serviço*.

##### Categoria *seguido*

- **Seguido:** duração efectiva entre 5 horas e 7h50; tempo mínimo para refeição de 1 hora;

sem pequenas interrupções de serviço; sem restrições quanto ao local de início e/ou fim do serviço. Não pode terminar depois das 23 horas.

- **Nocturno:** duração efectiva entre 5h30 e 6h45; sem refeição; sem pequenas interrupções de serviço; sem restrições quanto ao local de início e/ou término do serviço. Não pode terminar antes das 23 horas.
- **Etapa a convidar:** duração efectiva entre 2 horas e 5 horas; sem refeição; com a obrigatoriedade de começar e terminar numa estação de recolha.

### **Categoria duas etapas**

- **2-etapas:** serviço em duas etapas; com a duração de cada uma das duas etapas entre 2 horas e 5 horas; duração da folga entre 1 e 2 horas; duração efectiva entre 5 horas e 8h30; duração total entre 6 horas e 9h30. O tempo mínimo para a refeição é de 1 hora; não existem pequenas interrupções de serviço; não existem restrições quanto ao local de início e fim do serviço. O tempo entre pontos de rendição para a folga deve ser incluído nesta, e o serviço não pode terminar depois das 23 horas.
- **Fora das regras:** serviço em duas etapas, cada uma com uma duração entre 2h25 e 5 horas; duração da folga entre 2 horas e 7 horas; duração efectiva entre 4h50 e 9 horas; duração total entre 6h50 e 16 horas. Não são impostos: tempo mínimo para a refeição, pequenas interrupções de serviço ou restrições quanto ao local de início e fim do serviço. O tempo entre pontos de rendição para a folga é incluído na segunda etapa, e não existem restrições quanto às horas de início e fim do serviço.

O tipo de serviço *etapa a convidar* não é utilizado frequentemente e depende da aprovação do tripulante a quem foi destinado. Este tipo de serviço serve tipicamente para cobrir tramos deixados livres, por impossibilidade de gerar um horário de serviço que cubra todos os tramos, sem haver sobreposições de serviços (serviços que tenham em comum um ou mais tramos).

Os planeadores da STCP dão, quase sempre, preferência à categoria *seguido* sobre a categoria *duas etapas*, sobretudo no início e fim do dia. E dentro destas categorias, os tipos de serviço *seguido* ou *nocturno* e *2-etapas*, são preferidos em detrimento dos tipos de serviço *etapa a convidar* e *fora das regras*. Uma boa solução deve maximizar esses tipos de serviço.

Na STCP não existem serviços com mais de duas etapas, e não está definido um tempo permitido de horas extraordinárias por tipo de serviço. O tempo de preparação das viaturas é de 10 minutos e o tempo de recolha de 15 minutos.

O intervalo permitido para o almoço estende-se das 10 horas às 15 horas, e o intervalo permitido para o jantar começa às 18 horas e vai até às 22 horas.

## 5 WinBus – uma heurística flexível e interactiva

### 5.1 Estrutura geral da heurística

A heurística elaborada no âmbito deste trabalho tem como base os princípios utilizados no *método das três fases* de Parker e Smith [3], e variantes do mesmo propostas e implementadas por J. P. Sousa [5] e J. F. Sousa [4]. Com esta nova heurística é introduzido um maior controlo e flexibilidade sobre a geração de serviços, e permitida uma maior facilidade de parametrização. A heurística está estruturada em três fases.

Inicialmente, a heurística percorre os turnos, de acordo com determinadas prioridades, e para cada um deles tenta construir um serviço a partir do primeiro tramo do turno, em direcção ao fim do dia. Depois, todos os turnos são percorridos novamente, pela mesma ordem, mas desta vez a heurística tenta construir serviços a partir do último tramo de cada turno, e em direcção ao início do dia. É esta sequência de acções que constitui a primeira fase do método (Fase I).

A segunda fase consiste em percorrer de novo os turnos, utilizando a mesma ordem, mas agora a heurística não procura construir serviços apenas a partir do primeiro ou do último tramo do turno, mas sim do primeiro ou último tramo livre do turno (Fase II). Assim, se o primeiro tramo do turno considerado estiver já atribuído a um serviço, ou se a tentativa de construção de um serviço a partir desse tramo tiver fracassado, a heurística tenta novamente com o tramo livre seguinte – e assim até ter esgotado todos os tramos livres do turno, altura em que passa ao turno de prioridade imediatamente inferior. Este procedimento é repetido, mas a partir do último tramo livre, se o sentido de geração for do fim para o início do dia. Neste caso, ao fracassar uma tentativa de construção de um serviço, o próximo tramo escolhido é o tramo livre anterior. Aqui, *seguinte* e *anterior* consideram-se numa escala temporal: *seguinte* é aquele que tem uma hora de início imediatamente superior à hora de fim do tramo actual e que está no mesmo turno; *anterior* é aquele que tem uma hora de fim imediatamente inferior à hora de início do actual, e que está no mesmo turno.

Estas tentativas de construção de serviços são efectuadas uma única vez por iteração. Se a heurística não conseguir construir um serviço válido a partir de determinado tramo, não tenta novamente com outro tipo de serviço na mesma iteração, mas passa ao tramo seguinte (ou anterior – conforme o sentido de geração). No entanto, este tramo pode vir a ser utilizado num serviço cuja geração tenha começado a partir de outro tramo, na mesma iteração.

Finalmente, numa terceira fase (Fase III), a heurística tenta melhorar a solução obtida, ao aplicar funções de refinamento sobre o horário de serviços obtido.

### 5.2 Número de soluções e número de iterações

A descrição apresentada no ponto anterior refere-se a uma única iteração da heurística, no processo de geração de uma única solução. No entanto, o programa desenvolvido permite ao utilizador parametrizar, tanto o número de iterações a realizar, como o número de soluções que se pretende gerar. Ou seja, o utilizador pode ajustar o “esforço” que a heurística vai dedicar à construção de um dado horário de serviços (parcial): número de repetições das três fases sobre os tramos livres restantes e sobre os serviços já gerados. O número de soluções completas a

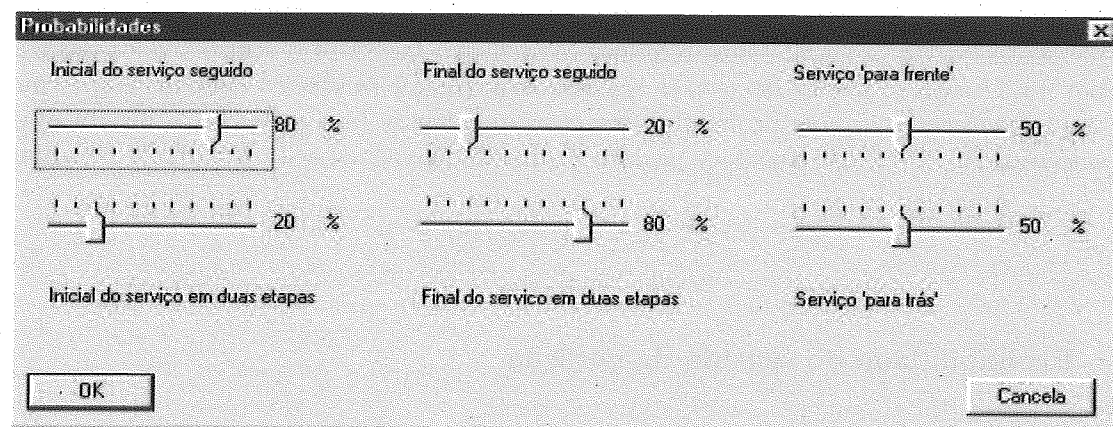


Figura 5: Parametrização das probabilidades de geração de categorias de tipos de serviço em cada fase da heurística, e do sentido de geração de serviços.

gerar pode também ser seleccionado pelo utilizador.

### 5.3 Prioridades dos turnos

Um aspecto crucial no desempenho da heurística tem a ver com a sequência pela qual os turnos são percorridos, ao longo do processo de geração. Assim, o utilizador tem a possibilidade de estabelecer a *prioridade* dos turnos, de numerosas maneiras, bastando para isso combinar adequadamente os parâmetros que se destinam a esse efeito.

Consideremos, por exemplo, que existem 7 turnos (identificados por A, B, ..., G no horário de serviços fornecido pela Bancada de Serviços). Ordenações possíveis são: “de dois em dois a partir do primeiro” - A, B, E, F, C, D, G -, “primeiro os pares e depois os ímpares” - B, D, F, A, C, E, G -, etc.

### 5.4 Probabilidades de selecção dos tipos de serviço e do sentido de geração

Estes parâmetros probabilísticos dizem respeito a todas as fases da heurística, uma vez que os da segunda fase valem para a terceira também.

### 5.5 Probabilidades de geração de categorias de serviço

Como referido atrás, os tipos de serviço estão divididos em duas grandes categorias: *seguidos* e *duas etapas*.

Quando a heurística tenta construir um serviço, em primeiro lugar decide se vai construir um serviço da categoria *seguido* ou um serviço da categoria *duas etapas*, de acordo com as probabilidades definidas em *Inicial do serviço seguido* e em *Final do serviço seguido*, respectivamente para as fases I e II da heurística (ver figura 5).

As probabilidades *Inicial do serviço em duas etapas* e *final do serviço em duas etapas* são complementares das probabilidades referidas acima. Ao mover-se o seleccionador deslizante ("slider") referente ao *Inicial do serviço seguido*, o do *Inicial do serviço em duas etapas* move-se complementarmente, e as probabilidades correspondentes (apresentadas à direita destes) são actualizadas. O mesmo acontece para os outros dois pares de seleccionadores deslizantes.

## 5.6 Probabilidade do sentido de geração

O último par de probabilidades (ver figura 5) aplica-se apenas à segunda e terceira fases da heurística. Também aqui, antes de tentar construir um serviço, a heurística decide se vai construí-lo do início para o fim do dia, ou do fim para o início do dia, de acordo com as probabilidades ajustadas. Assim, no caso de ser escolhida a construção *para a frente* (do início para o fim do dia), esse serviço particular vai ter início no primeiro tramo livre do turno e vão ser colocados junto a ele, os tramos imediatamente seguintes. No caso de ser escolhida a construção *para trás* (do fim para o início do dia), o serviço começa a ser construído pelo último tramo livre do turno e vão ser colocados junto a ele, os tramos imediatamente anteriores.

## 5.7 Probabilidades de geração dos tipos de serviço

Os dois primeiros pares de probabilidades (figura 5) dizem respeito à categoria do tipo de serviço. Para determinar qual será especificamente o tipo de serviço que vai ser gerado, a heurística escolhe, de seguida, um dos cinco tipos possíveis, de acordo com a probabilidade de cada um.

Na figura 6 pode-se observar à direita, as probabilidades atribuídas a cada tipo de serviço da categoria *seguido*. Neste caso, o tipo 1 será escolhido com 30% de probabilidade, o tipo 2 com 40%, o tipo 3 não será escolhido nunca – 0%, o tipo 4 com 20% e o tipo 5 com 10%. O ajuste das probabilidades dos tipos de serviço da categoria *duas etapas* faz-se com uma janela semelhante à representada na figura 5.

Assim, neste exemplo, na primeira fase e a cada tentativa de construção de um serviço, há 80% de probabilidade da heurística optar por um serviço da categoria *seguido*, e com 30% de probabilidade o serviço será do tipo 1 (aqui o nome do serviço do tipo 1 é *seguido*, como se pode ver na figura 6).

Para a segunda fase da heurística, a probabilidade de ser escolhido um serviço da categoria *seguido* é de 20% e as probabilidades do tipo de serviço escolhido são as mesmas que na primeira fase.

Ainda na segunda fase, as probabilidades de se construir um serviço *para a frente* ou *para trás* são iguais e de 50%.

The screenshot shows a software window titled "Parametros dos Servicos Seguidos" with a tabbed interface. The active tab is "Seguido Tipo 4". The window contains several input fields for service parameters and a separate section for probabilities.

**Service Parameters (Seguido Tipo 4):**

- Nome do tipo de serviço: seguido
- Duração efectiva: min: 5 : 00, max: 7 : 50
- Tempo para releição: min: 1 : 00
- Duração peq. interr. serviço: min: 0 : 00, max: 0 : 00
- Numero peq. interr. serviço: max: 0
- Obrigatoriedade de começar/terminar na estação de recolha: Sem restrições
- Serviço não pode começar: min: 0 : 00, max: 0 : 00
- Serviço não pode terminar: min: 23 : 01, max: 99 : 00

**Probabilidades:**

- Tipo 1: 30
- Tipo 2: 40
- Tipo 3: 0
- Tipo 4: 20
- Tipo 5: 10

Buttons: OK, Cancela

Figura 6: Parametrização da probabilidade de geração de um tipo de serviço numa categoria de tipos de serviço.

## 6 Graus adicionais de flexibilidade

### 6.1 Duração das etapas

Regra geral, na categoria *duas etapas*, o tempo efectivo máximo é inferior à soma dos tempos máximos permitidos em cada etapa, e as etapas têm as mesmas durações mínima e máxima.

Ora, como a heurística vai sempre tentar maximizar esse tempo efectivo (com vista a uma melhor utilização dos recursos), é de esperar que maximize primeiro a duração da primeira etapa que tenta construir, e depois a da segunda (primeira etapa do serviço, no caso de escolher construir o serviço *para a frente* e depois a segunda, ou segunda etapa do serviço, no caso de escolher construir o serviço *para trás* e depois a primeira). Assim, a primeira etapa construída tenderá sempre a ser maior do que a segunda porque a maximização da primeira limita o tamanho da segunda, uma vez que o tempo efectivo máximo tem que ser respeitado. Para evitar este comportamento, foi introduzido um parâmetro ajustável que limita o tempo máximo da primeira etapa construída.

Por exemplo, pode-se limitar a duração da etapa a 80% do seu valor. Aqui, os 80% referem-se à duração da etapa e não ao limite máximo da etapa. Assim, para uma etapa com limite mínimo de duas horas e máximo de três horas e meia, a duração mínima será ainda de duas horas e a duração máxima de:  $(2h + (3h30 - 2h) * 0,8) = 3h12$ .

Esta solução foi adoptada porque limitar apenas o valor máximo da etapa poderia produzir resultados não válidos. Por exemplo, para um limite mínimo da duração de uma etapa de 3 horas e máximo de 3h30, limitar apenas o valor máximo a 80% levaria a um limite máximo de:  $(3h30 * 0,8) = 2h48$  que é inferior ao limite mínimo. Enquanto que, na solução adoptada, este limite máximo ficaria em:  $(3h + (3h30 - 3h) * 0,8) = 3h24$  que é superior ao limite mínimo.

### 6.2 Tolerâncias

Frequentemente, um serviço é rejeitado ao ser verificada a sua validade, ou ainda durante o processo de construção, devido a uma pequena violação das restrições: por ultrapassar, num minuto, uma duração máxima de etapa de cinco horas; por a sua duração total ser inferior em dois minutos à duração total mínima de oito horas e trinta minutos; etc. E, em certos casos, ficam tramos livres por causa destas pequenas violações.

Nalguns casos, a qualidade das soluções produzidas poderia ser melhorada significativamente se essas pequenas violações fossem permitidas. Depois, por negociação directa com os motoristas, ou aproveitando tempos curtos, em que as viaturas estão paradas antes dos serviços, para contabilizar esses minutos de tolerância, seria possível tornar válidos esses serviços.

Com o objectivo de contornar este tipo de situações, foi criado um conjunto de *tolerâncias*, medidas em minutos, que são levadas em consideração durante a construção do serviço e na validação dos mesmos.

A heurística trata as *tolerâncias* da seguinte maneira: depois de ter escolhido o tipo de serviço a construir, são escolhidas todas as *tolerâncias* (sete valores, no total) de acordo com uma distribuição uniforme, entre zero e o valor especificado.



Valor	Descrição
2	Duração de uma etapa
1	Tempo de refeição
1	Duração da folga
2	Intervalo para refeição
5	Tempo efectivo
5	Tempo total
0	Duração dos pequenos intervalos de serviço
3	Intervalos em que o serviço não pode começar ou terminar

Figura 7: Parametrização das tolerâncias.

Por exemplo, para a *duração de uma etapa* (ver figura 7), a *tolerância* é de no máximo dois minutos, querendo isto dizer que a heurística pode escolher para *tolerância* da etapa, zero, um, ou dois minutos, com igual probabilidade. Supondo que se tenha escolhido dois minutos e que o limite mínimo da etapa seja de duas horas e o máximo de cinco horas, serão considerados válidos os serviços com durações de etapas desde 1h58 até 5h02. A *tolerância* reduz sempre o limite mínimo e aumenta o limite máximo (a não ser no caso do tempo de refeição em que existe apenas um limite mínimo e por isso apenas se aplica a redução deste limite).

Era de vital importância que o valor da *tolerância* fosse escolhido numa base aleatória, uma vez que se fosse fixo, a heurística iria sempre tentar maximizar os limites máximos e minimizar os limites mínimos utilizando essa *tolerância*; deixando então de ser uma *tolerância*, para passar a ser efectivamente uma redução dos limites mínimos e um aumento dos limites máximos. A distribuição uniforme foi escolhida pela sua simplicidade e por ser considerada satisfatória no nível de precisão em causa.

## 7 Construção de um serviço

No processo de construção de um serviço (associado a uma iteração do algoritmo), a heurística está estruturada em torno de vários sub-objectivos.

O primeiro consiste em construir uma etapa que obedeça aos requisitos mínimos definidos pelo tipo de serviço, a menos talvez de pequenas variações devido às tolerâncias. A heurística parte do tramo livre seleccionado ao qual vai adicionando tramos, até satisfazer os limites mínimos impostos (duração mínima de uma etapa, obrigatoriedade de começar numa estação de recolha e de não começar entre determinadas horas se a geração for *para a frente*, obrigatoriedade de terminar numa estação de recolha e de não terminar entre determinadas horas se a geração for *para trás*). Se não for possível obedecer a estas restrições, o serviço é desde logo

abandonado.

O segundo sub-objectivo consiste em maximizar a duração da etapa, levando em consideração os horários permitidos para a refeição, a duração desta, e a limitação imposta por um parâmetro da própria heurística (*limite de duração de etapa*), que condiciona a duração máxima permitida para a etapa.

Se o serviço for da categoria *seguido*, a heurística faz uma verificação final de todos os parâmetros e limites, validando ou não o serviço. Se for um serviço da categoria *duas etapas*, o sub-objectivo seguinte consiste na construção de uma folga. A heurística soma, à hora de fim da etapa já construída, o tempo mínimo para a folga do tipo de serviço seleccionado. Procura então, de acordo com as prioridades preestabelecidas, um turno candidato para a folga. Esse turno tem que ter um tramo livre que comece na hora calculada ou depois desta, se não exceder a duração máxima da folga. Em seguida, repete-se o mesmo procedimento descrito atrás para a construção da etapa seguinte, desta vez sem o *limite de duração de etapa*. Faz-se a verificação das restrições da etapa durante a construção desta, e depois uma verificação das restrições que incidem sobre todo o serviço.

No caso de se estar a construir um serviço com duas etapas, qualquer que seja o tipo de serviço, uma vez construída uma etapa e verificado que esta é válida (primeira ou segunda, dependendo do sentido de construção), são feitas todas as tentativas possíveis de construção da etapa seguinte. Ou seja, a construção do serviço não é abandonada se a etapa seguinte não for válida à primeira tentativa.

Para evitar que a heurística deixe tramos livres entre duas etapas de um serviço com mais do que uma etapa, cuja duração total seja pequena e por isso de difícil cobertura por um outro serviço, é exigida uma mudança de turno quando da construção da folga. Se isso não fosse feito, cada vez que se construísse um serviço do tipo *2-etapas* por exemplo, a heurística, construí-lo-ia, se tal fosse possível, no mesmo turno, ficando sem ser cobertos os tramos entre as duas etapas, com duração total entre uma e duas horas. Seria muito difícil cobri-los posteriormente. Mesmo para um serviço do tipo *fora das regras*, a tendência seria existirem tramos livres entre as duas etapas, no mesmo turno, com duração total próxima das duas horas (e não das sete horas, que é o limite superior para a folga neste tipo de serviço).

Refira-se ainda que, para tornar a construção de serviços um processo eficiente, foram tomados cuidados especiais. Em particular:

- verificam-se as restrições do tipo de serviço seleccionado durante a construção do serviço, tornando o processo mais rápido;
- ao ser eliminado um serviço não válido, mais cedo, diminui-se o tempo de execução, relativamente ao que aconteceria se apenas houvesse uma verificação final;
- não se permite a construção de um serviço com mais de duas etapas no mesmo turno, evitando assim a existência de grupos de tramos de difícil cobertura.

## 7.1 Fase de melhoramentos

Nesta fase do processo, o horário de serviços gerado pode ainda conter alguns tramos livres, podendo alguns serviços ter uma duração próxima do limite superior, enquanto outros estão

próximos do limite inferior. Gerar novos serviços pode não ser suficiente para eliminar os tramos livres, e não contribuirá seguramente para equilibrar os tempos dos serviços do mesmo tipo.

Para resolver estes problemas, utilizam-se rotinas de melhoramento das soluções. Na implementação actual, esta fase da geração de um horário de serviços ainda não está muito desenvolvida, tendo por isso um grande potencial de refinamento.

Entretanto, duas destas rotinas foram já implementadas. A primeira tenta reduzir o número de tramos livres, ao tentar inseri-los nos serviços já criados. A segunda elimina temporariamente serviços com tramos livres contíguos, gera novos serviços e compara-os, para identificar quais os que vale a pena manter na solução.

## 8 Sistema de Apoio à Decisão

### 8.1 Indicadores e qualidade das soluções

Como referido anteriormente, esta heurística gera vários horários de serviço. Torna-se então necessário dispor de uma medida da qualidade das soluções obtidas, de maneira a que se possa classificá-las e apresentar as “melhores” ao utilizador.

Recorrendo ao bom senso, aos relatos na literatura, e à experiência e sensibilidade dos encarregados do planeamento da STCP, chegou-se à conclusão que o objectivo mais importante é sem dúvida conseguir, para um grupo de tramos, cobrir por serviços o maior número de tramos, uma única vez. Neste contexto, os indicadores *número de tramos livres* e *duração dos tramos livres* parecem os mais adequados. Uma vez que esta heurística não permite sobrecoberturas, não faz sentido utilizar indicadores tais como o *número* ou a *duração dos tramos sobrecobertos*, ou o *número* ou a *duração dos serviços que cobrem tramos sobrecobertos*. E, mais significativo na prática do que medir o número de tramos livres, é medir a sua duração.

O segundo objectivo tido como mais importante é a minimização do número de serviços criados para determinado grupo de tramos, uma vez que este valor influencia, em muito, o custo de operação da empresa. Esta característica da solução pode ser medida directamente pelo *número de serviços* ou indirectamente pela *duração efectiva dos serviços*. Um *número de serviços* mínimo entra directamente em conflito com o objectivo anterior, de minimização da duração dos tramos livres; enquanto que a *duração efectiva dos serviços* vai, pelo contrário, no mesmo sentido desse objectivo.

Seria então de recomendar um indicador ao qual a STCP é particularmente sensível, que é a *duração efectiva média dos serviços* (ao contrário, por exemplo, de uma *duração efectiva total*). No entanto, o número de tripulações, mais do que as horas de trabalho, determina fortemente o custo total de operação, pelo que se optou por incluir os dois no grupo de indicadores seleccionados.

Por último, também por causa dos custos envolvidos e por causa das percentagens desejáveis de tipos de serviço, optou-se por incluir indicadores que medem o número de serviços de cada tipo.

Minimizar		Maximizar	
Duração dos Tramos Livres	100	Duração Efectiva Média	80
Número de Serviços	10		

Importancia dos Tipos de Serviço			
seguido	5	2 etapas	3
Nocturno	2	fora das regras	0
Etapa a Convidar	0	Duas Etapas Tipo 3	0
Seguido Tipo 4	0	Duas Etapas Tipo 4	0
Seguido Tipo 5	0	Duas Etapas Tipo 5	0

Figura 8: Sistema de Apoio à Decisão.

Em conclusão, os indicadores escolhidos foram, então, os seguintes:

- duração dos tramos livres (a minimizar);
- número de serviços (a minimizar);
- duração efectiva média (a maximizar);
- número de cada tipo de serviço (a maximizar).

Do ponto de vista da heurística, este conjunto de indicadores é capaz de medir adequadamente as características principais das soluções, e de servir de base para o cálculo do desempenho da heurística. E do ponto de vista da STCP, este conjunto de indicadores traduz correctamente as preocupações do planeador, quando da elaboração de um horário de serviços.

A cada um dos indicadores referidos, o utilizador associa um “peso”, com valores entre 0 e 100. Foram escolhidos pesos, em detrimento de penalizações (como acontece na versão actual do sistema GIST), para tornar o ajuste destes parâmetros mais fácil e “intuitivo”. As penalizações são muitas vezes difíceis de quantificar e por isso mesmo não utilizadas ou utilizadas de uma forma errada pelos planeadores. Tem-se verificado na prática que é muito mais fácil para o planeador pensar em termos de probabilidades e pesos (este aspecto foi ressaltado pela STCP, quando das sessões de apresentação e testes do sistema).

Todos os indicadores são normalizados para garantir uma interpretação “correcta” e consistente dos resultados. Esta normalização assegura que todos os valores sejam positivos, tratando de maneira diferente os objectivos de minimização e de maximização do indicador em causa.

A qualidade global de uma solução é, então, a soma dos indicadores normalizados da solução, multiplicados pelo seus pesos respectivos. A normalização leva em conta os valores máximo e mínimo, assumidos pelo indicador no conjunto de todas as soluções geradas.

São então apresentadas, no ecrã, as três melhores soluções (podendo ser menos de três, no caso de só se terem pedido para gerar duas ou menos soluções).

A possibilidade de poder ver não só a melhor como também a segunda melhor solução satisfaz um requisito expresso pela STCP. É possível que ao ajustar manualmente essa segunda melhor solução, se obtenham melhores resultados do que ao ajustar a primeira. Assim, foi decidido apresentar o conjunto das três melhores soluções para permitir ao utilizador a escolha da solução “melhor”, na sua óptica.

Uma outra maneira de escolher soluções é ajustar mais uma vez os pesos dos indicadores. Basta modificá-los e pedir ao sistema para recalcular a qualidade global das soluções, que o programa devolve as novas melhores soluções (sem gerar de novo horários de serviço).

As soluções são ordenadas por ordem decrescente de qualidade, e apresentadas com os dados estatísticos que lhes estão associados. Pode-se aqui encontrar, além dos valores brutos dos indicadores, informação sobre o valor da qualidade obtida para uma dada solução, e o número de tramos livres a que corresponde o indicador *duração dos tramos livres*.

## 8.2 Parâmetros e análise “what-if”

Com o intuito de permitir a realização de análises do tipo “what-if” e uma utilização do sistema para a resolução de problemas de carácter mais tático do que propriamente do domínio operacional, foram introduzidas algumas facilidades de manipulação de parâmetros.

Estas opções disponibilizadas pelo menu “Ficheiro”, guardam num ficheiro à escolha, não apenas todos os dados relativos aos tipos de serviço (limites mínimos e máximos de durações de etapas, duração efectiva, etc.) e aos parâmetros gerais (como as horas limites mínimas e máximas para o almoço e jantar), mas também os parâmetros da heurística a eles associados (probabilidades de geração de categorias de serviços e de tipos de serviço, tolerâncias, pesos dos indicadores de qualidade, etc.).

É então relativamente fácil efectuar experiências e análises do tipo “what-if”. Pode-se, por exemplo, avaliar o impacto de pequenas mudanças nos parâmetros dos tipos de serviço (limites inferior e superior da folga, por exemplo) nas soluções obtidas. Ou ver qual o impacto de mudar a probabilidade de geração da categoria *seguido* durante a segunda fase da heurística de 20 para 15% (o que automaticamente implica que a probabilidade de geração da categoria complementar - *duas etapas* - seja ajustada de 80 para 85% ).

Pode-se, assim, avaliar rapidamente o impacto de possíveis mudanças nas regras definidas pelos contratos colectivos de trabalho e pelos acordos entre a direcção da empresa e os trabalhadores ou os sindicatos. Cenários alternativos podem ser guardados e testados, para efeitos de comparação.

É também possível guardar os parâmetros que se sabe funcionarem bem para um grupo de tramos de um dado tipo; assim, se for necessário procurar uma solução para um grupo de tramos desse tipo, basta chamar de novo esses parâmetros e partir deles, na busca de uma solução satisfatória. O tempo necessário para construir uma solução “muito boa” poderá, desta maneira, ser diminuído consideravelmente.

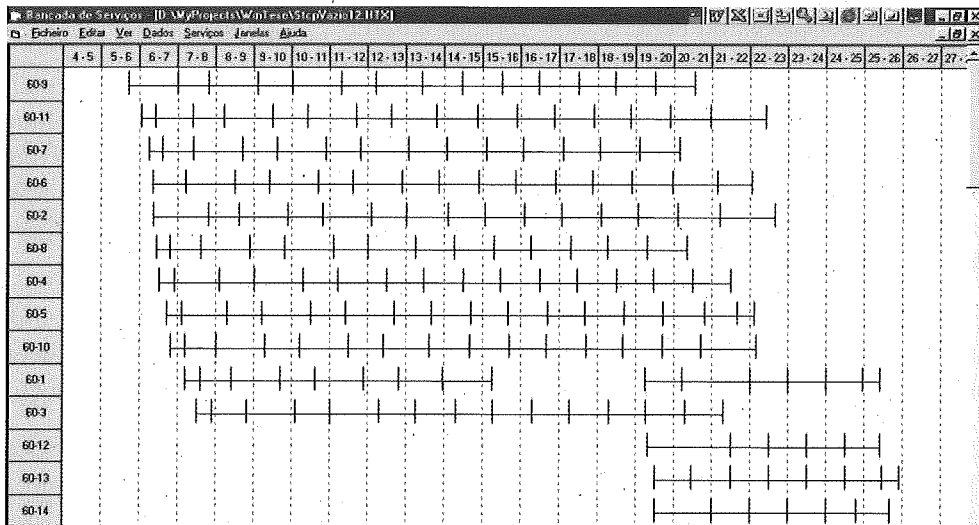


Figura 9: Grupo de tramos do horário de viaturas da linha teste.

## 9 Exemplo de aplicação

### 9.1 Geração de serviços

A título de exemplo foi utilizada uma linha da STCP (14 turnos, 180 tramos) que tem nos dias úteis, 14 viaturas ao serviço, com horários que vão das 5h43 às 25h55. Na STCP, o dia acaba, para efeitos de planeamento de uma linha, quando a última viatura da linha em questão acaba o seu turno; podem existir portanto dias com mais de 24 horas, desde que uma viatura acabe o seu turno na madrugada do dia seguinte.

A configuração inicial da heurística levará em conta a possibilidade de existirem serviços do tipo *nocturno*. A todos os tipo de serviço devem ser atribuídas probabilidades diferentes de zero, uma vez que existem condições para todos eles serem gerados. Manter-se-ão, no entanto, baixas, as probabilidades de geração de serviços do tipo *etapa a convidar* e *fora das regras*, pelas razões já descritas nas secções anteriores.

Não foi possível, para este exemplo, obter uma solução com menos de 4 tramos livres. Diversas configurações conduziram a soluções com 4 tramos livres, mas a variação de parâmetros para cada uma delas levou invariavelmente à deterioração da qualidade das soluções. Uma dessas soluções pode ser visualizada na figura 10.

Esta solução, em que a duração dos 4 tramos que ficaram por cobrir é de 4h44, engloba 27 serviços: 7 do tipo *seguido*, 4 *nocturnos*, 0 *etapas a convidar*, 11 do tipo *2-etapas* e 5 *fora das regras*.

Parece ser possível melhorar esta solução, retirando tramos de etapas de serviços contíguas a tramos livres (sem tornar o serviço não válido), e construir serviços *seguidos* de pequena duração ou, se tal não for possível, *etapas a convidar*. Estes princípios poderão, aliás, estar na base de uma rotina de melhoramento, a ser objecto de atenção numa segunda versão da aplicação.

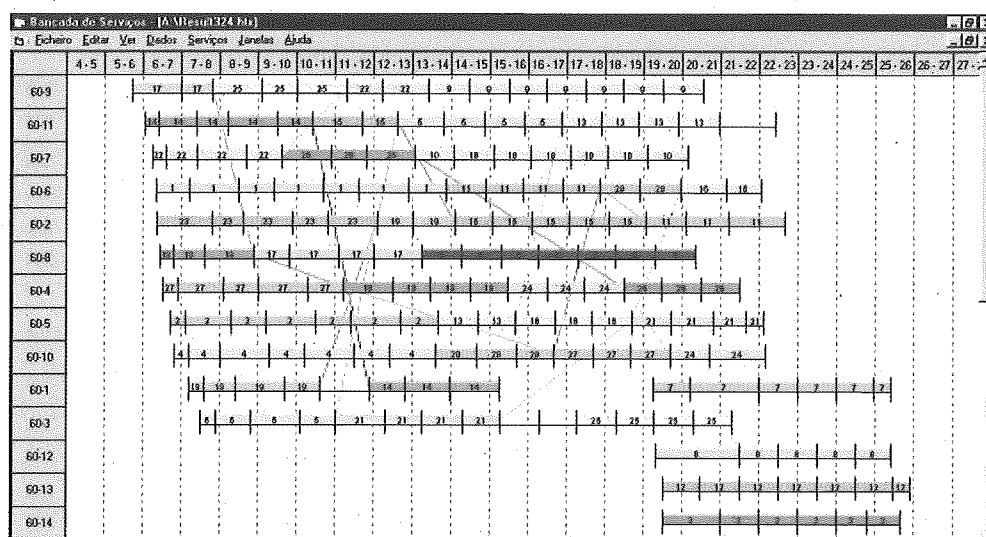


Figura 10: Solução com tramos livres da linha teste

## 9.2 Análise dos resultados

Na tabela 1, para o exemplo real analisado, compara-se os resultados associados aos melhores horários de serviço gerados pela heurística WinBus, com os obtidos pelas heurísticas de geração de serviços do sistema GIST.

Para a heurística WinBus, as soluções foram obtidas pelo autor; para o sistema GIST, as soluções foram obtidas por um elemento do grupo de trabalho do projecto, com responsabilidades a nível dos serviços de tripulações.

As soluções obtidas pela heurística WinBus não foram refinadas manualmente, sendo portanto totalmente automáticas. Na tabela 1, apresenta-se ainda os valores de qualidade para a solução obtida automaticamente pelo sistema GIST, e para a solução semi-automática correspondente. Esta solução semi-automática foi obtida, eliminando e criando serviços, a partir da solução automática. Este tipo de processamento tem invariavelmente de ser feito, dada a fraca qualidade das soluções produzidas pelo sistema.

Na tabela 1, os tempos indicados referem-se ao processo de planeamento total, isto é, incluem o tempo de parametrização e o tempo de geração dos serviços.

Torna-se difícil tirar conclusões absolutas, na comparação entre heurísticas, por duas razões. A primeira é a diferença intrínseca de funcionamento das heurísticas: a heurística WinBus não contempla a sobrecobertura (mas permite tramos livres), enquanto que o conjunto de heurísticas do sistema GIST não permite a existência de tramos livres (mas sim de tramos sobrecobertos). A segunda razão tem a ver com a plataforma em que foram realizados os testes. Para a heurística WinBus, que funciona em ambiente Windows 95, os testes foram efectuados num Pentium Pro com 64MB de memória dinâmica e 2GB de memória em disco. Já o sistema GIST, funciona em ambiente AIX, numa estação de trabalho IBM RISC 6000 com 64MB de memória dinâmica e 4 GB de disco. Como a heurística desenvolvida neste trabalho se destina a ser incorporada numa futura versão do GIST, a funcionar em PC em ambiente Windows, não foi ainda possível efectuar os testes nas mesmas condições.

Tabela 1: Linha teste – 14 turnos, 180 tramos

	Tempo total	Duração tramos livres	Número tramos livres	Número serviços	Duração tramos com sobrecobertura	Número tramos com sobrecobertura
WinBus automático	45min	4h44	4	27	0h00	0
GIST automático	1h35	0h00	0	31	7h42	10
GIST semi-automático	2h42	0h00	0	28	0h00	0

As comparações devem ser feitas, portanto, com alguma cautela. No entanto, devido às características das heurísticas, parece poder afirmar-se que a heurística WinBus será, em igualdade de condições, mais rápida que as heurísticas incorporadas no sistema GIST.

Em geral, pode afirmar-se que para os exemplos de maior dimensão, a heurística WinBus tem um desempenho bastante superior ao das heurísticas do GIST. As estruturas de dados seleccionadas, e as características intrínsecas da heurística, fazem com que a geração de serviços e a construção de soluções completas seja muito mais rápida, relativamente ao sistema GIST. É ainda natural esperar que uma solução semi-automática, elaborada a partir da solução automática fornecida pela heurística WinBus, e melhorada por um planeador experiente, seja obtida mais rapidamente do que a solução semi-automática obtida com o GIST, e isto sem perda de qualidade.

Dos resultados obtidos, apesar de preliminares, crê-se poder inferir que para problemas de dimensão elevada, a heurística desenvolvida neste trabalho é muito eficiente; e mesmo para problemas de pequena dimensão, o seu desempenho se pode considerar bastante bom.

## 10 Conclusões e desenvolvimentos futuros

A aplicação informática apresentada neste trabalho, tem na base uma heurística do tipo “run-cutting” integrada num Sistema de Apoio à Decisão, sendo facilmente parametrizável pelo planeador. A aplicação importa e exporta dados, de e para a Bancada de Serviços, integrando-se, desta maneira e de uma forma natural no sistema GIST. As qualidades mais significativas desta aplicação, verificadas oportunamente na utilização real pela STCP, parecem ser as seguintes:

- flexibilidade e interactividade na geração de soluções;
- parâmetros naturais e “intuitivos” para o planeador, expressos por meio de pesos e de probabilidades;
- facilidade de ajusté dos parâmetros;
- facilidade de operação e reconhecida utilidade do Sistema de Apoio à Decisão que integra a heurística;
- reduzidos tempos para o processo de planeamento;
- integração com a Bancada de Serviços, que permite a visualização e alteração das soluções obtidas, bem como o ajuste dos dados de entrada.



Um progresso considerável pode ainda ser feito no que toca à fase de melhoramentos da heurística (fase III). Não foi ainda possível implementar outras rotinas de melhoramento e refinamento das soluções, que a experiência acumulada e o “feedback” por parte dos utilizadores sugerem. Com estas rotinas, pretende-se vir a criar uma “bateria” de procedimentos, a utilizar pelo planeador em alternativa ou em sequência, por forma a flexibilizar e melhorar o processo de planeamento. Ficam portanto algumas ideias para implementar e testar no futuro, tais como:

- tentar retirar tramos dos serviços, à esquerda e à direita de um tramo livre, para tentar construir um novo serviço, sem invalidar os já construídos, e assim reduzir o número de tramos livres;
- tentar retirar um tramo de um serviço com tempo efectivo superior ao tempo efectivo de outro serviço, a fim de homogeneizar os tempos efectivos;
- destruir temporariamente um serviço e tentar inserir os seus tramos nos outros serviços já existentes;
- destruir temporariamente um grupo reduzido de serviços e tentar criar outros que cubram os mesmos tramos, mas que sejam em menor número, ou que cubram mais tramos do que os primeiros;
- destruir serviços com características “menos boas” (pequenas interrupções de serviço, não conformidade com as restrições dos tipos de serviço devido às *tolerâncias*, etc.) ou retirar apenas os tramos que lhes atribuem essas características, e tentar inserir os tramos nos serviços já existentes.

Os resultados obtidos apontam no sentido de valer a pena apostar neste tipo de heurísticas, com as quais se poderão ainda obter melhores resultados, se forem mais elaboradas, nomeadamente ao nível de rotinas de melhoramento. A experiência, embora limitada, parece indicar que será fácil realizar alterações que adaptem estas heurísticas às características de cada empresa em particular. A concepção de heurísticas específicas dedicadas a cada empresa, e não de uma heurística para uso geral, parece ser o caminho a seguir com mais potencialidades.

## 11 Referências

- [1] Cunha, J. F. e Sousa, J. P., “The Bus Stops Here”, *OR/MS Today*, Vol. 27, p. 48-53 (2000)
- [2] Ferreira, L. F., Bancada de Serviços: Protótipos de Serviços – Manual de Implementação, Consórcio GIST (1998)
- [3] Parker, M. e Smith, B., “Two Approaches to Computer Crew Scheduling of Public Transport, Computer Scheduling of Public Transport”, ed. A. Wren, North-Holland (1981)
- [4] Sousa, J. F., “A computer-based interactive approach to crew scheduling”, *European Journal of Operational Research*, Vol. 55, p. 382-393 (1991)
- [5] Sousa, J. P., Um Sistema de Apoio à Decisão para a elaboração de horários de viaturas e tripulações em serviços de transportes colectivos urbanos, Dissertação de Mestrado, Instituto Superior Técnico, Universidade Técnica de Lisboa (1986)
- [6] Wren, A., *Computers in Transport Planning and Operation*, Ian Allan Ltd. (1971)



## Identificação de redes neuronais gaussianas como modelos de previsão

José Luís Carmo \* †

António J. L. Rodrigues † ‡

\* Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade do Algarve

† Departamento de Estatística e Investigação Operacional, F.C.U.L.  
ajr@fc.ul.pt

‡ Centro de Investigação Operacional, F.C.U.L.

---

### Abstract

Supervised artificial neural networks are, essentially, nonlinear regression parametric models that can be used in time series forecasting, either as causal models or as autoregressive ones. The estimation of the parameters (called *weights*) is accomplished using sample data (*training patterns*), namely through iterative methods for numeric learning. We focus our study on so-called *radial basis function (RBF) networks*, as these models are, in a sense, linear in the parameters, and therefore are easier to estimate.

In this paper, we report a number of experiments aiming to compare different heuristic methods for the identification of Gaussian RBF networks. This identification includes determining optimal, or at least adequate values for the number of component *neurons* (i.e., the dimension of the model), the number of inputs (the order of a nonlinear autoregression), and the values of the different hyperparameters that one needs to specify before the actual estimation process is carried out. We are also especially interested in adaptive approaches, which continually revise the model on the basis of newly observed data. The experiments were based on carefully designed examples, as well as on real and simulated time series.

### Resumo

As redes neuronais artificiais supervisionadas são essencialmente modelos paramétricos de regressão não linear, que podem ser usados na previsão de séries temporais, quer como modelos causais, quer como modelos autoregressivos. A estimação dos parâmetros (“pesos”) é feita com base em observações exemplares (“padrões de treino”), em particular através de métodos iterativos de aprendizagem numérica. Centramos o nosso estudo nas chamadas *redes de funções de base radiais (FBR)*, por serem em certo sentido modelos lineares nos parâmetros e consequentemente permitirem uma estimação mais eficiente.

Neste trabalho, realizamos a comparação experimental de diferentes métodos heurísticos para a identificação de redes de FBR gaussianas. Essa identificação inclui a determinação de valores óptimos ou, pelo menos, adequados para o número de “neurónios” componentes

(dimensão do modelo), o número de *inputs* (ordem da autoregressão não linear), e os valores dos diferentes hiperparâmetros que é necessário especificar antes de iniciar o processo de estimação. Damos especial atenção a abordagens adaptativas, que permitem a revisão progressiva do modelo em função da nova informação observada. Nos testes experimentais foram utilizados exemplos construídos criteriosamente para o efeito, além de diversas séries reais e simuladas.

**Keywords:** Neural Networks, Radial Basis Functions, Forecasting, Model identification, Clustering.

**Title:** Model identification of Gaussian neural networks in forecasting

## 1 Redes de funções de base radiais

### 1.1 Introdução

O problema da previsão de séries temporais — sequências de observações ordenadas no tempo — surge nos mais diversos domínios. No âmbito da Investigação Operacional é, em particular, considerado como uma base metodológica para o controlo de *stocks*, o planeamento da produção ou o planeamento financeiro. Diferentes modelos têm sido propostos para explicar e extrapolar o comportamento de uma série e, de igual modo, vários métodos optimais ou heurísticos têm sido sugeridos para a estimação e identificação desses modelos. Recentemente, têm sido objecto de grande atenção as estruturas computacionais conhecidas por *redes neuronais artificiais*, e em particular as *redes neuronais supervisionadas*, que, utilizando determinados procedimentos de pesquisa ou de estimação paramétrica, procuram “aprender” com base em exemplos, ou *padrões de treino*. O modelo, uma vez estimado, deverá ter a capacidade de “generalizar” convenientemente o conhecimento adquirido para novas situações. Essa *generalização* pode ser entendida como *previsão*, se os padrões forem construídos a partir de séries temporais. As aplicações reportadas na literatura são inúmeras e incluem, nomeadamente, a resolução de problemas de diagnóstico e classificação, regressão, previsão, decisão e controle (*vide*, e.g., [14]).

Em particular, as *redes de funções de base radiais* (FBR) merecem especial interesse, devido à sua plausível semelhança com certo tipo de estruturas neuronais biológicas. De um ponto de vista matemático podem ser caracterizadas como modelos paramétricos *lineares nos parâmetros*, sendo portanto de mais fácil identificação e estimação que os modelos neuronais mais conhecidos — os *perceptrões multicamada*. Tal como estes, possuem a chamada propriedade de *aproximação universal*, isto é, têm a capacidade de aproximar arbitrariamente bem um dado conjunto finito de pontos num espaço multidimensional euclidiano desde que o número de neurónios componentes seja suficientemente elevado [9]. Os referidos pontos, ou *padrões*, são interpretados como observações, possivelmente corrompidas por ruído, de uma função contínua desconhecida definida nesse espaço.

Entre outras contribuições importantes para a teoria e metodologia subjacentes à construção e aplicação de redes de FBR, pode referir-se os trabalhos de Powell [12], Broomhead e Lowe [1], Moody e Darken [7] e Poggio e Girosi [11].

No presente trabalho pretende-se dar um contributo para a definição de metodologias de identificação de redes de FBR gaussianas, especialmente em aplicações de previsão.

## 1.2 Formulação

As redes de FBR são habitualmente representadas por uma estrutura organizada em três camadas (Figura 1). A camada de entrada tem apenas como função receber os padrões de entrada e enviá-los inalterados para os neurónios artificiais da camada intermédia, onde são então sujeitos a transformações não lineares definidas pelas FBR. A localização destas no espaço de entrada é determinada pelos seus *centros*, que são vectores de hiperparâmetros a identificar. Nos modelos mais simples, a camada de saída é constituída apenas por um neurónio, que combina linearmente os valores produzidos pelos neurónios intermédios através dos *pesos* dos arcos de ligação; estes pesos são precisamente os parâmetros do modelo.

A resposta de uma rede de funções de base simples (i.e, só com um nó de saída) é definida por uma função contínua parametrizada  $f_w : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , não linear em relação às variáveis de entrada mas linear nos parâmetros,  $w$ . Mais explicitamente, considerando  $m$  funções de base,  $\{\phi_i\}$ ,

$$f_w(\mathbf{x}) = w_0 + \sum_{i=1}^m w_i \phi_i(\mathbf{x}),$$

onde  $\mathbf{x}$  é um padrão de entrada genérico e  $w_i$  é o peso associado ao arco de ligação do neurónio  $i$  com o neurónio de saída ( $w_0$  representa um termo independente).

Se as funções  $\phi_i$  forem radialmente simétricas em relação a centros  $\mathbf{c}_i \in \mathbb{R}^n$ , o seu valor depende apenas das distâncias euclidianas  $\|\mathbf{x} - \mathbf{c}_i\|$ . Habitualmente considera-se FBR gaussianas,

$$\phi_i(\mathbf{x}) = \exp\left(-0.5 \frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{c}_i\|^2}{\sigma_i^2}\right),$$

e o modelo resume-se, então, a uma mistura (combinação linear) de gaussianas multidimensionais. Os hiperparâmetros de dispersão,  $\sigma_i$ , serão designados por *raios*. Cada neurónio artificial representado por uma FBR gaussiana foca, portanto, uma certa região do espaço de entrada, caracterizada pelo centro e pelo raio dessa função.

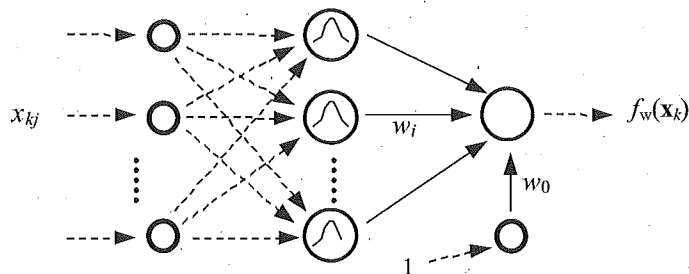


Figura 1: Esquema de uma rede de funções de base com um neurónio de saída.

### 1.3 Estimação e generalização

Dado um conjunto de padrões, ou observações,  $\{(\mathbf{x}_k, y_k)\}_{k=1, \dots, N}$ , pretende-se estimar os parâmetros  $\{w_i\}$ , segundo o modelo

$$y_k = f_{\mathbf{w}}(\mathbf{x}_k) + \varepsilon_k,$$

onde  $\{\varepsilon_k\}$  é geralmente assumido como sendo um processo de *ruído branco* (valor médio nulo, variância constante e correlação mútua nula).

Obtém-se então um sistema de  $N$  equações lineares estocásticas, a  $m+1$  incógnitas, a resolver segundo o critério de mínimos quadrados:

$$\mathbf{y} = \mathbf{R} \times \mathbf{w} + \boldsymbol{\varepsilon},$$

onde  $\mathbf{y}$  é o vector dos padrões de saída,  $\mathbf{R}$  é a matriz das respostas das FBR, de dimensão  $N \times (m+1)$ ,  $\mathbf{w}$  é o vector dos parâmetros, e  $\boldsymbol{\varepsilon}$  é o vector ruído.

Razões de eficiência computacional e de eficácia do modelo recomendam que se considere  $m \ll N$ , ou seja, o número de FBR deve ser significativamente inferior ao número de padrões de treino. Caso se tomasse  $m+1=N$ , a matriz  $\mathbf{R}$  seria quadrada e, caso esta fosse não singular, o problema seria de solução trivial, tendo a aproximação funcional erro nulo. Contudo, a sobreparametrização do modelo corresponde a ajustar o próprio ruído inerente às observações, com a consequente degradação da qualidade do modelo na fase de generalização.

Com  $m \ll N$ , e caso  $\mathbf{R}^T \times \mathbf{R}$  seja invertível, pode-se obter eficientemente uma solução directa do problema de mínimos quadrados, por

$$\mathbf{w} = \mathbf{R}^+ \times \mathbf{y},$$

onde  $\mathbf{R}^+ = (\mathbf{R}^T \times \mathbf{R})^{-1} \times \mathbf{R}^T$  é a matriz *pseudo-inversa* de  $\mathbf{R}$ . Saliente-se que esta solução é possível porque se está perante um modelo que é linear em relação aos parâmetros, e por se considerar como critério de optimalidade a minimização da soma dos quadrados dos erros de aproximação, definidos por:

$$e_k = y_k - f_{\hat{\mathbf{w}}}(\mathbf{x}_k).$$

Qualquer estrutura neuronal dita *supervisionada* pode ser directamente usada como modelo causal, ou de regressão não linear multivariada, com o objectivo último de prever uma dada série temporal em função de um conjunto de variáveis ou séries explicativas. No entanto, no presente trabalho, será ilustrada apenas a construção de redes de FBR como modelos não lineares de tipo autoregressivo para séries temporais univariadas. Para esse efeito, toma-se  $\mathbf{x}_k = [y_{k-1}, y_{k-2}, \dots, y_{k-n}]^T$  e as saídas da rede serão então interpretadas como previsões um passo à frente:  $\hat{y}_{k|k-1} = f_{\hat{\mathbf{w}}}(\mathbf{x}_k)$ . Este esquema pode facilmente ser modificado, por exemplo, de forma a contemplar horizontes de previsão maiores, ou modelos (híbridos) causais e autoregressivos.

## 2 Identificação de redes de FBR

### 2.1 Introdução

Na construção de uma rede é necessário identificar os vários hiperparâmetros do modelo, bem como estimar os parâmetros  $\{w_i\}$ . Assim, nas redes de FBR gaussianas, é necessário tomar decisões sobre os seguintes aspectos da identificação do modelo:

- a dimensão dos padrões de entrada,  $n$ ;
- o número de funções de base radiais,  $m$ ;
- a localização dos centros das funções de base radiais,  $\{c_i\}$ ; e,
- os valores para os raios das funções de base radiais,  $\{\sigma_i\}$ .

Existem várias abordagens para a resolução destes problemas: pré-definindo valores e decisões por omissão; por métodos de optimização não linear; através de técnicas heurísticas; e, por métodos adaptativos. É habitual proceder da seguinte forma: selecciona-se os centros de forma aleatória a partir do conjunto dos padrões de entrada; considera-se um valor comum,  $\sigma$ , para o raio de todas as FBR; e é feita uma pesquisa tri-dimensional dos valores óptimos de  $n$ ,  $m$  e  $\sigma$ .

Um dos aspectos decisivos para o desempenho das redes de FBR é precisamente a localização das funções, ou seja, a identificação dos centros. Basicamente, existem quatro formas distintas para lidar com o problema:

- considerar como parâmetros não apenas os pesos dos arcos mas também os centros; o modelo será então não linear quer nos *inputs* (variáveis de entrada) quer nos parâmetros;
- através de processos de selecção progressiva (inclusão ou exclusão), o que equivale a considerar a própria estrutura da rede variável;
- considerar os centros como vectores constantes de hiperparâmetros, determinados antes do processo de estimação dos pesos;
- considerar os centros como vectores variáveis de hiperparâmetros, determinados adaptativamente durante a própria estimação dos pesos.

O presente trabalho concentra-se no estudo das duas últimas abordagens, e nesta secção será analisada, em particular, a terceira.

As redes de FBR são especialmente interessantes do ponto de vista computacional se puderem ser entendidas como modelos lineares em relação aos parâmetros. Se assim for, o seu treino pode ser efectuado de forma eficiente em duas fases [7]: primeiro, são determinados valores para os hiperparâmetros através de métodos não supervisionados; depois, através de um método supervisionado adaptativo, ou simplesmente através do cálculo da pseudo-inversa, são obtidos os pesos.

Para os estudos a seguir reportados, nas secções 2.2, 2.4 e 3.2, foram utilizadas oito séries, quatro delas reais (Figura 2 – A, B, C, D) e quatro geradas por simulação (Figura 2 – E, F, G, H). Para tornar mais comparáveis os resultados experimentais, cada uma das séries foi normalizada, de modo a todas terem média nula e desvio padrão empírico unitário.

Com vista à optimização dos modelos e à comparação das diferentes abordagens testadas, cada série foi dividida em duas partes: um *conjunto de treino* (CT), com as primeiras 80% observações, e um *conjunto de validação* (CV), com as restantes. Assim, após a escolha de valores para os hiperparâmetros, o modelo é estimado com base nas observações em CT, e é depois aplicado às observações em CV, sendo comparados os valores estimados com os valores observados e calculada a *raiz do erro quadrático médio* (REQM(t) e REQM(v), respectivamente em CT e em CV, sendo a última usada como função-custo na optimização).

## 2.2 Selecção aleatória de centros versus k-means clustering

O processo mais simples de selecção dos centros consiste na escolha aleatória de  $m$  padrões de entrada do conjunto de treino. Existem no entanto formas mais sofisticadas de identificação, como as baseadas em técnicas de *clustering*, que procedem à partição do espaço de entrada, permitindo que cada FBR tenha a sua própria região de influência. Os centros podem, desta maneira, com maior acuidade reflectir a distribuição dos padrões de entrada. A mais utilizada dessas técnicas é porventura o *k-means clustering* [6].

Pretende-se aqui estudar o comportamento destas duas abordagens para a selecção dos centros das funções de base – por escolha aleatória ou através do *k-means clustering* – em problemas de previsão de séries temporais. Para cada uma das oito séries consideradas foram determinados dois modelos diferentes, correspondentes às duas formas de selecção. Para a optimização de cada um dos ( $8 \times 2 = 16$ ) modelos foram avaliadas as seguintes ( $7 \times 20 \times 9 = 1260$ ) combinações de valores:

$$n \in \{1, 2, \dots, 7\}; \quad m \in \{6, 7, \dots, 25\}; \quad \sigma \in \{10^{-1}, 10^{-0.75}, 10^{-0.5}, \dots, 10^1\}.$$

Os parâmetros do modelo foram sempre determinados através da pseudo-inversa.

Os resultados são apresentados na Figura 2 e no Quadro 1.

O método *k-means clustering* conduziu sempre a um melhor valor da função REQM(v), considerada para a optimização dos modelos, do que o proporcionado pela selecção aleatória, ainda que em alguns casos apresentando uma diferença muito pequena. Note-se que, para a maior parte das séries, o número de FBR do modelo óptimo identificado com recurso ao *clustering* foi significativamente inferior ao do modelo com a selecção aleatória.



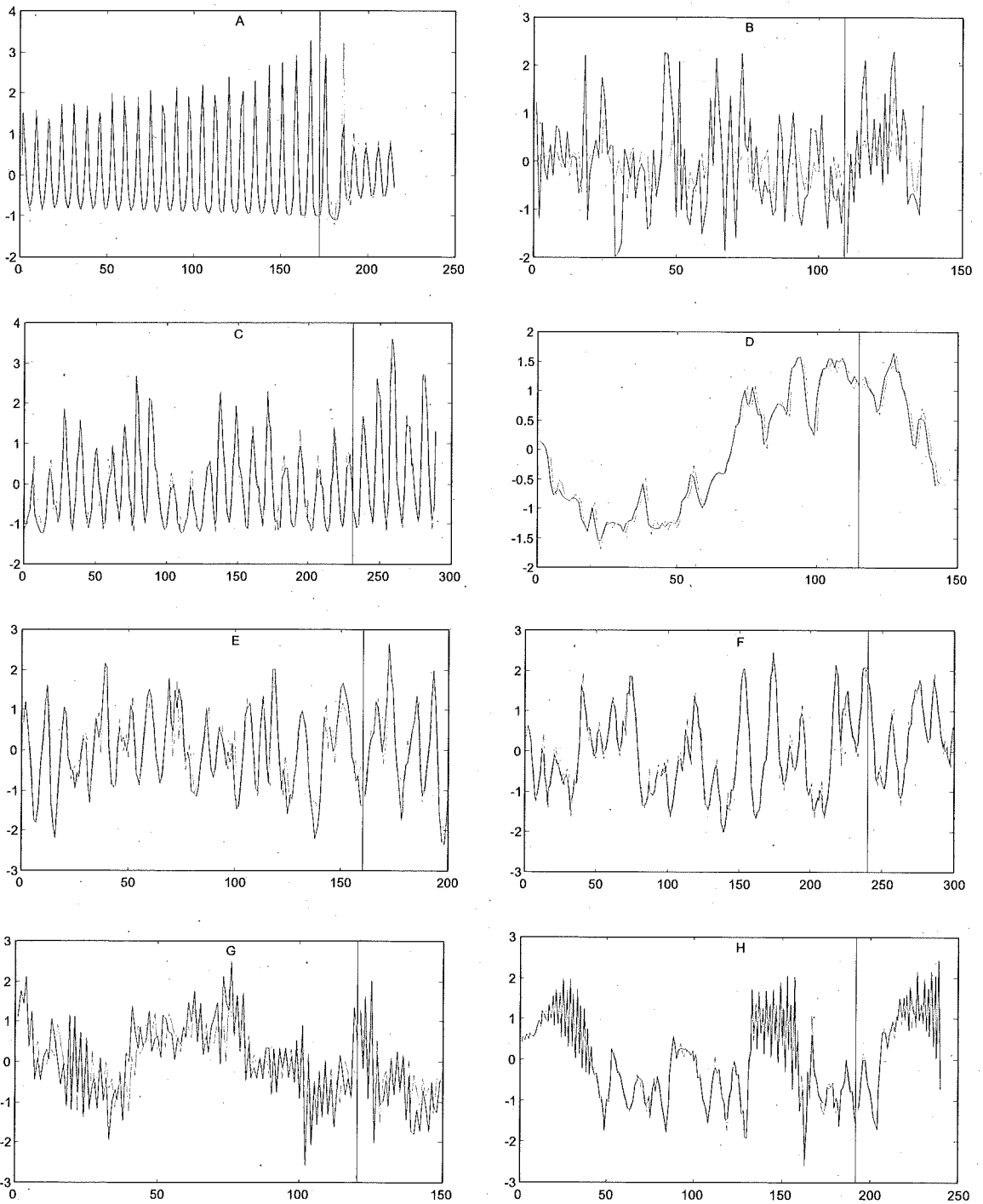


Figura 2: Apresentação das séries temporais (traço contínuo) e correspondentes estimativas (a tracejado) relativas aos melhores modelos obtidos, com os centros das FBR identificados pelo método *k-means clustering*. A barra vertical indica o início do conjunto de validação.

Quadro 1: Os melhores modelos obtidos para as duas formas de selecção dos centros: selecção aleatória (*al*) ou por *k-means clustering* (*km*). Para cada série indica-se em destaque qual o melhor modelo, face à minimização de  $REQM(v)$ .

Série	Centros	$n$	$m$	$\sigma$	$REQM(t)$	$REQM(v)^*$
A	<i>al</i>	3	15	5.6	0.093	0.408
	<i>km</i>	4	18	3.2	0.080	<b>0.398</b>
B	<i>al</i>	3	25	0.6	0.823	0.984
	<i>km</i>	1	13	0.1	0.908	<b>0.938</b>
C	<i>al</i>	2	23	1.0	0.310	0.502
	<i>km</i>	4	13	3.2	0.316	<b>0.486</b>
D	<i>al</i>	2	6	1.8	0.171	0.198
	<i>km</i>	4	6	10.0	0.174	<b>0.195</b>
E	<i>al</i>	3	22	5.6	0.483	0.484
	<i>km</i>	3	15	5.6	0.486	<b>0.479</b>
F	<i>al</i>	5	15	10.0	0.270	0.244
	<i>km</i>	5	10	10.0	0.277	<b>0.244</b>
G	<i>al</i>	7	20	1.8	0.603	0.642
	<i>km</i>	6	13	5.6	0.610	<b>0.626</b>
H	<i>al</i>	5	25	5.6	0.149	0.189
	<i>km</i>	6	22	5.6	0.164	<b>0.188</b>

### 2.3 Extensão do clustering ao espaço de saída

Na literatura de Neurocomputação sugere-se, quase invariavelmente, que o conjunto de pontos a fornecer ao *k-means clustering* seja precisamente o dos *padrões de entrada*,  $\{x_k\}$ , na rede de FBR. Todavia, é razoável admitir que poderá haver melhorias significativas no desempenho da rede se o algoritmo utilizar igualmente informação sobre os *padrões de saída*. Propõe-se aqui que a constituição de *clusters* seja realizada no espaço  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ , dos padrões de *entrada-saída*,  $\{(x_k, y_k)\}$ . Os centros das FBR serão as projecções em  $\mathbb{R}^n$  dos centros dos *clusters* assim determinados.

O exemplo seguinte tem o objectivo de ilustrar as potenciais desvantagens de não incorporar o espaço de saída no processo de *clustering*. Considere-se a tentativa de reconstruir a função gaussiana bivariada *standard*, que define uma superfície em  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ , a partir do conhecimento do seu valor em 300 pontos, seleccionados aleatoriamente segundo uma distribuição Uniforme em  $[-3, 3]^2$ . A rede terá, portanto,  $n=2$  entradas e uma saída. Embora seja óbvio que o número ideal de FBR é  $m=1$  (e  $\sigma^* = 1$ ), investigou-se propositadamente o caso em que se escolhesse, tentativamente,  $m=4$ . Na Figura 3 apresenta-se os resultados da determinação dos centros, utilizando o *k-means clustering* das duas formas indicadas (baseado nos padrões de entrada ou nos padrões de entrada-saída).

Depois da localização das FBR, procedeu-se à determinação do raio de cada uma das funções, através do cálculo do desvio padrão empírico em cada um dos *clusters* obtidos. Identificados os hiperparâmetros, seguiu-se a estimação dos parâmetros do modelo, os pesos, através do método da pseudo-inversa. Tal foi feito para cada um dos dois modelos, correspondentes às duas formas de *clustering*. Para averiguar a qualidade dos modelos estimados foi feita a sua aplicação (generalização) a um novo conjunto de 300 pontos, gerados de forma semelhante à anterior.

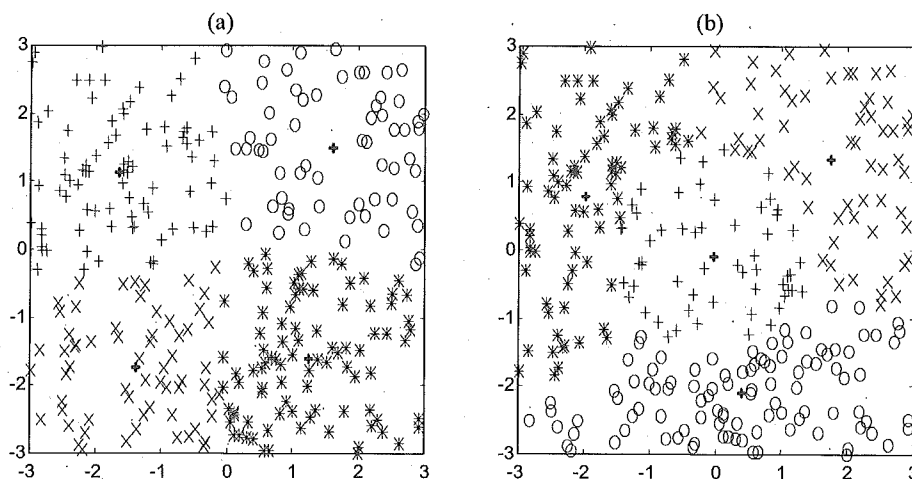


Figura 3: Resultados do *clustering* dos 300 padrões de treino, para  $m=4$ , considerando: (a) apenas o espaço de entrada, ou (b) todo o espaço. Os pontos em destaque (quadrados negros) são, em (a), os centros dos *clusters* encontrados e, em (b), as projecções em  $\mathbb{R}^2$  dos centros dos *clusters*.

Os resultados obtidos (Figura 4) são claros quanto à conveniência da inclusão do espaço de saída no processo de *clustering*.

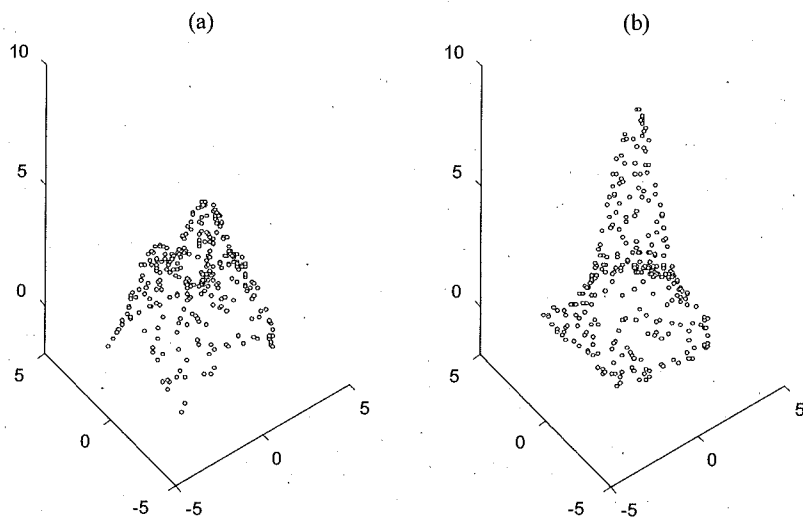


Figura 4: Resultados da aplicação dos padrões de entrada do conjunto de teste às duas redes estimadas: (a) sem extensão do *k-means clustering* ao espaço de saída (REQM=2.2); (b) com extensão (REQM=0.2).

## 2.4 Heurísticas para a identificação dos raios

Seguindo a abordagem em duas fases para o treino das redes de FBR, torna-se necessário determinar por algum processo o valor dos raios, antes do método supervisionado de estimação dos pesos. Para reduzir a complexidade do problema, pode-se considerar um valor comum, de preferência otimizado, para o raio de todas as funções. Alternativamente, pode-se definir formas mais elaboradas, mas ainda eficientes, para a determinação dos raios, através de heurísticas.

Devido à diversidade de heurísticas propostas na literatura, revela-se de alguma utilidade um estudo que permita avaliar o desempenho daquelas que se julga, à partida, mais apropriadas. Foram consideradas seis heurísticas, a seguir descritas. As três primeiras discriminam o valor dos raios, ou seja, determinam-no explicitamente para cada função gaussiana ( $i=1, \dots, m$ ):

$$S1: \sigma_i = \sqrt{\frac{1}{N_i} \sum_{j=1}^{N_i} \| \mathbf{c}_i - \mathbf{x}_{j(i)} \|^2} \quad (\{\mathbf{x}_{j(i)}\}_{j=1, \dots, N_i} \text{ são os padrões de entrada do cluster } i)$$

$$S2: \sigma_i = \frac{1}{k\sqrt{2}} \sum_{j=1}^k \| \mathbf{c}_i - \mathbf{c}_{j(i)} \| \quad (\{\mathbf{c}_{j(i)}\}_{j=1, \dots, k} \text{ são os } k \text{ centros mais próximos de } \mathbf{c}_i)$$

$$S3: \sigma_i = \frac{Q}{\sqrt{2}} \| \mathbf{c}_i - \mathbf{c}_{1(i)} \| \quad (\mathbf{c}_{1(i)} \text{ designa o centro mais próximo de } \mathbf{c}_i)$$

$$S4: \sigma = \frac{1}{2\sqrt{2}} \max_{j,l=1, \dots, N} \| \mathbf{x}_j - \mathbf{x}_l \|^2$$

$$S5: \sigma = \frac{1}{\sqrt{2m}} \max_{j,l=1, \dots, m} \| \mathbf{c}_j - \mathbf{c}_l \|^2$$

$$S6: \sigma = \frac{1}{m\sqrt{2}} \sum_{j=1}^m \| \mathbf{c}_j - \mathbf{c}_{1(j)} \|^2$$

Para a heurística S1 é necessário que se tenha procedido previamente a um processo de *clustering* do espaço de entrada. Continuando com esta abordagem, onde se pretende que cada função gaussiana tenha um raio de acção limitado ao respectivo *cluster*, parece ser correcto considerar o desvio padrão empírico de cada *cluster* como a forma mais natural de cálculo do raio da respectiva função.

A heurística S2, dos  $k$ -vizinhos mais próximos, é provavelmente a mais conhecida e utilizada, tendo sido proposta por Moody e Darken [7]. Cada raio é obtido pela distância média entre o respectivo centro e os seus  $k$  vizinhos mais próximos. Nos testes escolheu-se  $k = \lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor$ . Estes autores propuseram igualmente a heurística S6, para o caso em que se pretende usar um valor global para os raios.

Também um valor global é sugerido por Orr [8] através da heurística S4, baseada no cálculo da distância máxima entre padrões de entrada, e por Haykin [5], através da heurística S5, baseada na distância máxima entre centros.

A heurística S3, proposta por Saha e Keeler [13], é definida através de dois passos: primeiro são discriminados os raios das funções gaussianas através da heurística do vizinho mais próximo, de seguida os raios são igualmente ajustados, de modo a que a influência exercida

por cada FBR sobre o espaço de entrada possa ser a mais adequada. Tomou-se  $Q = 1.25$ , valor por omissão proposto pelos autores da heurística.

O estudo do comportamento das seis heurísticas apresentadas irá ser realizado através das mesmas 8 séries. Para garantir iguais condições iniciais, o mesmo conjunto de centros foi utilizado para todas as heurísticas. Os centros foram determinados pelo método *k-means clustering* e os parâmetros do modelo através da pseudo-inversa. Limitou-se a optimização de  $n$  e  $m$  à exploração nos seguintes conjuntos:  $n \in \{1, 2, \dots, 7\}$ ;  $m \in \{6, 7, \dots, 25\}$ .

Para uma fácil compreensão dos resultados produzidos, calculou-se para cada heurística a média aritmética dos valores de  $REQM(v)$  obtidos nas oito séries do estudo (Quadro 2). Duas heurísticas claramente se destacam: a S2, que discrimina os valores dos raios, e principalmente a S4, que considera um valor comum. A heurística S1 apresentou os piores resultados; naturalmente, o seu desempenho será melhor se existir um número significativo de padrões em cada *cluster*, o que nem sempre sucede.

Quadro 2: Média de  $REQM(v)$  resultante dos valores obtidos nas oito séries, para cada heurística de cálculo dos raios testada (S1 a S6).

S1	S2	S3	S4	S5	S6
0.638	0.489	0.545	0.471	0.530	0.590

Devido aos bons resultados da heurística S2, procurou-se analisar mais detalhadamente o seu comportamento. Concretamente, procedeu-se à optimização do valor de  $k$ , número de vizinhos a considerar. A média dos correspondentes valores óptimos de  $REQM(v)$  foi praticamente coincidente com o produzido pela heurística S4: 0.476. Os resultados obtidos [2] também mostraram que, para a maioria das séries, o número óptimo de vizinhos mais próximos,  $k^*$ , não é muito diferente do valor *ad-hoc* considerado nos testes.

As heurísticas S2 e S4 parecem, portanto, ser boas alternativas a uma optimização, mais ou menos exaustiva e demorada, dos valores dos raios. Alternativamente, poderão ser usadas para obter boas aproximações iniciais para um processo de pesquisa, que poderá ser limitado à exploração da vizinhança desses valores [15].

### 3 Métodos adaptativos

#### 3.1 Introdução

Em muitas aplicações, mais do que um modelo totalmente identificado, e imutável, pretende-se definir um modelo que possa ter alguma flexibilidade depois de construído, de modo a facilmente incorporar nova informação que entretanto se encontre disponível. Essa flexibilidade pode apresentar diversos graus de complexidade, incluindo, em último caso, a alteração progressiva da própria estrutura do modelo. Por agora, está-se mais interessado em que, em função de nova informação, se possa simplesmente adaptar os hiperparâmetros e parâmetros do modelo, como alternativa à repetição de todo o processo de identificação.

Para a actualização dos parâmetros de um modelo, podem ser utilizados diversos métodos iterativos, normalmente baseados no cálculo do gradiente [2]. No entanto, devido à lineari-

dade do modelo de rede de FBR em relação aos pesos, estes podem ser estimados de forma particularmente eficiente, com o objectivo de minimizar a soma dos quadrados dos erros de estimação. O método recursivo de mínimos quadrados (RLS, *Recursive Least Squares*) é a versão recursiva e assintoticamente equivalente do tradicional método de mínimos quadrados, que se baseia na resolução do chamado sistema de equações normais.

Assim, dada uma sequência de  $N$  observações,  $\{y_k\}$ , e dada uma sequência de  $N$  vectores de  $m$  variáveis de entrada,  $\{\mathbf{x}_k\}$ , que podem ser interpretados como regressores, assume-se válido o modelo linear:

$$y_k = \mathbf{w}^T \mathbf{x}_k + \varepsilon_k,$$

onde  $\mathbf{w}$  é um vector de  $m$  parâmetros, e  $\{\varepsilon_k\}$  é ruído branco. O método RLS produz de forma eficiente uma sequência de estimativas do vector dos parâmetros,  $\{\hat{\mathbf{w}}_k\}$ , assintoticamente iguais às do tradicional método de mínimos quadrados. O algoritmo subjacente baseia-se essencialmente na seguinte fórmula de actualização recursiva:

$$\hat{\mathbf{w}}_k = \hat{\mathbf{w}}_{k-1} + \mathbf{k}_k (y_k - \hat{\mathbf{w}}_{k-1}^T \mathbf{x}_k),$$

onde os vectores  $\mathbf{k}_k$ , designados por *ganhos*, são calculados também recursivamente.

O método RLS é particularmente apropriado nas situações em que a informação é recebida de forma sequencial, e apresenta uma importante vantagem em relação ao método recursivo LMS (*Least Mean Squares*), frequentemente empregue, pois utiliza informação relativa à curvatura local da superfície de pesquisa, embora não requeira o cálculo de derivadas de segunda ordem. Deverá por isso mesmo ser comparado com os métodos de segunda ordem, com o atractivo de ser mais eficiente que esses métodos. Por outro lado, o método RLS pode ser facilmente modificado para modelos em que os parâmetros desconhecidos sejam, por hipótese, genuinamente variáveis no tempo,  $\{\mathbf{w}_k\}$ , logo mais adequados para a modelação de séries temporais não estacionárias [15].

### 3.2 Actualização dos centros

Em aplicações dinâmicas, especialmente na previsão de séries não estacionárias, o método *k-means clustering* deverá ser implementado de forma adaptativa para que, caso a distribuição das observações se altere, a distribuição dos centros possa seguir as variações dos padrões de treino. Assim, o método deverá actualizar a partição e os centros após a apresentação de cada novo padrão. Por exemplo, poderá ser modificado apenas o centro mais próximo de novo padrão de entrada  $\mathbf{x}_k$  de acordo com a heurística (designada por *k-means sequencial*):

$$\mathbf{c}_{j,k} = \mathbf{c}_{j,k-1} + \alpha_k (\mathbf{x}_k - \mathbf{c}_{j,k-1}) = \alpha_k \mathbf{x}_k + (1 - \alpha_k) \mathbf{c}_{j,k-1}$$

onde  $\alpha_k$ , o parâmetro responsável pela rapidez e precisão da adaptação, é a taxa de aprendizagem ( $0 < \alpha_k < 1$ ). Note-se que o esquema anterior pressupõe que o *clustering* é feito apenas no espaço de entrada.

A alternativa mais simples consiste em considerar um valor fixo  $\alpha_k = \alpha$  para todo o processo, suficientemente pequeno para que o algoritmo possa convergir. Esse valor não pode ser determinado *a priori*, já que é dependente do problema em análise, e portanto deverá ser otimizado. Em particular devido a essa dificuldade, têm sido investigados esquemas de variação da taxa de aprendizagem, incluindo as seguintes:

$$T1: \alpha_k = \left(1 + \left\lfloor \frac{k}{m} \right\rfloor\right)^{-1/2} \alpha_{k-1}$$

$$T2: \alpha_k = \begin{cases} \alpha_0 & \text{se } SSE > Q \\ 0.9 \alpha_{k-1} & \text{c.c.} \end{cases}$$

$$T3: \alpha_k = 1 + \frac{1}{\ln(m)} \sum_{i=1}^m u_{i,k} \ln(u_{i,k}),$$

$$\text{onde } u_{i,k} = \frac{v_{i,k}}{\sum_{j=1}^m v_{j,k}},$$

$$\text{e } v_{i,k} = \begin{cases} \beta v_{i,k-1} & \text{se } \exists_j : v_{j,k-1} \| \mathbf{x}_k - \mathbf{c}_{j,k-1} \|^2 < v_{i,k-1} \| \mathbf{x}_k - \mathbf{c}_{i,k-1} \|^2 \\ \beta v_{i,k-1} + (1-\beta) \| \mathbf{x}_k - \mathbf{c}_{i,k-1} \|^2 & \text{c.c.} \end{cases}$$

A proposta T1 foi sugerida por Chen *et al.* [3], que não só consideram a actualização dos centros pelo *k-means sequencial*, como também a actualização dos pesos através do RLS. A fórmula proposta garante que a taxa de aprendizagem seja menor que 1 e decresça lentamente, tendendo para 0, mas há outras formas de conseguir tal objectivo.

A heurística T2, proposta por Pereira *et al.* [10], depende dos erros produzidos pela rede nas últimas  $p$  iterações. Enquanto a soma quadrática desses erros (SSE) for superior a uma constante  $Q$  pré-definida, a taxa de aprendizagem mantém-se constante; caso contrário, tende lentamente para 0. A dificuldade do método deve-se ao facto de ser necessário escolher valores adequados para as constantes  $p$ ,  $\alpha_0$ ,  $Q$ , que poderão depender do problema particular em análise. Em particular, o valor de  $Q$  é crítico no comportamento da heurística, sendo, portanto, necessário dispendir algum tempo na sua optimização.

A proposta T3, devida a Chinrungrueng e Séquin [4], é significativamente mais elaborada, e baseia-se numa constante de alisamento,  $\beta \ll 1$ . Em cada iteração, a escolha do centro a ajustar é feita, não só através da distância euclidiana ao novo padrão de entrada, mas também através das quantidades  $v_{i,k}$ , dependentes do correspondente centro e das propriedades geométricas da região.

Através das oito séries já anteriormente consideradas, comparou-se o desempenho destas três formas de actualização dos centros. Os raios foram determinados através da heurística dos  $k$ -vizinhos mais próximos, os parâmetros do modelo estimados através do RLS, e os valores de  $n$  e  $m$  optimizados por exploração das seguintes combinações:  $n \in \{1, 2, \dots, 7\}$ ;  $m \in \{6, 7, \dots, 25\}$ .

Os resultados do Quadro 3 mostram uma relativa supremacia de T1 e, em geral, uma fraca prestação de T3, apesar da sua maior complexidade.

A título de exemplo, ilustra-se na Figura 5, para uma das séries temporais consideradas, a evolução do valor da taxa de aprendizagem para as três propostas em análise, considerando, naturalmente, os modelos obtidos no processo de optimização. Note-se, em particular, a convergência mais rápida e regular associada à primeira heurística.

Quadro 3: Valores mínimos da REQM obtidos para as três formas de cálculo da taxa de aprendizagem no *k-means* sequencial. Entre parênteses indica-se os valores óptimos de  $n$  e  $m$ .

Série	T1	T2	T3
A	(2, 24) <b>0.192</b>	(5, 18) 0.218	(5, 19) 0.238
B	(4, 24) <b>0.889</b>	(4, 23) 0.891	(6, 24) 0.917
C	(3, 24) <b>0.369</b>	(4, 24) 0.377	(4, 21) 0.391
D	(3, 25) <b>0.176</b>	(2, 22) 0.187	(1, 12) 0.220
E	(7, 23) 0.502	(2, 20) 0.513	(7, 23) <b>0.493</b>
F	(2, 22) <b>0.269</b>	(2, 25) 0.286	(2, 24) 0.298
G	(7, 25) <b>0.608</b>	(3, 23) 0.636	(7, 24) 0.614
H	(4, 24) <b>0.259</b>	(4, 25) 0.265	(4, 24) 0.322

## 4 Conclusões

As redes de FBR mantêm a solidez teórica de outros modelos de redes neuronais, mais conhecidos, ao mesmo tempo que, apresentando uma estrutura mais simples, permitem que a identificação seja realizada de forma muito mais eficiente. Assim, primeiro são identificados os hiperparâmetros do modelo, através de técnicas heurísticas, e depois é realizada a estimação dos parâmetros (lineares), através de métodos supervisionados.

Para a identificação dos centros das FBR apresentou-se uma alternativa mais sofisticada do que a simples escolha aleatória no conjunto dos padrões de entrada. Os resultados foram claramente favoráveis à utilização do *k-means clustering*, registando-se uma maior capacidade de generalização, com um menor número de parâmetros no modelo. Mostrou-se igualmente que é possível melhorar a selecção dos centros das FBR, se o *clustering* for efectuado no espaço dos padrões de *input-output*, e não apenas no espaço de entrada.

Para a identificação dos raios das FBR, os resultados obtidos foram melhores com a heurística dos *k*-vizinhos mais próximos e com a heurística de Orr. Enquanto que a primeira discrimina o valor dos raios, a segunda determina um valor comum para os raios de todas as FBR. Se conveniente, podem ser utilizadas para iniciar de forma adequada um processo de pesquisa mais refinado.

Os exemplos apresentados evidenciam a adequabilidade das redes de FBR para a modelação e previsão de séries temporais. Foram também apresentadas abordagens adaptativas para o treino da rede, adequadas a situações de não-estacionaridade, e comparadas três formas

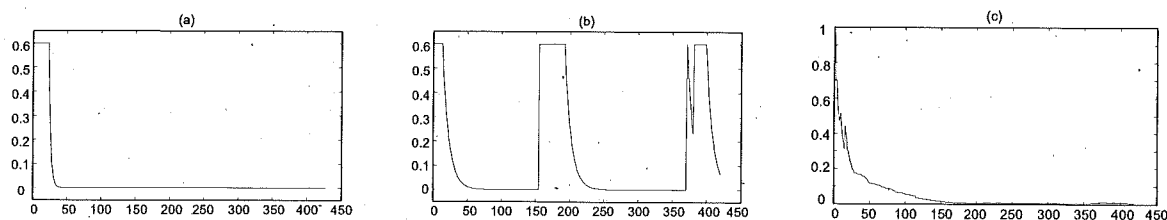


Figura 5: Evolução do valor da taxa de aprendizagem para a série A em cada heurística estudada, e nos respectivos modelos "óptimos": (a) T1; (b) T2; (c) T3.



distintas para a revisão da taxa de aprendizagem no *k-means clustering* sequencial. A mais simples e de mais fácil identificação, proposta por Chen *et al.*, foi precisamente a que se revelou mais indicada, pelo menos para as séries em análise.

As heurísticas que aparentaram ser mais eficazes no presente estudo foram aplicadas com sucesso, num outro trabalho [2], em problemas de previsão de séries irregularmente espaçadas, representativas de processos de procura numa fábrica de papel.

## 5 Referências

- [1] Broomhead, D.S. e Lowe, D., "Multivariable functional interpolation and adaptive networks", *Complex Systems* **2** (1988) 321-355.
- [2] Carmo, J.L., *Redes de Funções de Base Radiais: Identificação e Aplicação na Previsão de Séries Irregularmente Espaçadas*, Dissertação de Mestrado, Universidade de Lisboa (1997).
- [3] Chen, S., Billings, S.A. e Grant, P.M., "Recursive hybrid algorithm for non-linear system identification using radial basis function networks", *International Journal of Control* **55** (1992), 1051-1070.
- [4] Chinrungrueng, C. e Séquin, C.H., "Optimal adaptive k-means algorithm with dynamic adjustment of learning rate", *IEEE Transactions on Neural Networks* **6** (1995) 157-169.
- [5] Haykin, S., *Neural Networks: A Comprehensive Foundation*, 2<sup>nd</sup> ed., Prentice Hall (1999).
- [6] MacQueen, J., "Some methods for classification and analysis of multivariate observations", *Procs. 5th Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability* **1** (L.M. LeCam and J. Neyman, Eds.), Univ. California Press (1967) 281-297.
- [7] Moody, J. e Darken, C.J., "Fast learning in networks of locally-tuned processing units", *Neural Computation* **1** (1989) 281-294.
- [8] Orr, M.J.L., "Regularization in the selection of radial basis function centers", *Neural Computation* **7** (1995) 606-623.
- [9] Park, J. e Sandberg, I.W., "Universal approximation using radial-basis-function networks", *Neural Computation* **3** (1991) 246-257.
- [10] Pereira, C., Henriques, J., Ribeiro, B. e Correia, A.D., "RBFNN for real-time process identification and control with selective forgetting", *Proceedings of the 2nd Portuguese Conference on Automatic Control* (1996) 205-210.
- [11] Poggio, T. e Girosi, F., "Networks for approximation and learning", *Proceedings of the IEEE* **78** (1990) 1481-1497.
- [12] Powell, M.J.D., "Radial basis functions for multivariable interpolation: A review", in *Algorithms for Approximation* (J.C. Mason and M.G. Cox, Eds.), Clarendon Press, Oxford (1987) 143-167.
- [13] Saha, A. e Keeler, J.D., "Algorithms for better representation and faster learning in radial basis function networks", *Advances in Neural Information Processing Systems* **2** (D.S. Touretzky, Ed.), Morgan Kaufmann Publishers (1990) 482-489.
- [14] Smith, K.A. e Gupta, J.N.D., "Neural networks in business: techniques and applications for the operations researcher", *Computers & Operations Research* **27** (2000) 1023-1044.
- [15] Teixeira, J.C. e Rodrigues, A.J., "An applied study on recursive estimation methods, neural networks and forecasting", *European Journal of Operational Research* **101** (1997) 406-417.



## Seleccção do melhor município: integração SIG-Multicritério

Eliane Gonçalves Gomes \*      Marcos Pereira Estellita Lins \* †

João Carlos Carreira Baptista Soares de Mello ‡

\* Programa de Engenharia de Produção - COPPE - Universidade Federal do Rio de Janeiro, Brasil  
{eggomes, lins}@pep.ufrj.br

† Departamento de Engenharia Industrial - EE - Universidade Federal do Rio de Janeiro, Brasil  
estellit@iis.com.br

‡ Departamento de Engenharia de Produção - Universidade Federal Fluminense, Brasil  
jcsmello@bol.com.br

---

### Abstract

This paper presents an application of the integration between Geographical Information Systems (GIS) and Multicriteria Decision Aid (MCDA) techniques to aid spatial decisions. The integration of GIS and MCDA allows fair, systematic and formalized evaluations of decision problems that must deal with spatial data, multiple criteria and multiple alternatives, besides conflictive objectives. Thus the decision-maker can explore the problem, enhancing the understanding and improving its definition.

To illustrate the GIS-Multicriteria integration, a didactic case study is presented: the selection of the best municipal district in Rio de Janeiro (Brazil), considering the quality of urban life. The Pareto Race multiobjective method has been adopted to deal with a problem which is multiattribute in its own nature.

### Resumo

O presente trabalho tem como objectivo mostrar uma aplicação da integração entre os Sistemas de Informação Geográfica (SIG) e os métodos multicritério no apoio à decisão espacial. A integração dos SIG com metodologias multicritério permite avaliações claras, sistemáticas e formalizadas de problemas de decisão que envolvem dados espaciais, múltiplos critérios e alternativas, além de objectivos em conflito. Este ambiente permite que o decisor explore o problema de modo a aumentar o nível de entendimento e refinar sua definição.

Para apresentar didacticamente a metodologia de integração SIG-Multicritério é apresentado um estudo de caso para selecção do melhor município do Estado do Rio de Janeiro, Brasil, no que se refere à qualidade de vida urbana, entendendo-se por melhor município

aquele que apresenta as características mais próximas àquelas consideradas ideais pelo decisor. É adoptado o método multiobjectivo Pareto Race, com as adaptações necessárias para lidar com um problema intrinsecamente multiatributo.

**Keywords:** Multiobjective Linear Programming, Geographical Information Systems, GIS-Multicriteria integration, Quality of urban life

**Title:** Integrating GIS and MCDA to choose the best municipal district

---

## 1 Introdução

A tomada de decisão, processo de escolha entre alternativas, apresenta como componentes dados, modelos de decisão, ambiente decisório e pessoas, cada um destes influenciando directamente a alternativa escolhida (Stevens e Thompson, 1996) [42]. A Análise Multicritério (AMC), desenvolvida no ambiente da Investigação Operacional, objectiva auxiliar analistas e decisores em situações nas quais há a necessidade de identificação de prioridades sob a óptica de múltiplos critérios, o que ocorre normalmente quando coexistem interesses em conflito. Os Sistemas de Informação Geográfica (SIG), ferramenta que fornece suporte à solução de problemas espaciais complexos, fornecem ao decisor um ambiente flexível no processo de investigação da decisão e na solução do problema.

Com o surgimento dos SIG abriram-se novas perspectivas de integração entre os modelos computacionais da Investigação Operacional e estes sistemas de informação, em uma ambiente flexível e adaptável, apresentando uma interface amigável ao utilizador (Lins e Ferreira Filho, 1997) [30]. A visualização do contexto e estrutura do problema e suas soluções alternativas é um dos componentes mais poderosos de um suporte à decisão, como destacado por Gomes e Lins (1999) [17] e exemplificado por Mello et al. (2000) [33]. No caso particular da integração SIG-Multicritério o objectivo é prover decisores de meios para avaliar várias alternativas, com base em critérios e objectivos múltiplos e em conflito. É permitido, ainda, realizar procedimentos simultâneos de análise dos componentes do dado geográfico, espacial e temático, o que proporciona apoio à solução de problemas espaciais complexos.

Pereira e Duckstein (1993) [34] destacam que os componentes mais importantes de uma técnica multicritério são aqueles que envolvem interacção com o decisor, para desenvolver uma função de valor ou elucidar um conjunto de pesos para os critérios de avaliação. Estes passos geralmente requerem questionamentos interactivos, e vários pacotes computacionais têm sido desenvolvidos para atender a estas demandas. Os pacotes de SIG existentes não possuem estas capacidades de questionamentos interactivos, e a interacção entre o analista e o decisor é feita fora do ambiente SIG. Uma importante vantagem em se usar SIG para realizar uma análise multicritério espacial é a facilidade em se desenvolver critérios baseados em operações de análise de vizinhança, visto que a qualidade de uma localidade para um uso específico reside não somente nos valores de suas variáveis ambientais, mas também em suas vizinhanças.

De maneira geral a integração envolve três etapas principais. Em uma primeira etapa, realizada em ambiente SIG, há a redução do número de alternativas, a partir de restrições físicas e/ou qualitativas impostas pelos critérios de exclusão. Estas restrições, em sua maioria, estão relacionadas a operações de topologia e/ou a operações de busca (*query* – utilizando

relações booleanas), operações facilmente realizadas em SIG. Com este conjunto reduzido de alternativas, procede-se à análise multicritério, para a selecção da melhor alternativa dentre estas. Neste artigo utiliza-se a Programação Linear Multiobjetivo, e o método escolhido é o Pareto Race (Korhonen e Laakso, 1986, Korhonen e Wallenius, 1988) [26, 27], implementado em ambiente computacional no programa VIG (Korhonen, 1987a) [24]. Em uma terceira etapa, os resultados da análise multicritério são introduzidos no ambiente SIG, para a visualização final da escolha do decisor, de modo que seja garantido que "a decisão mais correcta é aquela que melhor representa os interesses do decisor" (Graeml e Erdmann, 1998) [19]. O estado da arte da integração entre SIG e métodos multicritério pode ser visto em Gomes e Lins (1999) [17] e Gomes (1999) [16].

O objectivo deste artigo é mostrar uma aplicação da integração entre os SIG e os métodos multicritério no apoio à decisão espacial, apresentando-se um caso de estudo que visa seleccionar o melhor município do Estado do Rio de Janeiro, Brasil, em relação à qualidade de vida urbana. São analisados cinco grupos de critérios relacionados a infra-estrutura, educação, segurança, saúde e trabalho. O modelo de dados em SIG utilizado é o modelo vectorial, e o nível de desagregação utilizado é o nível de município. Cada alternativa de escolha é visualizada como um município, ou polígono da base de dados vectorial.

## 2 Sistemas de Informação Geográfica (SIG)

Segundo a definição clássica de Burrough (1986) [9], os SIG são um poderoso conjunto de ferramentas para colecta, armazenamento, manipulação e visualização de dados espaciais do mundo real. Como uma tecnologia, os SIG não necessitam se limitar a um único sistema independente, podendo possuir vários componentes, cada um com um objectivo particular.

A chave da diferenciação entre os SIG e outros sistemas de informação é o foco dos SIG em entidades espaciais e seus relacionamentos, com atenção especial às operações de modelação e análise espacial. As buscas espaciais e as operações de sobreposição de camadas são questões funcionais chave de um SIG (Maguire, 1991) [31]. A sobreposição de camadas (*overlay*) é uma das operações mais importantes para a análise espacial, podendo ser descrita como o processo de comparação de formas espaciais em uma ou mais camadas temáticas. O conceito da sobreposição faz com que o mundo real seja representado em diferentes camadas, cada qual contendo um aspecto característico da realidade (Burrough, 1986) [9], descrito e mapeado em uma camada, separadamente.

Os SIG surgem em resposta à demanda de capacidade de armazenamento, actualização e gestão de grandes volumes de dados e informações geográficas, gerados cada vez mais em maiores quantidades e velocidades (Gomes, 1999) [16]. Conforme Eastman et al. (1995) [14], a tecnologia SIG tem evoluído segundo três aplicações dominantes: primeiro como o próprio nome diz, SIG usado como base de dados, um meio de coordenar e de ter acesso aos dados geográficos. A segunda e mais recente aplicação é dos SIG como ferramenta analítica, um meio de especificar relações lógicas e matemáticas entre mapas para produção de novos mapas derivados. A terceira aplicação, baseada nas duas anteriores, é um novo estágio de desenvolvimento, no qual os SIG são usados como sistemas de suporte à decisão.

Ao contrário de outros tipos de dados manipulados em diferentes sistemas de informação, os dados geográficos são complexos por incluírem informações sobre posição, possíveis co-

nexões topológicas, e atributos dos objectos em questão. Segundo Burrough (1986) [9], os SIG descrevem os objectos do mundo real em termos de: posição em relação a um sistema de coordenadas conhecido; atributos não relacionados à posição (como custos, incidência de certa doença, etc.); inter-relações espaciais (relações topológicas, que descrevem como estes elementos estão unidos, ou como é possível percorrer estes elementos).

Segundo Maguire e Dangermong (1991) [32], a funcionalidade de um SIG pode ser definida como o conjunto de operações de colecta, armazenamento e estruturação, manipulação, busca ou *query*, análises espaciais e apresentação de dados (etapa final e mais evidenciada do projecto de um SIG; dados geográficos podem ser apresentados em várias formas, incluindo mapas, gráficos, resumos estatísticos, relatórios e tabelas).

## 2.1 Base de dados espaciais

Uma base de dados espaciais, geográficos ou geo-referenciados é aquela que além de conter informações que caracterizam o mundo real, contém informações sobre o aspecto espacial. A base de dados dos SIG é uma colecção estruturada de dados digitais, gráficos e não gráficos, que descrevem as formas de uma representação gráfica, além dos relacionamentos espaciais e características de uma área ou forma (Pina e Madureira, 1999) [35]. A habilidade dos SIG em integrar diversas informações é frequentemente citada como sua maior característica e sua maior fonte de poder e flexibilidade frente aos utilizadores (Maguire, 1991) [31].

Em um modelo de dados geográficos, a realidade é representada como uma série de formas geográficas. O modelo de dados representa uma abstracção do mundo real que incorpora somente as propriedades consideradas relevantes para a aplicação em questão. As formas gráficas (pontos, linhas, áreas e superfícies) são definidas em função de seus dois tipos de informação: a informação geográfica ou de localização (armazenada na base de dados gráficos), que é utilizada para fornecer a referência para a informação de atributo ou descritiva (armazenada na base dados não gráficos). Em SIG, o elemento geográfico é mais importante que o atributo (Maguire e Dangermond, 1991) [32], e as bases de dados gráficos e não gráficos encontram-se integradas.

Para a representação de dados gráficos, que descrevem a localização, as formas geográficas, e os relacionamentos espaciais entre as feições, são utilizados basicamente dois modelos de dados: o modelo matricial ou *raster* (representado por um conjunto de células ou *pixels* localizadas por coordenadas) e o modelo vectorial (representado por três entidades geográficas principais, a saber, pontos, linhas e áreas). A escolha do modelo mais adequado depende basicamente da aplicação à qual se destina, dos dados e dos *softwares* disponíveis (Gomes, 1999) [16]. A Figura 1 mostra a representação da realidade através dos modelos *raster* e vectorial.

Os dados não gráficos ou atributos não espaciais representam as propriedades ou características de uma forma espacial que devem ser manipuladas em SIG, mas que não apresentam natureza espacial. Descrevem dados e fenómenos sociais e naturais representados no mapa, sendo processados por sistemas gestores de bancos de dados tradicionais, representados pelos modelos de dados hierárquico, em rede, relacional e modelos orientados a objectos.

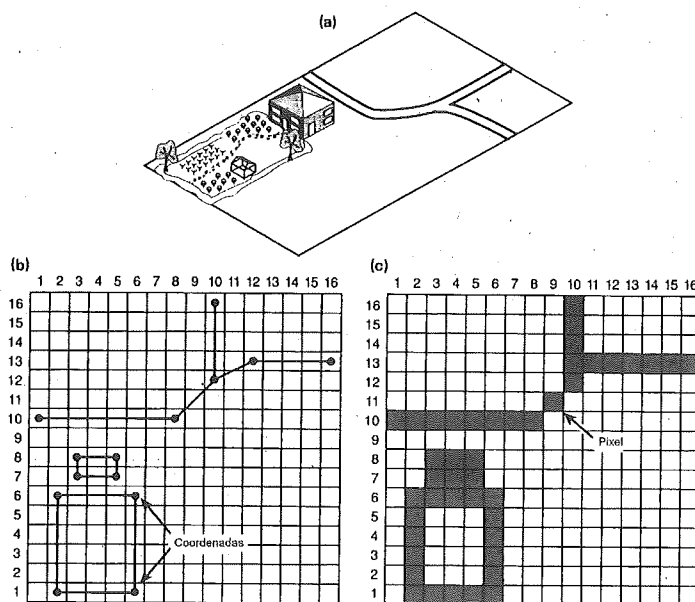


Figura 1: Representação da realidade (a), segundo os modelos vectorial (b) e *raster* (c) (Maiguire e Dangermond, 1991) [32].

### 3 Integração SIG-Multicritério

Segundo Jankowski (1995) [22], o papel do SIG na implementação de modelos de tomada de decisão espacial multicritério vai além de encontrar alternativas viáveis; o SIG auxilia igualmente o decisor a designar pesos de prioridade aos critérios de decisão, avaliar as alternativas viáveis e visualizar os resultados de sua escolha. A busca geralmente resulta na selecção de um certo número de alternativas que satisfazem valores limiares mínimos. A redução do conjunto de alternativas e a selecção da melhor alternativa geralmente requerem o uso de técnicas multicritério. Assim, a melhoria das capacidades do SIG na tomada de decisão pode ser alcançada pela introdução de técnicas multicritério no ambiente SIG.

A metodologia adoptada neste artigo toma como base a estratégia de integração proposta por Jankowski e Richard (1994) [23], semelhante à estratégia de acoplamento livre proposta por Jankowski (1995) [22]. A Figura 2 apresenta a estratégia de integração e pode ser assim descrita:

Um conjunto de critérios de decisão é formulado, podendo ser quantitativos e qualitativos, envolvendo aspectos físicos, económicos e sociais do problema de decisão.

Um conjunto de soluções viáveis é gerado pelo SIG. A viabilidade das alternativas é determinada a partir da satisfação de um conjunto mínimo de restrições físicas e/ou qualitativas impostas pelos critérios de exclusão. São utilizadas operações de análise espacial (*sobreposição*, *buffer* e *proximidade*) para a criação de uma camada composta, e operadores lógicos padrão disponíveis no SIG são usados para a geração de localidades que satisfaçam às restrições físicas e qualitativas.

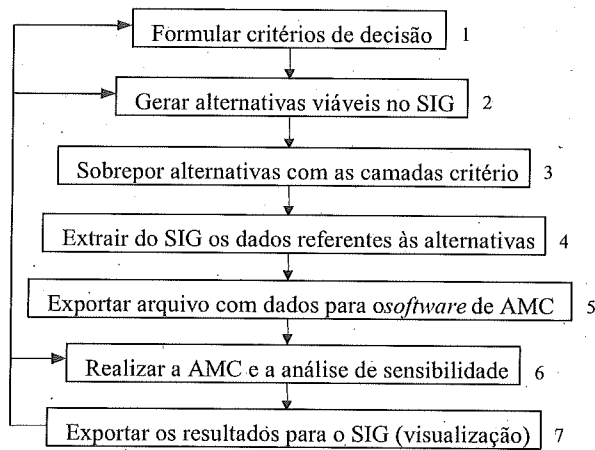


Figura 2: Modelo de integração entre SIG e métodos multicritério (Jankowski e Richard, 1994) [22].

As soluções alternativas são sobrepostas com as camadas de critérios. O resultado desta operação é uma camada contendo os atributos originais das alternativas e os atributos dos critérios.

As alternativas, representadas por seus atributos, são extraídas do SIG na forma de um arquivo ASCII e introduzidas em um módulo multicritério. Neste módulo, o decisor pode acrescentar uma medida de preferência relativa para cada critério na análise, e as alternativas podem ser ordenadas ou seleccionadas.

É realizada análise de sensibilidade dentro do módulo multicritério para determinação da vulnerabilidade da análise e modificações nas preferências do especialista.

Os resultados da avaliação, em forma ordenada, são exportados para o SIG e disponibilizados para visualização.

Neste modelo há ainda três circuitos de retroação. O primeiro circuito, que liga os passos 7 e 1, representa o caso no qual os critérios de decisão estão sujeitos a mudanças. Isto ocorre em problemas de decisão caracterizados por falta de consenso entre os decisores, e incertezas ligadas ao papel e importância de vários critérios de decisão na geração de alternativas. O segundo circuito, conectando os passos 7 e 2, representa o caso no qual os valores limiares impostos sobre o critério de decisão são modificados. E o terceiro circuito representa a situação na qual o decisor deseja repetir a avaliação de alternativas após a mudanças de prioridades dos critérios.

Esta estratégia de integração exige que elementos físicos cruciais, como critérios geofísicos e ambientais, não sejam negligenciados, tornando o decisor mais atento às condições físico-ambientais das regiões vizinhas.



## 4 Caso de Estudo

O objectivo deste caso de estudo é apresentar um exemplo de aplicação da integração entre SIG e métodos multicritério no apoio à decisão espacial. Deseja-se seleccionar o melhor município do Estado do Rio de Janeiro, Brasil, em relação à qualidade de vida urbana da população local. Para a escolha do melhor município foram seleccionadas algumas características das administrações públicas, que podem ser vistas como avaliadoras do desempenho de cada governo municipal, reunidas em cinco grupos de critérios, a saber, infra-estrutura, educação, segurança, saúde e trabalho. Estes grupos de critérios são vistos por Graeml e Erdmann (1998) [19] como indicadores de qualidade de vida urbana, podendo ser ainda utilizados como uma espécie de medida de performance das administrações locais.

Cada município é visto como uma alternativa de escolha, e o melhor município é visto como aquele que apresenta as características de qualidade de vida urbana mais próximas àquelas desejadas pelo decisor.

### 4.1 Contexto Regional

O Estado do Rio de Janeiro, Brasil, situa-se na Região Sudeste (onde estão concentrados cerca de 2/3 do PIB brasileiro), dotada de vias de escoamento e comunicação com os mercados do bloco económico do Mercosul (que, além do Brasil, tem como membros Argentina, Uruguai e Paraguai). Administrativamente, o Estado do Rio de Janeiro está dividido em 91 municípios, agrupados em oito Regiões de Governo. A Figura 3 mostra a localização geográfica do Estado. Sua população aprofundou a tendência de baixas taxas de crescimento na primeira metade da década passada, mostrando, em 1996, um crescimento a uma taxa média de apenas 0,92% ao ano, representando uma emigração de mais de 32 mil pessoas por ano. A taxa de mortalidade infantil apresenta trajectória de queda, registrando 29 óbitos de menores de 1 ano para cada grupo de 1.000 nascidos vivos, representando uma redução de mais de 25% em 10 anos. A taxa de alfabetização da população de 5 ou mais anos de idade teve uma sensível elevação de 1991 para 1996. Em 1991, 87% da população do Estado era alfabetizada e, em 1996, este percentual subiu para 92%. A taxa de escolarização da população de 7 a 14 anos, em 1996, era de 93,9% e da população de 4 a 6 anos, de 71%. Entre 1995 e 1997 o número de homicídios apresentou redução de aproximadamente 8,1%.

### 4.2 Estruturação do problema

#### 4.2.1 Definição dos Critérios

A definição de quais devem ser os critérios adoptados apresenta uma vertente teórica e uma vertente prática. Do ponto de vista teórico, uma família de critérios deve respeitar os axiomas de Bernard Roy (Roy e Bouyssou, 1993) [38], referentes à coerência, exaustão e não redundância. No entanto, é pouco provável que uma família de critérios satisfaça rigorosamente os três axiomas, já que a exaustão e não redundância são, muitas das vezes, conflituosos. Assim, além da teoria, outras considerações devem ser usadas tais como disponibilidade de dados, sua fiabilidade e seu custo. Deve-se levar ainda em conta a necessidade de não tornar o modelo árduo demais, com excessivos refinamentos que pouco contribuem para o resultado final. É sempre

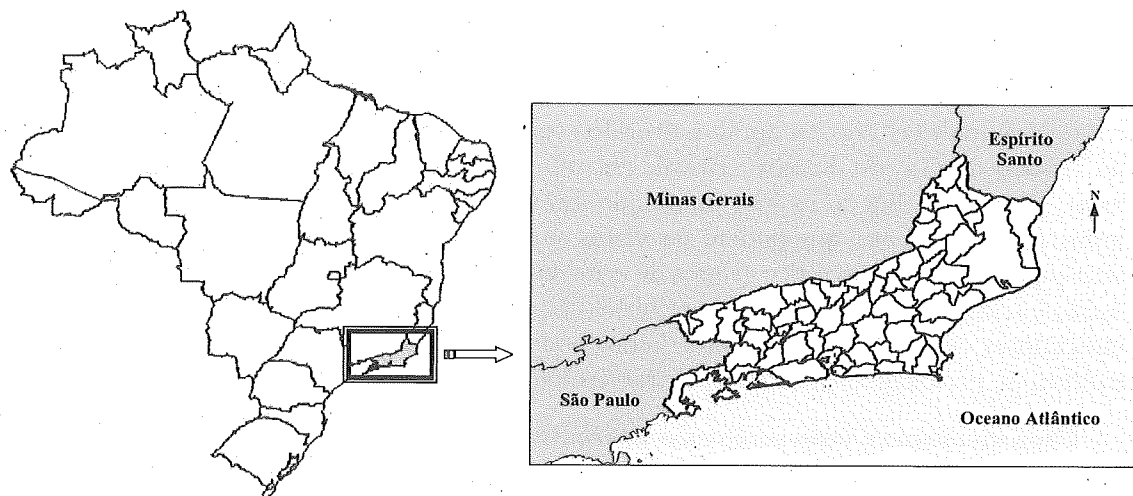


Figura 3: Localização geográfica do Estado do Rio de Janeiro, destacando-se seus municípios constituintes.

preciso considerar que nenhum modelo é a realidade, mas sim sua representação simplificada.

No estudo de qualidade de vida urbana de uma população, para que as decisões se baseiem em dados concretos, Graeml e Erdmann (1998) [19] destacam que deve-se pensar no que pode ser medido e como serão utilizados estes dados.

Para o presente caso de estudo, é importante conceituar o que se entende por qualidade de vida urbana. Em uma sociedade onde as necessidades básicas estejam perto do pleno atendimento, certamente factores como opções de lazer, clima, facilidade de deslocamento, factores arquitectónicos/urbanísticos são considerados para qualificação da qualidade de vida. Já para uma sociedade em que o pleno atendimento das necessidades básicas ainda esteja distante, factores como analfabetismo, mortalidade infantil e outros são de extrema importância. Certamente alguns factores são comuns, tais como segurança e vias de acesso. Os critérios adoptados foram escolhidos com base na existência e facilidade de obtenção dos dados para cada município do Estado do Rio de Janeiro, contemplando-se todas as grandes áreas indicadas por Graeml e Erdmann (1998) [19] como importantes para medir a qualidade de vida urbana, a saber, habitação/infra-estrutura, saúde, educação, trabalho e segurança. Neste sentido, o conjunto de critérios é exaustivo, não sendo, no entanto, exaustivo no sentido adoptado por Roy e Bouyssou (1993) [38]. Certamente, alguns aspectos são deixados de fora, mas sua inclusão é inoportuna seja por falta de relevância, por redundância, pela difícil obtenção de informações ou ainda por provocar grande aumento à já extensa lista de critérios adoptados.

Foram privilegiados aqueles factores mais apropriados à situação de pouco atendimento às necessidades básicas. Cada um destes critérios tem papel importante no processo de tomada de decisão, como por exemplo, medir o nível dos serviços públicos, apoiar processos de planeamento, gestão e avaliação de políticas, inferir a situação sócio-económica da população, etc.. A necessidade de investimentos em outras áreas pode ser demonstrada por estes grupos de critérios seleccionados: o baixo nível educacional pode acarretar problemas nas áreas de

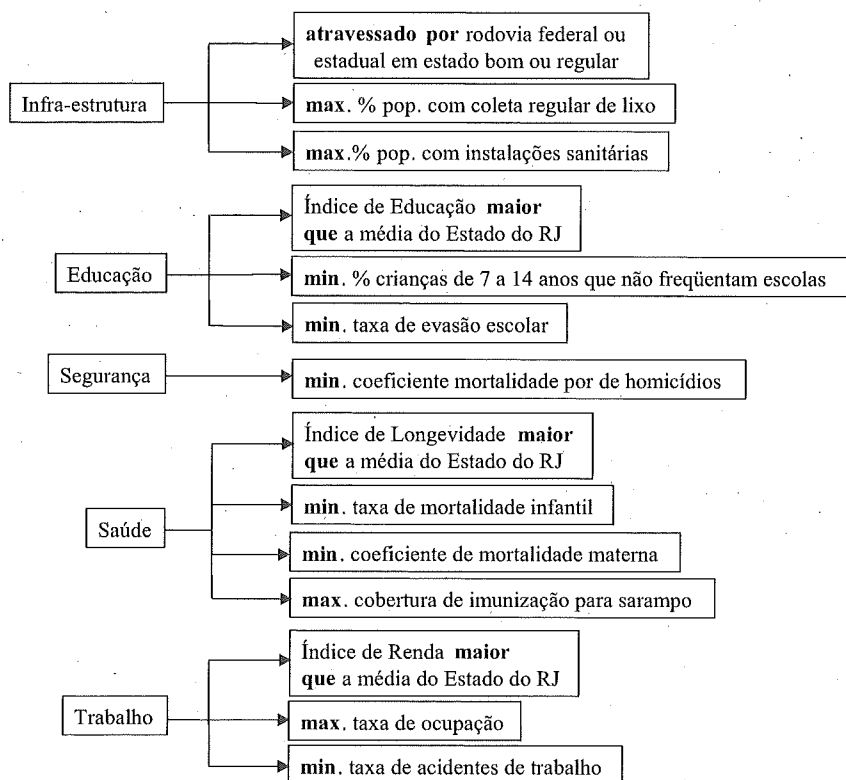


Figura 4: Critérios de decisão.

saúde, trabalho, segurança, e vice-versa.

A Figura 4 apresenta os critérios utilizados. Como pode ser visto, alguns critérios são utilizados como critérios de classificação, através de características que devem ser maximizadas ou minimizadas; outros critérios são de exclusão (Bana e Costa et al., 2000) [3]. Os critérios de exclusão servem para uma eliminação precoce de alternativas para as quais não é lícito admitir compensação do mau desempenho nestes critérios com algum outro.

Segundo Barba-Romero e Pomerol (1997) [6], os critérios de exclusão podem ser usados de forma disjuntiva (o atendimento de pelo menos um dos critérios é condição suficiente para qualificar a alternativa) ou conjuntiva (o não atendimento de um critério implica na eliminação da alternativa). Os mesmos autores destacam que, em várias ocasiões, existe um excessivo rigor do método conjuntivo, bem como uma excessiva permissividade do método disjuntivo. Tal facto justifica uma abordagem híbrida que considere como admissíveis as alternativas que atendam a um certo número dos critérios de exclusão, número este maior que 1 e menor que o total de critérios de exclusão.

Já foi verificado que os critérios são exaustivos, faltando a verificação de sua não redundância e de sua coerência. A coerência será garantida quando, ao formular o modelo multiobjectivo, forem escolhidas adequadamente as funções objectivo a maximizar e a minimizar.

Para a verificação de não redundância foi realizada uma análise estatística, utilizando os

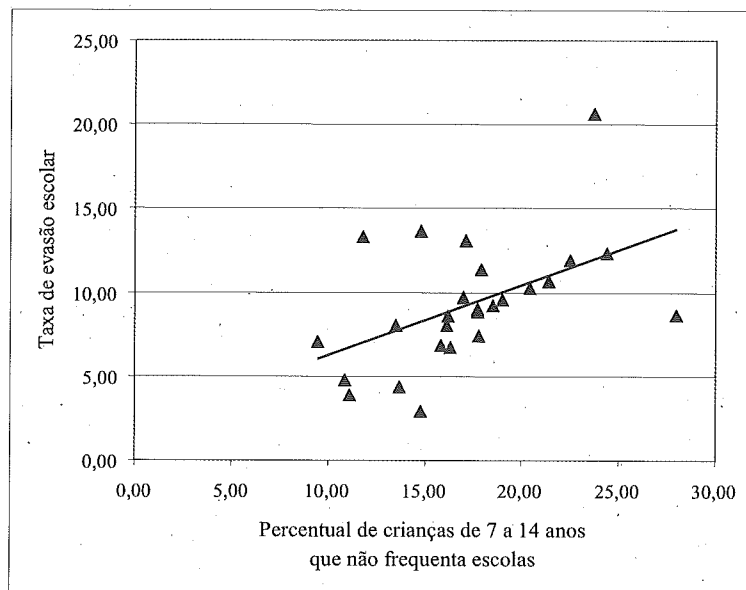


Figura 5: Diagrama de dispersão e recta de mínimos quadrados para os critérios taxa de evasão escolar e percentual de crianças de 7 a 14 anos que não frequenta escolas.

indicadores de correlação (mostra se existe variação simultânea de dois critérios) e o  $r^2$  (indica que percentual de variação de um critério é explicado pela variação de outro critério). A ocorrência de valores elevados (em módulo) simultaneamente para estes dois indicadores e para determinado par de critérios, significa que estes dois critérios estariam representando o mesmo fenómeno, e portanto, poderiam ser substituídos por um único deles. Estes indicadores foram calculados para todos os pares de critérios, sempre apresentado valores muito baixos. O par de critérios que apresentou maiores correlação e  $r^2$  foi taxa de evasão escolar e percentual de crianças de 7 a 14 anos que não frequenta escolas (0,50 e 0,25, respectivamente). A Figura 5 mostra o diagrama de dispersão e a recta de mínimos quadrados para os critérios supracitados. Nela pode-se observar um grande afastamento de alguns municípios em relação à recta de mínimos quadrados, o que visualmente confirma o resultado numérico, que o abandono de um dos critérios retiraria informação importante do modelo. Fica assim garantida a não redundância do conjunto de critérios.

Todos os dados utilizados neste trabalho são oriundos de fontes oficiais de informação: Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE); Ministério da Saúde e Secretaria Estadual de Saúde do Rio de Janeiro, através dos dados disponibilizados pelo Departamento de Informática do Sistema Único de Saúde (DATASUS); Ministério da Previdência e Assistência Social (MPAS), através de dados disponibilizados pelo Departamento de Informática da Previdência (DATAPREV) e Instituto Nacional de Seguridade Social (INSS/RJ); Ministério da Educação e Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais (INEP); Programa da Nações Unidas para o Desenvolvimento (PNUD, através do Atlas do Desenvolvimento Humano no Brasil). A seguir são definidos cada critério de classificação e exclusão utilizado. Em Gomes (1999) [16] encontram-se definição completa de cada um dos critérios, fontes e ano de referência.

**Colecta regular de lixo:** objectiva medir o nível de saneamento básico relativo à colecta de lixo. Os valores utilizados referem-se ao percentual da população urbana atendida domiciliarmente, directa ou indirectamente, por sistema regular de colecta de lixo, em determinado local e período.

**Instalações sanitárias:** mede a cobertura do serviço de esgotamento sanitário, através de rede colectora ou fossa séptica. Está representado pelo percentual da população que dispõe de escoadouro de seus dejectos através de ligação do domicílio à rede colectora de esgotamento sanitário ou fossa séptica, em determinado local e período.

**Malha viária:** permite a selecção de municípios que apresentem a estruturação do sistema rodoviário com possibilidades de acesso aos complexos industriais, aos centros de comércio, de serviços e de lazer. A inadequada infra-estrutura de transportes é responsável pelo aumento dos custos logísticos associados, dificultando o atendimento das necessidades da população e impedindo a instalação de novos empreendimentos nestas regiões.

**Crianças de 7 a 14 anos que não frequentam escolas:** objectiva avaliar as condições de vida na infância, especialmente no que se refere ao acesso à educação no nível fundamental.

**Evasão escolar:** tem por objectivo retractor o problema do ensino fundamental nos municípios, possibilitando o acompanhamento do sector educacional e apoiando o planeamento e a gestão da educação brasileira pelas esferas governamentais.

**Índice de Educação:** tenta retractor o acesso da população ao conhecimento (ADHB, 1998) [1]. É medido através da combinação da taxa de analfabetismo e da taxa combinada de matrícula nos três níveis de ensino (fundamental, médio e superior).

**Homicídios:** busca estimar o risco de uma pessoa morrer por homicídio, e tem a finalidade de apoiar processos de planeamento, gestão e avaliação de políticas de segurança.

**Mortalidade infantil:** estima o risco de um nascido vivo morrer durante o seu primeiro ano de vida, definido como o número de óbitos de menores de um ano de idade, expresso por mil nascidos vivos, em determinado local e período. De modo geral, altas taxas de mortalidade infantil reflectem baixos níveis de saúde, de desenvolvimento sócio-económico e de condições de vida.

**Mortalidade materna:** refere-se ao número de óbitos femininos por causas maternas, expresso por 100 mil nascidos vivos, em determinado local e período, reflectindo a qualidade da assistência à saúde da mulher.

**Cobertura de imunização:** expresso pela porcentagem de imunizados por tipo de vacina, segundo local de atendimento. Neste caso específico, trata-se da cobertura de imunização para o imuno sarampo, considerando a população alvo menores de 1 ano. A escolha do imuno sarampo deve-se ao facto de este poder representar a cobertura de imunização em rotina de uma doença infecto-contagiosa e imunoprevinível, monitorando-se o atendimento dos postos de saúde em relação à imunização.

**Índice de Longevidade:** reflecte as condições de saúde da população, e é representado pela esperança de vida ao nascer (número médio de anos que um recém-nascido esperaria viver se estivesse sujeito a um perfil de mortalidade – ADHB, 1998) [1].

**Ocupação:** representado pelo percentual da população ocupada em relação à população

economicamente activa (PEA), busca medir o nível de emprego da PEA. Entende-se por população ocupada como a parcela da população que no período de referência tem emprego durante todo ou parte deste período. A PEA é composta pelas pessoas de 10 a 65 anos de idade, classificadas como ocupadas ou desocupadas no período de referência.

**Acidentes de trabalho:** expresso pela taxa de acidentes de trabalho, que é representado pela relação entre o número de benefícios acidentários concedidos e a população residente, entre 10 e 65 anos.

**Índice de Renda:** é definido em função do poder de compra da população, baseado pela renda familiar *per capita* média do município, ajustado ao custo de vida local, através da metodologia conhecida como paridade do poder de compra (PPC), com o objectivo de descrever o nível e a distribuição de renda (ADHB, 1998) [1].

#### 4.2.2 Definição das alternativas

Além da definição dos critérios, a estruturação do problema envolve a identificação do conjunto de alternativas. Uma vez que se irá trabalhar com um método multiobjectivo (por razões que serão explicadas em 4.3 Implementação dos métodos multicritério – Escolha do método de avaliação multicritério), este conjunto deve ser contínuo e as alternativas são definidas implicitamente por um conjunto de restrições (Clímaco e Antunes, 2000) [12]. Entretanto, a construção natural do caso de estudo apresentado é com alternativas discretas, os municípios, representados por polígonos da base de dados gráfica em SIG (ver Figura 3). Para transformá-las em um conjunto contínuo, pode-se usar o artifício de com as características das alternativa discretas formular as restrições às quais o conjunto contínuo deve obedecer. Para tal, pode-se considerar o espaço de soluções como o conjunto de pontos no espaço  $\mathbb{R}^n$  (onde  $n$  é o número de critérios de selecção), que são combinação linear convexa das propriedades dos municípios reais. No entanto, nem todos os municípios são considerados alternativas válidas (de acordo com os critérios de exclusão). Assim, a combinação linear convexa será feita usando apenas as propriedades dos municípios pré-seleccionados, como exposto a seguir.

### 4.3 Implementação dos métodos multicritério

#### 4.3.1 Pré-selecção das alternativas: Problemática da afectação multiatributo

As restrições físicas e/ou qualitativas do problema servem como factores limitantes do número de alternativas. Um conjunto de alternativas viáveis é gerado, caracterizando a problemática da afectação (Bana e Costa, 1992, Dias et al., 1996) [2, 13], na qual cada município é afectado a uma de duas categorias, a saber, aceitáveis para posterior análise (viáveis) ou rejeitados a priori. Esta etapa é realizada em ambiente SIG.

A primeira condição que um município deve atender para ser seleccionado é ser atravessado por rodovias federais ou estaduais pavimentadas, que apresentam estado de conservação bom ou regular. Esta restrição é facilmente analisada em ambiente SIG, pois representa uma restrição física, tipicamente uma operação de topologia. O que se deseja é após a sobreposição de duas camadas temáticas (*overlay*), “municípios” e “malha viária”, seleccionar os objectos da camada “municípios” que são interceptados por objectos da camada “malha viária”. Além

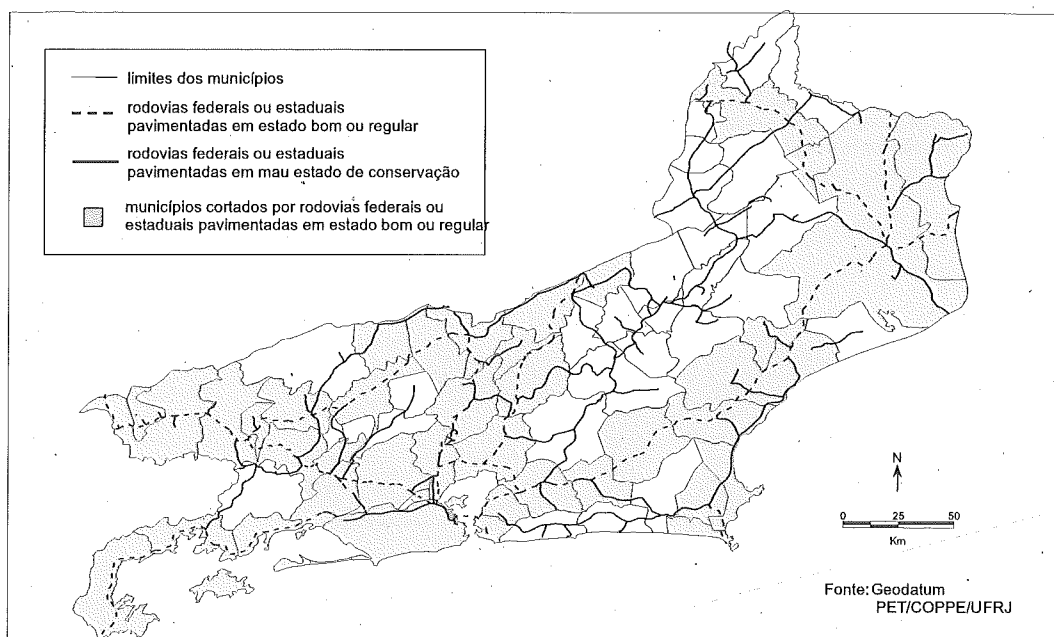


Figura 6: Mapa temático do aspecto físico das rodovias estaduais e federais e dos municípios seleccionados por este critério.

disso, os atributos descritivos desta última camada devem atender às seguintes condições: “tipo\_de\_rodovia” = federal ou estadual pavimentada e de “aspecto\_físico” = bom ou regular. Esta primeira restrição reduz o número de alternativas de 69 para 40, sendo possível visualizar este procedimento na Figura 6 (para o presente trabalho foi utilizada uma base SIG que representa a configuração do Estado em 1991, quando possuía 69 municípios; actualmente o Estado do Rio de Janeiro possui 91 municípios).

Além da restrição das rodovias, os municípios devem atender à condição de os valores dos Índices de Educação, Longevidade e Renda (indicadores constituintes do Índice de Desenvolvimento Humano Municipal, IDH-M, obtidos do Atlas de Desenvolvimento Humano no Brasil, do PNUD, para o ano de 1991), serem maiores que os valores médios do Estado. Esta restrição apresenta uma condição característica de álgebra booleana, ou seja, atender ao 1º e ao 2º e ao 3º critérios, que é de maneira semelhante ao passo anterior, facilmente visualizada em SIG. Esta condição assim escrita é extremamente restritiva, e a busca (*query*) realizada resultou em um conjunto com um reduzido número de alternativas. Utilizando a abordagem híbrida já citada (reduzindo o rigor do método conjuntivo e não permitindo a excessiva permissividade do método disjuntivo), esta restrição foi relaxada: o município deve atender a pelo menos duas destas condições simultaneamente.

A busca realizada apresenta a seguinte estrutura: seleccionar os objectos da camada “municípios” que atendam à condição expressa por  $[(\text{Longevidade} \geq 0,641 \text{ AND } \text{Educação} \geq 0,652) \text{ OR } (\text{Renda} \geq 0,705 \text{ AND } \text{Educação} \geq 0,652) \text{ OR } (\text{Longevidade} \geq 0,641 \text{ AND } \text{Renda} \geq 0,705)]$ . Esta busca resultou na selecção de 34 dos 69 municípios, que pode ser visualizada na Figura 7.

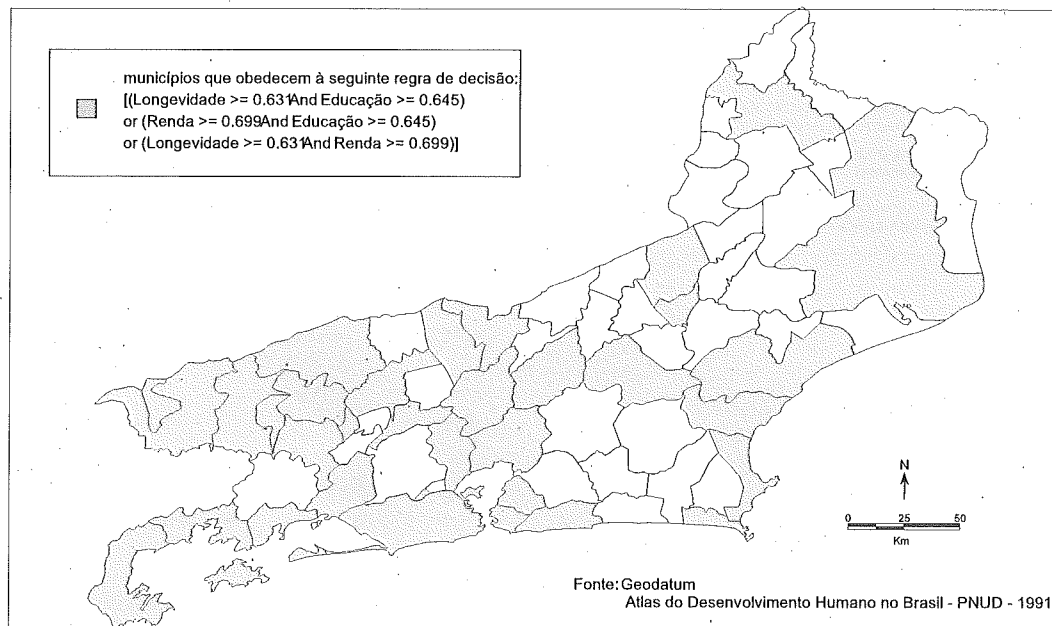


Figura 7: Resultado da busca por municípios que atendam à condição imposta pelos Índices de Longevidade, Educação e Renda do PNUD.

A etapa seguinte é sobrepor estas duas camadas de informação geradas, originando uma terceira camada que contém os municípios que atendem a ambas as restrições: ser cortado por rodovias federal ou estadual pavimentada em estado bom ou regular, e apresentar pelo menos dois dos indicadores constituintes IDH-M maiores que os índices médios do Estado. O resultado desta operação está na Figura 8 com um conjunto de 26 alternativas pré-seleccionadas que serão, então, avaliadas por método multicritério.

#### 4.3.2 Escolha do método de avaliação multicritério

A Análise Multicritério é dividida em problemas multiatributo e multiobjectivo. Os primeiros lidam com alternativas discretas e os segundos com um espaço contínuo de alternativas. Entre os problemas multiatributo é comum a classificação dos métodos usados em Escola Americana e Escola Francesa. A Escola Francesa é baseada em relações de prévalência e nela se destacam os métodos das famílias ELECTRE (Roy, 1968, 1978, Roy e Shalka, 1984) [36, 37, 39] e PROMETHEE (Brans et al., 1984) [8]. Já a Escola Americana reduz os vários critérios a um critério síntese, na grande maioria das vezes através de uma soma ponderada. Devido a sua aparente simplicidade matemática goza de grande popularidade. Nela se destacam os métodos AHP (Saaty, 1980) [40], TODIM (Gomes et al., 1998) [18], MACBETH (Bana e Costa e Vansnick, 1995, 1997) [4, 5] e UTA (Jacquet-Legreze e Siskos, 1982) [21]. Apesar da suposta simplicidade, estes métodos encontram alguma relutância por parte dos decisores, principalmente pela necessidade de atribuição de pesos. Atribuir uma escala de pesos é uma tarefa para a qual muitos decisores não estão técnica nem psicologicamente preparados. Na parte técnica podem não conhecer o que significa o peso atribuído (o que é contornado pelo MACBETH, por exemplo, com comparações de alternativas) e na parte psicológica podem enfrentar até



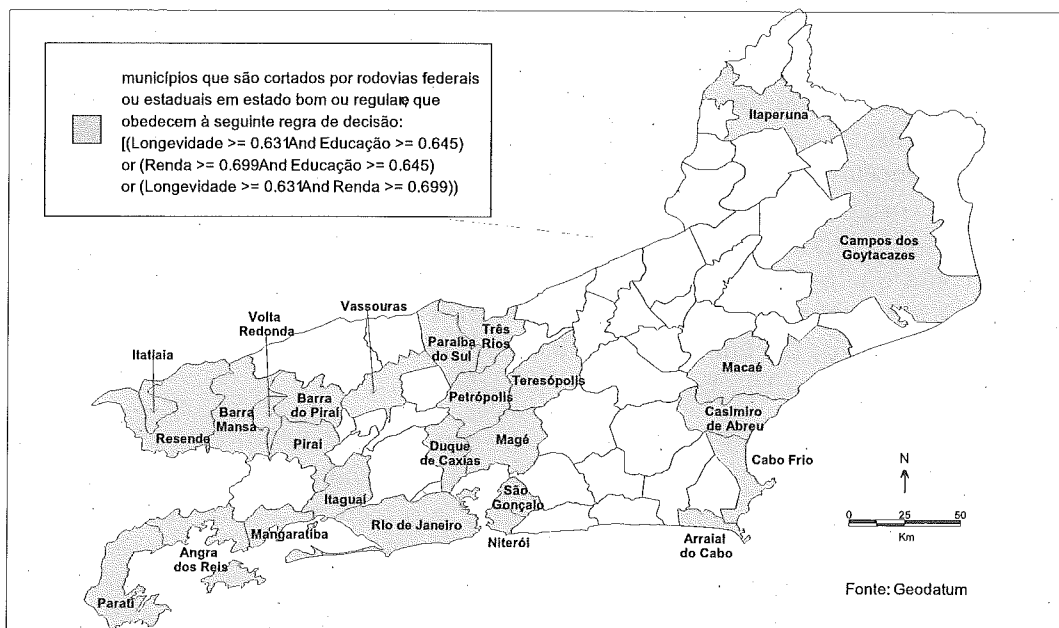


Figura 8: Indicação dos 26 municípios pré-seleccionados para a optimização multiobjectivo.

mesmo resistências éticas. Um exemplo seria a atribuição de pesos aos critérios “custo de construção” e “probabilidade de acidentes fatais” no projecto de uma estrada. Atribuir esses pesos significaria especificar o preço de uma vida humana (Dias et al., 1996) [13]. Por outro lado, existe o problema oposto: uma vez dados os pesos, o decisor sente-se aliado do processo de decisão, sendo-lhe apresentado um resultado final do qual julga que não participou. Portanto, é necessária uma grande interactividade, sem no entanto exigir do decisor tarefas que ele não possa cumprir.

Já os problemas multiobjectivo são, via de regra, bem mais árduos do ponto de vista matemático, ainda que exijam a presença constante do decisor. Devido à complexidade matemática é comum o desenvolvimento de métodos que restrinjam o conjunto de alternativas, tornando-o discreto, o que significa transformar o problema multiobjectivo em multiatributo (Tavares et al., 1996) [43]. Se com essa transformação ganha-se simplicidade matemática, perde-se interactividade, e obriga-se o decisor a explicitar suas preferências (que ele mesmo pode não saber quais são). Se a preocupação do analista não for a complexidade matemática, mas a impossibilidade de o decisor fornecer informação coerente, deve-se procurar a interactividade dos problemas multiobjectivo, principalmente se aliados a um *software* de grande apelo visual, que permita ao decisor colocar implicitamente suas preferências e ir aprendendo ao longo do processo.

Vale ainda registrar que o enfoque multiobjectivo permite uma visualização global do espaço das soluções viáveis, assim como da fronteira eficiente, o que facilita a compreensão do problema.

Se o problema inicial for estruturalmente multiatributo, é necessário transformar o espaço de alternativas em um conjunto contínuo que o contenha, para que possa ser tratado como pro-

blema multiobjectivo. Várias formas podem ser imaginadas para fazer tal operação, preferindo-se neste artigo, por sua simplicidade, considerar como espaço de alternativas o conjunto formado por vectores cujas coordenadas sejam combinação linear convexa das coordenadas das alternativas originais. Assim, o problema é resolvido como se fosse multiobjectivo, chegando a uma solução pertencente ao novo espaço gerado mas, com grande probabilidade, não pertencente ao conjunto original de alternativas. É necessário então, uma nova fase que consiste em escolher, dentre as alternativas reais, a que mais se assemelha à alternativa fictícia encontrada. Levando em conta que o espaço gerado é um espaço métrico, basta achar a alternativa real cuja distância à alternativa fictícia é menor. A métrica usada pode ser qualquer uma, sendo as mais comuns a métrica Euclidiana, de carácter compensatório, e a métrica de Tchebycheff, não compensatória (Lima, 1970, Edgar, 1990) [29, 15].

Actualmente há vários métodos multiobjectivo, entre eles podendo-se citar o método STEM (Benayoun et al., 1971) [7], o procedimento de Zionts e Wallenius (1976) [45], o método TRIMAP (Clímaco e Antunes, 1987, 1989) [10, 11], e o método *Pareto Race* (Korhonen e Laakso, 1986, Korhonen e Wallenius, 1988) [26, 27]. O método multiobjectivo escolhido foi o *Pareto Race*, com implementação computacional através do *software* VIG (Korhonen, 1987a) [24]. A escolha deste método foi devido a sua interactividade, boa interface gráfica, permissão do uso de elevado número de funções objectivo, disponibilidade e possibilidade de utilização nos sistemas operativos utilizados pelos autores.

Neste método, pela possibilidade de movimentação em qualquer direcção na fronteira eficiente (de modo dinâmico, sem que sejam feitas hipóteses restritivas sobre seu “desejo”) o decisor tem a impressão de que o sistema está totalmente sob seu controle, sendo capaz de buscar livremente soluções não dominadas. A informação fundamental requerida ao decisor é a especificação das funções objectivo a melhorar, ou seja, qual critério o decisor considera que mais está afastado do nível satisfatório, mudando-se a direcção da pesquisa. A direcção de referência é construída a partir da especificação dos níveis de aspiração para os valores das funções objectivo. Sendo posteriormente projectada sobre o conjunto das soluções eficientes, esta direcção gera uma trajectória sobre a fronteira eficiente que é apresentada ao decisor.

#### 4.3.3 Formulação do problema multiobjectivo

O problema de Programação Linear Multiobjectivo (PLMO) a ser formulado apresenta 10 funções objectivo:

- Maximizar % pop. com instalações sanitárias (PIS);
- Minimizar taxa de homicídios (TXH);
- Minimizar % pop. 7 a 14 anos que não frequentam escolas (PNE);
- Minimizar taxa de mortalidade infantil (TMI);
- Maximizar % pop. com colecta regular de lixo (PCL);
- Minimizar taxa de evasão escolar (TEE);
- Maximizar cobertura de imunização para sarampo (CIS);
- Minimizar coeficiente de mortalidade materna (CMM);
- Maximizar taxa de ocupação (TXO);
- Minimizar taxa de acidentes de trabalho (TAT).

A formulação do problema tomou como base o modelo de Halme et al. (1998) [20], de incorporação da informação de preferência do decisor ao modelo. O decisor é introduzido na busca pela melhor combinação de alternativas eficientes (entendida como melhor combinação, ou a mais preferida, para o decisor).

O modelo geral de PLMO para este caso é visto na Formulação I:  $X_i, Y_i, \dots$ , representam o valor do critério  $X, Y, \dots$ , para a alternativa  $i$ ;  $\lambda_i$  são as variáveis de decisão, que representam a preferência do decisor pela alternativa  $i, i = 1, \dots, n$ .

$$\begin{aligned}
 & \max \sum_{i=1}^n X_i \lambda_i \\
 & \max \sum_{i=1}^n Y_i \lambda_i \\
 & \dots\dots \\
 & \text{s.a.} \\
 & \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \quad i = 1, \dots, n \\
 & \lambda \geq 0
 \end{aligned} \tag{I}$$

Na literatura são encontrados alguns argumentos contra a utilização de pesos de importância dos critérios para deduzir e representar a informação de preferências do decisor (Steuer, 1986, Korhonen e Wallenius, 1989, Wierzbicki, 1986) [41, 28, 44]. A proposta de Halme et al. (1998) [20] é introduzir as preferências do decisor na análise de eficiência, explicitando a localização deste vector na fronteira eficiente. Os mesmos autores destacam que ao se explorar as vizinhanças da solução mais preferida (*Most Preferred Solution* – MPS) de maneira sistemática, não se conhece explicitamente a função de valor do decisor, mas sua forma passa a ser conhecida quando do término da busca pela MPS. Os métodos interactivos de PLMO são os mais adequados na busca da MPS, visto que esta busca é um procedimento interactivo e o decisor pode “aprender” ao longo do processo. Para este estudo de caso o modelo de PLMO a ser otimizado é o apresentado na Formulação II.

$$\begin{aligned}
 & \max \sum_{i=1}^{26} PIS_i \lambda_i \\
 & \min \sum_{i=1}^{26} TXH_i \lambda_i \\
 & \min \sum_{i=1}^{26} PNE_i \lambda_i \\
 & \min \sum_{i=1}^{26} CH_i \lambda_i \\
 & \min \sum_{i=1}^{26} TMI_i \lambda_i \\
 & \min \sum_{i=1}^{26} TEE_i \lambda_i \\
 & \max \sum_{i=1}^{26} CIS_i \lambda_i \\
 & \min \sum_{i=1}^{26} CMM_i \lambda_i \\
 & \max \sum_{i=1}^{26} TXO_i \lambda_i \\
 & \min \sum_{i=1}^{26} TAT_i \lambda_i
 \end{aligned}
 \begin{aligned}
 & \text{s.a.} \\
 & \sum_{i=1}^{26} \lambda_i = 1 \\
 & \lambda \geq 0 \quad i = 1, \dots, n
 \end{aligned}$$

onde

- PIS = % pop. com instalações sanitárias;
- TXH = taxa de homicídios;
- PNE = % pop. 7 a 14 anos que não frequenta escolas;
- TMI = taxa de mortalidade infantil;
- PCL = % pop. com coleta regular de lixo;
- TEE = taxa de evasão escolar;
- CIS = cobertura de imunização para sarampo;
- CMM = coeficiente de mortalidade materna;
- TXO = taxa de ocupação;
- TAT = taxa de acidentes de trabalho;

$i = 1, \dots, n$  são as alternativas de escolha (municípios do Estado);  
 $\lambda$  é o vector que representa as preferências do decisor.

(II)

Tabela 1: Resultado inicial da optimização multiobjectivo, sem a realização do Pareto Race.

critérios	metas iniciais <sup>(1)</sup>	Soluções obtidas	Variáveis de decisão diferentes de zero <sup>(2)</sup>	
% com_inst_sanit	85	97,9956		
tx_hom	25	28,6478	L4	0,1949
% _nao_escola	15	14,8884	L24	0,0311
tx_mort_inf	20	22,9182	L27	0,0000
% _com_colecta_lixo	80	75,5992	L44	0,1580
tx_evasao_esc	50	5,7296	L50	0,2865
cob_sarampo	100	97,4708	L64	0,1230
cf_mort_mat	100	114,591	L66	0,2064
tx_ocup	65	55,5158		
tx_ac_trab	50	5,7296		

(1) as metas iniciais servem apenas como indicadores da região de busca para o Pareto Race.

(2) L1, L2, etc. referem-se aos valores das variáveis de decisão  $\lambda_i$ ; o número é referente à “posição” alfabética do município na base de dados original (ou seja, anterior à pré-selecção).

#### 4.3.4 Solução do problema de PLMO

Para a busca da MPS foi escolhido o programa VIG, que implementa o Pareto Race, procedimento interactivo para PLMO, que permite uma busca livre de qualquer parte da fronteira eficiente, controlando a velocidade e a direcção do movimento, de forma dinâmica e visual (Korhonen, 1987a, 1987b) [24, 25]. Os valores das funções objectivo são apresentados em forma numérica e de gráficos de barras na tela do computador. O Pareto Race tem suas fundamentações teóricas na abordagem da direcção de referência, desenvolvida por Korhonen e Laakso (1986) [26], que permite que qualquer direcção especificada pelo decisor possa ser projectada sobre a fronteira eficiente. Ao pressionar no teclado o número correspondente aos objectivos, o decisor expressa que objectivo deseja melhorar e o quanto é desejado, ditando implicitamente a direcção de referência, ou seja, suas preferências.

A solução deste modelo de PLMO fornece como resultado uma alternativa considerada a melhor pelo decisor, aquela que apresenta os melhores valores para as funções objectivo. Esta melhor alternativa é a combinação linear convexa das demais. O valor de cada  $\lambda_i$  pode ser interpretado como o quanto cada alternativa  $i$  contribui para a “construção” da melhor alternativa, podendo ocorrer o caso em que o resultado da optimização seja  $\lambda_i = 1$ , e todos os outros  $\lambda_{j,j \neq i} = 0$ , e assim o melhor município é representado exactamente pela alternativa  $i$ .

#### 4.3.5 Resultados

As Tabelas 1 e 2 trazem alguns resultados. Na Tabela 1 encontram-se os resultados obtidos pelo software VIG, antes da realização do Pareto Race, ou seja, uma solução eficiente encontrada, sem a intervenção do decisor.

A Tabela 2 mostra alguns resultados pós Pareto Race, ou seja, com a interferência do

decisor na busca da melhor decisão, que é orientada na direcção de sua preferência. Estas corridas foram obtidas, em sua maioria, com o intuito de melhorar os valores dos objectivos chamados “limitantes”. As soluções obtidas quando da realização do Pareto Race são soluções eficientes, viáveis, resultados de uma optimização. A escolha por uma das soluções reflecte a preferência do decisor por uma determinada “configuração” de valores, em detrimento de outra.

Os municípios que possuem  $\lambda$  diferente de zero para todas as soluções encontradas são: L1 *Angra dos Reis*, L3 *Arraial do Cabo*, L4 *Barra do Piraí*, L24 *Itaperuna*, L25 *Itatiaia*, L27 *Macaé*, L29 *Mangaratiba*, L43 *Petrópolis*, L44 *Piraí*, L50 *Rio de Janeiro*, L64 *Teresópolis*, L66 *Três Rios*, L68 *Vassouras* e L69 *Volta Redonda*.

A pura escolha de uma das soluções não dita a solução final do problema, visto que a escolha do melhor município do Estado do Rio de Janeiro, em relação à qualidade de vida urbana, não foi todavia realizada.

A solução escolhida para dar prosseguimento ao estudo foi a solução # III # (Tabela 2). A partir desta solução pode-se, por exemplo, interpretar que o município 64 contribui com 38,23% para a “construção” do melhor do município. É necessária uma nova fase que consiste em escolher, dentre as alternativas reais, a que mais se assemelha à alternativa fictícia encontrada. Para tal, procura-se pela alternativa real cuja distância à alternativa fictícia seja a menor. A melhor alternativa apresenta o melhor nível dos atributos em cada critério, e neste caso é o vector formado pelos elementos da coluna “soluções obtidas” na Tabela 2, # III #. No improvável caso de a melhor alternativa ser uma alternativa real, o menor valor da distância será zero, em qualquer métrica utilizada.

Para representar o desvio de cada alternativa real à alternativa fictícia, foi eleita a métrica Euclidiana, cuja expressão matemática é a da Equação III.

$$L_{2k} = \left[ \sum_{k=1}^n |a_{ik} - a_k^*|^2 \right]^{1/2} \quad (\text{III})$$

onde  $a_{ik}$  é o valor normalizado da alternativa  $i$  no objectivo  $k$  e  $a_k^*$  é o valor ideal normalizado no objectivo  $k$ .

A equação de normalização utilizada foi a Equação VII.12.

$$a_{ik} = \frac{x_{ik} - \min x_{ik}}{\max x_{ik} - \min x_{ik}} \quad (\text{IV})$$

Procedendo-se ao cálculo dos desvios segundo a métrica Euclidiana, o resultado encontrado é o da Tabela 3. Este resultado foi então levado para o ambiente SIG para visualização, como mostra a Figura 9. De acordo com esta classificação o melhor município (real) do Estado do Rio de Janeiro, em relação à qualidade de vida urbana, é *Petrópolis*.

#### 4.4 Análise dos resultados

Durante o Pareto Race notou-se que certos critérios, vistos como funções objectivo, limitavam a análise. Estes critérios “limitantes” foram *taxa de homicídios*, *coeficiente de mortalidade materna* e *cobertura de imunização para sarampo*. Ao se tentar minimizar os dois primeiros e maximizar o terceiro (buscando-se melhorar o valor destes objectivos), outros critérios eram

Tabela 2: Alguns resultados após o Pareto Race.

# I #				
critérios	metas iniciais	soluções obtidas	VD <sup>(1)</sup> diferentes de zero	
% com_inst_sanit	85	97,9559	L1	0.2137
tx_hom	25	33,4201	L3	0.0000
% _nao_escola	15	14,5390	L24	0.0000
tx_mort_inf	20	23,0988	L25	0.0000
% _com_colecta_lixo	80	81,1036	L27	0.0000
tx_evasao_esc	50	6,7136	L44	0.0000
cob_sarampo	100	119,4069	L50	0.3871
cf_mort_mat	100	80,5677	L64	0.0549
tx_ocup	65	61,6684	L66	0.3443
tx_ac_trab	50	6,7136	L68	0.0000
# II #				
critérios	metas iniciais	soluções obtidas	VD diferentes de zero	
% com_inst_sanit	85	96,9804		
tx_hom	25	40,0747	L1	0.5264
% _nao_escola	15	14,9869	L3	0.0000
tx_mort_inf	20	22,8190	L24	0.0000
% _com_colecta_lixo	80	84,9479	L25	0.0000
tx_evasao_esc	50	8,0284	L27	0.0000
cob_sarampo	100	135,0450	L50	0.4082
cf_mort_mat	100	67,6736	L64	0.0000
tx_ocup	65	58,1019	L66	0.0654
tx_ac_trab	50	4,7309		
# III #				
critérios	metas iniciais	soluções obtidas	VD diferentes de zero	
% com_inst_sanit	85	98,2774	L1	0.0178
tx_hom	25	30,4195	L3	0.0000
% _nao_escola	15	14,9469	L24	0.0000
tx_mort_inf	20	23,9808	L25	0.0000
% _com_colecta_lixo	80	79,0655	L27	0.0000
tx_evasao_esc	50	6,1134	L43	0.0000
cob_sarampo	100	110,4016	L44	0.0000
cf_mort_mat	100	51,6402	L50	0.3521
tx_ocup	65	63,3737	L64	0.3823
tx_ac_trab	50	6,1134	L66	0.2478
			L68	0.0000

(1) VD = Variáveis de Decisão

Tabela 3: Municípios ordenados pelo grau de proximidade à alternativa fictícia.

Município	Código	Dist. Euclidiana
Petrópolis	L43	0,3532
Teresópolis	L64	0,3758
Três Rios	L66	0,4582
Barra Mansa	L5	0,5635
Macaé	L27	0,6170
Rio de Janeiro	L50	0,6375
Resende	L46	0,6516
Volta Redonda	L69	0,6538
Niterói	L36	0,6768
Angra dos Reis	L1	0,7268
Barra do Piraí	L4	0,7387
Paraíba do Sul	L40	0,7565
Cabo Frio	L8	0,7664
Vassouras	L68	0,8776
Itaperuna	L24	0,8819
Casimiro de Abreu	L14	0,8989
Campos dos Goytacazes	L11	0,9882
Itaguaí	L21	1,0342
São Gonçalo	L54	1,0545
Duque de Caxias	L18	1,0738
Mangaratiba	L29	1,0997
Piraí	L44	1,1076
Itatiaia	L25	1,1431
Parati	L41	1,1807
Arraial do Cabo	L3	1,2511
Magé	L28	1,3509

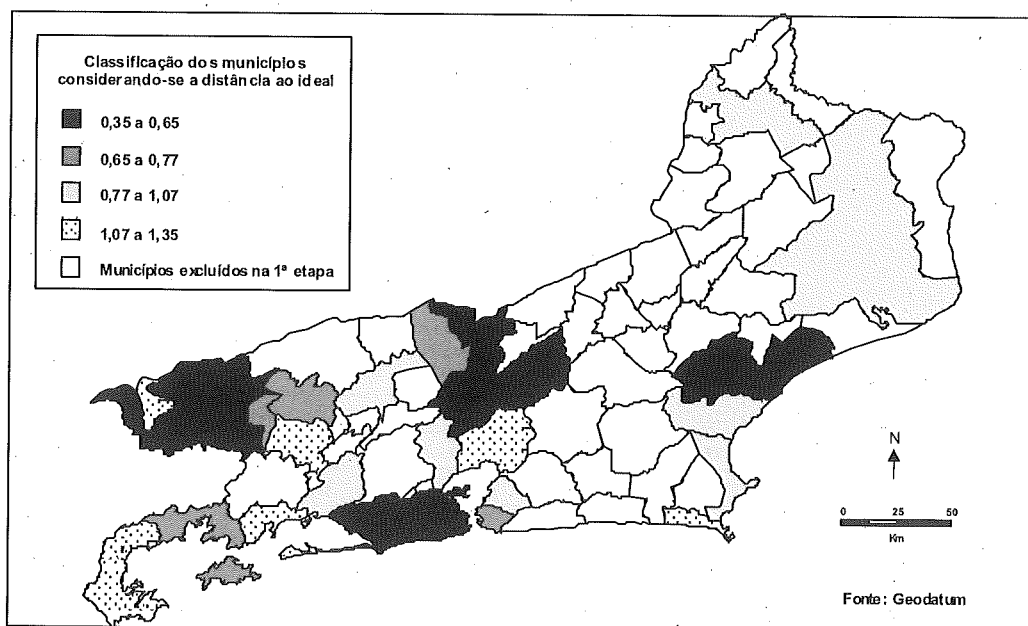


Figura 9: Classificação final dos municípios em relação à alternativa fictícia em qualidade de vida urbana (os valores na legenda referem-se às distâncias à alternativa fictícia).

fortemente influenciados pela escolha desta direcção, se deslocando em direcções opostas às desejadas. Um critério que se mostrou pouco influenciado por qualquer direcção adoptada foi a *taxa de acidentes de trabalho*.

O resultado # III # da Tabela 2 não foi o único a ser analisado; outros 6 casos (resultados) foram analisados. Em um destes foi notado que os seis primeiros municípios listados permanecem na mesma ordem, ocorrendo algumas mudanças na hierarquia a partir da 7ª alternativa. Três outros casos (incluindo-se o caso sem Pareto Race) apresentaram algumas diferenças na hierarquia das alternativas. Entretanto, as 4 primeiras alternativas foram iguais nestes três casos, destacando-se a alternativa *Petrópolis* como a alternativa em 1º lugar na hierarquia.

Pode-se verificar que em um quinto caso, os critérios *taxa de homicídios* e *cobertura de imunização por sarampo* foram os critérios que mais se diferenciam da alternativa fictícia (o primeiro negativamente, e o segundo positivamente). Esta diferença pode ser a responsável pela alteração na hierarquia. No sexto caso analisado, os critérios *mortalidade por homicídios* e *taxa de mortalidade infantil* apresentaram, respectivamente, valores 44% e 34% superiores aos considerados preferidos pelo decisor, no sentido de aumento dos valores que deveriam ser minimizados. Isto pode ter contribuído significativamente para a alteração na ordenação, favorecendo alternativas que apresentam valores altos para estes critérios.

Em relação aos resultados, pode-se notar que as alternativas que apresentam  $\lambda_i$  diferente de zero são, na maioria dos resultados, as mesmas. A Tabela 4 mostra a frequência com que cada município aparece nos resultados (número de vezes que a alternativa  $i$  apresenta  $\lambda_i$  diferente de zero nas corridas realizadas).

O resultado que foi considerado a melhor solução para o decisor (Tabela.3), mostra o mu-



Tabela 4: Frequência de cada alternativa nos resultados.

Município	Código	Frequência (%)
Angra dos Reis	L1	80,0
Arraial do Cabo	L3	45,0
Barra do Piraí	L4	40,0
Itaperuna	L24	50,0
Itatiaia	L25	65,0
Macaé	L27	77,5
Mangaratiba	L29	35,0
Petrópolis	L43	37,5
Piraí	L44	42,5
Rio de Janeiro	L50	100,0
Teresópolis	L64	60,0
Três Rios	L66	100,0
Vassouras	L68	42,5
Volta Redonda	L69	12,5

nicipio Petrópolis em 1º lugar na hierarquia, seguido pelo município Teresópolis. O município de Niterói se encontra em 9º lugar nesta hierarquia. Este município foi considerado pelo PNUD (fazendo uso da classificação do IDH-M), como a 4ª cidade brasileira em qualidade de vida. Esta classificação utiliza somente os Índices de Longevidade, Educação e Renda na construção do IDH-M. A hierarquia construída neste caso de estudo, utiliza critérios que vão além daqueles utilizados na construção do IDH-M (como *taxa de homicídios*, *taxa de ocupação*, por exemplo), critérios que podem ser considerados responsáveis por esta não coincidência de hierarquias entre as duas abordagens. Vale ainda referir que uma importante distorção pode ter ocorrido: Niterói tem um hospital universitário com um sector de emergência de grande porte, que atende também a crimes e acidentes ocorridos em municípios vizinhos, em especial o populoso São Gonçalo. Com isso, casos de violência ocorridos fora de Niterói acabam por ser registados neste município, podendo gerar índices de violência artificialmente altos.

Em relação ao cálculo dos desvios à melhor solução utilizando a distância Euclidiana, deve-se destacar o carácter compensatório desta metodologia. Foi considerado o valor em todos os critérios para cada alternativa, estabelecendo a distância à melhor alternativa, unicamente calculando distâncias entre coordenadas, representadas por valores de cada alternativa. Assim, o baixo desempenho de uma alternativa em um critério é compensado por um alto desempenho da mesma alternativa em outro critério. Para efeito de comparação foi igualmente utilizada a métrica de Tchebycheff. Os resultados mostraram os três primeiros municípios sendo os mesmos, ainda que com uma inversão de ordem dos dois primeiros.

## 5 Conclusões

Na solução de problemas espaciais complexos, decisões tomadas dentro do contexto espacial impedem que os decisores percam a perspectiva do conjunto de critérios e se concentrem em

um critério particular (Gomes e Lins, 1999) [17]. A análise dos resultados em um contexto espacial aumenta a qualidade da decisão.

Pode-se afirmar que em um sistema integrado SIG-Multicritério (Gomes, 1999) [16]:

- os SIG ajudam a clarear o processo de decisão, fornecendo estrutura a um processo decisório não estruturado;
- os SIG possibilitam a consideração de uma gama maior de alternativas, a eliminação daquelas alternativas que se mostram não viáveis *a priori*, e a oportunidade de incluir novas questões;
- há possibilidade de discussão e mudança nos critérios de decisão;
- há possibilidade de explorar critérios e objectivos conflituosos, além de incorporação de métodos para a resolução destes conflitos espaciais.

Ainda que o sistema integrado SIG-Multicritério seja um avanço na análise de decisão espacial, há uma necessidade clara de pesquisas contínuas nesta área. Tópicos para novas pesquisas incluem o desenvolvimento de novos métodos de geração de alternativas nos SIG (o desenvolvimento de tais métodos levaria ao aumento da utilidade do sistema), e de pesquisas contínuas no que se refere ao chamado acoplamento forte (Jankowski, 1995) [23] destas duas ferramentas. A integração de técnicas multicritério, dentro da estratégia de acoplamento forte estenderia a utilidade do SIG como suporte à decisão espacial. O sistema gerado desta perfeita integração SIG-Multicritério pode ser inserido no contexto dos Sistemas de Apoio à Decisão Espacial (SADE), explicitamente projectados para suprir o usuário de um ambiente de tomada de decisão que permita que a análise da informação geográfica seja conduzida de maneira flexível, possibilitando a análise dos conflitos em um contexto espacial.

A primeira etapa da integração SIG-Multicritério, o estudo preliminar das alternativas, reduzindo o conjunto de alternativas viáveis, é uma etapa inicial importante, que possui reflexos nas etapas seguintes, principalmente na redução de esforço computacional. Além disso, alguns pacotes de técnicas multicritério existentes possuem restrições quanto ao número de critérios e alternativas que podem ser empregados. Quando da existência de restrições físicas e/ou qualitativas, que podem ser implementadas em SIG, a integração se mostra bastante eficaz.

O estudo de caso apresentado e o problema proposto neste artigo não se enquadra nos modelos tradicionais de programação linear, como por exemplo, o modelo de alocação de recursos. No estudo é desejada a selecção do município de melhor qualidade de vida urbana. Para tal, foram utilizados critérios que não apresentam restrições claras. Se o critério "quantidade de vagas em escolas" fosse considerado como um critério importante para representar a qualidade da educação em determinado município, este poderia ser modelado como uma restrição: sabendo-se o custo de cada vaga escolar e a quantidade de recursos disponíveis para esta utilidade, poder-se-ia pensar em uma função objectivo como maximização de vagas escolares e em uma restrição onde a quantidade de novas vagas a ser disponibilizada deve ser menor ou igual à quantidade de recursos disponíveis, dado o custo por vaga. Este não foi o caso e o modelo multiobjectivo com a incorporação de preferências do decisor se mostrou viável e adequado à estrutura do problema proposto. Cabe aqui ainda destacar que a utilização de métodos interactivos de PLMO, como o Pareto Race, que possibilita a busca na fronteira eficiente por

soluções que estão de acordo com os objectivos do decisor, se encaixa no conceito de que a decisão mais correcta é aquela que melhor representa os interesses dos decisores.

A ordenação obtida através do procedimento multiobjectivo utilizado pode servir para determinar, usando, por exemplo, o método UTA, a estrutura de pesos implícita nas preferências do decisor. Uma vez conhecida a estrutura, esta pode ser usada na formulação de um problema multiatributo que se proponha a seleccionar municípios em outros Estados do Brasil e que tenham características regionais semelhantes, como por exemplo, o estado do Espírito Santo.

Comparando-se os resultados obtidos com as métricas Euclidiana e de Tchebycheff, verifica-se que os três melhores municípios são sempre pertencentes à chamada Região Serrana do Estado do Rio de Janeiro, o que mostra um certo “esgotamento” da qualidade de vida dos grandes centros urbanos. Por outro lado, o modelo somente considera indicadores objectivos, não considerando preferências subjectivas. Assim, por exemplo, alguém que queira viver a beira mar não irá concordar com os resultados desta análise, devendo incluir, assim, um novo critério de exclusão a ser analisado em ambiente SIG.

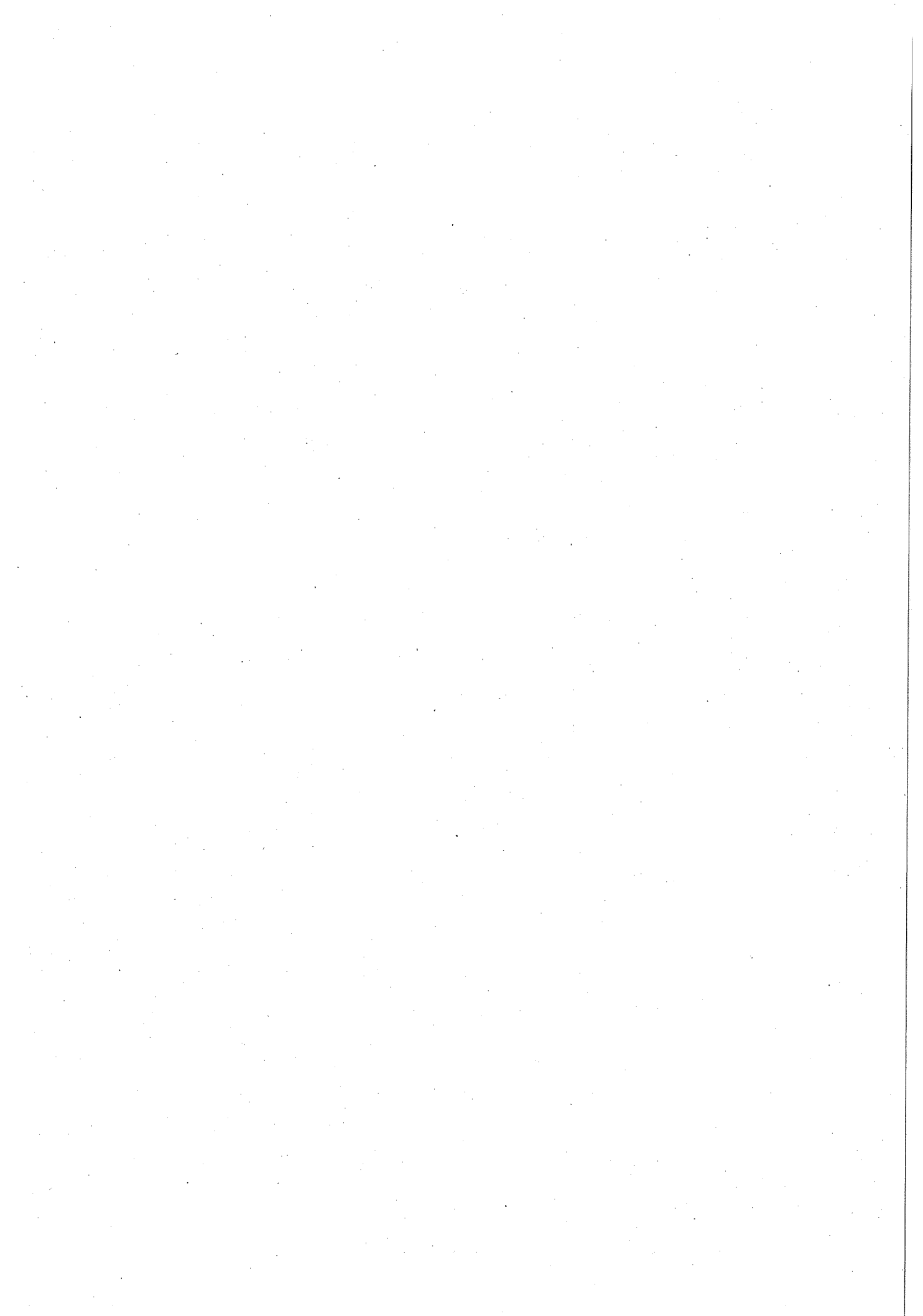
Um exercício interessante é o da eleição do pior município em qualidade de vida urbana. Este tipo de situação pode ser comparada às decisões que devem ser tomadas por planejadores e gestores municipais quando da escolha de áreas para investimento, com o objectivo de investir em áreas precárias em atendimento à população. Neste caso, a integração SIG-Multicritério se mostra uma ferramenta adequada à tomada de decisão pública, em especial à decisão de planeamento municipal.

## 6 Referências Bibliográficas

- [1] ADHB, *Atlas do Desenvolvimento Humano no Brasil*, Programa das Nações Unidas para o Desenvolvimento – PNUD (Cd-rom), 1998.
- [2] Bana e Costa, C.A., *Structuration, Construction et Exploitation d'un Modèle Multicritère d'Aide à la Décision*, PhD thesis, IST, Universidade Técnica de Lisboa, 1992.
- [3] Bana e Costa, C.A., Ferreira, J. A.A, Correa, E. C., “Metodologia multicritério de apoio à avaliação de propostas em concursos públicos”. In: Antunes, C.H., Tavares, L.V. (eds), *Casos de Aplicação da Investigação Operacional*, McGraw Hill, Amadora, Portugal, 2000, pp. 336-363.
- [4] Bana e Costa, C.A., Vansnick, J.C., “Uma nova abordagem ao problema da construção de uma função de valor cardinal: Macbeth”, *Investigação Operacional*, n. 15, 1995, pp. 15-35.
- [5] Bana e Costa, C.A., Vansnick, J.C., “Thoughts a theoretical framework for measuring attractiveness by categorical based evaluation technique (MACBETH)”. In: Clímaco, J. (ed), *Multicriteria Analysis*, Springer-Verlag, Berlin, 1997.
- [6] Barba-Romero, S., Pomerol, J.C., *Decisiones Multicriterio: Fundamentos Teóricos e Utilización Práctica*, Colección de Economía, Universidad de Alcalá, 1997.
- [7] Benayoun, R., De Montgolfier, J., Tergny, J., Larichev, O., “Linear programming with multiple objective function: step method (STEM)”, *Mathematical Programming*, v.1, 1971, pp. 366-375.
- [8] Brans, J.P., Mareschal, B., Vincke, P.H., “PROMETHEE: a new family of outranking methods in MCDM”, *IFORS 84*, North Holland, 1984, pp. 477-490.
- [9] Burrough, P.A., *Principles of Geographical Information Systems for Land Resource Assessment*, Oxford University Press, 1986.

- [10] Clímaco, J., Antunes, C.H., "TRIMAP – an interactive tricriteria linear programming package", *Foundations of Control Engineering*, v. 12, 1987, pp. 101-119.
- [11] Clímaco, J., Antunes, C.H., "Implementation of user friendly package – a guided tour of TRIMAP", *Mathematical and Computer Modelling*, v. 12, 1989, pp. 1299-1309
- [12] Clímaco, J., Antunes, C.H., "Programação Linear Multiobjetivo: Uma perspectiva interactiva". In: Lins, M.P.E., Meza, L.A. (eds), *Análise Envoltória de Dados e perspectivas de integração no ambiente do Apoio à Decisão*, Editora da COPPE/UFRJ, 2000, pp. 125-159.
- [13] Dias, L.M.C., Almeida, L.M.A.T., Clímaco, J., *Apoio Multicritério à Decisão*, Faculdade de Economia, Universidade de Coimbra, Coimbra, Portugal, 1996.
- [14] Eastman, J.R., Jin, W., Kyem, P.A., Toledano, J., "Raster produceres for multi-criteria/multi-objective decisions", *Photogrammetric Engineering & Remote Sensing*, v. 61, n. 5, 1995, pp. 539-547.
- [15] Edgar, G.A., *Measures, Topology and Fractal Geometry*, Springer-Verlag, New York, 1990, pp. 37-76.
- [16] Gomes, E.G., *Integração entre Sistemas de Informação Geográfica e Métodos Multicritério no Apoio à Decisão Espacial*, Tese de M.Sc., Programa de Engenharia de Produção, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, Brasil, dezembro, 1999.
- [17] Gomes, E.G., Lins, M.P.E., "Integração entre sistemas de informação geográfica e métodos de análise multicritério no apoio à decisão espacial", *Anais do XXXI SBPO – Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional*, Juiz de Fora, Minas Gerais, outubro, 1999.
- [18] Gomes, L.F.A.M., Moraes, L.F.R., Duarte, V.C.A., "Análise Multicritério de Projetos de Produção de Petróleo: Os Métodos Promethee e Todim", *Anais do XXX SBPO – Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional*, Curitiba, Paraná, novembro, 1998.
- [19] Graeml, F.R., Erdmann, R.H., "Administração de interesses: indicadores padrão e MCDA no apoio à tomada de decisão em prefeituras", *Anais do Simpósio de Pesquisa Operacional e Logística da Marinha - SPOLM'98*, Rio de Janeiro, 1998.
- [20] Halme, M., Joro, T., Korhonen, P., Salo, S., Wallenius, J., "Value efficiency analysis for incorporating preference information in data envelopment analysis", *International Institute for Applied Systems Analysis – IIASA*, Interim Report IR-98-054, agosto, 1998.
- [21] Jacquet-Legreze, E., Siskos, J., "Assessing a set of Additive Utility Functions for Multicriteria Decision-Making, The UTA Method", *European Journal of Operational Research*, v.10, 1982, pp.151-164.
- [22] Jankowski, P., "Integrating geographical information systems and multiple criteria decision-making methods", *International Journal of Geographical Information Systems*, v. 9, n. 3, 1995, pp. 251-273.
- [23] Jankowski, P., Richard, L., "Integration of GIS-based suitability analysis and multicriteria evaluation in a spatial decision support system for route selection", *Environment and Planning B*, v. 21, 1994, pp. 323-340.
- [24] Korhonen, P., "VIG – A visual interactive support system for multiple criteria decision making", *Belgian Journal of Operations Research, Statistics and Computer Science*, v. 27, n. 1, 1987a, pp. 3-15.
- [25] Korhonen, P., *VIG – A visual interactive approach to goal programming*, User's guide, september, 1987b.
- [26] Korhonen, P., Laakso, J., "A visual interactive method for solving the multiple criteria problem", *European Journal of Operational Research*, v. 24, n. 2, 1986, pp. 277-287.
- [27] Korhonen, P., Wallenius, J., "A Pareto Race", *Naval Research Logistics*, v. 35, 1988, pp. 615-623.

- [28] Korhonen, P., Wallenius, J., "A careful look at efficiency and utility in multiple criteria decision making: a tutorial", *Asia-Pacific Journal of Operational Research*, n. 6, 1989, pp. 46-62.
- [29] Lima, E.L., *Elementos de Topologia Geral*, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Coleção Elementos de Matemática, Ao Livro Técnico AS, Rio de Janeiro, 1970.
- [30] Lins, M.P.E, Ferreira Filho, V.J.M, "Sistemas de Informações Geográficas e Modelagem em PO", *Pesquisa Operacional*, v.17, n. 2, 1997, pp. 178-187.
- [31] Maguire, D.J., "An overview and definition of GIS". In: Maguire, D.J., Goodchild, M.F., Rhind, D.W. (eds), *Geographical Informations Systems: Principles and Applications*, v. 1, Longman, 1991, pp. 9-20.
- [32] Maguire, D.J., Dangermond, J., "The functionality of GIS". In: Maguire, D.J., Goodchild, M.F., Rhind, D.W. (eds), *Geographical Informations Systems: Principles and Applications*, v. 1, Longman, 1991, pp. 319-335.
- [33] Mello, J.C.C.B.S., Gomes, E.G., Lins, M.P.E., "Integração de Modelos de Análise de Envoltória de Dados com Sistemas de Informação Geográfica". In: Lins, M.P.E., Meza, L.A. (eds), *Análise Envoltória de Dados e perspectivas de integração no ambiente do Apoio à Decisão*, Editora da COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, 2000, pp. 161-172
- [34] Pereira, J.M.C., Duckstein, L., "A multiple criteria decision-making approach to GIS-based land suitability evaluation", *International Journal of Geographical Information Systems*, v. 7, 1993, pp. 407-424.
- [35] Pina, M.F., Madureira, C.B., *Fundamentos em Cartografia e Geoprocessamento*, IV Curso de Análise Espacial e Geoprocessamento/FIOCRUZ, Rio de Janeiro, fevereiro-março, 1999.
- [36] Roy, B., "Classement et choix en presence de points de vue multiple: La methode ELECTRE", *R.I.R.O.*, n. 8, 1968, pp.57-75
- [37] Roy, B., "ELECTRE III: Un algorithme de classements fonde sur une representation floue des preferences en presence de criteres multiples", *Cahier du CERO*, v. 20, n. 1, 1978, pp.3-24.
- [38] Roy, B., Bouyssou, D., *Aide multicritère à la décision: méthodes et cas*, Economica, Paris, 1993.
- [39] Roy, B., Skalka, J.M., "ELECTRE IS: Aspects methologiques et guide d'utilisation", *Document du LAMSADE*, 30, Universidade de Paris-Dauphine, Paris, 1984,.
- [40] Saaty, T.L., *The Analytic Hierarchy Process*, McGraw-Hill, New York, 1980.
- [41] Steuer, R.E., *Multiple Criteria Optimization: Theory, Computation and Application*, John Wiley & Sons, New York, 1986.
- [42] Stevens, D., Thompson, D., "GIS as a social practice: considerations for a developing country", *GIS/LIS96*, 1996. Disponível em <http://david.stevens.net/gisdecmk.html>.
- [43] Tavares, L.V., Oliveira, R.C., Themido, I.H., Correia, F.N., *Investigação Operacional*, McGraw Hill, Alfragide, Portugal, 1996.
- [44] Wierzbicki, A.P., "On the completeness and constructiveness of parametric characterizations to vector optimization problems", *OR Spectrum*, v. 8, n. 2, 1986, pp. 73-87.
- [45] Zionts, S., Wallenius, J., "An interactive programming method for solving the multiple criteria problem", *Management Science*, v. 22, n. 6, 1976, pp. 652-663.



## Optimal signal sets via semi-infinite programming

A. Ismael F. Vaz \*      Edite M.G.P. Fernandes \*      M. Paula S.F. Gomes †

\* Departamento de Produção e Sistemas, Escola de Engenharia, Universidade do Minho  
{aivaz, emgpf}@dps.uminho.pt

† Mechanical Engineering Department, Mechatronics in Medicine Laboratory, Imperial College of  
Science, Technology and Medicine, United Kingdom  
p.gomes@ic.ac.uk

---

### Abstract

The optimal signal set problem has been formulated as a nonlinear programming problem by Gockenbach and Kearsley in [4] and used by Lawrence in [12].

In this paper, we describe how this engineering design problem can be formulated as a semi-infinite programming (SIP) problem, solved by a discretization method, and coded in a SIPAMPL environment which is freely available. A brief introduction to semi-infinite programming and optimality conditions are presented.

### Resumo

O problema da determinação do conjunto óptimo de sinais foi formulado como um problema de otimização não linear por Gockenbach e Kearsley em [4] e usado por Lawrence em [12].

Neste artigo, descrevemos como este problema de engenharia pode ser formulado como um problema de programação semi-infinita, resolvido por um método de discretização e codificado no ambiente SIPAMPL que se encontra disponível através da internet. Faz-se uma breve introdução à programação semi-infinita e são apresentadas as condições de optimalidade do problema.

**Keywords:** optimal signal sets, semi-infinite programming, optimality conditions, discretization method.

---

## 1 Introduction

Several engineering problems are semi-infinite programming (SIP) problems although they are often formulated as finite programming problems with the infinite variables discretized. Gockenbach and Kearsley in [4] formulate the optimal signal sets design as a nonlinear programming

problem with the time variable discretized. In this paper, we reformulate the optimal signal sets as a semi-infinite programming problem since, in the last decade, some algorithms have been proposed for solving SIP problems efficiently and with high accuracy.

In Section 2, we describe the semi-infinite programming mathematical formulation, we present the first- and second-order necessary and sufficient conditions, and we briefly review numerical approaches to solve SIP problems. We use a procedure which reduces the SIP problem locally to one with only finite constraints.

In Section 3, we introduce the optimal signal sets problem as a nonlinear programming problem, as formulated by Gockenbach and Kearsley [4]. The semi-infinite programming formulation is presented in Section 4. In Section 5, we give some details on how the referred problems were coded in the SIPAMPL [20] database. Some numerical results obtained by a discretization method are shown in Section 6 and we summarize the conclusions in Section 7.

## 2 Semi-Infinite Programming

Semi-infinite programming problems appear in many engineering areas where there is a function of a finite number of variables to optimize and some constraints that must be satisfied during a whole period of time or in every point of a geometric region, i.e., functional inequality constraints which are characteristic of SIP. Some typical problems arise in air pollution control [10] where the total cost of maintaining pollution concentration at each point in a region satisfying some standard is minimized; in robotics [7] where a dynamic equation (or velocity, acceleration and jerk limits) must be satisfied during all of the robot movement (trajectory) whilst the total travel time (or energy) is minimized; in production planning [14, 22] where the resources needed must be lower than the available resources in the production time and the production cost (or production time) is minimized; and in Chebyshev approximation theory [8, 9, 17] where two functions are approximated in a given infinite set.

A SIP problem is a mathematical program of the form:

$$\begin{aligned}
 & \min_{x \in R^n} f(x) \\
 & \text{s.t. } g_i(x, t) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m \\
 & \quad h_i(x) \leq 0, \quad i = 0, \dots, o \\
 & \quad h_i(x) = 0, \quad i = o + 1, \dots, q \\
 & \quad \forall t \in T,
 \end{aligned} \tag{1}$$

where  $f(x)$  is the objective function,  $g_i(x, t)$ ,  $i = 1, \dots, m$ , are the infinite constraint functions and  $h_i(x)$ ,  $i = 0, \dots, q$ , the finite constraint functions.  $T \subset R^p$  is, usually, a cartesian product of intervals  $([\alpha_1, \beta_1] \times [\alpha_2, \beta_2] \times \dots \times [\alpha_p, \beta_p])$ .

These problems are called semi-infinite programming problems due to the constraints  $g_i(x, t) \leq 0$ ,  $i = 1, \dots, m$ . We can think of  $T$  as an infinite index set and therefore (1) is a problem with finitely many variables over an infinite set of constraints.



## 2.1 Optimality conditions

This subsection is concerned with first- and second-order optimality conditions for SIP. SIP local reduction to a finite problem will be present to support the second-order optimality conditions.

For simplicity the following SIP problem will be used

$$\begin{aligned} & \min_{x \in R^n} f(x) \\ \text{s.t. } & g(x, t) \leq 0 \\ & \forall t \in T. \end{aligned} \quad (2)$$

The extension to the full SIP problem in form (1) is straightforward.

### 2.1.1 First-order optimality conditions

The following definition characterizes a stationary point for SIP [15, 16]. Assume that  $f$  and  $g$  are continuously differentiable functions with respect to  $x$  everywhere on  $R^n$  and  $R^n \times R^p$ , respectively and  $T$  is a compact index set.

**Definition 2.1** *Let  $x^* \in R^n$  be a point such that*

$$g(x^*, t) \leq 0, \forall t \in T,$$

*and let there exist  $t_1, t_2, \dots, t_{m^*} \in T$  and non-negative numbers  $\lambda_0^*, \lambda_1^*, \lambda_2^*, \dots, \lambda_{m^*}^*$  such that*

$$\lambda_0^* \nabla_x f(x^*) + \sum_{i=1}^{m^*} \lambda_i^* \nabla_x g(x^*, t_i) = 0. \quad (3)$$

*with*

$$g(x^*, t_i) = 0, \quad i = 1, \dots, m^*. \quad (4)$$

*Then  $x^*$  is a stationary point of the SIP problem (2).*

**Assumption 2.1** *Assume that the following regularity assumption holds*

$$\exists u \in R^n \text{ such that } g(x^*, t) + u^T \nabla_x g(x^*, t) < 0, \forall t \in T. \quad (5)$$

A point that satisfies Definition 2.1 and Assumption 2.1 is called a Karush-Kuhn-Tucker point (KKT). In fact Assumption 2.1 is not the only constraint qualification under which the first-order KKT conditions can be derived. See [15] for a derivation of the first-order KKT conditions based on the Lebesgue integral. In [6] a derivation based on the Riemann integral is provided.

The following assumption is made so that the problem can be treated.

**Assumption 2.2** For each  $x \in R^n$  the set of global maxima  $\Gamma(x)$  of  $g(x, t)$  for all  $t \in T$  is finite.

The optimality conditions (3), (4) and the non-negativity of the Lagrange multipliers are in fact the first optimality conditions for the following problem:

$$\min_{x \in R^n} f(x) \text{ s.t. } g(x, t_i) \leq 0 \forall i \in \{1, \dots, m^*\}.$$

### 2.1.2 Local reduction to a finite problem

Consider the following problem defined for each  $\bar{x} \in R^n$ :

$$\max_{t \in T} g(\bar{x}, t). \quad (6)$$

**Definition 2.2** Let  $\bar{t}_i \in \Gamma(\bar{x})$ ,  $i = 1, \dots, \bar{m}$  be the optimal solutions to problem (6) for a given  $\bar{x} \in R^n$ .

The local reduction consists in replacing the infinite number of constraints, in SIP, by a finite number of constraints. The idea is to consider the local maxima of (6) as  $x$ -dependent functions. The following assumption is needed so that the problem may be reduced.

**Assumption 2.3** In addition to Assumption 2.2, there exist neighborhood  $U_{\bar{x}}$  of  $\bar{x}$ , neighborhoods  $U_{\bar{t}_i}$  of  $\bar{t}_i$ , and continuous functions

$$t_i : U_{\bar{x}} \rightarrow U_{\bar{t}_i} \cap T$$

such that

- $t_i(\bar{x}) = \bar{t}_i$ ,  $i = 1, \dots, \bar{m}$ ;
- $t_i(\bar{x})$  is the only local solution of problem (6) in  $U_{\bar{t}_i} \cap T$ , for  $i = 1, \dots, \bar{m}$  and for every  $x \in U_{\bar{x}}$ .

If Assumption 2.3 holds at  $\bar{x}$ , then the SIP can be locally (in  $U_{\bar{x}}$ ) approximated by a finite reduced SIP problem.

**Lemma 2.1** Let a  $\bar{x} \in R^n$  be given and let Assumption 2.3 hold. Then there exists a neighborhood  $U_{\bar{x}}$  of  $\bar{x}$  such that for all  $x \in U_{\bar{x}}$  we have a feasible  $x \in R^n$  if and only if

$$G_i(x) := g(x, t_i(x)) \leq 0, \quad i = 1, \dots, \bar{m}.$$

The reduced SIP problem is then defined as

$$\begin{aligned} & \min_{x \in U_{\bar{x}}} f(x) \\ & \text{s.t. } G_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \dots, \bar{m}. \end{aligned} \quad (7)$$

We will restrict our study to SIP problems where the following two assumptions hold.

**Assumption 2.4** Assume that the compact set  $T \subseteq R^p$  is given by

$$T = \{t | h_j(t) \leq 0, j = 1, \dots, J\} \tag{8}$$

where  $h_j$  are twice continuously differentiable functions on  $R^p$ . Moreover, in every point of  $T$  the linear independence constraint qualification holds, i.e., the vectors  $\nabla_t h_k(t)$ ,  $k \in \{j | h_j(t) = 0\}$  are linearly independent.

The following result is then immediate.

**Lemma 2.2** Given  $\bar{x} \in R^n$ . Assume that Assumption 2.4 holds. For every  $\bar{t}_i$ ,  $i = 1, \dots, \bar{m}$  define

$$\mathcal{M}^i = \{j | h_j(\bar{t}_i) = 0\}$$

and the Lagrangian of problem (6) with respect to  $\bar{t}_i$ :

$$\mathcal{L}^i(t, \alpha^i) := g(\bar{x}, t) - \sum_{j \in \mathcal{M}^i} \alpha_j^i h_j(t).$$

Then there exist unique multipliers  $\bar{\alpha}_j^i \geq 0$  such that

$$\nabla_t \mathcal{L}^i(\bar{t}_i, \bar{\alpha}^i) = 0.$$

**Assumption 2.5** Let  $g$  be twice continuously differentiable on  $R^n \times R^p$  and let Assumption 2.4 hold for every  $\bar{t}_i$ ,  $i = 1, \dots, \bar{m}$ . The following well-known strong second-order sufficient condition for  $\bar{t}_i$  to be a strict local maximum of problem (6) holds:

$\nabla_{tt}^2 \mathcal{L}^i(\bar{t}_i, \bar{\alpha}^i)$  is negative definite on the tangent space

$$T^i = \{\eta | \bar{\alpha}_j^i \eta^T \nabla_t h_j(\bar{t}_i) = 0, j \in \mathcal{M}^i\}.$$

### 2.1.3 Second-order optimality conditions

The second-order conditions for SIP are basically the second-order conditions applied to the reduced SIP problem (7).

Under Assumptions 2.4 and 2.5 the following theorem can be proved (see details in [10]).

**Theorem 2.1** Suppose that  $\bar{x} \in R^n$  is a feasible point and that Assumption 2.5 holds. Then we have the following:

(a) (Necessary condition). If  $\bar{x}$  solves (2), then for every  $\xi$  in  $T$ ,

$$T = \{\xi | \xi^T \nabla_x f(x) \leq 0, \xi^T \nabla_x g(x, t_i) \leq 0, i = 1, \dots, \bar{m}\},$$

there exists  $\lambda_0(\xi) \geq 0$ ,  $\lambda(\xi) \in R_+^{\bar{m}}$ ,  $\sup(\lambda(\xi)) \in \Gamma((\lambda_0(\xi), \lambda(\xi)) \neq (0, 0))$ , such that with

$$L(x, \lambda_0, \lambda, t) := \lambda_0 f(x) + \sum_{i=1}^{\bar{m}} \lambda_i g(x, t_i),$$

we have

$$\nabla_x L(\bar{x}, \lambda_0(\xi), \lambda(\xi), \bar{t}) = 0 \tag{9}$$

and

$$q(\xi) := \xi^T \nabla_{xx}^2 L(\bar{x}, \lambda_0(\xi), \lambda(\xi), \bar{t}) \xi + \sum_{i=1}^{\bar{m}} \lambda_i(\xi) (\nabla_x \bar{t}_i(x) \xi)^T \nabla_{xx}^2 \mathcal{L}^i(\bar{t}_i, \alpha(\bar{x})) (\nabla_x \bar{t}_i(x) \xi) \geq 0$$

(b) (Sufficient condition). If for every  $\xi \in T$  there exist  $\lambda_0(\xi), \lambda(\xi)$  as in (a) with (9) and, for  $\xi \neq 0$ ,

$$q(\xi) > 0,$$

then  $\bar{x}$  is a strict local solution of (2).

(c) (Strong sufficient condition). Part (b) is especially satisfied if

- the  $\nabla_x g(x, t_i), i = 1, \dots, \bar{m}$  are linearly independent;
- there exist (unique)  $\lambda_i \geq 0$  such that the KKT condition (9) holds with  $\lambda_0(\xi) = 1, \lambda(\xi) = \lambda$ ;
- $q(\xi) > 0$  holds (with  $\lambda_0(\xi) = 1, \lambda(\xi) = \lambda$ ) for all  $\xi \in \Sigma$ , where

$$\Sigma = \{ \xi | \lambda_i (\nabla_x g(x, t_i))^T \xi = 0, i = 1, \dots, \bar{m} \}.$$

**Note 2.1** The first term in  $q(\xi)$  is the second-order term we obtain for a regular finite problem and the second reflects the semi-infinite structure of the problem and it is generated by the shift of active constraints  $\bar{t}_i(x)$  as a function of  $x$ .

## 2.2 Numerical methods

A natural way for solving the SIP problem is to replace the infinite set  $T$  by a finite one. This type of methods solves a finite nonlinear problem (NLP) in each iteration. A scheme for such type of algorithms can be viewed in Figure 1.

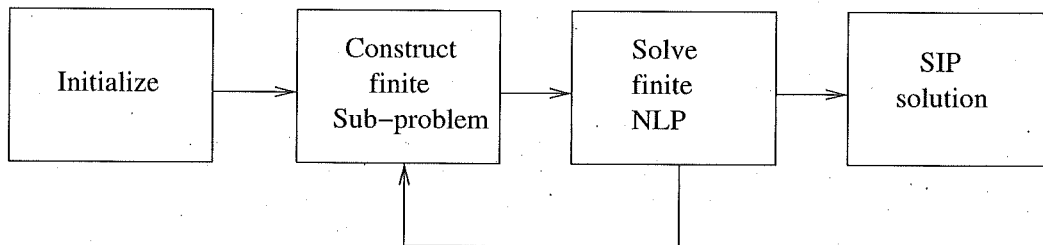


Figure 1: Scheme for a SIP algorithm

Depending on the strategy used to construct the finite set  $\bar{T} \in T, |\bar{T}| < \infty$  three type of methods can be considered (which are not exhaustive but cover the majority of known methods): (a) Exchange methods, (b) Methods based on local reduction and (c) Discretization methods.

- (a) Exchange methods are those where in each iteration the finite set  $T_{k-1}$  approximates the solutions of the sub-problem

$$\max\{g(x_k, t) | t \in T_{k-1}\}.$$

The following iterations proceed in removing and adding (exchanging) points in the finite set (points in the  $T_k$  set are constraints in the sub-problem) following some kind of strategy (see, for example [5, 18, 23, 24]).

- (b) Methods based on local reduction try to solve the reduced problem (7) [7, 13, 15, 16]. In each iteration the finite set  $T_k$  contains all the global and some local maxima of the problem (6).
- (c) Discretization methods [8, 9, 11, 17, 21] are a natural approach to the SIP problem. Clearly if the  $T$  set in (1) is finite then we have a finite classical optimization problem. It is not always possible to replace the infinite set by a finite one such that the solution to the SIP is the same as the finite problem (see [10] for an example). A discretization method consists of constructing finite sets of points  $T_0 \subset T_1 \subset \dots \subset T_k \subset T$  ( $|T_i| < \infty$ ,  $i \in \{0, 1, \dots, k\}$ ), such that when  $T_i$  replaces  $T$ , in (1), a finite sub-problem is obtained. A nonlinear programming solver is used to find the sub-problem's solution. The NPSOL [3] solver was used to obtain the numerical results presented in section 6. The solution of a finite sub-problem is used as an initial guess to the next sub-problem. A discretization method actually solves a sequence of finite sub-problems. In this type of methods the solution obtained is a solution to the finite sub-problem in the last set  $T_k$ , and may not be a KKT point.

### 3 Optimal Signal Sets

A simple communication system can be represented by a transmitter and a receiver. The transmitter gets an  $M$ -ary symbol,  $m$ , and modulates the symbol to be transmitted,  $s_m(t)$ , in an additive noise channel. The receiver receives the modulated signal with noise added,  $y(t)$ , and predicts the  $M$ -ary symbol,  $\hat{m}$ , that was transmitted. The model is represented schematically in figure 2.

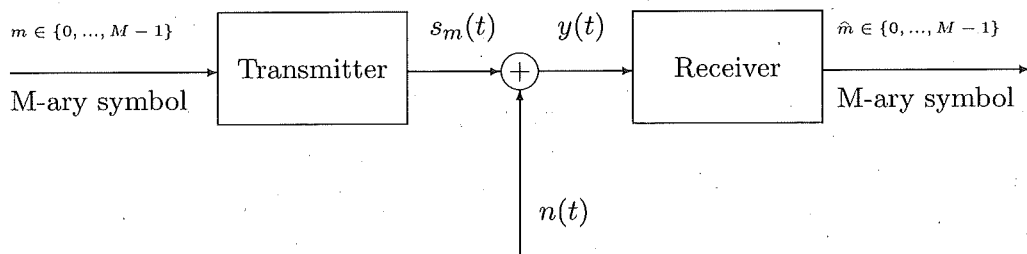


Figure 2: Scheme of a simple communication system

An usual assumption is that the transmitted signal  $s_m(t)$  is of the form

$$s_m(t) = \sum_{l=1}^L \alpha_{ml} \phi_l(t)$$

Table 1: Noise densities and  $K_N$  distances

Name	Density function	$K_N(\delta)$
Gaussian	$\frac{\exp(-t^2/2\sigma^2)}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}$	$\frac{\delta^2}{2\sigma^2}$
Laplacian	$\frac{\exp(- t /(\sigma/\sqrt{2}))}{\sqrt{2}\sigma}$	$\frac{ \delta }{\sigma/\sqrt{2}} + \exp(-\frac{ \delta }{\sigma/\sqrt{2}}) - 1$
Hyperbolic Secant	$\frac{\text{sech}(\pi t/2\sigma)}{2\sigma}$	$-2\ln(\text{sech}(\pi\delta/4\sigma))$
Generalized Gaussian	$\frac{1}{2\Gamma(5/4)A} \exp(-\frac{t^4}{A^4})$	$\frac{\Gamma^2(3/4)}{\Gamma^2(1/4)} \left(6\frac{\delta^2}{\sigma^2} + \frac{\delta^2}{\sigma^4}\right)$
Cauchy	$\frac{1}{\pi\sigma(1+(t/\sigma)^2)}$	$\ln(1 + \delta^2/r\sigma^2)$

where  $\phi_l(t)$  are basis functions and  $\alpha_{ml}$  are parameters.

The optimization problem arises when one wishes to find the  $\alpha_{ml}$  parameters such that the receiver's probability of error is minimized ([19]). The probability minimization is equivalent to the maximization of the minimum signals distance (see [4, 12]). The signals are usually forced to meet some constraints, either peak amplitude or average energy. In the case presented in this paper, a peak amplitude is constrained. The nonlinear programming formulation of the maximization problem is as follows, according to Gockenbach and Kearsley ([4]):

$$\min_{d,\alpha} -d^2 \tag{10a}$$

s.t.

$$\sum_{t=0}^{\bar{T}-1} K_N(s_{m_1}(t/\bar{T}) - s_{m_2}(t/\bar{T})) \geq d^2, m_1 < m_2 \tag{10b}$$

$$s_m(t/\bar{T})^2 \leq C^2, t = 0, \dots, \bar{T} - 1, m = 0, \dots, M - 1 \tag{10c}$$

where  $K_N$  is the Kullback-Leibler distance between two signals and is a function on the noise probability density function,  $n(t)$ .  $\bar{T}$  is the number of equality spaced points used in the discretized problem. The  $K_N$  functions studied in this paper are the same presented in [4, 12] and are shown in Table 1. For the Generalized Gaussian density function the constant  $A$  is given by

$$A = \sqrt{\left(\frac{\sigma^2\Gamma(\frac{1}{4})}{\Gamma(\frac{3}{4})}\right)}$$

where  $\Gamma(\cdot)$  is the gamma function.

This nonlinear programming problem has  $ML + 1$  variables and  $\frac{M(M-1)}{2} + M\bar{T}$  constraints, resulting in a problem with a very large set of constraints.

## 4 Optimal Signal Sets in SIP form

The peak amplitude constraints in the signal (10c) are in fact infinite constraints in time, and therefore the problem (10) can be reformulated as the following problem:

$$\min_{d,\alpha} -d^2 \tag{11a}$$

s.t.

$$\int_0^1 K_N(s_{m_1}(z) - s_{m_2}(z))dz \geq d^2, m_1 < m_2 \tag{11b}$$

$$s_m(t)^2 \leq C^2, m = 0, \dots, M - 1, \forall t \in [0,1] \tag{11c}$$

The integral notation is preferred, since it is more compact, and clearly, the summation in (10b) is an integral as  $\bar{T} \rightarrow \infty$ .

This SIP problem has now  $ML + 1$  variables and  $\frac{M(M+1)}{2}$  constraints.

## 5 Codified problems

In order to codify the SIP problem, previous described, the integral (11b) was computed by a numerical method. The numerical approximation based on Gauss quadrature is not appropriate, since the truncation error is high. A trapezoid integration formula based on the same number of points ( $\bar{T}$ ) was used which results in a summation similar to the one presented in (10b).

We present several choices for the basis signals and the corresponding parameters, as described in [4]. Two sets of basis functions at  $L = 2$  (two basis functions) are:

$$\left\{ \sqrt{\frac{2}{T}} \sin(2\pi\omega_1 t), \sqrt{\frac{2}{T}} \sin(2\pi\omega_2 t) \right\}$$

and

$$\left\{ \sqrt{\frac{2}{T}} \sin(2\pi\omega_1 t), \sqrt{\frac{2}{T}} \cos(2\pi\omega_1 t) \right\}$$

with  $\omega_1 = 10$  and  $\omega_2 = 11$ . The signal length is  $\bar{T} = 50$  and the peak amplitude is  $C = \sqrt{10}$ .

The combination of the basis functions and the noise distributions resulted in ten problems codified in SIPAMPL ([20]) which are summarized in Table 2.

In [4] no initial guess was provided for this kind of problems. The initial guess for the numerical results presented in [4] were randomly generated. The codified problems in SIPAMPL also provide random initial guesses in  $[-15, 15]$  for all  $\alpha_{ml}$ .

## 6 Numerical results

Some numerical results are shown for a modified discretization method. This modified method is based on the one described by Hettich in [8, 9] and it is adapted for nonlinear SIP (see [21]).

The  $\alpha_{ml}$  coefficients can be represented in a map. When  $L = 2$  the corresponding map is a two dimensional graph (usually called constellation). Four maps representing constellations are

Table 2: SIPAMPL codified problems

SIPAMPL problem	Basis functions	Noise $K_N$ distances
gockenbach1	Sine-Sine	Gaussian
gockenbach2	Sine-Sine	Laplacian
gockenbach3	Sine-Sine	Hyperbolic Secant
gockenbach4	Sine-Sine	Generalized Gaussian
gockenbach5	Sine-Sine	Cauchy
gockenbach6	Sine-Cosine	Gaussian
gockenbach7	Sine-Cosine	Laplacian
gockenbach8	Sine-Cosine	Hyperbolic Secant
gockenbach9	Sine-Cosine	Generalized Gaussian
gockenbach10	Sine-Cosine	Cauchy

Table 3: Numerical results with  $M = 8$ 

Problem	$f(x^*)$	AC	NSP
gockenbach1	-1.30e+0	497.3	4
gockenbach2	-1.14e+0	497.3	4
gockenbach3	-1.09e+0	476.0	4
gockenbach4	-2.06e+0	454.7	4
gockenbach5	-4.06e-1	454.7	4
gockenbach6	-1.86e+0	1348.0	6
gockenbach7	-1.62e+0	1156.0	4
gockenbach8	-1.60e+0	1156.0	4
gockenbach9	-2.97e+0	1348.0	6
gockenbach10	-5.90e-1	1348.0	6

presented in Figures 3, 4, 5 and 6 where the axis represent the  $\alpha_{m1}$  and  $\alpha_{m2}$  parameters. Figures correspond to the solution of gockenbach1, gockenbach2, gockenbach7, and gockenbach10 problems respectively, with the number of signals ( $M$ ) accordingly modified.

Some data from the numerical experiments are shown in Tables 3 and 4 for  $M = 8$  and  $M = 16$  respectively. The first column contains the problem name in the SIPAMPL database. " $f(x^*)$ " is the objective function's value in the solution found. "AC" is the average number of constraints in the finite sub-problems (the constraints from the first sub-problem are not counted) and "NSP" is the number of sub-problems solved. The initial grid contains 101 points and the final grid has 601 points. Recall that the NLP formulation (10) has 428 constraints and the SIP formulation (11) has 36 infinite constraints for  $M = 8$ . When  $M = 16$ , the NLP formulation (10) has 920 constraints and the SIP formulation (11) has 136 infinite constraints

In [4, 12] the authors showed some numerical results with SQP type methods. Since the constraint (11b) is different from (10b), objective function values reported herein and in [4, 12] are, of course, different. In [12], in all cases, the execution terminated in no more than 10 to 15 minutes.



Table 4: Numerical results with  $M = 16$ 

Problem	$f(x^*)$	AC	NSP
gockenbach1	-5.54e-1	994.7	4
gockenbach2	-6.06e-1	994.7	4
gockenbach3	-5.55e-1	994.7	4
gockenbach4	-8.65e-1	994.7	4
gockenbach5	-2.04e-1	1024.0	5
gockenbach6	-7.57e-1	2802.7	4
gockenbach7	-8.44e-1	2802.7	4
gockenbach8	-7.73e-1	2802.7	4
gockenbach9	-1.21e+0	2802.7	4
gockenbach10	-2.86e-1	2616.0	5

Table 5: User execution times with  $M = 8$ 

Problem	Time (seconds)
gockenbach1	6.58
gockenbach2	8.02
gockenbach3	5.68
gockenbach4	5.82
gockenbach5	6.66
gockenbach6	11.30
gockenbach7	13.50
gockenbach8	12.32
gockenbach9	12.13
gockenbach10	10.82

Our numerical results were obtained on a Pentium III at 450Mhz with 128MB of RAM and a Linux Operating System (Red Hat 5.2) with AMPL Student Version 19991027 (Linux 2.0.18). The execution time for each problem is less than 20 seconds for  $M = 8$  and 100 seconds for  $M = 16$ . In Tables 5 and 6 “Problem” refers to the problem name and “Time” is the maximum user execution time, in seconds, of 5 runs of the same problem (remember that the initial guess is randomly generated and so the execution time may differ for two runs of the same problem).

The optimal signal set is a SIP problem with many local and global SIP solutions. To get the global solution, the authors in [4] applied the algorithm several times until a global SIP solution was obtained. In [14, 22] the authors proposed two global algorithms (simulated annealing and genetic algorithm) and claimed to have obtained the global SIP solution for the production planning model therein described.

Table 6: User execution times with  $M = 16$

Problem	Time (seconds)
gockenbach1	60.53
gockenbach2	75.20
gockenbach3	61.76
gockenbach4	60.61
gockenbach5	78.15
gockenbach6	90.85
gockenbach7	96.59
gockenbach8	74.24
gockenbach9	80.51
gockenbach10	81.76

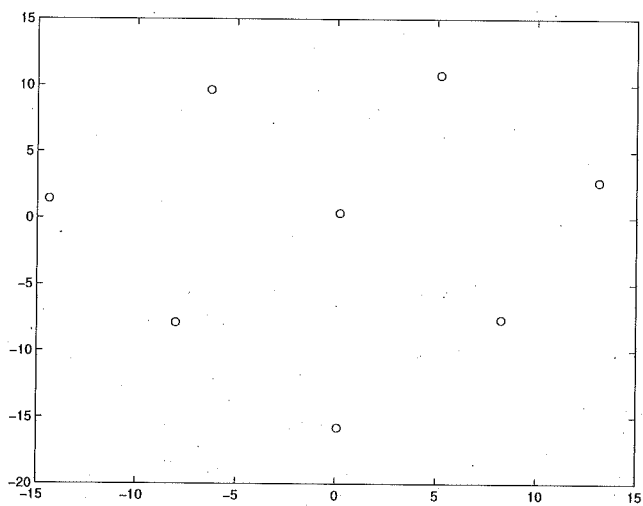


Figure 3: Constellation for Gaussian Noise,  $M = 8$ , Sine-Sine basis

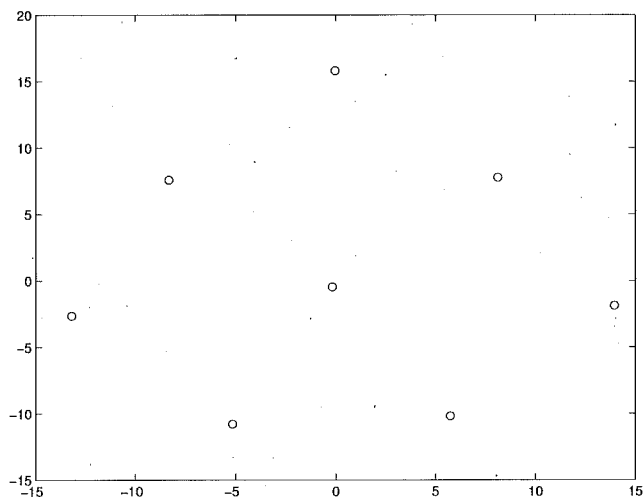


Figure 4: Constellation for Laplacian Noise,  $M = 8$ , Sine-Sine basis

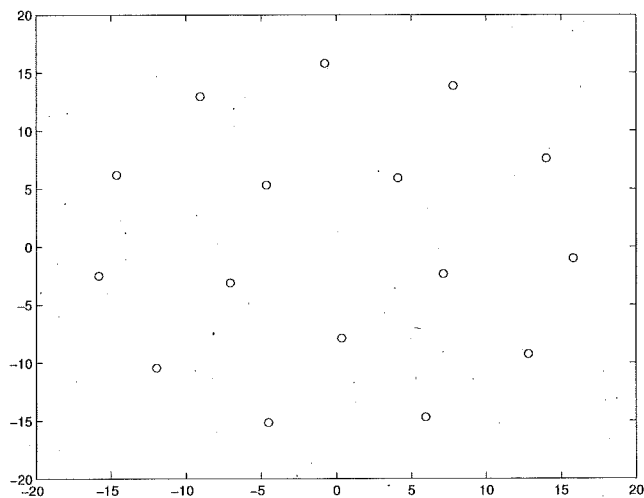


Figure 5: Constellation for Hyperbolic Secant Noise,  $M = 16$ , Sine-Cosine basis

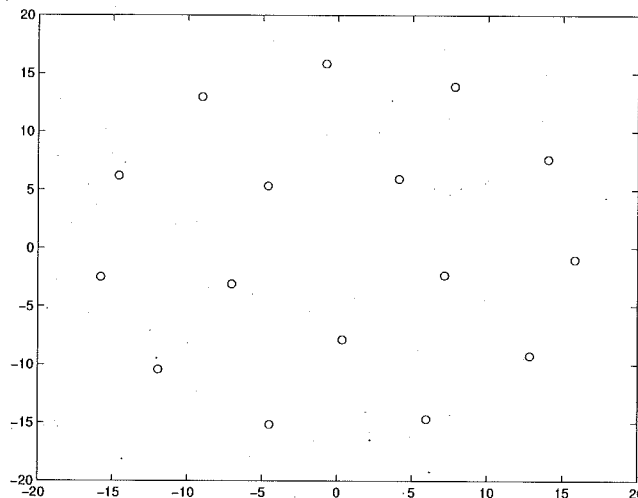


Figure 6: Constellation for Cauchy Noise,  $M = 16$ , Sine-Cosine basis

## 7 Conclusions

In this paper we present a new approach for the optimal signal sets problem. The new approach can be efficiently solved by the SIP methods available. We present some numerical results for a discretization method chosen for its simplicity and robustness.

The approach used by Gockenbach and Kearsley in [4] is in fact a discretization of the original problem. The fact that we have used a discretization method would lead to similar results if we requested the same accuracy in the solution. The numerical results presented herein were obtained with a higher accuracy and so the average number of constraints in the modified Hettich discretization method is always greater than the number of constraints in the original NLP formulation.

Other methods could be used, for example methods based on local reduction and SQP for SIP, (see [7, 15]) resulting in a smaller number of finite constraints.

The new formulation of the problem (with the 10 versions) was coded in the AMPL modeling language and is freely available in the SIPAMPL web page<sup>1</sup>. The new approach has less constraints than the original one. Treating and storing the SIP problem is easier and better accuracy in the solution is possible.

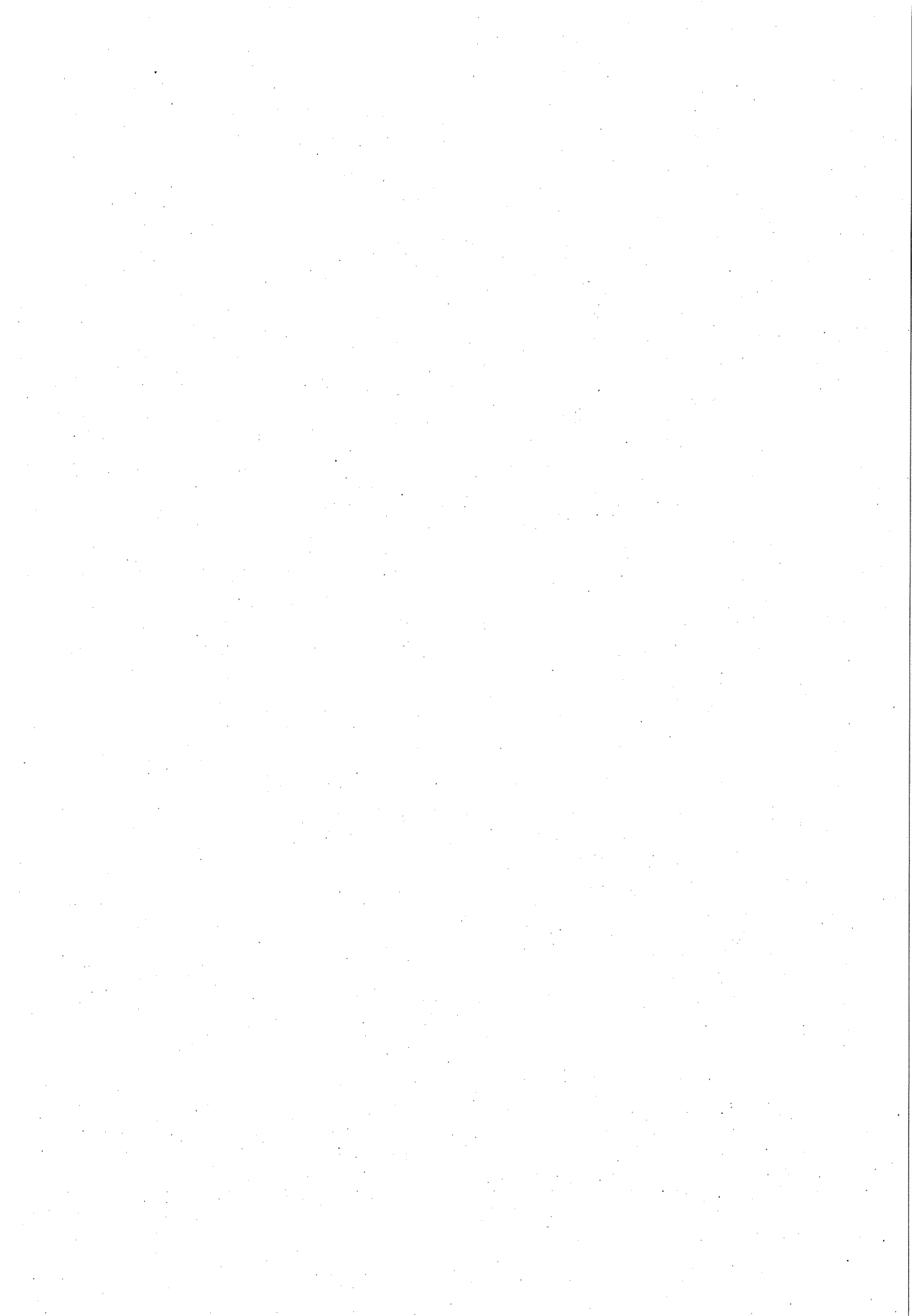
The optimal signal set problem has many local and global SIP solutions. This type of problem is well suited for testing global optimization algorithms like those in [14, 22].

## References

- [1] R. Hettich (Ed.), *Semi-infinite programming*, Springer-Verlag, 1979.

<sup>1</sup><http://www.eng.uminho.pt/~dps/aivaz/>

- [2] A.V. Fiacco and K.O. Kortanek (Eds.), *Semi-infinite programming and applications*, Springer-Verlag, 1983.
- [3] P.E. Gill, W. Murray, M.A. Saunders, and M.H. Wright, *User's guide for NPSOL: A fortran package for nonlinear programming*, Stanford University, 1986.
- [4] M.S. Gockenbach and A.J. Kearsley, *Optimal signal sets for non-gaussian detectors*, *SIAM Journal on Optimization* **9** (1999), no. 2, 316–326.
- [5] P.R. Gribik, *A central-cutting-plane algorithm for semi-infinite programming problems*, in [1] (1979), 66–82.
- [6] S.-A. Gustafson, *A three-phase algorithm for semi-infinite programs*, in [2] (1983), 138–157.
- [7] E. Haaren-Retagne, *A semi-infinite programming algorithm for robot trajectory planning*, Ph.D. thesis, University of Trier, 1992.
- [8] R. Hettich, *An implementation of a discretization method for semi-infinite programming*, *Mathematical Programming* **34** (1986), no. 3, 354–361.
- [9] R. Hettich and G. Gramlich, *A note on an implementation of a method for quadratic semi-infinite programming*, *Mathematical Programming* **46** (1990), 249–254.
- [10] R. Hettich and K.O. Kortanek, *Semi-infinite programming: Theory, methods, and applications*, *SIAM Review* **35** (1993), no. 3, 380–429.
- [11] J. Kaliski, D. Haglin, C. Roos, and T. Terlaky, *Logarithmic barrier decomposition methods for semi-infinite programming*, *International Transactions in Operational Research* **4** (1997), no. 4, 285–303.
- [12] C.T. Lawrence, *A computationally efficient feasible sequential quadratic programming algorithm*, Ph.D. thesis, Institute for Systems Research, University of Maryland, 1998.
- [13] T. Leon, S. Sanmatias, and E. Vercher, *On the numerical treatment of linearly constrained semi-infinite optimization problems*, *European Journal of Operational Research* **121** (2000), 78–91.
- [14] Y. Li and D. Wang, *A semi-infinite programming model for Earliness/Tardiness production planning with simulated annealing*, *Mathl. Comput. Modelling* **26** (1997), no. 7, 35–42.
- [15] C.J. Price, *Non-linear semi-infinite programming*, Ph.D. thesis, University of Canterbury, New Zealand, August 1992.
- [16] C.J. Price and I.D. Coope, *Numerical experiments in semi-infinite programming*, *Computational Optimization and Applications* **6** (1996), 169–189.
- [17] R. Reemtsen, *Discretization methods for the solution of semi-infinite programming problems*, *Journal of Optimization Theory and Applications* **71** (1991), no. 1, 85–103.
- [18] K. Roleff, *A stable multiple exchange algorithm for linear SIP*, in [1] (1979), 83–96.
- [19] M.D. Srinath, P.K. Rajasekaran, and R. Viswanathan, *Introduction to statistical signal processing with applications*, Prentice Hall, 1996.
- [20] A.I.F. Vaz, E.M.G.P. Fernandes, and M.P.S.F. Gomes, *SIPAMPL: Semi-infinite programming with AMPL*, Technical report ALG/EF/1-2000, Universidade do Minho, Braga, Portugal, April 2000, (to be published, <http://www.eng.uminho.pt/~dps/aivaz/>).
- [21] ———, *Discretization methods for semi-infinite programming*, *Investigação Operacional* **21** (2001), 37–46.
- [22] D. Wang and S.-C. Fang, *A semi-infinite programming model for Earliness/Tardiness production planning with a genetic algorithm*, *Computers and Mathematics with Applications* **31** (1996), no. 8, 95–106.
- [23] M.-H. Wang and Y.-E. Kuo, *A perturbation method for solving linear semi-infinite programming problems*, *Computers and Mathematic with Applications* **37** (1999), 181–198.
- [24] S.-Y. Wu and S.-C. Fang, *Solving convex programs with infinitely many constraints by a relaxed cutting plane method*, *Computers and Mathematics with Applications* **38** (1999), 23–33.



## Machine and labour planning in layout design

Pedro Manuel Vilarinho \*

Rui Campos Guimarães †

\* Departamento de Economia, Gestão e Engenharia Industrial, Universidade de Aveiro  
pvil@egi.ua.pt

† Departamento de Mecânica e Gestão Industrial, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto  
rcguimar@fe.up.pt

---

### Abstract

In this paper the authors describe a model included in a plant layout design support system. The model is aimed at supporting the joint definition of equipment and labour requirements in production systems.

The problem of specifying such requirements so as to minimise total production and subcontracting costs is modelled as a mixed integer linear programme. This model includes constraints on investment and hiring of skilled labour, takes into account current availability of equipment and manpower, and handles situations involving production shifts, overtime and subcontracting of parts.

Computational results derived from several branch-and-bound strategies adopted in solving the mixed integer linear programme are compared for a large set of problems generated so as to represent a wide range of real life situations.

**Keywords:** Plant layout, decision support systems, machine and labour requirement planning problem, mixed integer linear programming

---

## 1 Introduction

The design of manufacturing facilities is a multistage decision process. The machine and labour requirements planning problem, consisting of selecting both the equipment and the labour required by a manufacturing system, can be regarded as a first step of that process. This paper describes the model basis of a resource selection module included in a plant layout design support system (PLDSS). The flowchart of this DSS is shown in Figure 1, where the module described in this paper is represented by a shadowed area.

The proposed model for the machine and labour requirements planning problem leads to the definition of the production flows for each part route and each machine, information that

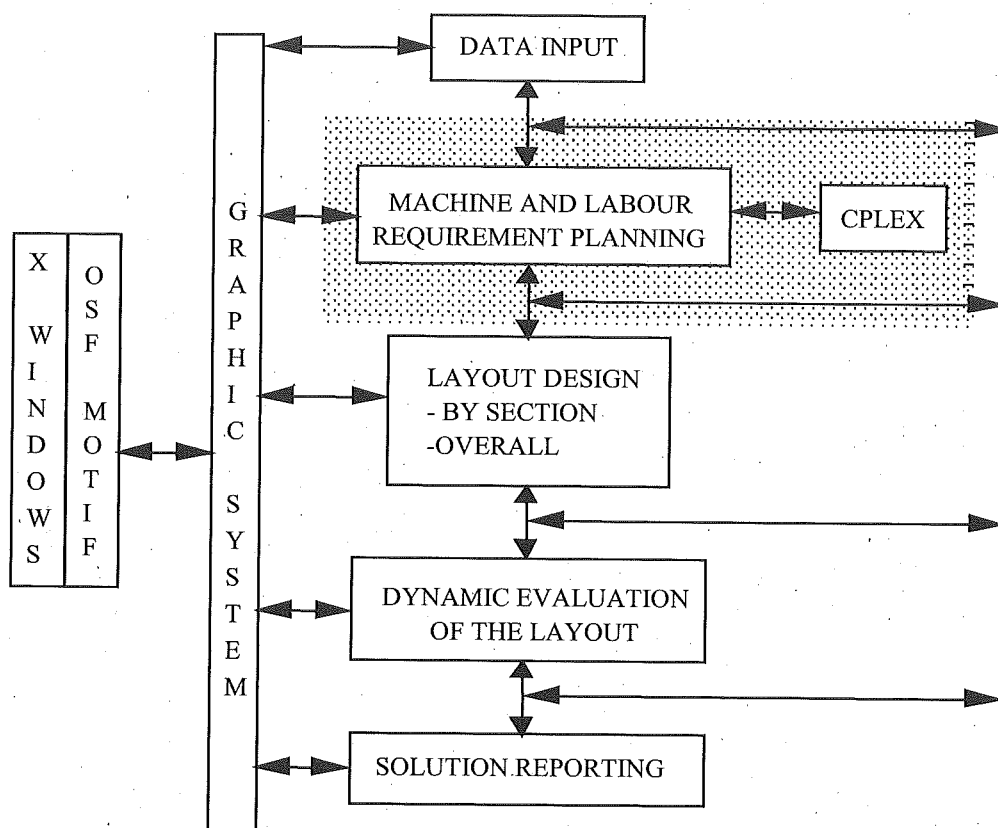


Figure 1: Plant layout design support system flowchart



is fed into the layout design module. This module relies on a heuristic procedure, which seeks the best relative placement of the equipment on the factory floor according to a criterion based on the overall material handling cost (which depends on the production flows).

Miller and Davis [6] define the machine requirement problem as 'the specification of the number of machines of each type required in a production process (or group of processes) in each period during some planning horizon' (pp.219). This paper addresses an extension to this problem - the machine and labour requirement planning problem - which includes, in addition, the specification of the number of workers required in each of several predefined classes of labour. The simultaneous definition of equipment and labour was considered in order to model situations in which the workers can operate simultaneously several machines.

Miller and Davis [6] carried out an in-depth review of the literature on the machine requirements problem and also introduced some important factors to take into account when modelling the problem (e.g. production output requirements, machine output rates, machine scrape factors and work time available). In their research only basic arithmetic operations involving those factors were performed, although they recommended a mathematical programming approach. Kusiak [5] presented a binary-integer programming model that incorporates issues like machine type, machine dimensions and energy. Bard and Feo [1] proposed a branch-and-bound algorithm for a binary programming model that accounts for the equipment flexibility in performing different operations with varying levels of cost or efficiency. An extension to this work that addresses non-splitting of batches and processing of parts, was presented by Roze and Kasilingam [8]. Chen [2] proposed an integer-programming model and a heuristic algorithm to solve the problem of selecting the machining process and equipment in a dynamic manufacturing environment (i.e. multiple time periods) that minimises the equipments' fixed and variable costs.

The model described in this paper assumes that each of the parts processed in a plant can be produced according to different routes and is based on data concerning the several operations included in each of these routes. This level of detail, together with the modelling of the labour costs, distinguishes the model from others published in the literature.

For the sake of clarity, the model will be presented firstly on its simplest version and then will be successively extended to include production shifts and overtime.

## 2 Basic Model

The basic version of the machine and labour requirements planning model is based on the following set of basic assumptions:

- (1) the production throughput is stable over time
- (2) the overall production throughput can be adequately represented by a limited set of parts ( $p=1,\dots,P$ ) produced in quantities  $N_p$  within a given planning horizon
- (3) the production will be processed through equipment classified into a set of machine types ( $m=1,\dots,M$ ), each of them with an unit acquisition price  $c_m$
- (4) the machines are operated by workers grouped into a set of labour classes ( $h=1,\dots,H$ )

- (5) the number of machines of type  $m$  which can be acquired is within the limits  $(E_m)_{\min}$  and  $(E_m)_{\max}$  and the number of workers of class  $h$  that can be hired is within the limits  $(L_h)_{\min}$  and  $(L_h)_{\max}$
- (6) for each type of machine,  $m$ , the number of machines available at the outset is  $(x_o)_m$
- (7) the total investment on new machines is limited to  $I$
- (8) both machines and labour operate only within a normal working shift (without overtime); the total time of this shift over the planning horizon is  $T$
- (9) each part  $p$  can be produced according to a limited number of routes ( $r=1, \dots, R_p$ ) or may be subcontracted at a cost  $cp_p$
- (10) the number of operations performed on route  $r$  of part type  $p$  is  $O_{pr}$  and each operation  $o$  of this part route may be subcontracted at a cost per lot  $co_{pro}$
- (11) for each pair (part type, route) =  $(p,r)$ ,
  - the lot size has a pre-specified value  $L_{pr}$
  - for each lot, the cost of operation  $o$  (involving machine  $m$ ) is  $cv_{pro}$ , the set-up plus processing time is  $t_{pmro}$  and the time spent by workers of labour class  $h$  is  $t'_{phro}$
- (12) over the planning horizon, each machine of type  $m$  has a fixed cost  $cf_m$  and each worker of class  $h$  has a fixed cost  $cf'_h$

Denoting the controllable variables as follows,

$x_m$ : number of required machines of type  $m$  (the number of machines to be acquired is  $x'_m = x_m - (x_o)_m$ )

$y_h$ : number of required workers of class  $h$

$z_{pro}$ : number of lots of part  $p$  to be processed through operation  $o$  in route  $r$

$s_p$ : number of units of part  $p$  to be subcontracted

$s'_{pro}$ : number of lots of part type  $p$  whose operation  $o$  in route  $r$  will be subcontracted,

the problem of minimising the overall cost over the planning horizon can be modelled as a mixed integer linear program (see Figure 2).

In the objective function, (1a), the total costs are the sum of five components: machine fixed costs, variable processing costs, fixed labour costs, part subcontracting costs and operation subcontracting costs.

The constraints can be interpreted as follows:

- (1b) Constraints insuring that the demand for each type of machine does not exceed the corresponding capacity

$$\begin{aligned}
 \min Z = & \sum_m c f_m x_m + \sum_p \sum_r \sum_o c v_{pro} z_{pro} + \\
 & + \sum_h c f'_h y_h + \sum_p c s_p s_p + \sum_p \sum_r \sum_o c o_{pro} s'_{pro} \quad (1a) \\
 \text{subject to} & \sum_p \sum_r \sum_o t_{pmro} (z_{pro} - s'_{pro}) \leq x_m T \quad (m = 1, \dots, M) \quad (1b) \\
 & \sum_p \sum_r \sum_o t'_{phro} (z_{pro} - s'_{pro}) \leq y_h T \quad (h = 1, \dots, H) \quad (1c) \\
 & z_{pr1} + s'_{pr1} = \dots = z_{prO_{pr}} + s'_{prO_{pr}} \quad (p = 1, \dots, P; r = 1, \dots, R_p) \quad (1d) \\
 & \sum_r L_{pr} (z_{pro} + s'_{pro}) + s_p \geq N_p \quad (p = 1, \dots, P; o=1) \quad (1e) \\
 & \sum_m c a_m x'_m \leq I \quad (1f) \\
 & (E_m)_{\min} \leq x'_m \leq (E_m)_{\max} \quad (m=1, \dots, M) \quad (1g) \\
 & (L_h)_{\min} \leq y_h \leq (L_h)_{\max} \quad (h=1, \dots, H) \quad (1h) \\
 & x_m, y_h \text{ integers} \quad (1i) \\
 & z_{pro} \geq 0, x_m \geq 0, y_h \geq 0, \quad (1j)
 \end{aligned}$$

Figure 2: Basic model

- (1c) Idem for each labour class
- (1d) Constraints imposing that, for each pair (part type, route), the number of lots is the same for the different operations performed or subcontracted
- (1e) Constraints imposing that the demand for each part is satisfied
- (1f) Constraint setting up an upper bound on the investment on new machines
- (1g) Upper and lower bounds on the number of machines of each type to be acquired
- (1h) Idem for each labour class
- (1i) Integrality constraints on the number of machines of each type and on the number of workers in each labour class
- (1j) Non negativeness constraints on all the decision variables.

It should be noted that, once the constraints (1d) were included in the model, the constraints (1e) need to be specified only for one of the operations included in each pair (part type, route). The operation considered was the first one.

The model has  $M+H$  integer variables,  $2 \cdot \sum_p \sum_r O_{pr} + P$  continuous variables and  $3M+3H + P + 1 + \sum_p \sum_r O_{pr}$  restrictions (including  $2M+2H$  bounds).

This dimension presumes no integrality constraints on the variables  $s_p, s'_{pro}$  and  $z_{pro}$ . For the first type of variable, i.e. the number of parts of each type to be subcontracted, the absence of integrality constraints does not raise any significant practical problems concerning the accuracy of the model. However this may not be true for the two latter types of variables, i.e. the number of lots of part type  $p$  whose operation  $o$  from route  $r$  is to be subcontracted and the number of lots of each part to be produced according to each route. Ignoring the integrality

constraints is equivalent to assuming the divisibility of the lots and of the corresponding setup times. This procedure will be appropriate only if the setup time of each lot is of a magnitude lower than that of its processing time. This occurs quite often, when the lots are large enough and/or their set-up operations do not consume too much time.

### 3 Representation of Production Shifts

The previous model can be extended to account for the possibility of producing in different shifts. In this extension the following assumptions were considered:

- (1) the number of shifts is two or three
- (2) one of these shifts, the 'day shift', is considered to be the normal working period
- (3) each worker of a labour class can be assigned to any of the shifts; the unit cost of the worker will vary according to the shift, and the lowest cost is naturally that of the day shift.

The previous notation will be extended as follows:

$s$ : index denoting a shift number ( $s=1, \dots, S$ )  
( $s=1$  denotes the "day shift";  $S$  can be equal to 2 or 3)

$cf'_{hs}$ : fixed cost over the planning horizon of a worker belonging to labour class  $h$  when working on shift  $s$

$T_s$ : total labour time available on shift  $s$  for the whole planning horizon.

Denoting the new controllable variables as,

$y_{hs}$ : number of workers in category  $h$  required in shift  $s$

$z_{pros}$ : number of lots of part type  $p$  to be produced according to route  $r$  for which operation  $o$  takes place in shift  $s$

the problem of minimising the overall cost over the planning horizon can be modelled as in Figure 3.

In this model, both the objective function (2a) and the constraints (2b) to (2j) derive directly from the corresponding ones included in the basic model, (1a) and (1b) to (1j), taking into account the existence of shifts whenever appropriate.

This model extension has  $M+H.S$  integer variables,  $P+(S+1) \cdot \sum_p \sum_r O_{pr}$  continuous variables and  $M.(S+2)+3.H.S+P+1+\sum_p \sum_r O_{pr}$  restrictions (including  $2M+2H.S$  bounds).

$$\begin{aligned}
 \min Z = & \sum_m c f_m x_m + \sum_p \sum_r \sum_o c v_{pro} \sum_s z_{pros} + \\
 & \sum_h \sum_s c f'_{hs} y_{hs} + \sum_p \sum_r \sum_o c o_{pro} s'_{pro} \\
 & + \sum_p c s_p s_p \tag{2a} \\
 \text{subject to} & \sum_p \sum_r \sum_o t_{pmro} (z_{pros} - s'_{pro}) \leq x_m T_s \quad (m = 1, \dots, M; s = 1, \dots, S) \tag{2b} \\
 & \sum_p \sum_r \sum_o t'_{phro} (z_{pros} - s'_{pro}) \leq y_{hs} T_s \quad (h = 1, \dots, H; s = 1, \dots, S) \tag{2c} \\
 & \sum_s z_{pr1s} + s'_{pr1} = \dots = \sum_s z_{prO_{pr}s} + s'_{prO_{pr}} \quad (p = 1, \dots, P; r = 1, \dots, R_p) \tag{2d} \\
 & \sum_r L_{pr} (\sum_s z_{pros} + s'_{pro}) + s_p \geq N_p \quad (p = 1, \dots, P; o = 1) \tag{2e} \\
 & \sum_m c a_m x'_m \leq I \tag{2f} \\
 & (E_m)_{\min} \leq x'_m \leq (E_m)_{\max} \quad (m = 1, \dots, M) \tag{2g} \\
 & (L_h)_{\min} \leq y_{hs} \leq (L_h)_{\max} \quad (h = 1, \dots, H; s = 1, \dots, S) \tag{2h} \\
 & x_m, y_{hs} \text{ integers} \tag{2i} \\
 & z_{pros} \geq 0, x_m \geq 0, x'_m \geq 0, \tag{2j} \\
 & y_{hs} \geq 0, s_p \geq 0, s''_{pro} \geq 0
 \end{aligned}$$

Figure 3: Model including shifts

## 4 Representation of Shifts and Overtime

A further extension to the previous model was introduced to account for overtime work. The new model was developed under the following assumptions:

- (1) the only workers that can do overtime work are those assigned to the day shift
- (2) workers are only allowed to do overtime work on the shift following the day shift
- (3) for overtime work costing purposes this shift is divided into a number of overtime periods and the unit cost of the overtime work increases from any period to the consecutive one.

Considering the additional notation,

E : total number of overtime periods

e : index denoting all the overtime periods (e=1,...,E)

c<sub>he</sub>: unit cost of a worker belonging to labour class h doing overtime work on period e

T<sub>he</sub>: upper bound on the overtime work done by workers of class h during period e over the whole planning horizon

and defining the new controllable variables as

t<sup>o</sup><sub>he</sub>: overtime work done by workers of labour class h in overtime period e

$$\begin{aligned}
\min Z = & \sum_m c f_m x_m + \sum_h \sum_s c f'_{hs} y_{hs} + \sum_h \sum_e c e_{hs} t''_{he} \\
& + \sum_p \sum_r \sum_o c v_{pro} (z_{pros} + \sum_e w_{proe}) \\
& + \sum_p \sum_r \sum_o c s_p s_p + \sum_p \sum_r \sum_o c o_{pro} s'_{pro} \quad (3a)
\end{aligned}$$

subject to

$$\sum_p \sum_r \sum_o t_{pmro} (z_{pros} - s'_{pro}) \leq x_m T_s \quad (m = 1, \dots, M; s=1,3) \quad (3b.1)$$

$$\sum_p \sum_r \sum_o t_{pmro} (z_{pros} + \sum_e w_{proe} - s'_{pro}) \leq x_m T_s \quad (m = 1, \dots, M; s=2) \quad (3b.2)$$

$$\sum_p \sum_r \sum_o t'_{phro} (z_{pros} - s'_{pro}) \leq y_{hs} T_s \quad (h = 1, \dots, H; s=1, \dots, S) \quad (3c.1)$$

$$t''_{he} = \sum_p \sum_r \sum_o t'_{phro} w_{proe} \leq T_{he} \quad (h = 1, \dots, H; e=1, \dots, E) \quad (3c.2)$$

$$\begin{aligned}
\sum_s z_{pr1s} + \sum_e w_{pr1e} + s'_{pr1} = \dots = \\
= \sum_s z_{prO_{prs}} + \sum_e w_{prO_{pre}} + s'_{prO_{pr}} \quad (p = 1, \dots, P; r = 1, \dots, R_p) \quad (3d)
\end{aligned}$$

$$\sum_r L_{pr} (z_{pros} + \sum_e w_{proe} + s'_{pro}) + s_p \geq N_p \quad (p = 1, \dots, P; o=1) \quad (3e)$$

$$\sum_m c a_m x'_m \leq I \quad (3f)$$

$$(E_m)_{\min} \leq x'_m \leq (E_m)_{\max} \quad (m=1, \dots, M) \quad (3g)$$

$$(L_h)_{\min} \leq y_{hs} \leq (L_h)_{\max} \quad (h=1, \dots, H; s=1, \dots, S) \quad (3h)$$

$$x_m, y_{hs} \text{ integers} \quad (3i)$$

$$z_{pros} \geq 0, w_{proe} \geq 0, x_m \geq 0, x'_m \geq 0, \quad (3j)$$

$$y_{hs} \geq 0, t''_{he}, s_p \geq 0, s'_{pro} \geq 0$$

Figure 4: Model including shifts and overtime

$w_{proe}$ : number of lots of part type  $p$  to be produced according to route  $r$  for which operation  $o$  is carried out in overtime period  $e$ ,

the machine and labour requirement planning problem can be modelled as in Figure 4.

In this model, both the objective function (3a) and all the constraints (3b) to (3j) derive directly from the corresponding ones in the previous model, (2a) and (2b) to (2j), taking into account overtime work whenever appropriate.

This model extension has

- $M+H.S$  integer variables,
- $P + (S + E + 1) \cdot \sum_p \sum_r O_{pr}$  continuous variables, and
- $M.(S + 2) + 3.H.S + H.E + P + \sum_p \sum_r O_{pr}$  restrictions (including  $2M+2H.S$  bounds).

Table 1: Varying generator parameters for the 12 sets of test problems

Problem set	Number of machine types	Number of labour classes	Number of part types	Product demand	
				Mean	Std.deviation
1	10	10	10	50	15
2	10	10	25	50	15
3	10	10	50	50	15
4	10	10	10	100	30
5	10	10	25	100	30
6	10	10	50	100	30
7	25	10	10	200	60
8	25	10	25	200	60
9	25	10	50	200	60
10	25	15	10	200	60
11	25	15	25	200	60
12	25	15	50	200	60

## 5 Computational experience

The basic model and its extensions were solved using the CPLEX implementation of the branch-and-bound method (CPLEX [3]) and (CPLEX [4]) on a DG Aviiion 300 workstation.

The results reported in this section were derived for the machine and labour requirements planning problem including both production shifts and overtime.

Different branching strategies were tested and computational experience was acquired using 12 sets of 5 test problems, aimed at representing a wide range of real world situations. These sets of problems were built up using the problem generator described in Appendix A.

The values or the distributions of the parameters, which varied from problem set to problem set, are presented in Table 1.

The problems were solved using three different branching strategies:

**Strategy A:** uses a depth-first search procedure for selecting the next node to process when backtracking, selects first the up branch at each node and assigns branching priority to all integer variables representing machine types.

**Strategy B:** selects the node with the best objective function for the associated LP relaxation as the next node to process when backtracking and at each node selects the closer branch to be taken first.

**Strategy C:** obtained by mixing the two previous strategies, i.e. the first strategy is used to determine the first integer solution to the problem and then the second strategy is used for the remaining solutions.

For each strategy, the following results were derived for each problem:

Table 2: Order of the node in which the best solution was found, for each adopted strategy

Problem Set	Strategy A		Strategy B		Strategy C	
	Mean	(min, Max)	Mean	(min, Max)	Mean	(min, Max)
1	878	(249, 1522)	512	(223, 888)	1106	(249, 2729)
2	248	(90, 512)	98	(49, 181)	57	(26, 165)
3	67	(34, 126)	74	(54, 105)	54	(34, 100)
4	861	(117, 1681)	700	(43, 1016)	416	(28, 1416)
5	270	(169, 396)	109	(50, 209)	99	(31, 340)
6	96	(47, 142)	79	(62, 111)	87	(37, 185)
7	677	(275, 1203)	306	(67, 3638)	46	(33, 59)
8	307	(92, 472)	123	(50, 748)	205	(60, 507)
9	93	(64, 133)	205	(111, 259)	73	(61, 101)
10	627	(62, 1288)	781	(172, 1176)	52	(48, 61)
11	316	(77, 476)	135	(103, 216)	80	(71, 91)
12	93	(79, 106)	164	(110, 237)	89	(83, 95)

- (i) the order of the node in which the best solution was found (the mean, the minimum and the maximum values obtained for each of the five problems in each set are shown in Table 2 and Figure 5)
- (ii) the difference between the best solution obtained under each strategy and the overall best of the bounds derived from the three strategies, expressed as a percentage of the latter (the mean, the minimum and the maximum values obtained for each of the five problems in each set are shown in Table 3 and Figure 6). The overall best of bounds, for each problem, was obtained by selecting the largest value of the best bound provided by the MIP solver for each run of the problem and across all strategies.

The results included in Tables 2 and 3 were obtained when the solution procedure was limited to 5 minutes of CPU. The computational experience showed that only marginal gains could be obtained by allowing a much larger CPU time. This might be due to the fact that the solutions found very early in the process are quite close to the optimum and then the MIP solver spends a large amount of time fine-tuning the solution.

The global results presented in Tables 2 and 3 suggest that

- (i) the overall quality of the solutions is quite good, taking into account that they were obtained with a limited computational effort and, in the less favourable cases, they are within 10% of the best bound, and thus of the optimum.
- (ii) in general, strategy A is better than the others.

A more detailed analysis and comparison of the results concerning each of the 60 problems studied revealed that

- (i) the best solution was derived from strategy A in 42 cases, from strategy B in 4 cases and from strategy C in 19 cases (there were 5 ties)



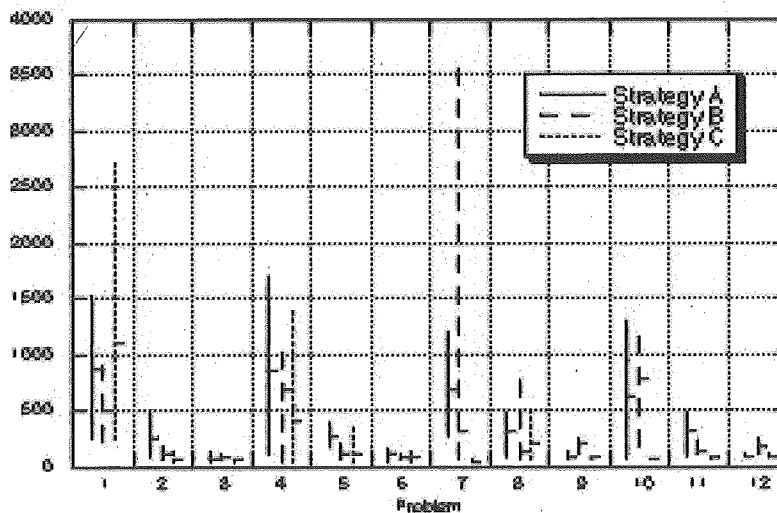


Figure 5: Graphical representation of the data in table 2

Table 3: Percent distance to the overall best bound, for each adopted strategy

Problem Set	Strategy A		Strategy B		Strategy C	
	Mean	(min, Max)	Mean	(min, Max)	Mean	(min, Max)
1	10.1	(5.9, 12.9)	26.2	(8.6, 41.4)	8.6	(4.6, 12.9)
2	4.6	(3.3, 5.7)	16.8	(10.9, 28.9)	5.6	(4.6, 6.6)
3	1.9	(1.3, 2.5)	2.4	(1.1, 4.3)	1.7	(1.4, 2.5)
4	5.5	(3.8, 6.8)	12.7	(6.6, 16.4)	6.1	(3.9, 7.7)
5	2.3	(1.9, 2.9)	4.6	(3.8, 6.2)	2.4	(1.4, 3.3)
6	1.0	(0.8, 1.3)	1.7	(0.6, 2.7)	1.1	(0.5, 1.7)
7	4.6	(3.6, 6.7)	18.9	(0.8, 28.7)	4.9	(3.7, 6.7)
8	1.5	(1.2, 2.0)	14.8	(4.9, 32.9)	1.6	(0.9, 2.1)
9	0.9	(0.4, 2.5)	5.4	(1.5, 9.6)	1.0	(0.4, 2.5)
10	6.3	(4.3, 9.8)	20.7	(12.1, 25.9)	6.8	(5.3, 11.1)
11	2.1	(1.0, 3.1)	19.9	(4.7, 34.9)	2.2	(1.2, 3.7)
12	0.8	(0.2, 1.2)	3.5	(0.4, 6.0)	0.8	(0.2, 1.0)

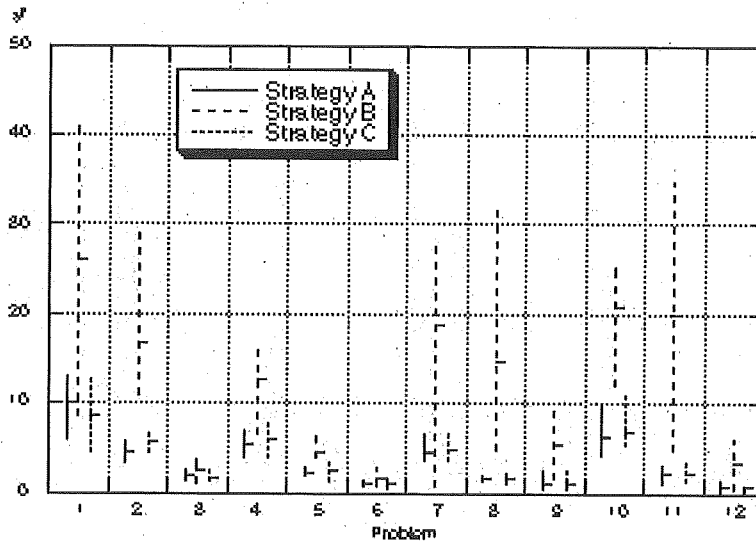


Figure 6: Graphical representation of the data in table 3

- (ii) when the best solution was not derived from strategy A, the solution derived from this strategy was invariably the second best and quite close to the best one
- (iii) strategy C appeared to perform closer to strategy A in situations in which at least for some types of machines, the number of these in the best solution is zero or one
- (iv) when the solutions derived from different strategies led to similar overall costs then they did never differ substantially in terms of the machines and labour required.

It should be noticed that, in addition to specifying the required equipment and labour, the model also specifies the production flows for each part route and for each machine. This information is of crucial importance in the later stages of the layout design problem.

The information that can be obtained from the model is illustrated in Appendix B, which includes a summary of the solution derived using strategy A for one of the problems included in set 4.

## 6 Conclusions

A mixed integer linear programme was proposed to represent the machine and labour requirement planning problem, in situations covering production shifts and overtime work. This model is part of the model basis of a plant layout design support system currently under development.

In addition to specifying the required machinery and labour, the extended model also

defines the production flows for each part route and each machine, information that is of crucial importance in the later stages of the layout design problem.

The application of the model to a large set of problems representing a wide range of real world situations revealed that the quality of the solutions obtainable from a commercially available code is quite good, for acceptable levels of computational effort.

## 7 References

- [1] Bard, Jonathan F. and Feo, Thomas A. (1991), An algorithm for the manufacturing equipment selection problem, *IIE Transactions*, 23 (1), pp. 83-90.
- [2] Chen, M. (1999), A heuristic for solving manufacturing process and equipment selection problems, *International Journal of Production Research*, 37 (2), pp. 359374.
- [3] CPLEX Optimization, Inc. (1991a), Using the CPLEX™ Linear Optimizer.
- [4] CPLEX Optimization, Inc. (1991b), Using the CPLEX™ Mixed Integer Optimizer.
- [5] Kusiak, Andrew (1987), The production equipment requirements problem, *International Journal of Production Research*, 25 (3), pp. 319-325.
- [6] Miller, David M. and Davis, Robert P. (1977), The machine requirements problem, *International Journal of Production Research*, 15 (2), pp. 219-231.
- [7] Miller, David M. and Davis, Robert P. (1978), A dynamic resource allocation model for a machine requirements problem, *AIIE Transactions*, 10 (3), pp. 237-243.
- [8] Roze, Catherine and Kasilingam, Raja, G. (1996), Sizing of manufacturing systems considering process flexibility, *Computers and Industrial Engineering*, 31 (1-2), pp. 151-154

## Appendix A Problem Generator

### (1) Fixed parameters (i.e. parameters which remained unchanged for all the problems)

- (1.1) Number of shifts,  $S=3$
- (1.2) Number of overtime periods,  $E=3$
- (1.3) Total labour time in each shift,  $T_s=1760$
- (1.4) Number of machines of type  $m$  available at the outset,  $(x_0)_m = 0$
- (1.5) Bounds on the numbers of machines to be acquired,  $(E_m)_{\min} = 0$  and  $(E_m)_{\max} = \infty$ , for  $m=1, \dots, M$
- (1.6) Bounds on the numbers of workers to be hired,  $(L_h)_{\min} = 0$  and  $(L_h)_{\max} = \infty$  for  $h=1, \dots, H$
- (1.7) Upper investment limit,  $I = \infty$

### (2) Parameters randomly generated from fixed distributions (i.e. distributions which remained unchanged for all the problems)

- (2.1) Number of routes per part,  $R_p$   
 $R_p \rightsquigarrow \text{Normal} (\mu=3, \sigma=1)$

(2.2) Number of operations per route,  $O_{pr}$

$O_{pr} \rightsquigarrow$  Normal ( $\mu=5, \sigma=2$ )

(2.3) Type of machine used in each operation,  $m$

$m \rightsquigarrow$  Discrete Uniform ( $m=1, \dots, M$ )

(2.4) Labour class of the worker assigned to each operation,  $h$

$h \rightsquigarrow$  Discrete Uniform ( $h=1, \dots, H$ )

(2.5) Processing cost per operation,  $cv_{pro}$

$cv_{pro} \rightsquigarrow$  Normal ( $\mu=13000, \sigma=3000$ )

(2.6) Machine set-up plus processing time per operation,  $t_{pmro}$

$t_{pmro} \rightsquigarrow$  Exponential ( $\mu=25$ )

(2.7) Time spent by a worker on a machine expressed as a proportion of the set-up plus processing time of any operation,  $tr$

$tr$	$p(tr)$
0.25	0.10
0.50	0.20
0.75	0.20
1.00	0.50

(2.8) Upper bound on the overtime work done by any worker on period  $e$  over the whole planning horizon,  $T_{he}$

$T_{he} \rightsquigarrow$  Uniform (0,660) ( $e=1,2$ )

$T_{he} \rightsquigarrow$  Uniform (0,440) ( $e=3$ )

(2.9) Fixed cost per machine type,  $cf_m$

$cf_m \rightsquigarrow$  Uniform (50 000,400 000)

(2.10) Fixed cost per labour class in the day shift,  $cf'_{h1}$

$cf'_{h1} \rightsquigarrow$  Uniform (700 000, 2 000 000)

For the other shifts, a penalty of 15% relative to the day shift was considered

(2.11) Ratio between the labour unit cost during the first overtime period and the day shift,  $prat_1$

$prat_1 \rightsquigarrow$  Normal ( $\mu=0.25, \sigma=0.05$ ).

For each of the other overtime periods,

$prat_2 = prat_1 + 0.25$

$prat_3 = prat_1 + 0.50$

**(3) Parameters with a value that remained unchanged for each problem set but varied from problem set to problem set (values defined in the main text, Table 1)**

(3.1) Number of machine types,  $M$

(3.2) Number of labour classes,  $H$

(3.3) Number of part types,  $P$

**(4) Parameter randomly generated from a Normal distribution whose parameters remained unchanged for each problem set but varied from problem set to problem set (distribution parameters defined in the main text, Table 1)**

(4.1) Product demand,  $N_p$

## Appendix B

A summary of the solution derived using strategy A for one of the problems in set 4 is presented below and it includes:

- the number of machines of each type to be acquired (Table B.1),
- the number of workers of each class to be assigned to each shift (Table B.2),
- the overtime work to be performed by the workers belonging to each labour class in each period over the whole planning horizon (Table B.3),
- and the number of lots of each part type to be produced according to each route (Table B.4) (this table presents also, for each part route, the corresponding number of operations).

Table B.1: Number of machines to be acquired

<b>Machine type</b>	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
<b>No. of machines</b>	3	4	2	1	2	1	1	1	3	1

Table B.2: Number of workers assigned to each shift

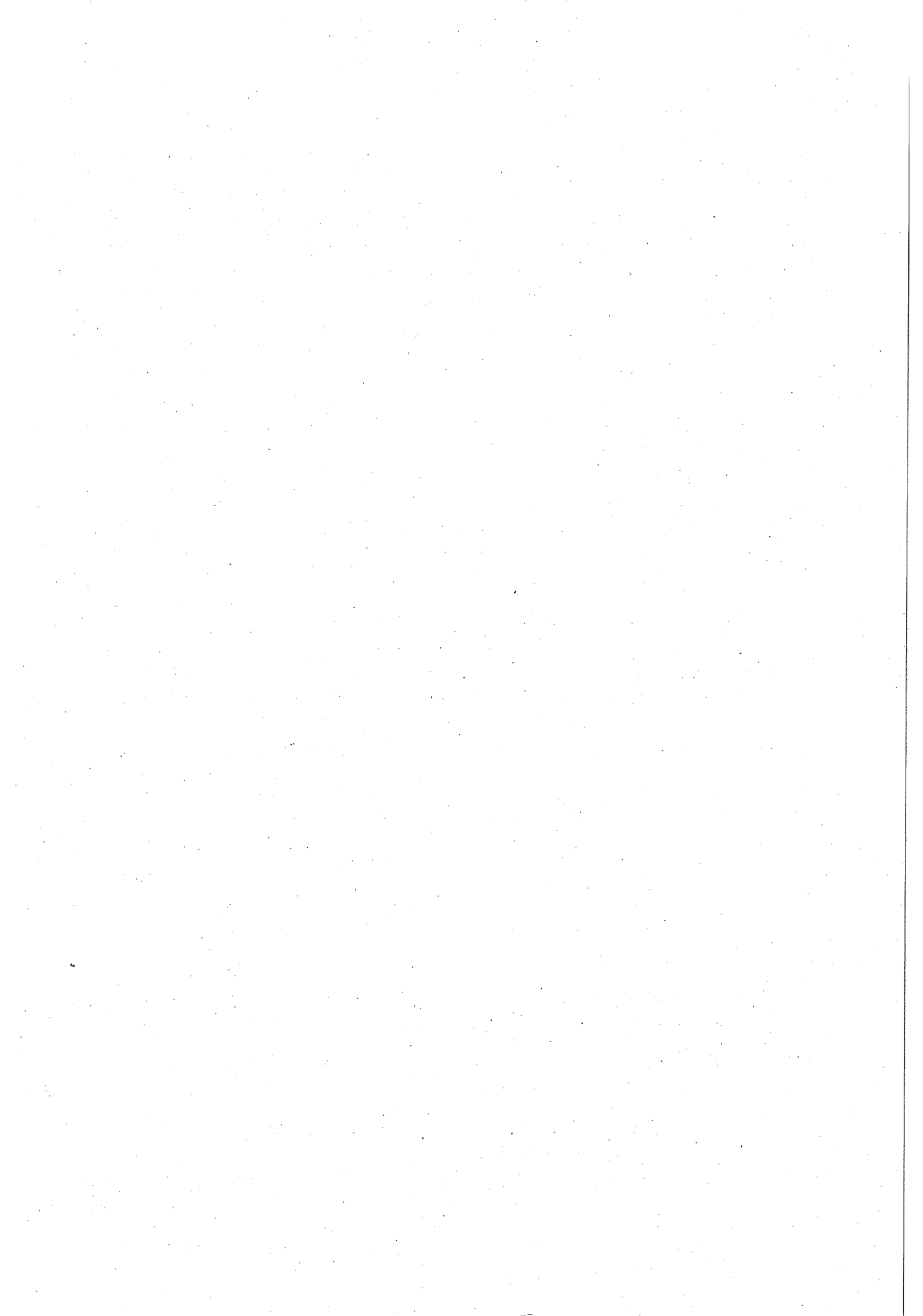
<b>Labour Class</b>	<b>1</b>			<b>2</b>			<b>3</b>			<b>4</b>			<b>5</b>		
<b>Shift</b>	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3
<b>No. of workers</b>	-	1	2	3	1	1	2	-	-	1	-	-	2	-	-
<b>Labour Class</b>	<b>6</b>			<b>7</b>			<b>8</b>			<b>9</b>			<b>10</b>		
<b>Shift</b>	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3
<b>No. of workers</b>	-	-	-	3	1	-	2	-	-	1	2	-	2	1	-

Table B.3: Overtime work requirements

<b>Labour Class</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>	<b>7</b>	<b>8</b>	<b>9</b>	<b>10</b>
<b>Overtime Period</b>	-	1	-	-	1	-	-	1	-	1
<b>Requirements</b>	0	70	0	0	292	0	0	84	0	120

Table B.4: Number of lots of each part type to be produced in each route

<b>Part type</b>	<b>1</b>			<b>2</b>			<b>3</b>			<b>4</b>			<b>5</b>		
<b>Route</b>	(6)	(5)	(3)	(4)	(1)	(4)	(2)	(2)	(2)	(3)	(2)	(1)	(2)	(2)	
<b>(no. operations)</b>															
<b>No. of lots</b>	59	7.5	25.7	35.8	118	71.3	53.7	85							
<b>Part type</b>	<b>6</b>			<b>7</b>			<b>8</b>			<b>9</b>			<b>10</b>		
<b>Route</b>	(7)	(7)	(3)	(2)	(2)	(2)	(3)								
<b>(no. operations)</b>															
<b>No. of lots</b>	54.5	10.5	105	95	107	28	82								



## Sistema de alarme sísmico baseado na sismicidade local e no passado sísmico recente

Maria Cecília Marques Rodrigues \*

\* Departamento de Matemática da FCT–UNL  
mmr@fct.unl.pt

---

### Abstract

A Seismic Alarm System for the Iberian Peninsula was proposed. Given the seismic situation of one zone, the seismic state, for that zone and one time-window is computed. Two precursors were considered:

- *Initial conditions* of the simulation model used to generate the process of occurrences on the Iberian Peninsula, describe the recent seismic past;
- *Local seismicity* - number of occurrences of any magnitude - for a given zone and time-window.

Fuzzy Set Theory was used to assess the alarm state of each precursor. A weighted average of the alarm state of each of precursor is used to computed the global alarm state. The weights involved were computed using the AHP methodology - the percentages of predicted occurrences (or missed), false alarms and alarm life time were the criteria.

Real seismic sets of data were used to calibrate the system.

### Resumo

Modelou-se um Sistema de Alarme Sísmico para a Península Ibérica que, em função da situação sísmica dada, permite determinar o *Grau de Alarme Sísmico*, para uma região, durante um determinado horizonte temporal.

Utilizaram-se dois precursores sísmicos:

- o *passado sísmico recente* na Península Ibérica, que se traduz nas *condições iniciais* do modelo de simulação utilizado para gerar o processo de ocorrências sísmicas na Península Ibérica;
- a *sismicidade local*, ou seja o número de ocorrências sísmicas de qualquer magnitude, registadas na região que se pretende estudar, durante um período de tempo.

Apesar de se terem utilizado apenas dois precursores, o sistema de alarme sísmico foi concebido por forma a poder incorporar outros precursores sísmicos.

Com base na Teoria dos Conjuntos Difusos, determinou-se o grau de alarme relativo a cada um dos precursores utilizados. A média pesada dos valores de grau de alarme origina

o *Grau de Alarme Sísmico*. Os 'pesos' envolvidos nessa média foram obtidos com recurso à metodologia AHP, tomando como critérios, as percentagens de sismos previstos (ou de falhas), falsos alarmes e tempo de alarme.

O Sistema desenvolvido foi calibrado com base em situações sísmicas reais ocorridas na Península Ibérica.

**Keywords:** Seismic alarm system, Simulation, AHP, Fuzzy Sets, Earthquake.

**Title:** Seismic alarm System based on *local seismicity* and *recent seismic past*.

---

## 1 Introdução

Desde há muito se sabe que os sismos são normalmente precedidos por determinados fenómenos, os *precursores sísmicos*, só que a monitorização desses fenómenos é praticamente inexistente. Além disso, a medição de alguns destes fenómenos precursores é extremamente difícil.

Seguidamente enumeram-se os principais precursores sísmicos:

- Aumento do número de pequenos abalos sísmicos;
- Variações das quantidades de Radão dissolvido na água dos poços profundos;
- Variações na relação  $vP/vS$ ;
- Variações do campo geomagnético;
- Variações da resistividade eléctrica da crosta terrestre e
- Comportamentos anormais em animais.

Dos precursores sísmicos atrás referidos, apenas se dispõe de informação suficiente na Península Ibérica para o primeiro (aumento do número de pequenos abalos sísmicos). Para os restantes, não existem actualmente registos, limitando-se a informação disponível a observações pontuais, registadas fora da Península Ibérica.

O objectivo deste trabalho consiste em incorporar, para uma dada região (na Península Ibérica) o maior número possível de informação relativa a precursores sísmicos; avaliando o "grau de preocupação", ou melhor o *grau de alarme relativo a cada precursor sísmico*, combinando posteriormente, os diversos valores de grau de alarme de cada precursor numa média pesada, de tal forma que, quanto melhor for o desempenho do precursor, maior seja o seu peso no *grau de alarme sísmico final*, ou simplesmente *grau de alarme*.

Este sistema de alarme deverá permitir a incorporação de novos precursores, permitindo assim uma actualização do sistema à medida que aumenta o volume e a variedade de informação disponível.



## 2 Modelação de um sistema de alarme sísmico

### 2.1 Simulação do processo de ocorrências sísmicas

Dado que, como já se referiu, apenas se dispôs de dados referentes a registos de ocorrências sísmicas, a construção do sistema de alarme sísmico basear-se-á nos precursores que é possível extrair de catálogos sísmicos. Utilizou-se o catálogo editado pelo Laboratório Nacional de Engenharia Civil (Sousa, Martins e Oliveira, 1992). Este catálogo apresenta, para cada instante de ocorrência, informação relativa a:

- Data;
- Magnitude Richter;
- Intensidade;
- Latitude;
- Longitude e
- Profundidade.

O instante de ocorrência varia de 33 A. C. a 28 de Julho de 1991, e nem todos os registos possuem informação completa.

Dada a grande heterogeneidade dos dados ao longo do tempo, consideraram-se apenas os dados posteriores a 1900. Mesmo neste período de tempo, apenas 11.1% do total de registos, apresentam informação relativa a intensidade e magnitude.

Nos casos em que não se dispunha de informação relativa a Magnitude mas se conhecia o correspondente valor da Intensidade (escala de Mercalli), utilizou-se a metodologia proposta por Costa e Oliveira (Costa, 1989), (Costa e Oliveira, 1991) para se gerar os valores de magnitude, a partir dos correspondentes valores de Intensidade.

De referir ainda que, para cada registo, foi feita a conversão do instante de ocorrência do formato AA:MM:DD:hh:min:seg - AA- Ano, MM - Mês, DD - Dia, hh - hora, min - minuto, seg - segundo, para o formato decimal AA,d.

Para simular o Processo Estocástico Sísmico na Península Ibérica (PESPI) utilizou-se o modelo proposto por Costa (Costa, 1989). Este modelo destaca-se dos tradicionais modelos Poissonianos, por possuir "memória". Com efeito, neste modelo, cada ocorrência é caracterizada por três factores: **Tempo**, **Grandeza** e **Espaço** e depende das duas ocorrências que a precederam, ou seja o passado sísmico recente.

O factor **Tempo** é caracterizado pelos valores dos intervalos de tempo entre sismos consecutivos - **Dt**; a **Grandeza** - **G** é caracterizada pelos valores de magnitude Richter associados às ocorrências; o **Espaço** - **E** é caracterizado pelo número da *zona sísmica* correspondente ao epicentro da ocorrência. Para o factor espaço, adoptou-se a definição de 21 *zonas sísmicas* na Península Ibérica proposta por Costa e Oliveira (Costa, 1989), (Costa e Oliveira, 1991), que abrangem a região delimitada por Longitude 15° W - 4° E, Latitude 34,5° N - 44° N.

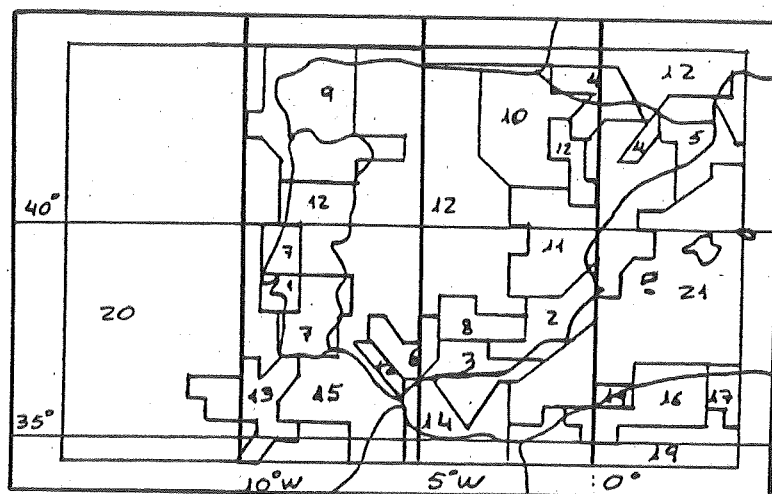


Figura 1: Zonas sísmicas da Península Ibérica

Estas zonas foram reajustadas (de forma a suavizar os seus contornos, relativamente às zonas sísmicas propostas por Costa (Costa, 1989)), conforme se pode ver na figura 1, que apresenta as zonas sísmicas reajustadas.

O modelo de geração do processo de ocorrências sísmicas utilizado admite que:

- o intervalo de tempo entre duas ocorrências sísmicas ( $Dt_i$ ) é dependente dos dois intervalos precedentes ( $Dt_{i-1}$ ,  $Dt_{i-2}$ ), i. e.,  
 $(Dt_{i-2}, Dt_{i-1}) \rightarrow Dt_i$
- a grandeza (magnitude) de uma ocorrência sísmica ( $G_i$ ) é dependente dos valores das grandezas dos dois sismos precedentes ( $G_{i-1}$ ,  $G_{i-2}$ ), bem como do valor do intervalo de tempo entre essa ocorrência e a precedente ( $Dt_i$ ), i. e.,  
 $(Dt_i, G_{i-2}, G_{i-1}) \rightarrow G_i$
- a localização (Espaço) de uma ocorrência sísmica ( $E_i$ ) é dependente do respectivo valor precedente ( $E_{i-1}$ ) bem como da grandeza da ocorrência ( $G_i$ ) e do intervalo de tempo entre essa ocorrência e a precedente ( $Dt_i$ ) i. e.,  
 $(Dt_i, G_i, E_{i-1}) \rightarrow E_i$ .

Assim, para se iniciar a geração do processo de ocorrências sísmicas é necessário caracterizar as *condições iniciais*, (*passado sísmico recente*) ou seja, atribuir valores a

$$Dt_{i-2}, Dt_{i-1}, G_{i-2}, G_{i-1} \text{ e } E_{i-1}.$$

As *condições iniciais* representam o “passado sísmico recente” podendo assim constituir um precursor sísmico, para janelas temporais inferiores a três meses. Com efeito verificou-se que à medida que o horizonte temporal aumenta, diminui a influência das *condições iniciais* no processo de ocorrências sísmicas (veja-se (Rodrigues, 1997)).

Para janelas temporais adequadas, o precursor *condições iniciais* permite, por exemplo, comparar os dois seguintes cenários:

- as duas últimas ocorrências tiveram forte magnitude, registaram-se há pouco tempo, tendo a última ocorrido numa região distante da que se pretende estudar
- as duas últimas ocorrências verificaram-se há bastante tempo, tiveram forte magnitude, mas a última ocorreu na região que se pretende estudar

e verificar qual o mais preocupante.

Note-se que o precursor *condições iniciais* incorpora informação das duas últimas ocorrências na Península Ibérica.

O modelo de simulação utilizado permite também contabilizar o número de ocorrências de qualquer magnitude que tenham ocorrido **na região que se pretende estudar**, durante uma janela temporal  $T_0$ . A este último precursor chamar-se-á *sismicidade local*, e como o nome indica, traduzirá a sismicidade de uma região.

Estão assim identificados dois precursores sísmicos:

- passado sísmico recente - *condições iniciais*
- *sismicidade local*

um de carácter regional (*sismicidade local*) e outro mais geral (*condições iniciais*), podendo o segundo incorporar informação de qualquer lugar na Península Ibérica.

O sistema de alarme sísmico proposto determina primeiramente o grau de alarme de cada um dos precursores utilizados. Para a determinação deste grau de alarme utiliza-se a *Teoria dos Conjuntos Vagos* ou *Teoria dos Conjuntos Difusos (Fuzzy Sets)*.

Os valores de grau de alarme relativos a cada precursor são combinados numa média pesada, de tal forma que quanto melhor for o desempenho de um precursor, maior seja o seu peso na referida média pesada. A determinação dos pesos é feita através da metodologia AHP (Analytic Hierarchy Process).

A figura 2 apresenta uma representação esquemática do sistema de alarme sísmico proposto.

## 2.2 Grau de alarme do precursor condições iniciais

No sistema de alarme sísmico que se pretende construir, cada precursor sísmico deve ter associado um grau de alarme, sendo depois combinados os diversos graus de alarme relativos a cada precursor, de forma a obter-se o **grau de alarme total - grau de alarme sísmico** numa região.

Relativamente ao precursor *condições iniciais*, o sistema deve associar, a cada cenário sísmico recente (expresso nas *condições iniciais* do modelo de simulação do processo de ocorrências sísmicas), um **grau de alarme relativo ao precursor condições iniciais -  $ga_{CI}$** .

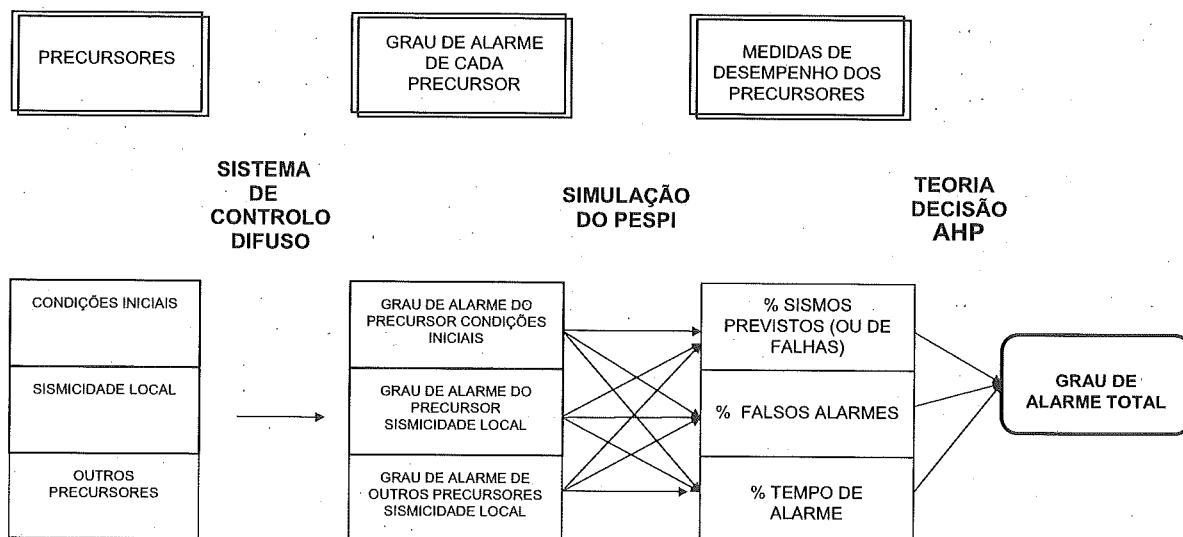


Figura 2: Representação esquemática do Sistema de Alarme Sísmico, com referência às metodologias utilizadas

Para o grau de alarme do precursor em análise, adoptou-se uma escala de limites 0 e 100, tal que, partindo de um determinado cenário sísmico (e consequentemente, de uma *condição inicial*), quanto maior for a probabilidade de ocorrer um sismo na região em causa, durante determinado período de tempo, maior seja o valor  $ga_{CI}$  nessa escala. A escolha dos limites da escala tem como motivo a facilidade de associação a valores percentuais.

Para determinar o grau de alarme do precursor *condições iniciais*, utilizou-se a medida de performance  $sm$  - número médio de ocorrências de magnitude maior ou igual a  $G_0$  (ou entre dois valores estabelecidos de magnitude) que ocorreram na região em estudo, durante o período de tempo  $T_0$ , sabendo-se que se partiu de um determinado cenário sísmico.

Pretende-se encontrar um processo que, a cada *condição inicial* (e correspondente valor  $sm$ ), associe um grau de alarme, de tal modo que, quanto maior for  $sm$  mais alarmante seja o cenário sísmico.

Dado que  $ga_{CI}$  deve estar compreendido entre 0 e 100, para que possa haver correspondência entre  $sm$  e  $ga_{CI}$ ,  $sm$  deve também estar compreendido entre um valor máximo e um valor mínimo.

Para cada região a estudar e cada horizonte temporal, determina-se o *domínio de variação provável de  $sm$*  (veja-se Rodrigues, 1998). Seja  $[Li, Ls]$  este domínio. Este domínio deverá conter, com elevada probabilidade, todos os valores de  $sm$  para cada região a estudar e horizonte temporal considerado. No entanto, em raras situações,  $sm$  poderá não pertencer ao intervalo  $[Li, Ls]$ .

Se  $sm$  for inferior a  $Li$ , então corresponde a um valor muito baixo de  $sm$ , pelo que o valor de grau de alarme relativo ao precursor *condições iniciais* -  $ga_{CI}$  deverá ser 0 (o seu valor mínimo). Analogamente, se  $sm$  for superior a  $Ls$ , então o correspondente valor de  $ga_{CI}$  deverá ser 100 (o seu valor máximo).

Por uma questão de simplificação, o intervalo  $[Li, Ls]$  é substituído pelo intervalo  $A=[0, 1]$ ,

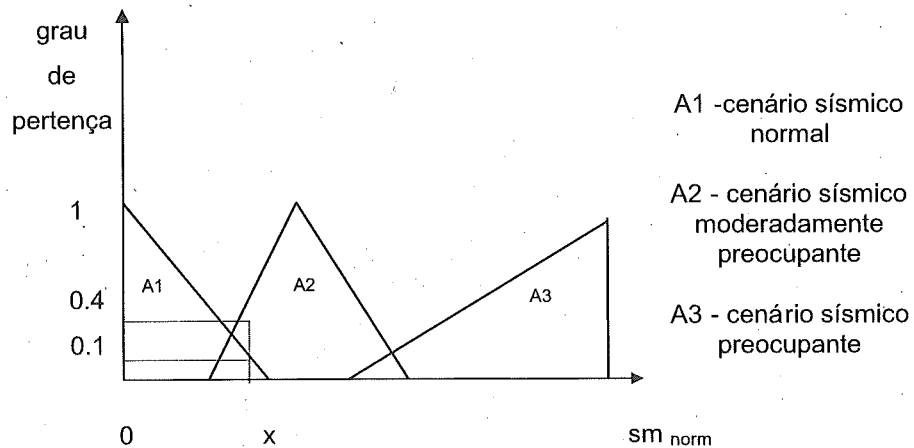


Figura 3: Representação da função pertinência dos conjuntos difusos associados a  $sm_{norm}$

através de uma transformação linear, em que  $Li=0$  e  $Ls=1$ . O valor de  $sm$  normalizado -  $sm_{norm}$ , é obtido da seguinte forma:

$$sm_{norm} = \frac{sm - Li}{Ls - Li}$$

Resta agora encontrar uma forma de avaliar o “grau de preocupação” de um valor de  $sm_{norm}$ . A *Teoria dos Conjuntos Difusos* revela-se extremamente útil para a resolução deste problema. Nesta teoria, um elemento pertence a um conjunto com um *grau de pertinência* (veja-se, por exemplo (Kosko, 1994)). A noção clássica bivalente de pertinência é substituída pela noção de *pertinência com certo grau*. A função pertinência que na lógica bivalente toma valores no conjunto  $\{0, 1\}$ , passa a tomar valores no intervalo real  $[0, 1]$ .

Num caso concreto, será que faz sentido dividir o *domínio de variação provável de sm* (ou equivalentemente o intervalo  $[0, 1]$ ) por forma a que um valor de  $sm_{norm} = x$  seja considerado correspondente a um cenário sísmico normal e um valor  $x + \varepsilon$ , com  $\varepsilon$  infinitamente pequeno, seja considerado correspondente a um cenário preocupante?

Em vez de uma delimitação *rígida* de valores de  $sm_{norm}$ , parece preferível adoptar uma classificação em que o referido valor seja considerado normal e/ou preocupante *com um certo grau*.

Na teoria dos Conjuntos Difusos, a função pertinência pode ter várias formas, entre elas a triangular.

Na figura 3, o valor de  $sm_{norm} = x$  pertence ao *subconjunto difuso A1* com grau de pertinência 0.1, ao *subconjunto difuso A2* com grau de pertinência 0.4 e por último pertence ao *subconjunto difuso A3* com grau de pertinência 0. Na lógica difusa, um elemento pode pertencer a vários subconjuntos com diferentes graus de pertinência. Sempre que não houver perigo de confusão, os subconjuntos difusos designar-se-ão também por conjuntos difusos.

Os sistemas cujas regras lógicas se fundamentam na *Teoria dos Conjuntos Difusos* têm o nome de **Sistemas de Controle Difuso**. Estes sistemas podem ser construídos em três passos fundamentais:

- 1- Definição das variáveis de entrada e saída do sistema (input e output);
- 2- Definição dos conjuntos difusos associados a cada variável;
- 3- Definição das regras lógicas que a cada input associam um output.

Relativamente à situação em análise, a Teoria dos Conjuntos Difusos pode ser utilizada, não só para a classificação de um cenário sísmico em função do respectivo valor de  $sm_{norm}$  mas também na definição do correspondente grau de alarme.

Assim pode conceber-se um Sistema de Controlo Difuso, em que a *variável de entrada* é o valor de  $sm_{norm}$ , calculado com base num número elevado de simulações do processo de ocorrências sísmicas na Península, durante um intervalo de tempo  $-T_0$ , para a região que se pretende estudar, partindo-se da *condição inicial* cujo grau de alarme se pretende determinar e a *variável de saída* é o grau de alarme associado ao precursor *condições iniciais*.

A *variável de entrada*, **A**, será associada ao valor de  $sm_{norm}$ . Serão definidas três classificações de cenários sísmicos (normal, moderadamente preocupante e preocupante).

Designa-se por *centro* o correspondente valor de  $sm_{norm}$  associado ao ponto médio do intervalo correspondente ao cenário "moderadamente preocupante".

Pode-se, agora, definir as três classificações de cenários sísmicos adoptadas:

- A1 - situação sísmica normal -  $[0, centro - 0.05]$ ;
- A2 - situação sísmica moderadamente preocupante -  $[centro - 0.1, centro + 0.1]$ ;
- A3 - situação sísmica preocupante -  $[centro + 0.05, 1]$ .

O valor da variável *centro* deve ser obtido por calibração, conforme se explicará no final desta secção, utilizando-se para o efeito várias *condições iniciais reais* (constantes do catálogo (Sousa, Martins e Oliveira, 1992)). Os valores numéricos intervenientes nesta classificação de cenários sísmicos (0.1 e 0.05) resultaram de um processo de experimentação empírica, com vista a garantir, a sobreposição adequada dos conjuntos difusos A1 e A2, bem como A2 e A3.

A *variável de saída* - **B** é o grau de alarme associado ao precursor *condições iniciais*. Esta variável tem como domínio de variação o intervalo real  $[0,100]$  e podem definir-se 3 conjuntos difusos associados às classificações de graus de alarme:

- B1 - ausência de alarme ou vigilância -  $ga_{CI} \in [0, 40]$ ;
- B2 - vigilância -  $ga_{CI} \in [30, 70]$ ;
- B3 - alarme -  $ga_{CI} \in [60, 100]$ .

A função pertença destes conjuntos difusos, também de forma triangular, tem a seguinte representação gráfica:

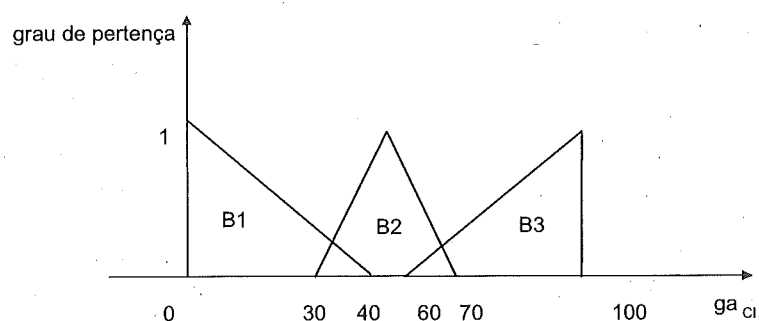


Figura 4: Representação gráfica da função pertinência dos conjuntos difusos associados a  $ga_{CI}$

O Sistema de Controlo Difuso fica completo com a definição das regras lógicas que a cada valor de entrada façam corresponder um valor de saída. Neste sistema de Controlo Difuso, foram definidas as três regras seguintes:

R1: Se a situação sísmica é **normal**, então não é necessário **nem alarme nem vigilância**

$$A1 \Rightarrow B1;$$

R2: Se a situação sísmica é **moderadamente preocupante**, então deve haver **vigilância**

$$A2 \Rightarrow B2 \text{ e}$$

R3: Se a situação sísmica é **preocupante**, então deve ser accionado o sistema de **alarme sísmico**

$$A3 \Rightarrow B3.$$

Note-se que um valor de entrada, pode accionar várias regras em simultâneo, cada uma delas com um certo grau de activação. Por exemplo, o valor de entrada  $x$ , ilustrado na figura 3, acciona a regra R1 a 10% , a regra R2 a 40% e a regra R3 a 0% . Desta forma, em geral, todas as regras são accionadas, em simultâneo, ainda que com diferentes graus.

Na hipótese acabada de referir o valor de saída do sistema depende 10% da regra R1, 40% da regra R2 e 0% da regra R3, obtendo-se assim dois conjuntos difusos de saída (já que a regra R3 é activada a 0% ): **ausência de alarme/vigilância** e **vigilância**. Como estes conjuntos resultam de regras que não estão a funcionar a 100% , então a suas funções pertinência devem traduzir esse facto.

Kosko (Kosko, 1994) propõe uma forma de “reduzir” as funções pertinência, que consiste em “multiplicá-las” pelo grau de activação das regras que as originaram. No caso de funções pertinência de forma triangular, a “redução” é obtida “multiplicando-se” a altura do triângulo pelo grau de activação da respectiva regra.

Como se adoptaram funções pertinência de forma triangular, a altura do triângulo passa a ter como valor o grau de activação da respectiva regra.

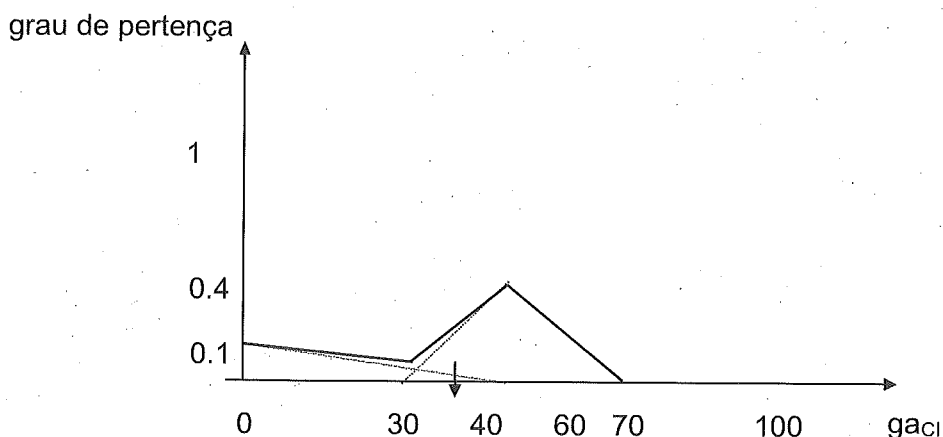


Figura 5: Representação gráfica do conjunto difuso de saída

No exemplo anterior, a altura do triângulo que representa a função pertinência do conjunto difuso **ausência de alarme/vigilância** passa a ser 0.10, e a altura do triângulo que representa a função pertinência do conjunto difuso **vigilância** passa a valer 0.40.

Os dois triângulos sobrepostos são agregados de forma a produzirem um **único Conjunto Difuso de saída**. Esta agregação é feita adicionando (adição normal de funções) as funções pertinência.

Mas o que se pretende é um valor de saída numérico (entre 0 e 100), que representará o grau de alarme relativamente ao precursor *condições iniciais*.

A nova função pertinência que, neste exemplo, é a soma das duas funções de forma triangular, vai ser substituída pelo seu "centro de massa". Este processo de substituir um conjunto difuso por um valor numérico ("rígido"), referido na terminologia anglo-saxónica por "defuzzification", pode ser interpretado como o processo de tornar rígido o Conjunto difuso de saída.

O "*centro de massa*" da função pertinência determina-se, por integração numérica, sendo definido como o ponto do eixo das abcissas onde se atinge metade da área delimitada pelos eixos cartesianos e o conjunto difuso de output, ficando desta forma determinado o **grau de alarme correspondente a uma dada condição inicial**.

Como já foi referido, a valor da variável *centro* deve ser obtido por calibração. Para se determinar o valor de *centro* mais adequado, estabeleceu-se um sistema de pontuação, tal que, quanto melhor  $g_{acI}$  se adapte a situações reais, maior seja a pontuação obtida.

No quadro 1 apresenta-se o sistema de pontuação utilizado.

Para as *condições iniciais* que precederam sismos de **fraca magnitude**, é desejável que o correspondente valor de  $g_{acI}$  indique tratar-se de uma situação de **vigilância** ou até de **ausência de alarme/vigilância**. Com efeito, intuitivamente pode considerar-se que a estes sismos deve estar associada uma situação de vigilância, mas, se se for menos exigente, pode também considerar-se correcta uma situação de ausência de alarme/vigilância. No entanto, considera-se preferível que a situação seja de vigilância, pelo que para este caso se atribuiu uma pontuação de 2 pontos, ao passo que para a situação de ausência de alarme/vigilância se



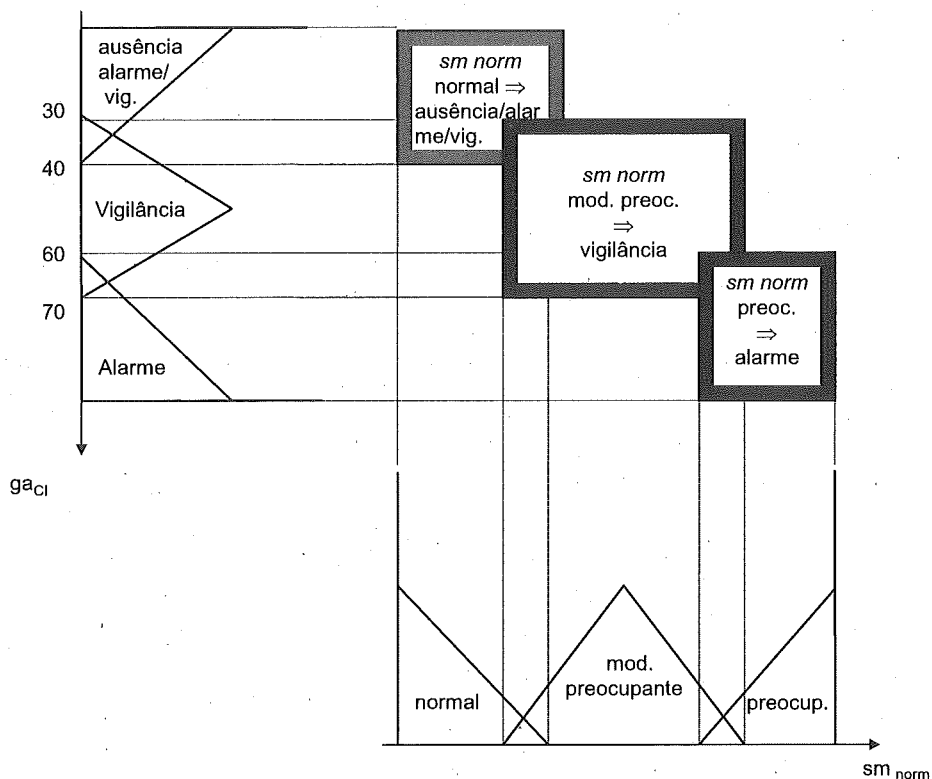


Figura 6: Representação esquemática do Sistema de Controlo Difuso para as *condições iniciais*

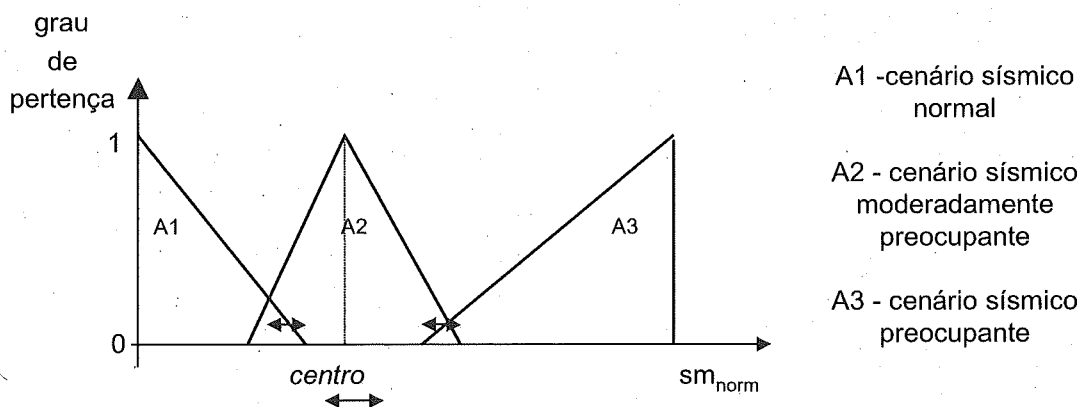


Figura 7: Esquema representativo da calibração do Sistema de Controlo Difuso

Quadro 1: Sistema de pontuação utilizado para a calibração da variável *centro*, para o precursor *condições iniciais*.

	Conjuntos Difusos associados a $g_{CI}$		
	B1	B2	B3
condições que precederam sismos de fraca magnitude	1	2	-2
condições que precederam sismos de forte magnitude	-2	0	2

atribuiu apenas 1 ponto. Se, no entanto, o valor de  $g_{CI}$  indicar tratar-se de uma situação de alarme, o resultado é manifestamente inadequado, atribuindo-se-lhe a pontuação de -2.

Por outro lado, para as *condições iniciais* que precederam sismos de **forte magnitude**, será desejável que o correspondente valor de  $g_{CI}$  indique tratar-se de uma situação de **alarme**, ou quando muito de **vigilância**. No entanto, para estas *condições iniciais* deve haver maior diferença no valor de pontuação para os valores de  $g_{CI}$  associados a situações de vigilância e de alarme. Com efeito, estas *condições iniciais* precederam sismos fortes, pelo que uma situação de vigilância, embora não devendo ser considerada incorrecta, é certamente menos adequada do que uma situação de ausência de alarme/vigilância para *condições iniciais* que precederam sismos de fraca magnitude. À situação de alarme foi atribuída uma pontuação de 2 e à situação de vigilância uma pontuação de 0. A situação de ausência de alarme/vigilância recebeu uma pontuação de -2.

Com vista à escolha do valor mais adequado valor de *centro*, seleccionaram-se do catálogo sísmico utilizado (Sousa, Martins e Oliveira, 1992) *condições iniciais* que precederam sismos de fraca magnitude e também *condições iniciais* que precederam sismos de forte magnitude. Determinou-se para as *condições iniciais* reais seleccionadas  $g_{CI}$ , bem como a pontuação correspondente, para vários valores de *centro* (de acordo com o sistema sintetizado no quadro 2 (veja-se (Rodrigues, 1998))). Para cada por região/horizonte temporal, selecciona-se o valor de *centro* que maximize a soma das pontuações obtidas para as *condições iniciais* experimentadas, ficando assim calibrado o Sistema de Controlo Difuso que permite a determinação do grau de alarme relativo ao precursor *condições iniciais*.

### 2.3 Grau de alarme do precursor sismicidade local

Sabe-se, desde há muito, que sismos de forte magnitude são normalmente precedidos por **abalos premonitórios**, de magnitude fraca, por vezes só perceptíveis em aparelhos de precisão.

Grandori, Guagenti e Perotti (Grandori, Guagenti e Perotti, 1988) chegaram mesmo a provar, para as regiões Italianas de Garfagnana, Friuli e Irpinia, que a probabilidade de um sismo de forte magnitude ser precedido por sismos premonitórios é de cerca de 50% .

No sistema de alarme sísmico proposto, considerou-se a **sismicidade local** - número de sismos de qualquer magnitude, registados numa região, durante um intervalo de tempo  $T_0$  - como um precursor sísmico.

Quadro 2: Estatísticas do número de ocorrências de qualquer magnitude durante períodos de 7, 15 e 30 dias para as regiões de Lisboa e Andaluzia

	Lisboa			Andaluzia		
	7 dias	15 dias	30 dias	7 dias	15 dias	30 dias
valor médio	0.16974	0.36372	0.72711	0.52221	1.11899	2.23698
percentil 80%	0	0	1	0	2	3
máximo	38	51	84	38	44	57

Para a determinação do grau de alarme relativo ao precursor *sismicidade local*, utilizou-se a Teoria dos Conjuntos Difusos, de uma forma semelhante à utilizada para a determinação do grau de alarme relativo ao precursor condições iniciais. Por uma questão de limitação de espaço, apenas serão referidos os aspectos que diferirem da metodologia atrás descrita para a determinação do grau de alarme relativo ao precursor condições iniciais.

No Sistema de Controlo Difuso que permite a determinação do grau de alarme relativo ao precursor *sismicidade local*, considerou-se como **variável de entrada** a *sismicidade local* e como **variável de saída** o grau de alarme associado ao precursor *sismicidade local* - gasL.

À semelhança do que foi feito para o precursor *condições iniciais*, é necessário determinar o **domínio de variação provável** para o valor de *sismicidade local*, para cada região, durante um período de tempo  $T_0$ .

Uma escolha possível para este domínio seria o conjunto limitado pelos valores mínimo e máximo, do número de ocorrências registado, para a região em causa e período de tempo  $T_0$ . Porém, com base nos resultados obtidos a partir do catálogo utilizado (Sousa, Martins e Oliveira, 1992) verifica-se que, para períodos de 7, 15 e 30 dias, a distribuição do número de ocorrências durante esse período de tempo é fortemente assimétrica. O quadro 2 apresenta valores relativos às regiões de Lisboa (constituída, pelas *zonas sísmicas* números 1 e 7) e Andaluzia (constituída, pelas *zonas sísmicas* números 2 e 3).

Como se pode constatar, o número máximo de ocorrências registado é muito superior ao correspondente valor médio. Por exemplo, para a região de Lisboa de 1900 a 1992, o valor médio do número de ocorrências de qualquer magnitude durante um período de 7 dias é 0.16974, e no entanto o número máximo de ocorrências de qualquer magnitude durante igual período de tempo, na mesma região é de 38. Além disso, o percentil 80% da distribuição empírica do número de ocorrências de qualquer magnitude nesta região, para um horizonte temporal de 7 dias é igual a zero, o que significa que na maior parte dos períodos de 7 dias não se registou qualquer ocorrência sísmica.

Considerou-se então preferível, para horizontes temporais até 30 dias, adoptar um domínio de variação provável da *sismicidade local* compreendido entre 0 e 3, admitindo-se que, para valores de *sismicidade local* superiores a três, o grau de alarme do precursor *sismicidade local* deveria ser 100 (o seu valor máximo). O domínio de variação provável deverá ser ajustado para a região e horizonte temporal a estudar.

Considere-se o Sistema de Controlo difuso em que a **variável de entrada** é número de sismos de qualquer magnitude na região em estudo, durante o período de tempo  $T_0$ , e a **variável de saída** o grau de alarme associado ao precursor *sismicidade local*.

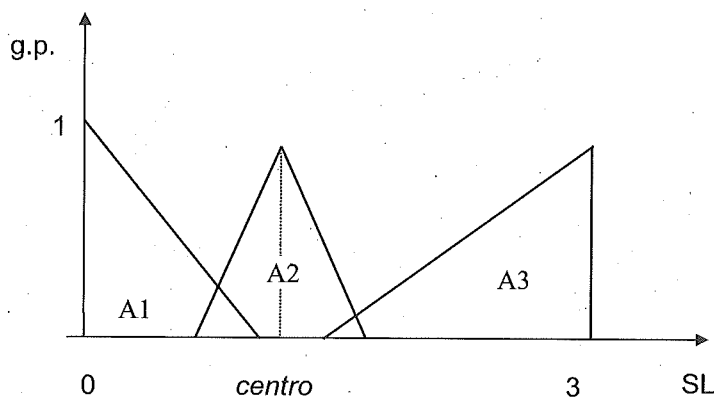


Figura 8: Representação gráfica da função pertinência dos conjuntos difusos associados à *sismicidade local*

Associada à variável de entrada, *A*, definem-se três Conjuntos Difusos associados às três classificações de *sismicidade local* adoptadas:

A1 - sismicidade reduzida -  $[0, \text{centro} - 0.5]$ ;

A2 - sismicidade moderadamente elevada -  $[\text{centro} - 0.7, \text{centro} + 0.7]$  e

A3 - sismicidade elevada -  $[\text{centro} + 0.5, 3]$ .

A variável *centro*, representa o ponto médio do intervalo correspondente ao cenário sísmico “moderadamente preocupante”. O seu valor deve ser obtido por calibração (à semelhança do que foi feito em 2.1), utilizando-se para o efeito vários **valores reais de sismicidade local** (obtidos a partir do catálogo (Sousa, Martins e Oliveira, 1992)). Os valores numéricos intervinientes nesta classificação de cenários sísmicos (0.5 e 0.7) foram obtidos de forma empírica.

Tal como para o precursor *condições iniciais*, adoptou-se funções pertinência de forma triangular para os conjuntos difusos A1, A2 e A3.

A **variável de saída, B**, é associada ao grau de alarme do precursor *sismicidade local*. Esta variável tem como domínio de variação o intervalo  $[0, 100]$  e podem definir-se 3 conjuntos difusos associados às classificações de graus de alarme:

B1 - ausência de alarme ou vigilância -  $\text{gas}_L \in [0, 40]$ ;

B2 - vigilância -  $\text{gas}_L \in [30, 70]$  e

B3 - alarme -  $\text{gas}_L \in [60, 100]$ .

A função pertinência, também de forma triangular é idêntica à apresentada para o grau de pertinência dos conjuntos difusos associados ao grau de alarme do precursor condições iniciais (figura 3).

Quadro 3: Sistema de pontuação utilizado para a calibração da variável *centro*, para o precursor *sismicidade local*

	B1	B2	B3
situações que precederam sismos de fraca magnitude	1	2	-2
situações que precederam sismos de forte magnitude	-2	0	2

As regras lógicas que, a cada valor de *sismicidade local*, associam um grau de alarme (do precursor *sismicidade local*), são as seguintes três regras:

R1: Se a *sismicidade local* é **reduzida**, então não é necessário **nem alarme nem vigilância**;

$$A1 \Rightarrow B1$$

R2: Se a *sismicidade local* é **moderadamente elevada**, então deve haver **vigilância**

$$A2 \Rightarrow B2 \text{ e}$$

R3: Se a *sismicidade local* é **elevada**, então deve ser accionado o sistema de **alarme sísmico**

$$A3 \Rightarrow B3.$$

Tal como no precursor *condições iniciais*, o valor do parâmetro *centro* deve ser tal, que torne verosímeis os resultados obtidos, ou seja, quando se determinar o grau de alarme associado a valores reais de *sismicidade local* que precederam sismos de **forte magnitude**, o valor do grau de alarme obtido deve corresponder a uma situação de **alarme** ou quando muito de **vigilância**. De igual modo, quando se determinar o grau de alarme associado a valores reais de *sismicidade local* **que não precederam sismos**, ou precederam **sismos de fraca magnitude**, valor do grau de alarme obtido deve corresponder a uma situação de **ausência de alarme/vigilância**, ou a uma situação de **vigilância**.

Para se determinar o valor do parâmetro *centro* mais correcto, estabeleceu-se um sistema de pontuação, idêntico ao utilizado para a calibração do correspondente parâmetro no precursor *condições iniciais*, tal que, quanto melhor  $gas_L$  se adapte às situações reais, maior seja a pontuação obtida.

No quadro 3 apresenta-se o sistema de pontuação utilizado.

Depois de determinado o valor adequado do parâmetro *centro*, o Sistema de Controlo Difuso pode ser concretizado, para cada par "região/horizonte temporal".

### 3 Grau de Alarme Sísmico Total

#### 3.1 Decisões do modelação

Pretende-se conceber um Sistema de Alarme Sísmico, que a partir do grau de alarme relativo a cada um dos precursores considerados, origine um *Grau de Alarme Sísmico Total* ou simplesmente *Grau de Alarme Sísmico*.

Como actualmente só existem dados suficientes para que possam ser utilizados os precursores *condições iniciais* e *sismicidade local*, o Sistema de Alarme Sísmico será construído com base nestes precursores, sendo no entanto possível, conceber um aumento futuro do número de precursores a utilizar.

O “input” do Sistema de Alarme Sísmico é a *situação sísmica*, ou seja, o passado sísmico recente, na Península Ibérica (*condições iniciais*), e o número de ocorrências de qualquer magnitude, ocorridas durante um período de tempo  $T_0$ , na região para a qual se pretende determinar o grau de alarme sísmico (*sismicidade local*).

O “output” será o *Grau de Alarme Sísmico - GA*, para a região em causa, durante um período de tempo  $T_0$ , que se poderá traduzir num valor numérico entre 0 e 100. Este valor poderá, de algum modo, ser convertido, por um agente de decisão, em:

- ausência de alarme ou vigilância (situação normal);
- vigilância;
- alarme.

De notar, contudo, que esta associação não deve ser fixa, devendo depender, por exemplo, do *risco sísmico* da região em estudo (o que considera, de algum modo, as especificidades da região no que toca às estruturas de maior risco e à densidade populacional, entre outros factores).

Pode propor-se, por exemplo, para uma região com moderado risco sísmico, a associação seguinte:

$GA \in [ 0, 40 ]$  - ausência de alarme ou vigilância (situação normal);

$GA \in [ 30, 70 ]$  - vigilância;

$GA \in [ 60, 100 ]$  - alarme ;

Verifica-se, neste exemplo, que os três subconjuntos associados a *GA*, não são disjuntos. Por exemplo,  $GA = 65$  indica tratar-se de uma situação de vigilância e também de uma situação de alarme.

Esta classificação parece aplicar-se bem à prática, já que é complicado definir limites rígidos, para as classificação do *Grau de Alarme Sísmico*, mesmo para uma região com risco sísmico conhecido. Mais uma vez se torna útil o recurso à teoria dos Conjuntos Difusos, onde um elemento pode pertencer a diversos Subconjuntos Difusos, com um “certo grau de pertença”.

Para uma região de baixo *risco sísmico*, as situações de alarme e vigilância podem corresponder a valores mais elevados de *GA*, do que as apresentadas no exemplo anterior. Para uma região de elevado *risco sísmico*, deve passar-se o contrário.

Falta então encontrar um processo que permita determinar o *Grau de Alarme Sísmico* para uma região, durante um período de tempo  $T_0$ .

Tendo-se já apresentado a metodologia que permite determinar o grau de alarme relativo aos precursores *condições iniciais* e *sismicidade local*, falta encontrar um processo de os “combinar”, por forma a obter o *Grau de Alarme Sísmico*, numa região, durante um período de tempo  $T_0$ .

Será legítimo “somar” os diversos valores de grau de alarme, relativos a cada precursor e considerar a soma resultante, o *Grau de Alarme Sísmico*? Neste caso, considera-se que cada precursor tem o mesmo contributo para o *Grau de Alarme Sísmico Total*. Porém, se um precursor for “mais eficiente” do que outro, então esta abordagem não estará correcta. Para verificar a “eficiência” de um precursor consideraram-se as seguintes medidas de desempenho:

- percentagem de sismos previstos (ou de falhas);
- percentagem de falsos alarmes;
- percentagem de tempo de alarme.

O *Grau de Alarme Total* será dado pela expressão:

$$GA = fp_{CI} \times ga_{CI} + fp_{SL} \times ga_{SL}, \text{ em que:}$$

$fp_{CI}$  representa o factor de ponderação para o grau de alarme do precursor *condições iniciais*;

$ga_{CI}$  representa o grau de alarme do precursor *condições iniciais*;

$fp_{SL}$  representa o factor de ponderação para o grau de alarme do precursor *sismicidade local*;

$ga_{SL}$  representa o grau de alarme do precursor *sismicidade local*.

Os **factores de ponderação**, ou **pesos** são calculados com base nas medidas de desempenho dos precursores, e devem ser tais que, quanto melhor for o desempenho do precursor, maior seja o valor do respectivo factor de ponderação.

Por exemplo, se se considerasse apenas como medida de desempenho a *percentagem de sismos previstos*, e se para os precursores *condições iniciais* e *sismicidade local*, ela apresentasse os valores de, respectivamente, 30% e 15%, não restariam dúvidas de que o precursor *condições iniciais* apresentava um desempenho melhor do que o precursor *sismicidade local*. Neste caso, o cálculo de *Grau de Alarme* seria imediato:

$$GA = 2 / 3 \times ga_{CI} + 1 / 3 \times ga_{SL} .$$

Porém, a percentagem de sismos previstos não é a única medida de desempenho utilizada, pelo que se está perante um problema de *Análise Multicritério*, sendo os critérios as medidas de desempenho dos precursores sísmicos utilizados.

Utilizou-se a metodologia AHP (veja-se (Saaty, 1990)), para determinar factores de ponderação ou pesos a atribuir ao grau de alarme relativo a cada precursor.

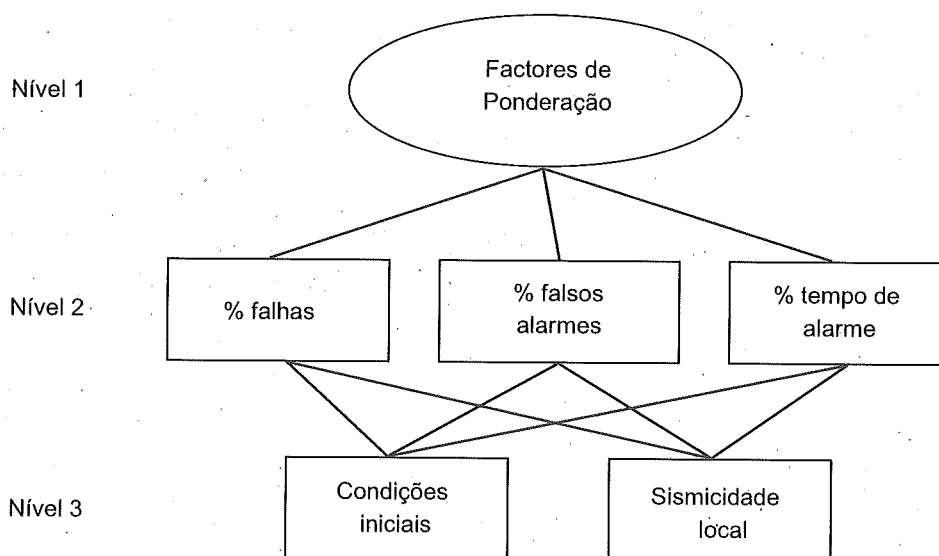


Figura 9: Hierarquia representativa da atribuição dos factores de ponderação do grau de alarme relativo a cada precursor

Quadro 4: Escala de comparações utilizada na metodologia AHP

Intensidade de importância	Definição
1	mesma importância
3	pequena importância de uma sobre a outra
5	importância grande de uma sobre a outra
7	importância muito grande de uma sobre a outra
9	importância absoluta de uma sobre a outra
2, 4, 6, 8 n <sup>os</sup> racionais	valores intermédios entre os valores adjacentes razões resultantes da escala

Ao aplicar esta metodologia, o **objectivo** é a determinação dos pesos que irão multiplicar o grau de alarme de cada precursor (veja-se figura 9). Os **critérios** são as medidas de desempenho dos precursores utilizados (nível 2 da hierarquia). O último nível da hierarquia é constituído pelos factores de ponderação de cada um dos precursores sísmicos, cuja determinação constitui o objectivo.

O gestor do Sistema de Alarme Sísmico terá de definir a importância relativa das medidas de desempenho dos precursores sísmicos utilizados.

A definição dessa "importância" depende do gestor do sistema e da região em causa, nomeadamente do seu *risco sísmico*.

Saaty (Saaty, 1990) propõe uma escala de comparações de 1 a 9, que se apresenta no Quadro 4.



Considere-se a comparação das medidas de desempenho, representadas na seguinte *matriz de julgamentos*:

	% falhas	% falsos alarmes	% tempo de alarme
% falhas	1	1	1/3
% falsos alarmes	1	1	1/5
% tempo de alarme	3	5	1

Os valores intervenientes na matriz apresentada referem-se à escala de comparações atrás referida (quadro 4).

Os valores inscritos nesta matriz são obviamente dependentes do gestor do Sistema de Alarme Sísmico.

Neste caso, para o gestor do Sistema de Alarme, é “mais importante” (ainda que não muito), utilizar um elevado *tempo de alarme* do que *não prever* um sismo. Segundo a escala de comparações utilizada na metodologia AHP, então o elemento (3,1) da *matriz de julgamentos* deve valer 3.

Analogamente, se o gestor considera que um *tempo de alarme* elevado é “muito mais importante” do que um *falso alarme*, então segundo a mesma escala, o elemento (3, 2) da *matriz de julgamentos* deve valer 5.

Depois de construída a matriz de julgamentos, determina-se o correspondente vector de prioridades, cujas componentes indicam a importância percentual de cada característica comparada. Este vector corresponde ao vector próprio principal normalizado da matriz de julgamentos.

Utilizou-se o software desenvolvido pela “EXPERT CHOICE” para determinar o *vector de prioridades* correspondente à *matriz de julgamentos* anterior, obtendo-se:  $[0.185 \ 0.156 \ 0.659]^T$  com um valor de razão de Inconsistência de 0.028 (um valor muito aceitável, já que, segundo Saaty, (Saaty, 1990), os valores desta razão deverão ser desejavelmente, inferiores a 0.10).

Cada precursor sísmico deve agora ser comparado à luz de cada critério utilizado, neste caso, as medidas de desempenho dos precursores sísmicos, sendo necessário calcular três matrizes de julgamentos e correspondentes vectores de prioridades. Para tal, dada uma situação sísmica, deve começar-se por determinar o grau de alarme relativo a cada precursor utilizado, bem como os valores das correspondentes medidas de desempenho.

Suponha-se, a título de exemplo, que relativamente à medida de desempenho *percentagem de falhas*, se obteve os valores de 0.50 e 0.25, para os precursores *condições iniciais* e *sismicidade local*, respectivamente. Dado que se pretende um valor de *percentagem de falhas* tão baixo quanto possível, torna-se evidente que, relativamente a esta medida de desempenho, o precursor *sismicidade local* é preferível ao precursor *condições iniciais*.

Face aos valores indicados (0.50 e 0.25) torna-se possível assumir que, relativamente à *percentagem de falhas*, o precursor Sismicidade Local é duas vezes “melhor” do que o precursor Condições Iniciais. Assim, torna-se possível construir a correspondente *matriz de julgamentos*:

	CI	SL
CI	1	2
SL	0.5	1

De notar que esta matriz não está agora associada directamente a preferências, mas resulta da comparação de resultados numéricos obtidos.

O *vector de prioridades* correspondente, é  $[0.667 \ 0.333]^T$ , o que revela um melhor desempenho do precursor Condições Iniciais, contrariando aparentemente, os resultados intuitivos. Este facto resulta de agora se estar a comparar valores numéricos resultantes de “erros” (*falhas, falsos alarmes, etc.*).

Como se pretende determinar os factores de ponderação para os graus de alarme relativos a cada precursor, de modo a que, quanto maior for o valor do factor de ponderação, melhor seja o desempenho do precursor em análise, o *vector de prioridades* anteriormente determinado deve ser convertido em  $[1 - 0.667 \ 1 - 0.333]^T = [0.333 \ 0.667]^T$ , revelando agora um melhor desempenho do precursor Sismicidade Local.

De notar que, ao comparar valores numéricos, neste caso percentagens de falhas, não se utilizou a escala de comparações atrás referida (quadro 4), mais sim os quocientes dos valores numéricos encontrados. Como resultado, nestas situações o vector de prioridades corresponde à média normalizada dos valores experimentais obtidos.

O cálculo dos factores de ponderação relativos aos precursores utilizados é feito, multiplicando a matriz cujas colunas são os vectores de prioridades transpostos, relativos a cada medida de desempenho, pelo vector de prioridades relativo às medidas de desempenho, anteriormente calculado ( $[0.185 \ 0.156 \ 0.659]^T$ ).

Pode agora, finalmente determinar-se o grau de alarme total para cada região/horizonte temporal, através da fórmula

$$GA = fp_{CI} \times ga_{CI} + fp_{SL} \times ga_{SL}.$$

### 3.2 Alguns resultados obtidos

A título de exemplo, apresentam-se 6 situações sísmicas reais, que se reproduzem no quadro 5 e que foram obtidas a partir do catálogo sísmico utilizado (Sousa, Martins e Oliveira, 1992).

Estas situações ocorreram na região da Andaluzia e foram numeradas de 1 a 6, tendo as duas primeiras precedido sismos de fraca magnitude (magnitude Richter entre 3 e 4) e as restantes precedido sismos de forte magnitude (magnitude Richter superior a 5).

O quadro 5 apresenta as 6 situações sísmicas reais estudadas para a região da Andaluzia.

Calcularam-se as medidas de desempenho:

- percentagem de sismos previstos (ou de falhas);
- percentagem de falsos alarmes e
- percentagem de tempo de alarme,

para os precursores *condições iniciais* e *sismicidade local*. De seguida descreve-se de forma sumária o processo de determinação das medidas de desempenho.

Quadro 5: Situações sísmicas reais experimentadas para a região da Andaluzia

Sit. nº	Condições Iniciais								Sism. Loc.	
	Data	G	E	Dt		G		E	7	15
		i	i	i-2	i-1	i-2	i-1	i-1	dias	dias
1	1953.2834951	2.74	2	0.0216391	0.0151964	4.56	3.98	16	1	1
2	1991.2582397	2.9	3	0.0080164	0.0089478	2.8	3.5	4	0	0
3	1953.3443953	5.39	2	0.0028980	0.0000309	3.83	3.6	2	1	2
4	1975.5990304	5.20	3	0.0104650	0.0043332	3.46	3.6	9	1	1
5	1956.3068978	5.15	3	0.0001817	0.0000114	3.21	2.9	3	9	9
6	1984.6999738	5.00	3	0.0030389	0.0016706	2.5	4.1	2	3	6

Quadro 6: Representação das situações possíveis associadas ao desempenho do precursor *condições iniciais*

Sistema de Alarme	Situação Sísmica	
	$G < G_0$	$G \geq G_0$
Não Alarme	sucesso	insucesso : falha do sistema
Alarme	insucesso : falso alarme	sucesso : sismo previsto

### 3.2.1 Precursor condições iniciais

Se se exigir que, no processo de ocorrências sísmicas, ocorra uma *condição inicial* exactamente igual, a uma previamente fixada que se pretende avaliar, muito dificilmente isso acontecerá. Optou-se então, por verificar quando ocorrem *condições iniciais* “próximas” da *condição inicial* que se pretende estudar. Simula-se o processo de ocorrências sísmicas e verifica-se, para cada ocorrência, se as condições que a precederam são “parecidas” com a *condição inicial* que se pretende estudar (veja-se (Rodrigues, 1998)).

No caso da condição ser “parecida” com a *condição inicial* em análise é accionado o sistema de *alarme sísmico relativamente ao precursor condições iniciais*, que permanecerá activo durante um período de tempo  $T_0$ . Se, durante a situação de alarme, ocorrer na região em estudo, outro sismo de magnitude maior ou igual a  $G_0$ , a situação de alarme é prolongada durante um período de duração  $T_0$ , a contar desse momento.

Se, durante a situação de alarme, se verificar uma ocorrência de magnitude maior ou igual a  $G_0$ , na região em estudo, considera-se que se está perante um *sismo previsto*. Se porém, durante o período de tempo  $T_0$  não se verificar qualquer ocorrência de magnitude maior ou igual a  $G_0$ , considera-se uma situação de *falso alarme*.

Pode também acontecer que ocorra um sismo de magnitude maior ou igual a  $G_0$ , sem que se estivesse numa situação de alarme, ocorrendo então o que se considera uma *falha* do sistema. O quadro 6 esquematiza as situações possíveis.

O quadro 7 apresenta as medidas de desempenho do precursor *condições iniciais* para as 6 situações sísmicas estudadas na região da Andaluzia

Quadro 7: Medidas de desempenho para o precursor *condições iniciais*, na região da Andaluzia

T0	Cl. n�	% previstos	% falhas	% f. alarmes	t. alarme
7 dias	1	23.65	76.35	44.31	13.12
	2	36.72	63.28	35.67	23.24
	3	6.20	93.80	66.03	2.10
	4	31.31	68.69	65.17	15.45
	5	14.34	85.66	41.68	6.02
	6	13.56	86.44	69.88	5.91
15 dias	1	36.05	63.95	32.88	23.10
	2	52.65	47.35	21.15	38.11
	3	9.58	90.42	54.16	4.35
	4	45.05	54.95	44.80	29.72
	5	21.17	78.83	33.52	11.58
	6	20.95	79.05	57.08	12.17

Quadro 8: Representa o das situa es possíveis associadas ao desempenho do precursor *sismicidade local*

	Situa�o Sísmica	
Sistema de Alarme	<i>Sismicidade Local</i> < K	<i>Sismicidade Local</i> ≥ K
Não Alarme	sucesso	insucesso : falha do sistema
Alarme	insucesso : falso alarme	sucesso : sismo previsto

### 3.2.2 Precursor sismicidade local

Considera-se que, um sistema de alarme sísmico baseado neste precursor deve ser tal que, se o valor de *sismicidade local* for maior ou igual a um valor pré-fixado **K**, o sistema deve entrar em "alarme" e assim permanecer durante um período de tempo T0.

Caso o valor de *sismicidade local* seja inferior a **K**, o sistema não deve entrar em alarme.

Para determinar os valores das medidas de desempenho do precursor *sismicidade local* simula-se o processo de ocorrências sísmicas na Península Ibérica, durante um largo período de tempo (da ordem de dezenas ou centenas de anos) e, sempre que durante o período de tempo T0 a *sismicidade local* for maior ou igual a **K**, considera-se que o sistema deve entrar em situa o de alarme e assim permanecer durante um período de tempo - T0. Se durante esse tempo ocorrer um abalo sísmico de magnitude considerável (maior ou igual a G0), considera-se que esse sismo foi **previsto**. Caso contrário, obteve-se um **falso alarme**.

Se, durante um período de tempo T0 a *sismicidade local* não exceder **K**, considera-se que o sistema não deve entrar em situa o de alarme. Se durante uma situa o de ausência de alarme, ocorrer um abalo de magnitude maior ou igual a G0, esse sismo não foi previsto, ou seja ocorreu uma **falha** do sistema.

O quadro 8 representa as situa es possíveis associadas ao desempenho do precursor *sismicidade local*.

O quadro 9 apresenta as medidas de desempenho do precursor *sismicidade local*, para as

Quadro 9: Medidas de desempenho do precursor *sismicidade local*, para a região da Andaluzia

T0	K	% previstos	% falhas	% f. alarmes	% t. alarme
7 dias	1	52.0	48.0	88.1	37.0
	2	27.8	72.2	86.3	17.2
	3	15.3	84.7	85.5	8.9
	4	8.7	91.3	84.1	4.6
	6	2.4	97.6	82.1	1.1
	9	0.1	99.9	93.9	0.1
	10	0.1	99.9	92.7	0.1
15 dias	1	67.8	32.2	80.0	56.7
	2	44.4	55.6	79.0	35.4
	3	28.9	71.1	79.1	23.2
	4	19.4	90.6	78.8	15.4
	6	7.6	92.4	79.1	6.1
	9	1.6	98.4	77.3	1.2
	10	1.0	99.0	77.0	0.7

situações sísmicas estudadas na região da Andaluzia

Como se viu anteriormente, nos casos estudados em que o número de sismos observado num intervalo de tempo T0 (7 ou 15 dias) é superior a três, considerava-se que o grau de alarme relativo ao precursor *sismicidade local* devia ser igual a 100. Porém, ao determinar-se a percentagem de sismos previstos, no caso em que o alarme era accionado quando ocorriam valores de *sismicidade local* superiores a três, obteve-se uma reduzidíssima percentagem de sismos previstos (veja-se quadro 9), o que irá implicar baixos valores no factor de ponderação desse precursor. Isto deve-se ao facto de, nesta situação, a *percentagem de tempo de alarme* ser também muito baixa, o que significa que, só muito raramente estas situações ocorreram efectivamente no processo de ocorrências sísmicas da Península Ibérica.

Por outro lado, quanto maior for o valor de *sismicidade local*, maior deverá ser o respectivo grau de alarme. Chega-se assim a uma contradição.

Para contornar esta dificuldade, nos casos em que, o valor de *sismicidade local* ultrapassar três, não se deve calcular o valor dos factores de ponderação a partir das medidas de desempenho dos precursores, devendo-se antes efectuar a média aritmética dos valores de grau de alarme encontrados para os dois precursores utilizados. O mesmo se deve fazer no caso do valor de *sismicidade local* ser zero.

Analogamente, quando o grau de alarme do precursor *condições iniciais* for 0 ou 100, deve, também efectuar-se a média aritmética dos valores de grau de alarme relativos aos dois precursores.

O quadro 10 apresenta os resultados para grau de alarme relativo a cada um dos precursores utilizados, bem como as respectivas medidas de desempenho, para as 6 situações sísmicas reais estudadas na região da Andaluzia, tendo-se considerado  $K = 3$ .

Quadro 10: Grau de alarme e medidas de desempenho dos precursores, para as situações sísmicas reais estudadas na região da Andaluzia

T0	Sit. n°	Condições Iniciais				Sismicidade Local			
		% falhas	% f.alarmes	% t. alarme	gaCI	% falhas	% f.alarmes	% t. alarme	gasL
7 dias	1	76.4	44.3	13.1	53.0	48.0	88.1	37.0	49.9
	2	63.3	35.7	23.2	50.4	-	-	-	11.6
	3	93.8	66.0	2.1	49.9	48.0	88.1	37.0	49.9
	4	68.7	65.2	15.5	88.0	48.0	88.1	37.0	49.9
	5	85.7	41.7	6.0	81.1	-	-	-	100
	6	86.4	69.9	5.9	87.9	84.7	85.5	8.9	88.2
15 dias	1	64.0	32.9	23.1	48.3	32.2	80.0	56.7	49.9
	2	47.4	21.2	38.1	50.6	-	-	-	11.6
	3	90.4	54.2	4.4	88.1	55.6	79.0	35.4	88.1
	4	55.0	44.8	29.7	88.1	32.2	80.0	56.7	49.9
	5	78.8	33.5	11.5	87.9	-	-	-	100
	6	79.1	57.1	12.2	88.1	-	-	-	100

Quadro 11: *Grau de Alarme Total* para as situações reais estudadas na região da Andaluzia

T0	Sit. n°	fpCI	gaCI	fpSL	gasL	GA	situação
7 dias	1	0.662	53.0	0.338	49.9	52.0	vig.
	2	0.5	50.4	0.5	11.6	31.0	norm./vig.
	3	0.775	49.9	0.225	49.9	49.9	vig.
	4	0.630	88.0	0.370	49.9	73.9	alarme
	5	0.5	81.1	0.5	100	90.6	alarme
	6	0.574	87.9	0.426	88.2	85.6	alarme
15 dias	1	0.641	48.3	0.359	49.9	48.9	vig.
	2	0.5	50.6	0.5	11.6	31.1	vig.
	3	0.749	88.1	0.251	88.1	92.1	alarme
	4	0.601	88.1	0.399	49.9	72.9	alarme
	5	0.5	87.9	0.5	100	94.0	alarme
	6	0.5	88.1	0.5	100	94.1	alarme

O quadro 11 apresenta o grau de alarme de cada precursor, respectivos factores de ponderação, e o Grau de Alarme Total (GA). A última coluna, apresenta a classificação da situação sísmica de acordo com o seguinte critério:

$GA \in [0, 40]$  - ausência de alarme ou vigilância (situação normal);

$GA \in [30, 70]$  - vigilância;

$GA \in [60, 100]$  - alarme ;

O quadro 11 permitem concluir o seguinte: em todos os casos estudados, o factor de ponderação do precursor *condições iniciais* é maior ou igual ao factor de ponderação do precursor *sismicidade local*. Estes resultados indicam que, para as situações sísmicas analisadas o precursor *condições iniciais* apresenta melhor desempenho do que o precursor *sismicidade local*.

No quadro anterior verifica-se também que às situações sísmicas números 1 e 2 (que precederam sismos de fraca magnitude) corresponde uma classificação de situação sísmica normal

ou de vigilância. Para as situações sísmicas números 3 a 6 (que precederam sismos de forte magnitude), corresponde uma classificação de situação sísmica de alarme, com excepção uma única excepção a que corresponde uma situação de vigilância.

Note-se que estes resultados foram obtidos, admitindo a comparação das medidas de desempenho, apresentadas anteriormente, e que se traduziram no *vector de prioridades* já calculado ( $[0.185 \ 0.156 \ 0.659]^T$ ). Se este vector for diferente, o que corresponde a uma diferente avaliação das medidas de desempenho por parte do utilizador do sistema de alarme sísmico, os resultados poderão obviamente diferir dos apresentados.

Para efectuar a análise de sensibilidade utilizou-se o software da "EXPERT CHOICE" (EXPERT CHOICE, (1986)). Este software permite verificar as alterações nos factores de ponderação, quando se altera a prioridade dos critérios (medidas de performance, neste caso). Por questões de limitação de espaço não é possível apresentar as análises efectuadas. Veja-se (Rodrigues, 1998).

## 4 Conclusões

Modelou-se um Sistema de Alarme Sísmico para a Península Ibérica baseado nos precursores *Sismicidade Local e Condições Iniciais*.

Não foi possível, por insuficiência de dados disponíveis, incorporar, no Sistema de Alarme Sísmico precursores de natureza Geofísica ou Geotectónica.

De referir que o Sistema de Alarme Sísmico, tal como foi concebido, pode permitir, com as devidas adaptações, a introdução de outros precursores sísmicos.

As análises desenvolvidas envolvem a concepção de um Sistema de Controlo Difuso associado a cada precursor (Condições Iniciais e Sismicidade Local), a simulação do processo estocástico sísmico na Península Ibérica (PESPI) e o recurso à metodologia AHP para permitir a determinação do Grau de Alarme Total.

O sistema de alarme sísmico em análise apresenta algumas limitações:

- os precursores Condições Iniciais e Sismicidade Local diminuem a sua influência ao fim de algum tempo, (veja-se Rodrigues, 1998) o que implica que um sistema de alarme baseado nestes precursores não possa ser accionado por horizontes temporais superiores a alguns meses;
- como já foi referido não existe, na Península Ibérica, informação relativa a precursores cuja influência se mantenha por mais tempo, como é o caso, por exemplo, das concentrações de Radão nas águas de poços profundos, pelo que, de momento o horizonte temporal do Sistema de Alarme concebido não pode exceder alguns meses;
- outra limitação da abordagem seguida tem como génese o próprio modelo de geração do processo de ocorrências sísmicas adoptado. Costa (Costa, 1989) refere algumas dessas limitações, nomeadamente, as que decorrem do facto de não se ter filtrado o catálogo sísmico utilizado de fenómenos premonitórios nem de réplicas, tendo-se utilizado apenas

a informação do catálogo de ocorrências sísmicas correspondente ao período posterior a 1900.

Relativamente às potencialidades do modelo apresentado destaque-se o seguinte:

- o Sistema de Alarme Sísmico apresentado permite, face a uma situação sísmica dada, avaliar o grau de alarme, ou o “grau de preocupação”, para uma região, durante um horizonte temporal. Face a uma situação sísmica concreta, é possível avaliar o grau de preocupação, e eventualmente, tomar decisões. Estas devem estar relacionadas com o *risco sísmico* da região em causa. Isto é, em função das características particulares da região em estudo, como sejam a existência de estruturas de risco tais como centrais nucleares, barragens, etc., decidir as medidas a tomar;
- a utilização metodologia AHP foi feita num contexto bem diverso do original (apoio multicritério à decisão), permitindo assim o alargamento desta metodologia a outros domínios;
- o Sistema de Alarme Sísmico proposto, pode permitir, com as devidas adaptações, a introdução de outros precursores sísmicos.

O Sistema de Alarme Sísmico apresentado, além de permitir utilizar outros precursores sísmicos, deverá encorajar a monitorização de fenómenos sísmicos, com vista à criação de um Sistema de Alarme Sísmico mais alargado.

## 5 Bibliografia

**COSTA**, R. A. (1989) - "Modelação do Processo Estocástico Sísmico na Península Ibérica", Dissertação de Doutoramento. IST-UTL

**COSTA**, R. A. ; **OLIVEIRA**, C.A. (1991) - "On the "Intensity-Magnitude" interrelationships in the Ibero- Mogrebi region", Monografia n° 8, Instituto Geográfico Nacional-Espanha.

**COSTA**, R. A. ; **OLIVEIRA**, C. S. (1991) - "Defining seismic zones in the Ibero Mogrebi Region", Proc. 9 Th. European Conference on Earthquake Engineering - Moscovo, pp 279-288.

**EXPERT CHOICE**, (1986) - "Expert Choice" (Manual), Besed on the Analytic Hierarchy Process, McLean, Virginia

**GRANDORI**, Giuseppe ; **GUAGENTI**, Elisa ; **PEROTTI**, Federico (August 1988) - "Alarm Systems Based on a pair of short-term earthquake precursors", Bulletin of Seismological Society of America, Vol. 78, 4, pp 1538-1549.

**GRANDORI**, Giuseppe; **GUAGENTI**, Elisa (1993) - "Multiprecursor systems based on non independent precursors", Proceedings of the ECE/UN, Seminar on Prediction of Earthquakes. November, 14-18, Lisbon - Portugal.

**KOSKO**, Bart (1994) - "Fuzzy Thinking: the new science of Fuzzy Logic", Flamingo, Harper-Collins Publishers, London.

**RODRIGUES**, M. Cecília M.; **COSTA**, Ruy A. (1997) - "Estudo comparativo da influência das condições iniciais num modelo de simulação do processo de ocorrências sísmicas na Península Ibérica", *Investigação Operacional*, N°1 Vol. 17

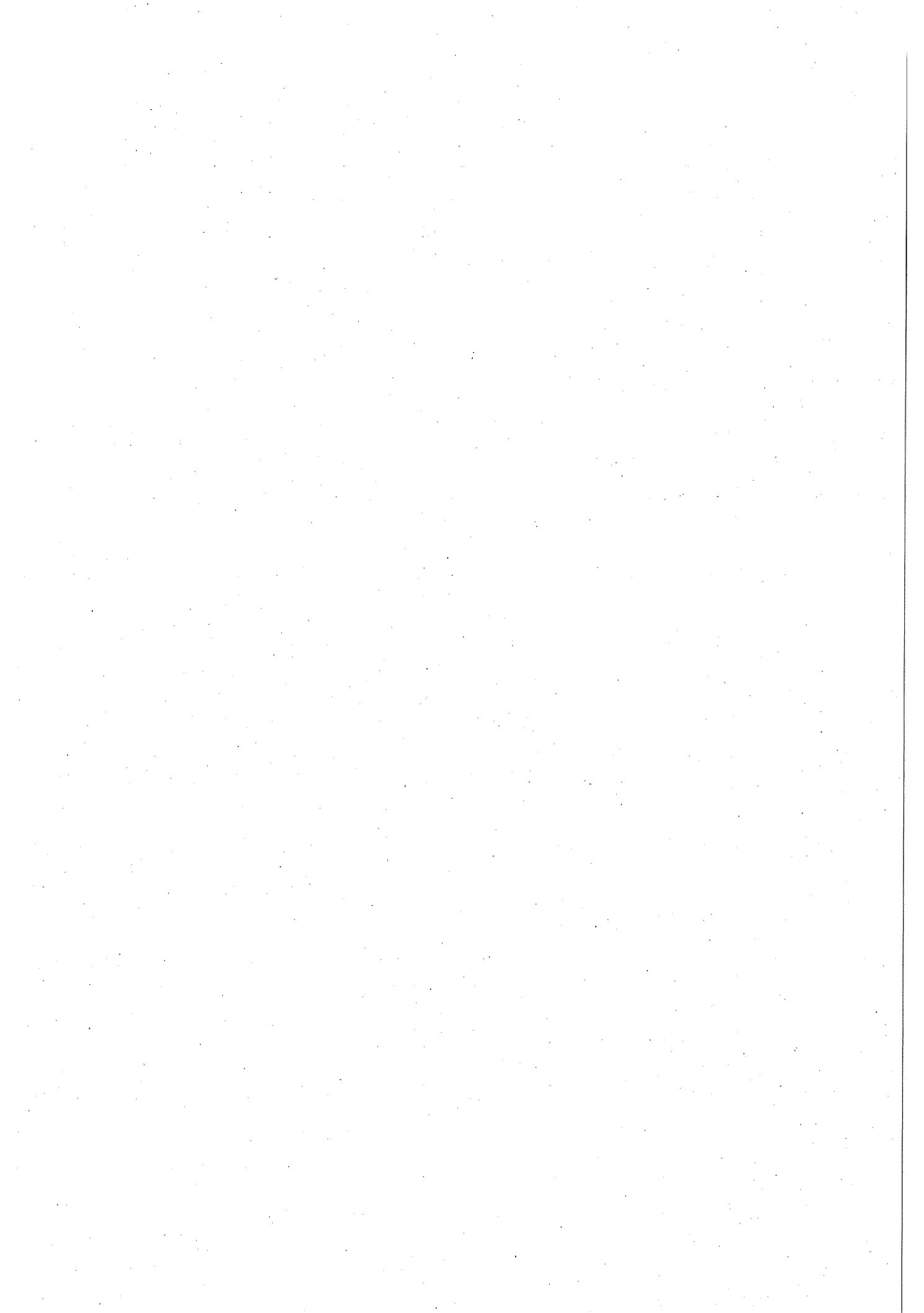


**RODRIGUES, M. Cecília M.** (1998) - "Modelação de um Sistema de Alarme Sísmico para a Península Ibérica", Dissertação de Doutoramento. Faculdade de Ciências e Tecnologia. U.N.L.

**SAATY, T.** (1990) - "Multicriteria Decision Making: The Analytic Hierarchy Process", Vol. 1 of AHP series Expert Choice, Inc.

**SOUSA, M.L.; MARTINS, A.; OLIVEIRA, C.S.** (1992) - "Compilação de Catálogos Sísmicos na Região Ibérica", Relatório 36/92 - NDA, Laboratório Nacional de Engenharia Civil, Lisboa.

**SOUSA, M.L.; OLIVEIRA, R.C.; OLIVEIRA, C.S.** (1997) - "Análise probabilística da casualidade sísmica em Portugal Continental", *Investigação Operacional*, N<sup>o</sup>1, Vol. 17.



## INSTRUÇÕES AOS AUTORES

Os autores que desejem submeter um artigo à INVESTIGAÇÃO OPERACIONAL podem enviar o artigo em formato Microsoft Word ou "Portable Document Format" (PDF) para o endereço electrónico do editor principal: joaquim.judice@co.it.pt

Alternativamente podem enviar três cópias desse trabalho para:

Prof. Joaquim J. Júdice  
Departamento de Matemática  
Faculdade de Ciências e Tecnologia  
Universidade de Coimbra  
Apartado 3008  
3001-454 Coimbra, Portugal

Os artigos devem ser escritos em Português ou Inglês. A primeira página deve conter a seguinte informação:

### Artigos escritos em Português

### Artigos escritos em Inglês

- |  |  |
|--|--|
| <ul style="list-style-type: none"><li>• Título do artigo</li><li>• Autor(es), endereço(s) de correio electrónico e instituição(ões) a que pertence(m)</li><li>• Abstract (em Inglês)</li><li>• Resumo</li><li>• Title (em Inglês)</li><li>• Keywords (em Inglês)</li></ul> | <ul style="list-style-type: none"><li>• Title (em Inglês)</li><li>• Autor(es), endereço(s) de correio electrónico e instituição(ões) a que pertence(m)</li><li>• Abstract (em Inglês)</li><li>• Keywords (em Inglês)</li></ul> |
|--|--|

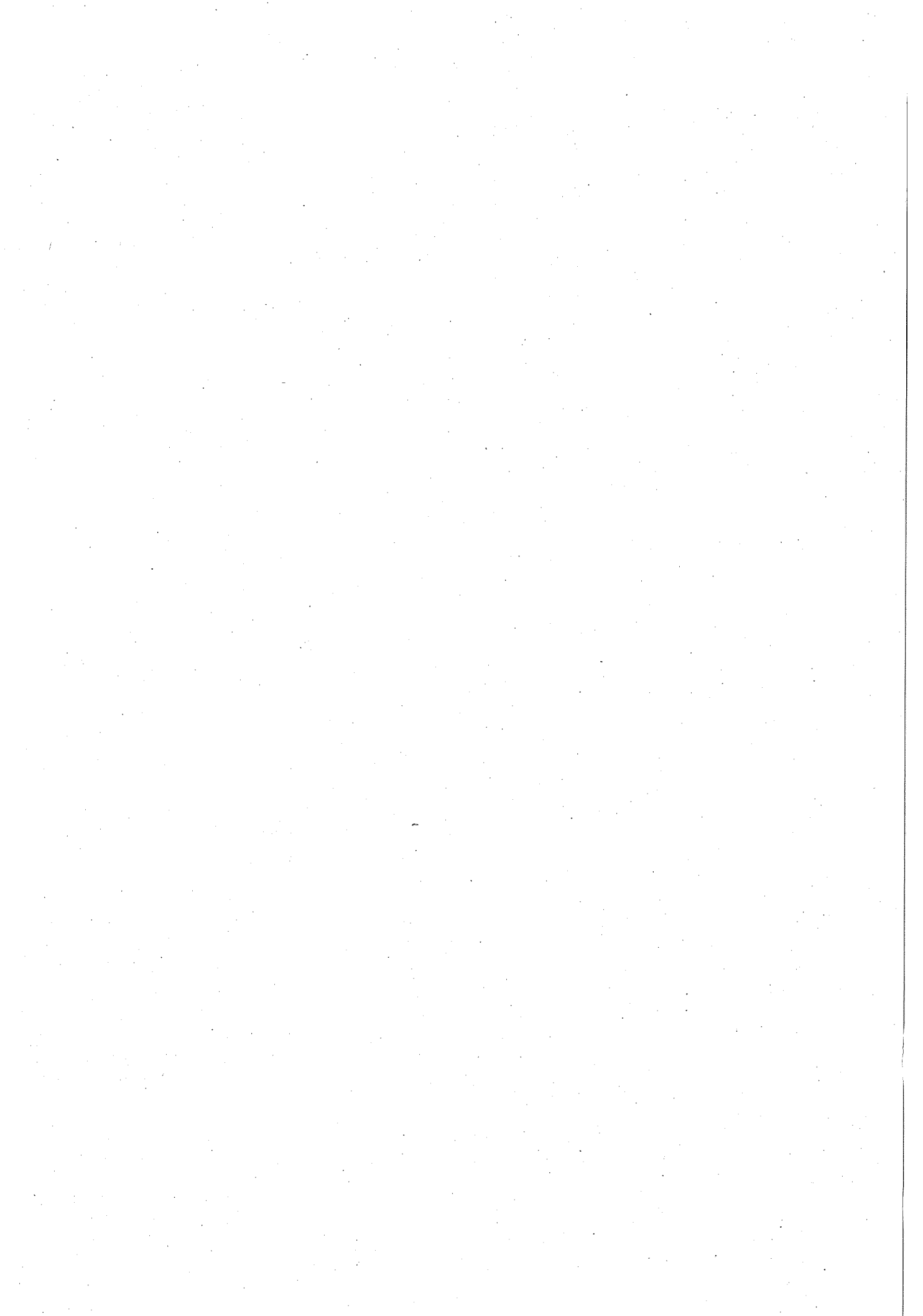
As referências devem ser numeradas consecutivamente e aparecer por ordem alfabética de acordo com os seguintes formatos:

**Artigos:** autor(es), título, nome e número da revista (livro com indicação dos editores), ano, páginas.

**Livros:** autor(es), título, editora, local de edição, ano.

Após o processo de revisão e a aceitação do artigo, os autores deverão enviar o artigo em formato electrónico, preferencialmente em  $\text{\LaTeX}$ . Também é possível a utilização do Microsoft Word.

Para garantir boa qualidade de reprodução, sempre que possível as figuras devem estar sob formatos vectoriais, devendo ser evitados formatos rasterizados (jpg, bmp, gif, etc).



## ÍNDICE

L. Cavique, C. Rego, I. Themido <i>Estruturas de vizinhança e procura local no problema da clique máxima</i> .....	1
J.M. Couto, J.P. Sousa <i>Uma heurística para apoio à geração de serviços de motoristas em transportes colectivos</i> ..	19
J.L. Carmo, A.J. Rodrigues <i>Identificação de redes neuronais gaussianas como modelos de previsão</i> .....	43
E.G. Gomes, M.P. Lins, J.C. Mello <i>Seleção do melhor município: integração SIG-Multicritério</i> .....	59
A.I. Vaz, E.M. Fernandes, M.P. Gomes <i>Optimal signal sets via semi-infinite programming</i> .....	87
P.M. Vilarinho, R.C. Guimarães <i>Machine and labour planning in layout design</i> .....	103
M.C. Rodrigues <i>Sistema de alarme sísmico baseado na sismicidade local e no passado sísmico recente</i> ....	119

