

# INVESTIGAÇÃO OPERACIONAL

Dezembro 1997

Número 2

Volume 17

Publicação Científica da



Associação Portuguesa para o Desenvolvimento  
da Investigação Operacional

# INVESTIGAÇÃO OPERACIONAL

Propriedade:

APDIO — Associação Portuguesa para o Desenvolvimento  
da Investigação Operacional

## *ESTATUTO EDITORIAL*

*«Investigação Operacional», órgão oficial da APDIO cobre uma larga gama de assuntos reflectindo assim a grande diversidade de profissões e interesses dos sócios da Associação, bem como as muitas áreas de aplicação da I. O. O seu objectivo primordial é promover a aplicação do método e técnicas da I. O. aos problemas da Sociedade Portuguesa.*

*A publicação acolhe contribuições nos campos da metodologia, técnicas, e áreas de aplicação e software de I. O. sendo no entanto dada prioridade a bons casos de estudo de carácter eminentemente prático.*

---

**Distribuição gratuita aos sócios da APDIO**

# INVESTIGAÇÃO OPERACIONAL

Volume 17 - nº 2 - Dezembro 1997

Publicação semestral

Editor Principal: Joaquim J. Júdice  
Universidade de Coimbra

## Comissão Editorial

M. Teresa Almeida  
Inst. Sup. Economia e Gestão

Jaime Barceló  
Univ. de Barcelona

Paulo Barcia  
Univ. Nova de Lisboa

Isabel Branco  
Univ. de Lisboa

António Câmara  
Univ. Nova de Lisboa

C. Bana e Costa  
Inst. Superior Técnico

M. Eugénia Captivo  
Univ. de Lisboa

Jorge O. Cerdeira  
Inst. Sup. de Agronomia

João Clímaco  
Univ. de Coimbra

J. Dias Coelho  
Univ. Nova de Lisboa

J. Rodrigues Dias  
Univ. de Évora

Laureano Escudero  
IBM, Espanha

J. Soeiro Ferreira  
Univ. do Porto

J. Fernando Gonçalves  
Univ. do Porto

Clóvis Gonzaga  
Univ. Fed., Rio Janeiro

Luís Gouveia  
Univ. de Lisboa

Rui C. Guimarães  
Univ. do Porto

J. Assis Lopes  
Inst. Superior Técnico

N. Maculan  
Univ. Fed., Rio Janeiro

Ernesto Q. Martins  
Univ. de Coimbra

Vladimiro Miranda  
Univ. do Porto

J. Pinto Paixão  
Univ. de Lisboa

M. Vaz Pato  
Inst. Sup. Economia e Gestão

Celso Ribeiro  
Univ. Católica, Rio Janeiro

A. Guimarães Rodrigues  
Univ. do Minho

Mário S. Rosa  
Univ. de Coimbra

J. Pinho de Sousa  
Univ. do Porto

Reinaldo Sousa  
Univ. Católica, Rio Janeiro

L. Valadares Tavares  
Inst. Superior Técnico

Isabel H. Themido  
Inst. Superior Técnico

B. Calafate Vasconcelos  
Univ. do Porto

José M. Viegas  
Inst. Superior Técnico

A Revista "INVESTIGAÇÃO OPERACIONAL" está registada na Secretaria de Estado da Comunicação Social sob o nº 108335.  
Esta Revista é distribuída gratuitamente aos sócios da APDIO. As informações sobre inscrições na Associação, assim como a correspondência para a Revista devem ser enviadas para a sede da APDIO - Associação Portuguesa para o Desenvolvimento da Investigação Operacional - CESUR, Instituto Superior Técnico, Av. Rovisco Pais, 1000 Lisboa.

Este Volume foi subsidiado por :

**Junta Nacional de Investigação Científica e Tecnológica (JNICT)**

**Fundação Calouste Gulbenkian**

Para efeitos de dactilografia e composição, foram utilizados equipamentos gentilmente postos à disposição pelo Centro de Investigação Operacional (DEIO - FCUL).

Assinatura: 5.000\$00

## DESIGN OF MULTIPURPOSE BATCH PLANTS WITH OPERATIONAL PRE-CONDITIONS

Ana Paula Barbosa Póvoa\*

INETI  
Dept. de Modelação e Simulação de Processos  
1699 Lisboa Codex - Portugal

Sandro Macchietto

Centre for Process Systems Engineering  
Imperial College  
London, UK

### Abstract

A formulation is presented for the optimal selection of both the equipment units and the network of connections for the multipurpose batch plants while accounting for operational pre-conditions.

The model includes very general constraints and objective functions and permits to optimise simultaneously the structural aspects of the plant and the associated production scheduling, accounting for both capital costs of equipment units and pipework, operating costs and revenues.

A special novelty of the formulation is that it provides the possibility of generating directly the optimal connectivity between the process units, optimal sizing and costs of the transfer lines and the optimal storage policies for stable products, while accounting for all the possible operational pre-conditions (e.g. need for cleaning, sequential productions and so on).

The resulting Mixed Integer Linear Programming (MILP), in which binary variables are used to represent the operational and structural choices, is solved using a branch and bound method.

Finally, an example is illustrated demonstrating the flexibility and applicability of the approach developed.

### Resumo

Um modelo matemático para a selecção óptima do equipamento principal e das suas ligações em instalações multi-tarefa de operação descontínua é desenvolvido. Neste modelo o projecto óptimo é obtido tendo em conta restrições operacionais existentes.

O modelo incluíu restrições e funções objectivo de carácter genérico e permite optimisar simultaneamente aspectos estruturais e de operação tendo em conta receitas e custos do equipamento principal, de ligações e de operação.

O carácter inovador do modelo prende-se com o facto de este fornecer directamente a topologia da instalação (ligações e equipamento principal), o seu dimensionamento e custos, bem como o escalonamento da produção e políticas de armazenamento, para produtos estáveis, garantindo possíveis restrições operacionais que possam existir (ex. necessidades de limpeza, produção sequencial, etc.)

O *Mixed Integer Linear Program (MILP)* resultante, no qual variáveis binárias são usadas para representar as decisões estruturais e de operação, é resolvido através do uso de um método de branch and bound.

Finalmente, um exemplo é apresentado através do qual se demonstra a flexibilidade e grau de aplicabilidade do método desenvolvido.

### Keywords

Modelling, Batch Plants, Multipurpose, Design, MILP, Operating Pre-Conditions.

---

\* Present address: SAEG, Instituto Superior Técnico - Av. Rovisco Pais, 1096 Lisboa Codex, Portugal  
e-mail: apovoa@alfa-IST.uyl.pt

## **1. Introduction**

An increasing interest in batch processing in the process industries has been evident in recent years. Changing market conditions which favour high value-added, low volume products appear to be the main cause of this renewed interest. In its most general form, batch production involves general purpose facilities where a variety of products can be produced by sharing the available equipment, raw materials, intermediates, utilities and production time. Different sequences of operations may lead to the same final product and the same operation may be performed in different equipment its at different times. These characteristics of multipurpose equipment and flexibility in the use of intermediate storage can accommodate occasional - often periodic - productions, variable raw material supplies and product demand rates.

With this type of operation, the scheduling of production and the operating policies play a central role. Clearly, efficient plant utilisation requires good scheduling tools. Also, there is a close link between design and operation. Therefore, scheduling and design must be considered together since it is not possible to design a batch plant without knowing how it is going to be operated.

This increases the already significant computational and analytical burdens involved in solving the related scheduling and design problems. Consequently, the need for appropriate tools to deal with such problems in an efficient way is evident. This has been highlighted in many review articles - Sargent [14], Reklaitis [8] [9], Rippin [10] [11] - and more recently further progress has been reported in this field. In particular, for the deterministic case where scheduling and design aspects are considered simultaneously, Papageorgaki [7] and Shah [12] present very general treatments. However, very important aspects such as plant connectivity networks have typically been ignored. Barbosa-Póvoa and Macchietto [2] addressed this problem and a more detailed formulation for the design of multipurpose batch plants was achieved.

Another major aspect to take into account when designing multipurpose batch plants is the possible existence of operational pre-conditions on the order of material states and tasks. This often happens when multipurpose equipment is present. Also, the Cleaning-In-Place (CIP) type of operation is often used in batch plants which is often neglected at the design level. CIP design is frequently considered after the major equipment has been selected, as an "add-on" step in the design procedure, which may result in sub-optimal ways of operating the plant. Therefore, it is very important to integrate all the elements of the process, production and cleaning requirements as an integral part of the process from the day one of the design and not as an "add-on" later.

In this paper the work of Barbosa-Póvoa and Macchietto [2] is generalised in order to account for these operational pre-conditions and restrictions when designing batch plants.

In this way the designer is able to address the design of multipurpose plants in a more realistic way.

## 2. Batch Processing Representation

In order to fully define the problem we must be able to model:

- i) the transformation processes (product recipes and service operations);
- ii) the plant (equipment and structure);
- iii) any operating constraints.

Transformation processes are described in terms of *State nodes* (representing materials) and *Task nodes* (operations transforming one or more input material states into one or more output material states) as described in Kondili et. al. [5]. The directed graph(s) linking input, intermediate and end materials with the transformation tasks (*State-Task-Network(s) - STNs*) define the precedence structure of the product networks. Together with material proportions, processing times, utility requirements for each tasks, and so on, the *STNs* can describe product recipes and service operations in an equipment-independent way.

A plant is modelled in the usual manner as a flowsheet, that is an equipment network of vessels, processing units, utility sources and sinks (nodes, characterized by a size) connected by directed arcs (also characterised by a size) representing pipes, air lifts, conveyors, manual or mechanical transportation, and so on.

A mapping between the plant and process networks is defined by i) the suitability of each piece of equipment in the equipment network to carry out processing tasks, to store material states and (for connections) to transport materials states (with associated maximum and minimum capacity for each state, task, etc.) and ii) the resources (equipment, utilities, operators, etc.) required by each task.

Operations and equipment network are automatically combined into a *maximal State - Task Network (mSTN)* characterized by four type of nodes: *eTask ij*, *eState sj*, *iStates* and *oStates*. The *eTask ij* represents the processing tasks *i* which can be performed in unit *j* and the *eState sj* represents material in state *s* that can be stored in unit *j*. Having defined the *eTasks* and *eStates* the next two nodes are used to represent each input and output for the *eTasks*. These additional states are called *iStates* and *oStates* respectively for each input and output. These states are characterized by zero capacity and serve uniquely to identify the origin and location of the material. Finally, transfer tasks (*ttasks*) are introduced between two state instances such as: *oState/iState*, *oState/eState*, *eState/eState* and *oState/iState* if there is a direct link between the units with these states. Transfer tasks are considered to occur simultaneously and place no demand on the plant equipment and utilities.

This representation was initially developed by Crooks [4] for multipurpose batch plants scheduling and extended by Barbosa-Póvoa [1] to their design and retrofit. The main advantage of the *mSTN* is that it unambiguously and explicitly represents all and only the location of

material states and the allocations of processing, storage and transfer tasks which are potentially necessary and structurally feasible.

Operating constraints arise due to the multipurpose nature of the equipment (e.g. sequence-time-and frequency-dependet tasks, cleaning requirements, etc.) and to general task preconditions (e.g. feed A before B). Extending the ideas of Crooks [4], allowable *equipment states* (*eqStates*) are explicitly defined for units and connections so as to represent their condition, which may be modified when an allowable processing, storage or transfer task is executed in it. By appropriate definition of the equipment states and allowable transitions, very complex sequences of operations (finite states machines named *equipment-states Task Networks, eSTNs*) may be defined and forced on any equipment item. Initial and desired equipment states at specified or final times may also be specified (e.g. start with equipment item j dirty with polymer A, leave it empty and clean). The main advantage of the *eSTN* is that it unambiguously and explicitly represents all precedence constraints relating equipment states and any processing, storage and transfer tasks which may be assigned to an equipment item, independently from a specific assignment method.

These ideas are illustrated by the following example where a multipurpose batch plant produces three different main products P1, P2, P3. The products recipe, using the *STN* representation, is shown in Figure 1. The process involves four main processing tasks (reaction\_1, reaction\_2, reaction\_3 and separation) and six different state materials (raw materials F1, F2 and F3; intermediate products I1, I2 and I3; and final products P1, P2 and P3). The plant structure assumed is displayed in Figure 2. Cleaning operations are described by the *STN* shown in Figure 3. Based on the cleaning needs, plant structure and process recipes the *eSTN* representation for each item of equipment is defined. Taking as an example the equipment R1 the associated *eSTN* is shown in Figure 4. Here we have two *eqStates* (R1\_clean and R1\_dirty) which can be modified trough the operation of four different tasks. For example reactor R1 in *eqState* R1\_clean when used to perform task Reaction\_1 or task Reaction\_3 changes to *eqState* R1\_dirty. This representation establish the link between the process (Figure 1) and the associated cleaning (Figure 3) for equipment Reactor R1.

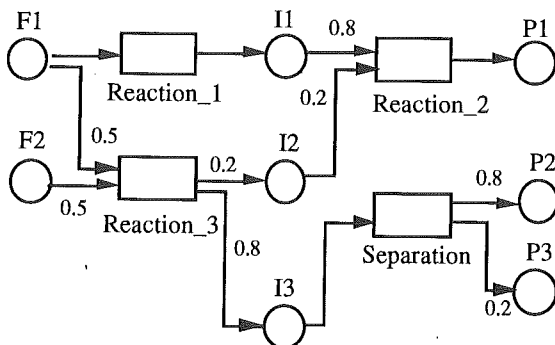


Figure 1 - Main process State-Task Network



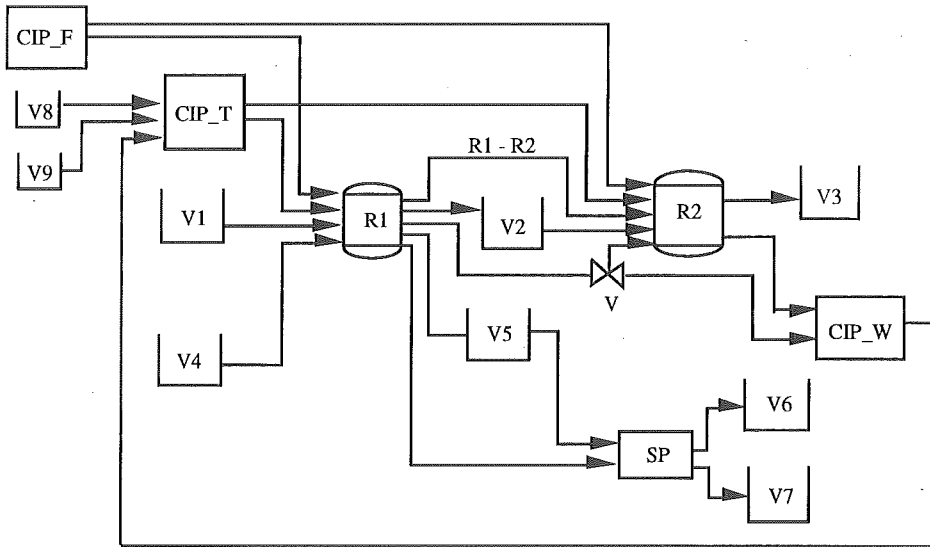


Figure 2 - Plant superstructure

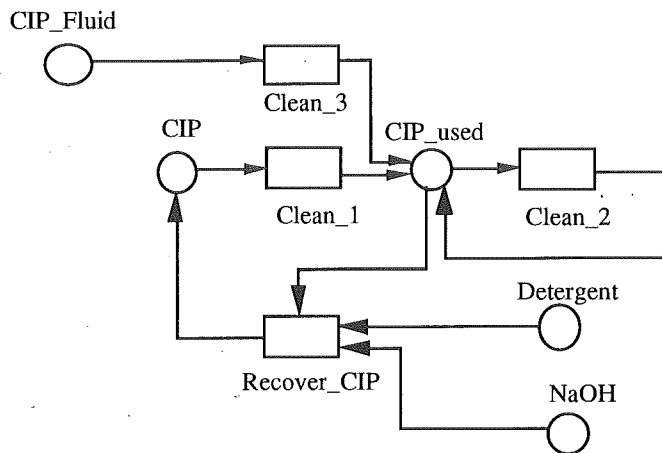


Figure 3 - Cleaning State-Task Network

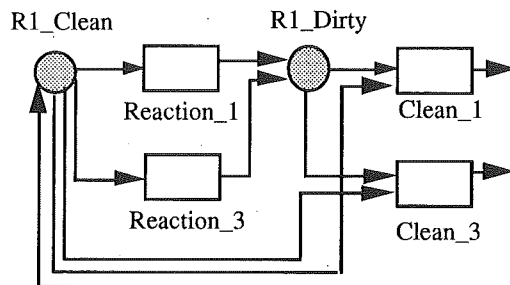


Figure 4 - Unit State-Task Network for R1

A schematic representation of these modelling tools is given in Figure 5.

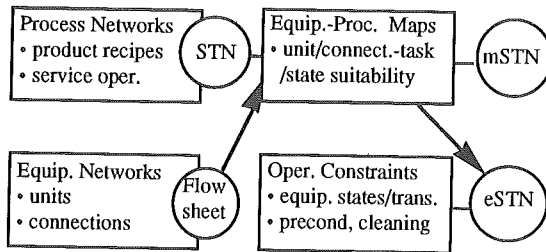


Figure 5 - Batch Models Representation

Additional models (not detailed here) define production requirements, operation node (e.g. periodic), resource availability profiles, plant/process objectives and all capital and operating costs.

Using the batch processing representation characterised above the optimal design problem with operational pre-conditions can be described as follows:

Given:

- A *STN* description of one or more processes, with associated recipe parameters and operating costs.
- A plant superstructure (units and connections), with capacities and suitability.
- The production requirements, a time horizon, mode of operation (e.g. periodic).
- An *eSTN* description, identifying all operational pre-conditions (i.e. cleaning needs, equipment usage).
- Utility needs and availability.
- Capital and operating cost parameters for equipment, materials, tasks and utilities.

Determine:

- A plant configuration (i.e. a complete plant network and equipment sizes).
- An operating schedule, accounting for all process-equipment pre-conditions.

So as to optimize a given performance function.

### 3. Mathematical Formulation

As referred above this paper describes and extension of a basic model for the design of multipurpose batch plants proposed by Barbosa-Póvoa and Macchietto [2]. This extension results in a generalisation of the existing model allowing the treatment of operational pre-conditions at the design level. Aspect that is often present in the industrial cases studied.

This section starts with a summarised description of the basic model followed by the characterisation of the model generalisation.

### 3.1 Design of Multipurpose Batch Plants: Basic Model

The formulation relies on a discretisation of time. The planning horizon ( $H$ ) is divided into a number of elementary time steps of fixed length ( $\delta$ ). The times values will vary from  $t = 1$  to  $H+1$ . All the process events are allowed to occur at the interval boundaries and not between them. The task processing times and the planning horizon are defined as integer multiples of the elementary step  $\delta$ .

The *maximal State-Task Network* is automatically generated from the process networks, plant network and equipment suitability data. This is described by the sets/parameters and variables described below which define the basic model proposed by Barbosa-Póvoa and Macchietto [2] for the design of multipurpose batch which is going to be extended in this paper.

Taking into account the characteristics of the *mSTN* representation (see section 2) and considering that:

- $i$ : stands for *eTasks*
- $s$ : stands for *State*
- $\pi$ : stands for *tTasks*
- $j$ : stands for *unit*
- $c$ : stands for *connection*

we have the following sets and parameters that characterised the basic design model:

$eTask\ i \in T =$  set of processing and storage tasks (*eTasks*),  $i = 1, \dots, NeTasks$

Sets:

- $S_i = \{s: \text{set of input states to } eTask\ i\}$
- $\bar{S}_i = \{s: \text{set of output states from } eTask\ i\}$
- $K_i = \{j: \text{set of processing units suitable for } eTask\ i\}$
- $\bar{p}_{is} =$  proportion of material to state  $s$  leaving *eTask*  $i$
- $p_{is} =$  proportion of material to state  $s$  entering *eTask*  $i$
- $ST = \{i: \text{set of storage } eTasks\}$

Parameters:

- $p_{is} =$  lag time of states  $s \in S_i$  entering *eTask*  $i$  relative to the start of the *eTask*
- $\bar{p}_{is} =$  processing time for *eTask*  $i$  to produce the output state  $s \in \bar{S}_i$  relative to the start of the *eTask*
- $p_i = \max\{\bar{p}_{is}\}$ , duration of *eTask*  $i$
- $\phi_{ij}^{\max} =$  maximum utilisation factor of *eTask*  $i$  in unit  $j$ , (it may be considered as a conversion factor between the maximum batch size units and the capacity units of the processing vessel (e.g. kg/1) or just a maximum fraction of the capacity that can be used for *eTask*  $i$ )
- $\phi_{ij}^{\min} =$  minimum utilisation factor of *eTask*  $i$  in unit  $j$  (minimum capacity fraction that can be used)

$\alpha_{ui\theta}$  = fixed demand factor of utility  $u$  by  $eTask$   $i$  at time  $\theta$  relative to the start of the  $eTask$

$\beta_{ui\theta}$  = fixed demand factor of utility  $u$  by  $eTask$   $i$  at time  $\theta$  relative to the start of the  $eTask$

$OC_{ij}^0$  = fixed operating cost of  $eTask$   $i$  in unit  $j$

$OC_{ij}^1$  = batch size dependent operating cost of  $eTask$   $i$  in unit  $j$

State  $s \in S$  = set of  $mSTN$  states including  $iStates \cup oStates \cup eStates$ ,  $s = 1, \dots, NStates$

Sets:

$\bar{T}_s = \{i: \text{set of } eTasks \text{ producing material to state } s\}$

$T_s = \{i: \text{set of } eTasks \text{ receiving material to state } s\}$

$\bar{\Pi}_s = \{\pi: \text{set of } tTasks \text{ transferring material to state } s\}$

$\Pi_s = \{\pi: \text{set of } tTasks \text{ transferring material from state } s\}$

$SP = \{s: \text{set of products states}\}$

$SF = \{s: \text{set of feed states}\}$

$SI = \{s: \text{set of intermediate states}\}$

$K_s = \{j: \text{set of dedicated storage vessels suitable for storing } eState \text{ } s\}$

Parameters:

$\phi_{sj}$  = size factor of  $eState$   $s$ , conversion factor between the maximum amount stored and the capacity units of the storage vessel  $j$  dedicated to  $eState$   $s$  (i.e. kg/1 or just fraction used)

$v_s$  = value of state  $s$

$p_s$  = price of state  $s$

$OC_s$  = operating cost of dedicated storage of state  $s$  in vessel  $j \in K_s$

$tTask$   $\pi \in \Pi$  = set of transfer tasks ( $tTaks$ ),  $\pi = 1, \dots, NtTasks$

Sets:

$\bar{S}_\pi = \{s: \text{set of input states to } tTasks \text{ } \pi\}$

$S_\pi = \{s: \text{set of output states from } tTasks \text{ } \pi\}$

Unit  $j \in J$  = set of units  $j = 1, \dots, Nunits$

Sets:

$I_j = \{i: \text{set of } eTasks \text{ which can be performed in unit } j\}$

$\Xi = \{j: \text{set of dedicated storage vessels}\}$

$\Gamma = \{j: \text{set of utility dedicated vessels}\}$

Parameters:

$CC_j^0$  = fixed capital cost of unit  $j$

$CC_j^1$  = size dependent capital cost of unit  $j$

Connection  $c \in C$  = set of connection  $c = 1, \dots, Nconnections$

Sets:

$I_c = \{\pi: \text{set of } tTasks \text{ which can be performed in connection } c\}$

$$C_j^{\text{sink}} = \{c: \text{set of connections to which unit } j \text{ is a sink}\}$$

$$C_j^{\text{source}} = \{c: \text{set of connections to which unit } j \text{ is a source}\}$$

Parameters:

$\phi_{\pi c}$  = size factor of  $tTask \pi$  in connection  $c$ , conversion factor between the maximum amount transferred and the capacity units of the connection (i.e. kg/1 or just fraction used)

$CC_c^0$  = fixed capital cost of connection  $c$

$CC_c^1$  = size dependent capital cost of connection  $c$

Additionally to the sets and parameters of the  $mSTN$  the model accounts for external utilities described by the following sets and parameters:

Utility  $u \in U =$  set of utilities  $u = 1, \dots, N$  utilities

Sets:

$K_u = \{j: \text{set of dedicated vessels suitable for storing utility } u\}$

Parameters:

$OC_{ut}$  = batch size dependent operational unit cost of utility  $u$  at time period  $t$

$U_u^{\text{max}}$  = maximum availability of utility  $u$

In conclusion note that the above parameters define the plant flowsheet superstructure (sets  $J, C, C_j^{\text{sink}}, C_j^{\text{source}}$ ), the functional suitability of equipment for carrying out the various processing, storage and transfer tasks (set  $K_j, K_s, K_u, I_c$  and  $I_j, \Xi, \Gamma$ ), the process recipes as well as cost parameters and auxiliary parameters establishing any other interactions between the plant equipment and the process (i.e. size factors). Parameters  $K_j, K_s$  and  $K_u$  are formed by a unique element due to the  $mSTN$  characteristics.

After detailing the problem sets and parameters defined in the basic model, two types of variables, continuous and discrete, are defined so as to account for the design problem characteristics:

Variables:

Discrete Variables:

Structural binary variables, defining the actual structure of the plant:

$E_j = 1$  If unit  $j$  is installed; 0 otherwise.

$E_{jk} = 1$  If unit  $j$  of type  $k$  is installed; 0 otherwise.

$E_{ck} = 1$  If connection  $c$  of type  $k$  is installed; 0 otherwise.

Allocation variables:

$W_{ijt} = 1$  If unit  $j$  starts processing  $eTask i$  at the beginning of period  $t$ ; 0 otherwise.

Continuous variables

Defining the capacity of each piece of equipment:

$V_j$  - capacity of processing unit  $j$ .

$BT_c$  - capacity of connection  $c$ .

Defining the amounts of material processed:

$B_{ijt}$  - the amount of material that starts undergoing *eTask*  $i$  in unit  $j$  at the beginning of period  $t$ .

$BT_{\pi t}$  - the amount of material transferred by transfer task  $\pi$  at the beginning of period  $t$ .

$S_{st}$  - the amount of material in *eState*  $s$  at the beginning of period  $t$ .

$D_{st}$  - the amount of material delivered from *state*  $s$  to the outside at the beginning of period  $t$ .

$R_{st}$  - the amount of material received from the outside into *state*  $s$  at the beginning of period  $t$ .

$U_{ut}$  - utilisation level of utility  $u$  at the beginning of period  $t$ .

Equipment indices are not required for the amounts transferred or stored (states and utilities) since it is assumed that dedicated equipment items are involved.

Using the sets and variables defined above, the constraints and objective function(s) describing the design of multipurpose batch plants with non-periodic operation and formulated in Barbosa-Póvoa [2] can be grouped as follows:

**Processing Unit Existence Constraints** - A processing unit  $j$ , if chosen to be installed in the plant, can only exist in one type.

**Allocation constraints** - the units are allocated to suitable tasks according to the following rules:

(1) At any time each unit is either idle or processing a single task; (2) Tasks cannot be pre-empted once they have been started.

**Capacity and Batch Size Constraints** - Storage is modelled either dedicated storage vessels, where only one type of material can be stored, or in a more general way by vessels suitable to store more than one type of material, the so-called multipurpose storage.

**Connectivity Constraints** - Although the plant superstructure may include many possible connections, minimisation of the plant cost will typically result in the installation of a limited set of connections as a result of the optimisation process. Therefore, each connection is associated with one existence variable. The capacity of each potential connection is calculated based on the capacity bounds. The allocation of the different suitable transfers to a certain connection is dictated through the allocation of the associated source unit, thus avoiding any infeasible transfers. As a result the number of binary variables in the problem is kept low without compromising the generality of the model.

**Utility Constraints** - In addition to the processing equipment, the tasks may also require the use of utilities (e.g. steam, water) and/or manpower. These are assumed to be obtained from an external source and/or associated with a certain set of dedicated equipment.

**Mass Balances** - Mass balance constraints on each state at every time interval relate the amount of material in the state with the amount of the same material being produced, consumed and transferred by all incident tasks, as well as to the amount of material in the state over the previous time interval.

**Production Requirement Constraints** - The production requirements are allowed to float within given upper and lower bounds. This allows the possibility of optimising the production levels as part of the design problem, taking into account the trade-off between the cost of the equipment and the added value of production. Considering that there may well be different units in the plant where material of the same *STN* state can be stored or delivered, an overall production goal for each product is defined over the production horizon.

### Objective Function

Two different alternative and independent design objectives are considered here.

The first one involves the minimisation of the capital cost alone, including fixed and variables costs (size and/or rate dependent) for equipment units and connections.

The second one is the maximisation of the plant profit, given products demands and prices. Profit is defined as the net income from selling the products minus the annualised investment cost of equipment, minus raw materials and other operating costs (i.e. processing and utilities). The expected net value per unit product  $\in$  SP is denoted by  $v_s$  while the cost associated with the raw materials  $\in$  SF is represented by  $p_s$ . It is importante to note that  $v_s$  and  $p_s$  may take different values for the different states in the superstructure generated from the *STN* initial product or feed state. In other words, feeds and products may have different values depending on its location in the plant (i.e. different lines, vessels). The capital cost is defined as for the first objective function and is transformed into an annualised basis using a capital charge factor,  $CCF[yr^{-1}]$  [3]. The fixed costs include different types of costs such as that of installation and auxiliary equipment, whilst the variable costs are defined *per* unit of material processed.

The choice of the alternative design objectives is dedicated by the design engineer based on the description of the problem in study.

#### 1. - Minimisation of Capital Cost:

$$\begin{aligned} \text{Min } C = & \left[ \sum_j \sum_k E_{j,k} (CC_{j,k}^0 + V_j CC_{j,k}^1) \right. \\ & \left. + \sum_c \sum_k E_{c,k} (CC_{c,k}^0 + BT_c CC_{c,k}^1) \right] \quad [\$] \quad (1) \end{aligned}$$

Where  $CC_j^0$  and  $CC_j^1$  are respectively the fixed and size dependent costs of unit  $j$  of type  $k$ , and  $CC_{c,k}^0$  and  $CC_{c,k}^1$  are the fixed and size dependent costs for connection  $c$  of type  $k$ .

Is this case, the bilinear terms due to the existence and capacity variables (e.g.  $V_j E_{j,k}$ ) can be reformulated to a linear form. On the other hand, such complication does not arise in practice since, when an equipment item is chosen, it only exists in a single type. Consequently, if a continuous size type is defined, then a single type exists and the existence variable is one, otherwise the capacity variable is fixed to a discrete value known *a priori*.

In this case the structural variables ( $E_{j,k}$  and  $E_{c,k}$ ) are minimized given raise to the minimal required plant structure.

## 2. - Maximisation of the Plant Profit:

This involves the definition of additional terms. In addition to the capital cost, defined in equation (1), we have the operating costs:

$$OC = \sum_t \sum_j \sum_{i \in I_j} (OC_{ij}^0 W_{ijt} + OC_{ij}^1 B_{ijt}) + \sum_c \sum_t OC_s S_{s,t} + \sum_u \sum_t OC_{ut} U_{ut} \quad [\$] \quad (2)$$

For each task executed, there may be a fixed operating cost ( $OC_{ij}^0$ ) and a batch size dependent cost ( $OC_{ij}^1$ ). Similarly, an operating cost ( $OC_s$ ) is incurred for dedicated storage of state  $s$ . Also, the use of utilities incurs a cost at a certain time  $t$  ( $OC_{ut}$ ).

The operating costs of the raw materials are also considered and defined as follows:

$$RMC = \sum_{s \in SF} ((S_{s0} - S_{s,H+1}) P_s + \sum_t R_{st} P_s) \quad [\$] \quad (3)$$

After defining the different types of costs involved in the objective function the possible revenues in the plant due to the selling of products are considered:

$$PR = \sum_{s \in SP} ((S_{s,H+1} - S_{s,0}) v_s + \sum_t D_{st} D_s) \quad [\$] \quad (4)$$

The objective function describing the annualised profit is formulated as follows:

$$\text{Max Profit} = \left[ (PR - OC - RMC) \frac{\text{HoursYr}}{H} - CC * CCF \right] \quad [\$/\text{yr}] \quad (5)$$

The last term represents the annualised capital cost given by the terms in  $CC$ , equation (1) multiplied by the capital charge factor ( $CCF$ ) [3].  $\text{HoursYr}$  denotes the number of annual working hours.

When this objective function is chosen it gives the optimal balance between the maximum production, that will render the maximum revenue (equation 4), with the operational (equations 2 and 3) and capital costs (equation 1) associated with the running and installation of the final plant.

The constraints summarised above along with the objective function (1) or (5) define a mixed integer linear program model (MILP) for the basic design problem. As final results we will obtain the final plant structure (values for variables  $E_j$ ,  $E_{jk}$ ,  $E_{ck}$ ,  $V_j$  and  $BT_c$ ) and the associated operating schedule ( $W_{ijt}$ ,  $B_{ijt}$ ,  $BT_{\pi t}$ ,  $S_{st}$ ,  $U_{ut}$ ,  $R_{st}$  and  $D_{st}$ ).

## 3.2 Design of Multipurpose Batch Plants with Operational Pre-Conditions:

### Extended Model

The model described above is generalised in this paper so as to account for a wide range of operational pre-conditions and constraints which must be guaranteed during operation in order to avoid compromising final product quality or safety of operation.

The operational preconditions are modelled in the problems formulation (design or scheduling) by using the *eSTN* representation. The *eSTN*, involves two main parts, the *unit State-Task Network* (*uSTN*) and the *connection State-Task Network* (*cSTN*). The latter



describes our extension to the earlier work on the *uSTN* reported by Crooks [4] for scheduling purposes. Through this extension, operational aspects imposed in the plant network can also be considered in the design or scheduling problems.

The following sets and variables are defined for complete representation of the *eSTN*. These involve additional characterisation of the equipment in order to account for the existing operating conditions.

Unit  $j \in J$  = set of units  $j = 1, \dots, N_{\text{units}}$

$$J^{\text{eSTN}} = \{j: \text{set of units for which an } e\text{STN has been defined}\}$$

$$\theta_j = \{k: \text{set of allowable } u\text{States for unit } j \in J^{\text{eSTN}}\}$$

$$J_j^{\text{eSTN}} = \{i: \text{set of } e\text{STN } e\text{Tasks (including storage) for unit } j \in J^{\text{eSTN}}\}$$

$$J_{jkk'} = \{i: \text{set of } e\text{Tasks which cause transition from the } u\text{State } k \text{ to } k' \text{ in unit } j\}$$

Connection  $c \in C$  = set of connections  $c = 1, \dots, N_{\text{connections}}$

$$C^{\text{eSTN}} = \{c: \text{set of connections for which an } e\text{STN has been defined}\}$$

$$\theta_c = \{k: \text{set of allowable } c\text{States for connection } c \in C^{\text{eSTN}}\}$$

$$I_c^{\text{eSTN}} = \{\pi: \text{set of } e\text{STN } t\text{Tasks for connection } c \in C^{\text{eSTN}}\}$$

$$I_{cck'} = \{\pi: \text{set of } t\text{Tasks which cause transition from the } c\text{State } k \text{ to } k' \text{ in connection } c\}$$

Furthermore, two types of binary variables are created:

1 - *uState* variables, defining the state of a unit at a given time.

$$\hat{W}_{jkt} = 1 \text{ If unit } j \text{ is in } u\text{State } k \text{ at time } t; 0 \text{ Otherwise.}$$

2 - *cState* variables, defining the state of a connection at a given time.

$$\hat{W}_{ckt} = 1 \text{ If connection } c \text{ is in } c\text{State } k \text{ at time } t; 0 \text{ Otherwise.}$$

Two types of operation are considered in the design problem, namely the non-periodic and the periodic mode. Therefore the operational preconditions (*eSTN*) are formulated for these two different modes.

### 3.2.1 Non-Periodic Operation

In this case, the planning horizon is defined from  $t = 1$  to  $H+1$ , where  $H$  is the time horizon.

Units Constraints:

Unit operational constraints have been addressed by Crooks [4]. Using this formulation task/unit preconditions can be expressed, allowing the possibility of modelling operational aspects in design or scheduling problems.

Crooks [4] defined the *uSTN* based on four main rules. An analysis of the formulation proposed provides some scope for improvement. A revised model for the *unit State-Task Network* is written below. This involves the improvement of the existing rules [4] and the addition of new rules to account explicitly with connectivity.

**Rule 1** - At any given time the unit  $j$  can only exist in a single *uState*.

$$\sum_{k \in \theta_j} \hat{W}_{jkt} = 1 \quad \forall j \in J^{\text{uSTN}}, t = 1, \dots, H+1 \quad (6)$$

Therefore, only one  $\hat{W}_{jkt}$  can be equal to one at any time.

**Rule 2** - A *uSTN eTask*  $i$  can only start at time  $t$  if its associated unit  $j$  is in one of its allowable *uState*.

$$W_{ijt} \leq \sum_{k \in U_{k'} I_{jkk'}} \hat{W}_{jkt} \quad \forall j \in J^{uSTN}, i \in I_j^{uSTN} \quad t = 1, \dots, H \quad (7)$$

Therefore, the allocation variable ( $W_{ijt}$ ) can only take the value of one if a particular *uState*  $k$ , from where *eTask*  $i$  can operate, is present.

**Rule 3** - If no *eSTN eTask* starts in unit  $j$  at time  $t$  the *uState* must remain unchanged:

$$\hat{W}_{jkt} - \hat{W}_{jk,t+1} - \sum_{i \in U_{k' \neq k} I_{jkk'}} W_{ijt} \leq 0 \quad \forall j \in J^{eSTN}, \forall k \in \theta_j, t = 1, \dots, H \quad (8)$$

In this constraint, if no *eSTN eTask* that changes the *uState* from  $k$  to  $k'$  occurs at time  $t$  the summation over  $W_{ijt}$  is zero. Therefore, if unit  $j$  is in *uState*  $k$  at time  $t$ , then  $\hat{W}_{jkt} = 1$ . Consequently  $\hat{W}_{jk,t+1}$  is made equal to one, by forcing the *uState* variables at  $t+1$  and  $t$  to take the same value.

**Rule 4** - If an *etask*  $i \in I_{jkk'}$  starts at time  $t$  in unit  $j$  in *uState*  $k$ , then at  $t+1$  the same unit will be in *uState*  $k'$ .

$$\hat{W}_{jkt} - \hat{W}_{jk,t+1} + \sum_{i \in I_{jkk'}} W_{ijt} \leq 1 \quad \forall j \in J^{uSTN}, \forall k, k' \parallel I_{jkk'} \neq 0, t = 1, \dots, H \quad (9)$$

The summation over all the *eTasks*  $i \in I_{jkk'}$  will become equal to one if any *eTask* will occur, forcing the change of *uState*  $k$  to  $k'$ . Finally, initial and final *uStates* for each unit can be defined.

For the initial *uState* ( $k_0$ ) of unit  $j$ :

$$\hat{W}_{jk_0,1} = 1 \quad \forall j \in J^{uSTN} \quad (10)$$

In a similar way, if a certain *uState* ( $k_f$ ) is required for a unit  $j$  at the end of the planning horizon we have:

$$\hat{W}_{jk_f,H+1} = 1 \quad \forall j \in J^{uSTN} \quad (11)$$

Equations (6) to (11) represent the *eSTN* constraints. Note that no processing tasks are allowed to start at  $H+1$ . However, the change of equipment states is verified at  $H+1$  as a result of the tasks started at  $t = H$ .

#### Connection constraints

Operational preconditions can also be defined for the connections in the plant structure. For example, a certain pipe should not be used to transfer material type B if it has been used to transfer material C. Therefore, that state of each connection must also be defined.

In this case, the *eSTN* new rules (rules 5 to 8) for each connection are defined in terms of both the amount of material transferred ( $BT_{\pi}$ ) and the binary variables describing the states of the connections. These variables are defined from  $t = 1$  to  $t = H+2$  since transfers can happen at  $H+1$ .

The following formulation is proposed to address the connections pre-conditions:

**Rule 5** - At any given time a connection  $c$  is in exactly one  $cState$ :

$$\sum_{k \in \theta_c} \tilde{W}_{ckt} = 1 \quad \forall c \in C^{eSTN}, t = 1, \dots, H+2 \quad (12)$$

**Rule 6** - An  $eSTN$  transfer task ( $\pi$ ) can be performed in connection  $c$ , if and only if this connection is in some  $cState$   $k$  such that  $\pi \in I_{ckk'}$  might occur.

$$BT_{\pi} - BT_c^{max} \sum_{k \in \pi \in U_k I_{ckk'}} \tilde{W}_{ckt} \leq 0 \quad \forall c \in C^{eSTN}, \quad \forall \pi \in I_c^{eSTN}, t = 1, \dots, H+1 \quad (13)$$

where  $BT_c^{max}$  is the maximum capacity of connection  $c$ . Only  $eSTN$  transfers from allowable  $cStates$  can occur ( $BT_{\pi} > 0$ ).

**Rule 7** - If no  $eSTN$  transfer task occurs in connection  $c$  at time  $t$ , the state of the connection must remain unchanged.

$$-BT_c^{max} \sum_{\pi \in U_{k' \neq k} I_{ckk'}} BT_{\pi} \leq \tilde{W}_{ckt} - \tilde{W}_{ckt+1} \quad \forall c \in C^{eSTN}, \quad \forall k \in \theta_c, t = 1, \dots, H+1 \quad (14)$$

$$\tilde{W}_{ckt} - \tilde{W}_{ckt+1} \leq BT_c^{max} \sum_{\pi \in U_{k' \neq k} I_{ckk'}} BT_{\pi} \quad \forall c \in C^{eSTN}, \quad \forall k \in \theta_c, t = 1, \dots, H+1 \quad (15)$$

For  $BT_{\pi}$  equal to zero, if  $\tilde{W}_{ckt} = 1$  then  $\tilde{W}_{ckt+1}$  is made equal to one, therefore the  $cState$  remains unchanged.

**Rule 8** - If a transfer task  $\pi \in I_{ckk'}$  (from  $cState$   $k$ ) happens at time  $t$  in connection  $c$ , the connection will be in  $cState$   $k'$  at  $t+1$ .

$$\tilde{W}_{ckt} - \tilde{W}_{ck't+1} + \sum_{\pi \in I_{ckk'}} \frac{BT_{\pi}}{BT_c^{max}} \leq 1 \quad \forall c \in C^{eSTN}, \quad \forall k, k' | I_{ckk'} \neq 0, t = 1, \dots, H+1 \quad (16)$$

If  $BT_{\pi}$  is greater than zero  $\tilde{W}_{jk',t+1}$  is made equal to one.

Furthermore, as defined for the units, initial and final connection states may be specified.

For a pre-specified initial  $cState$  ( $k_0$ ) for a connection  $c$  we have:

$$\tilde{W}_{ck_0,1} = 1 \quad \forall c \in C^{eSTN} \quad (17)$$

In a similar way, if a certain  $cState$  ( $k_f$ ) is required for a connection  $c$  at the end of the planning horizon this is guaranteed through the following constraint:

$$\tilde{W}_{ck_f,H+2} = 1 \quad \forall c \in C^{eSTN} \quad (18)$$

The final state is defined for  $H+2$ , since transfers of material at  $H+1$  are allowed.

The  $cSTN$  constraints (12 to 18) in addition to those for the  $uSTN$  complete the definition of the *equipment State-Task Network (eSTN)* model for the non-periodic operation. A great variety of process-equipment interactions can be taken into account using the above formulations.

### 3.2.2 Periodic Operation

The periodic operation is defined by means of the "wrap-around" [13] model where a key concept is that of the *cycle time*  $T$ , this is taken as the shortest time interval at which a cycle is repeated. A cycle represents a sequence of operations involving the production of all desired products and the utilisation of all available resources.

Since all cycles are equal, the problem is modelled as a non-periodic operation over a single cycle of a given duration, with additional constraints introduced to guarantee that the state of the plant at the beginning and at the end of the cycle is the same. The possibility of tasks occurring over more than one consecutive cycle is accounted for. Therefore, a task operation can *wrap-around* to the start of the cycle.

The plant operation is now defined from  $t = 1$  to  $T$  (cycle time).

Connection Constraints:

In order to account for the cyclic characteristics of the operation, all the constraints defined above are modified. As a result we have:

**Rule 5:**

$$\sum_{k \in \theta_c} \tilde{W}_{ckt} = 1 \quad \forall c \in C^{eSTN}, t = 1, \dots, T \quad (19)$$

In this case the cStates are only defined from  $t$  equal to one to the cycle time ( $T$ ).

**Rule 6 -** As in rule 5 the constraint is just defined between  $t = 1$  to  $t = T$ .

$$BT_{\pi} - BT_c^{\max} \sum_{k \in \pi \cup_k I_{ckk'}} \tilde{W}_{ckt} \leq 0 \quad \forall c \in C^{eSTN}, \\ \forall \pi \in I_c^{eSTN}, t = 1, \dots, T \quad (20)$$

Using the "wrap-around" operator defined as:

$$\tau(t) = \begin{cases} t & \text{if } t \leq T \\ \tau(t-T) & \text{if } t > T \end{cases} \quad (21)$$

rules 7 and 8 can be written as follows:

**Rule 7 -** Again in this case the equation is defined from  $t = 1$  to  $T$ .

$$-BT_c^{\max} \sum_{\pi \in U_{k \neq k'} I_{ckk'}} BT_{\pi t} \leq \tilde{W}_{ckt} - \tilde{W}_{ck\tau(t+1)} \quad \forall c \in C^{eSTN}, \\ \forall k \in \theta_c, t = 1, \dots, T \quad (22)$$

$$\tilde{W}_{ckt} - \tilde{W}_{ck\tau(t+1)} \leq BT_c^{\max} \sum_{\pi \in U_{k \neq k'} I_{ckk'}} BT_{\pi, t} \quad \forall c \in C^{eSTN}, \\ \forall k \in \theta_c, t = 1, \dots, T \quad (23)$$

**Rule 8 -** Using again the "wrap-around" operator we have:

$$\tilde{W}_{ckt} - \tilde{W}_{ck', \tau(t+1)} + \sum_{\pi \in I_{ckk'}} \frac{BT_{\pi}}{BT_c^{\max}} \leq 1 \quad \forall c \in C^{eSTN}, \\ \forall k, k' \in I_{ckk'} \neq \emptyset, t = 1, \dots, H+1 \quad (24)$$

Due to the cyclic nature of the operation the initial and final equipment states are equal. Therefore two hypothesis can be considered: (i) no initial or final equipment states are defined and their value is calculated automatically by the optimisation procedure; (ii) a single pre-specified initial/final *cState* ( $k_0/k_f$ ) value is defined:

$$\tilde{W}_{ck_0,1} = 1 \quad \forall c \in C^{eSTN} \quad (25)$$

where

$$\tilde{W}_{ck_0,1} = \tilde{W}_{ck_f,T+1} \quad \forall c \in C^{eSTN} \quad (26)$$

therefore, the initial and final states of the plant are the same.

#### Unit Constraints

As for the connections, the *uState* constraints are now written from  $t = 1$  to  $T$ .

Having formulated *eSTN* models for both the periodic and non-periodic operating modes, we are now able to consider operational pre-conditions during the design activity. The above constraints are added to the problem formulation presented by Barbosa-Póvoa and Macchietto [2] and a full detailed description of the design of batch plants is obtained. In this way, not only the plant operations is accounted for in detail but also very novel important structure selection problems can be studied. The design of utility circuits, such as steam and cold water, as well as all Cleaning-In-Place integration can now be undertaken.

#### 4. Solution Method

The formulations presented result in a MILP problem. This is solved using a branch and bound technique (B&B), which guarantees reaching the optimal solution. The choice of the branching variable is made based on a priority ordering of the variables in the model, based on the knowledge of the practical problem for which the model was built [16]. In particular, the variables associated with the existence of units and connections are given higher priority (i.e. are branched earlier), followed by the task/equipment allocation variables. This is justified by the fact that the choice of existence variables is a strategic decision with critical cost implications for the problem. Consequently they should be forced to an integer value before other choices are made. The first binary variable which has a non-integer value is then subject to branching, generating two new sub problems (LPs) where the branching variable is fixed at either zero or one. Each new problem is then solved using the SCICONIC package [15].

Furthermore, the search along the branch and bound tree may be discontinued early by specifying a margin of optimality.

For the periodic mode of operation, if the cycle time is also to be optimised, a direct search procedure is used over  $T$ , with a fixed cycle MILP in an inner loop (as described by Shah et al. [13]).

All problem data are defined in a file using a keyword oriented language. The user specifies all sets and parameters defining:

- Plant structure (possible units and associated connectivity).

- Plant operation (mode, time of planning, etc.).
- Process data, product recipes and service operations (i.e. cleaning).
- Process/Equipment suitability.
- Production requirements.
- Operational constraints (i.e. products precedence order, cleaning requirements).
- Cost data.
- Objective function.

providing the complete data to the problem.

The input file is checked for syntax and consistency errors. The *mSTN* superstructure is generated internally, in a automatic way, based on the process/plant description given in the input file. Finally, the problem is converted to an MILP and solved using the method described above.

## 5. Example

In this section an example is described that illustrate the features of the operational preconditions analysed in the previous sections.

A relative margin of optimality of 1% is used. The proportions of material within the process recipes are assumed to be defined in terms of mass units, unless noted.

A plant must be designed with the aim of maximising the annual profit while guaranteeing the minimum production of three different products P1, P2 and P3. The products recipe is illustrated in Figure 1. Proportions are in mass units and the processing time in hours.

The plant superstructure assumed is displayed in Figure 2 and the equipment and raw materials characteristics are given respectively in Tables 1, 2 and 3.

Units	Suitability	Capacity [te]		Costs Fixed[10 <sup>3</sup> \$] Variables[\$/kg]
		Min	Max	
Reactor R1	Reaction_1 Reaction_3			
Reactor R2	Clean_1,Clean_3 Reaction_2,Clean_1 Clean_2,Clean_3	50	100	100-5
Splitter SP	Separation	50	100	100-4
CIP_T	Recover_CIP			
CIP_W	Tr-CIP_F,CIP_Fluid CIP_used	50	250	130-2
Vessel CIP_F	CIP_Fluid	-	unlimited	-
Vessel V1	F1	-	unlimited	-
Vessel V2	I1	50	100	10-0.1
Vessel V3	P1	-	unlimited	-
Vessel V4	F2	-	unlimited	-
Vessel V5	I3	50	100	10-0.25
Vessel V6	P2	-	unlimited	-
Vessel V7	P3	-	unlimited	-

Table 1 - Unit characteristics

Nº	Source Unit	Sink Unit	Suitability for material States	Capacity [te]		Cost: Fixed[10 <sup>3</sup> \$] Variable[\$/kg]
				Min	Max	
1	Vessel V1	Reactor R1	F1	0	100	1-0.01
2	Vessel V2	Reactor R2	I1	0	100	1-0.01
3	Vessel V4	Reactor R1	F2	0	100	1-0.01
4	Vessel V5	Splitter SP	I3	0	100	1-0.01
5	Reactor R1	Reactor R2	CIP_used,I1,I2	0	100	5-0.05
6	Reactor R1	Vessel V2	I1	0	100	1-0.01
7	Reactor R1	Vessel V5	I3	0	100	1-0.01
8	Reactor R1	Splitter Sp	I3	0	100	1-0.01
9	Reactor R1	Valve	CIP_Used,I1,I2	0	100	5-0.01
10	Valve	Reactor R2	CIP_Used,I1,I2	0	100	-
11	Valve	CIP_W	CIP_Used			
12	Reactor R2	Vessel V3	P1	0	100	1-0.01
13	Reactor R2	CIP_W	CIP_Used	0	100	1-0.01
14	Splitter Sp	Vessel V6	P2	0	100	1-0.01
15	Splitter Sp	Vessel V7	P3	0	100	1-0.01
16	CIP_F	CIP_T	CIP_FLUID	0	100	1-0.2
17	CIP_F	Reactor R1	CIP_FLUID	0	100	1-0.2
18	CIP_F	Reactor R2	CIP_FLUID	0	100	1-0.2
19	CIP_T	Reactor R1	CIP	0	100	1-0.2
20	CIP_T	Reactor R1	CIP	0	100	1-0.2
21	CIP_W	CIP_T	CIP_Used	0	100	-

Table 2 - Connection characteristics

Raw Materials	Costs [\$/kg]	Products	Values [\$/kg]	Requirements [te/h]
State F1	0.01			
State F2	0.015	State P1	0.1	6.67-10
State CIP_F	0.009	State P2	0.07	4.17-7.92
State Detergent	0.001	State P3	0.03	0.87-2.25
State Soda	0.002			

Table 3 - Raw Material costs, product values and

Cleaning operations are described by the *STN* shown in Figure 3. The cleaning is defined through two different operating policies. On the one hand, cleaning may be performed without recover of the CIP fluid, described through tasks Clean\_3 and Clean\_2. On the other hand, CIP fluid recovery is also considered as defined through tasks Clean\_1, Clean\_2 and Recover\_CIP.

The design choices include whether to recover the CIP fluid or not, the choice of CIP circuits and details of the CIP operation (cleaning timings, raw material needs, equipment sizes and circuits).

Minimum utilisation factors associated with each cleaning operation in the different main equipment are shown in Tables 4 together with the other units/task size factors considered.

Tasks	Units	Minimum Utilisation Factors
Clean 1	Reactor R1	0.5
Clean 2	Reactor R2	0.25
Clean 2	Reactor R2	0.25
Clean 3	Reactor R1	0.5
Clean 3	Reactor R2	0.25
Reaction 1	Reactor R1	0.13
Reaction 3	Reactor R1	0.13

Table 4 - Cleaning factors

Based on the cleaning needs, plant structure and process recipes the *eSTN* representation for selected item of equipment (main units and connections) is defined as shown in Figures 4 and 6 to 8. These establish the link between the process (Figure 1) and the associated cleaning (Figure 3).

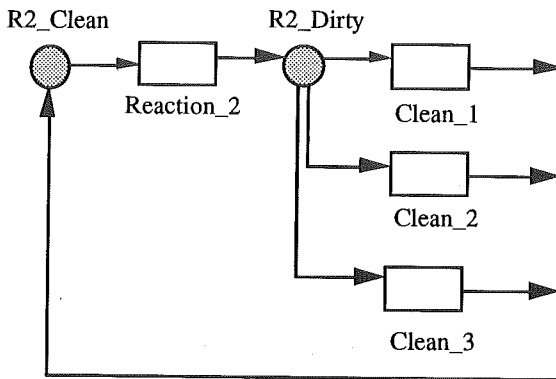


Figure 6 - unit State-Task Network for R2

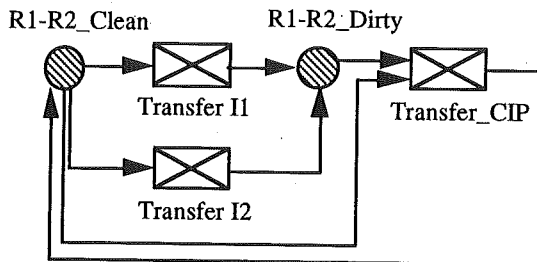


Figure 7 - connection State-Task Network for R1-R2



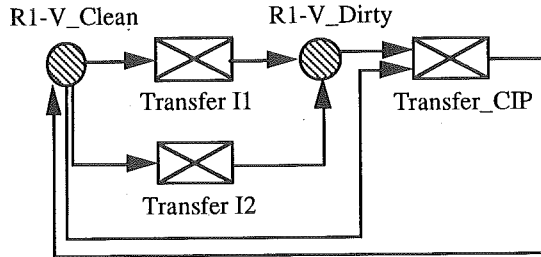


Figure 8 - unit State-Task Network for R1\_V

Reactor R1, if chosen, must be cleaned after performing any one of its suitable tasks, Reaction\_1 or Reaction\_3. The same happens to reactor R2 (when being used to process task Reaction\_2), and also to the connections between both reactors (with or without valve, R1-R2, R1-V) which need to be cleaned after being used to transfer material in the intermediate state I1 or/and I2. An analysis of the different cleaning policies and of the plant superstructure shows that different cleaning strategies, with or without recovery of the CIP fluid, are possible:

- 1 - Clean R1 and R2 independently by installing connection R1-V-R2 which is cleaned simultaneously with R1.
- 2 - Clean R1 and R2 simultaneously, through connection R1-R2 (which is also cleaned at the same time).
- 3 - Mixed strategy, with both parallel and independent cleaning of the reactors within the plant.

All these possibilities are examined implicitly in the MILP formulation. The final results, assuming a periodic operation with a fixed cycle time of 16 hours, are displayed in Table 5 and Figures 9 and 10.

Profit [10 <sup>3</sup> \$]	Units Capacity [te]					
	CIP_T	R1	R2	SP	V2	V5
9809.48	20	80	80	64	64	-
Optimal Production levels (10 <sup>3</sup> /h)						
Product P1 - 10, Product P2 - 6.4, Product P3 - 1.6						

Table 5 - Plant profit and unit capacities in the optimal solution

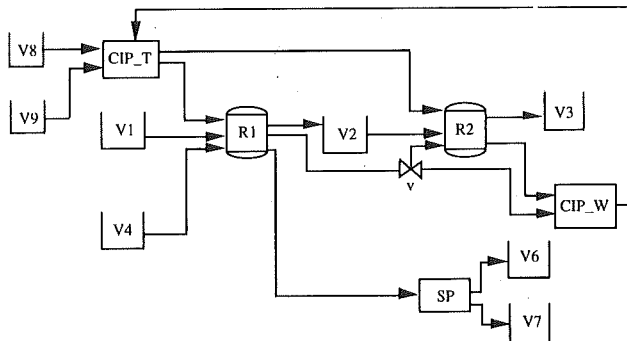


Figure 9 - Optimal plant structure

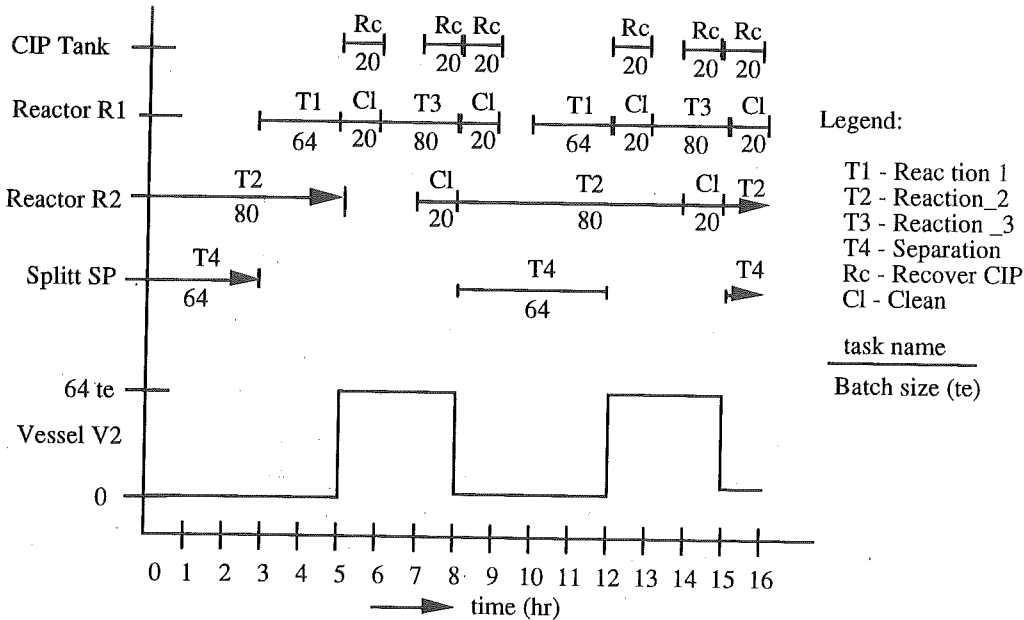


Figure 10 - Final plant schedule

No initial or final equipment states are specified. The optimal solution corresponds to a process involving recovery of the CIP material, with separate cleaning circuits for reactors R1 and R2 and requiring an initial inventory of 20 units of CIP fluid. Therefore it is more profitable to buy all the equipment and feedstocks associated with a recovery operation than to incur operations costs associated with the use of fresh CIP feed.

Reactors R1 and R2 are cleaned independently while connection R1-V is cleaned simultaneously with R1. In parallel to each cleaning task the CIP tank (CIP\_T) unit performs the necessary recovery of the CIP fluid (task recover\_CIP).

The optimal plant schedule involves a multipurpose operation for reactor R1, performing reactions 1 and 3, whereas reactor R2 is dedicated to a single processing task, Reaction\_2. In terms of intermediate storage, material in state I1 is stored in vessel V2 which is designed with a capacity of 64 tonnes.

Finally, the computational statistics are shown in Table 6.

Obj.	Relaxed LP	NIV	NV	NC	LPs	CPU[s]
9800	10178	364	1300	2728	126	217.9
NIV - Number of integer variables						
NV - Number of variables						
NC - Number of constraints						
LPs - Number of linear programs solved						
Relaxed LP - Objective function for relaxed solution						
Data obtained in a SUN SPARCstation 10						

Table 6 - Computational statistics data

## 6. Conclusion

The problem of designing multipurpose batch plants accounting directly for the structural elements describing the plant and for the equipment pre-conditions has been formulated as a MILP program with two different objectives. These involve respectively the minimization of the capital cost and the maximization of the plant profit.

The *equipment State-Task Network* was used as the main tool to represent the operating constraints which include two similar representations, namely the *unit State-Task Network* and the *connection State-Task Network* respectively for the main equipment and for the connections.

A particular outstanding problem often encountered when designing batch plants, the integration of Cleaning-In-Place circuits or, more in general, of utility distribution circuits was considered using the *eSTN*.

As final result we have now a complete formulation that allows us to address the design of multipurpose plants with a very wide range of different operation pre-conditions and constraints. As a consequence, the design of not only the main process network but also of utility networks such as CIP circuits can be undertaken, while accounting for all possible operational pre-conditions.

The final design will thus result in a more realistic plant structure and operations shedule, with all restrictions accounted for.

The high level of detail considered in the proposed formulation may lead to large MILP problems and the computational burden will grow accordingly. In order to overcome this difficulty other solution methods are being studied. These are based on decomposition approaches and will be published elsewhere. On the one hand a master problem and a subproblem within an iterative procedure are developed. An aggregate formulation is used for the master problem providing the structural variables values for the MILP subproblem. On the other hand the application of a Benders Decomposition to the result MILP model is still a matter of study by the authors.

## References

- [1] Barbosa-Póvoa, A.P.F.D., *detailed Design and Retrofit of Multipurpose Batch Plants*, PhD Thesis, University of London (1994) UK.
- [2] Barbosa-Póvoa, A.P.F.D., Macchietto, S., *Detailed Design of Multipurpose Batch Plants*, *Comp. Chem. Engng.* 18 (1994) 1013-1042.
- [3] Douglas, J.M., *Conceptual Design of Chemical Processes*, MacGraw-Hill International Edt. (1988).
- [4] Crooks, C., *Synthesis of Operating Procedures for Chemical Plants*, PhD Thesis, University of London (1992) UK.
- [5] Kondili, E., Pantelides, C.C. and Sargent, R.W.H., *A general algorithm for scheduling batch operations*, In *Intl. Symp. on Process Systems Engineering* (1988) 62-75, Sydney, Australia.
- [6] Pantelides, C.C., *Unified Framework for Optimal Process Planning and Scheduling*, FOCAPD94 (1994), Snowmass, USA.
- [7] Papageorgaki, S. and Reklaitis, G.V., *Optimal Design of Multipurpose Batch Plants. 1-Problem Formulation*, *Ind. Eng.Chem.Res.* 29 (1990) 2054-2062.
- [8] Reklaitis, G.V., *Progress and Issues in Computer Aided Batch Process Design*, *Third Intl. Conf. on Foundations of Computer-Aided Proc. Des.* (1989) 241-276, Snowmass, Colorado, USA.

- [9] Reklaitis, G.V., *Perspectives on Scheduling and Planning of Process Operations*, In Fourth Intl. Symp. on Process Systems Engineering (1991), Montebello, Quebec, Canada.
- [10] Rippin, D.W.T., *Batch Process Planning*, Chem Engng. (1991) 101-107.
- [11] Rippin, D.W.T., *Batch Process Systems Engineering: a Retrospective and Prospective Review*, Comp. Chem. Engng. 32 (1992) S1-S32.
- [12] Shah, N. and Pantelides, C.C., *Design of Multipurpose Batch Plants with Uncertain Production Requirements*, Ind. Eng. Chem. Res. 30 (1992) 1325-2062.
- [13] Shah, N., Pantelides, C.C. and Sargent, R.W.H., *Optimal Periodic Scheduling of Multipurpose Batch Plants*, Annals of Operations Research 42 (1993) 193-228.
- [14] Sargent, R.W.H., *Process Design. What Next?*, Third Intl. Conf. on Foundations of Computer-Aided Proc. Des. (1989) 529-553, Snowmass, Colorado, USA.
- [15] SD-SICCON, *Sciconic Mathematical Programming Manual*, Scicon Ltd. (1992) UK.
- [16] Williams, H.P., *Model Building in Mathematical Programming*, John Wiley and Son Ltd. (1990).

## OPTIMIZATION OF QUANTITATIVE RELATIONSHIP IN ANIMAL SCIENCE\*

**Ivan Georgiev**

Thracian University  
Stara Zagora, Bulgaria

**Rumena Kaltinska**

Institute of Mathematics and Informatics  
Bulgarian Academy of Sciences, Sofia, Bulgaria

**Veselin Videv**

Thracian University  
Stara Zagora, Bulgaria

**Dimo Guirguinov**

Thracian University  
Stara Zagora, Bulgaria

### Abstract

A mathematical approach for optimization a given *factors-production* empirical dependence under some restrictions of the *factors* is considered. The approach is applicable to different agricultural real life problems. In this paper it is applied to the particular case of dependence *fodders-wool production* in the fine-fleece and semifine-fleece direction of ewe-breeding on the base of statistical data for the effects of fodder groups on wool production of ewes.

### Resumo

O nosso objectivo é fazermos uma abordagem matemática para optimizarmos uma dada dependência empírica dos factores de produção, considerando algumas restrições sobre esses factores. Esta abordagem é exequível e passível de ser aplicada a diferentes problemas/realidades agrícolas. Neste caso particular, procuraremos aplicá-la ao caso da dependência da produção forragem-lã relativamente à lã pura e semi-pura na criação de ovelhas tendo como base dados estatísticos para os efeitos dos grupos de forragem na produção de lã de ovelhas.

### Keywords

Approximation, optimization, production function.

### 1. Introduction

The objective of the present study is the modelling of actual objects that leads to optimization tasks and the development of appropriate software for experimentation, verification and application.

The specific direction of research is to determine the optimum amounts of each fodder group used for ewes kept in sheds, which can provide (at invariable other housing conditions)

---

\* This work is partially supported by the Ministry of Education and Sciences under Grants N° I-518/95

maximum wool production. The model is based on statistical data for the effects of fodder groups on wool production of ewes. The aim of the present investigation is the approximation of the empirical data using an approximating function and the determination of the optimal variant of the volume and structure of fodder groups in ewes' daily diets in respect to nutrition standards.

The study of this particular problem led up to an approach for solving a general scope of economic problems in the agriculture, connected with optimizing a quantitative dependence (a function) *factors-production*. For instance, such a dependence is "feeds-production" in the stock-breeding, "fertilizers-harvest" in the plant-growing, etc. The problem is to determine optimal quantitative values of the *factors*, which satisfy some conditions (restrictions) and for which the function *factors-production* has optimal value. Some of these kind of problems are well known and are usually interpreted mathematically as linear optimization problems.

In this paper we consider the more complicated practical case, when the function *factors-product* is given empirically and the character of the restrictions could be arbitrary (not only linear). We propose a mathematical approach for solving such problems, which consists of two stages: a) *Approximation* of the empirically given function *factors-product* by a function of a properly chosen class of mathematical problems; b) *Optimization* of the found *approximating function* subject to the restrictions required on the *factors*. The mathematical problems solved at these two stages are nonlinear in the general case. That requires a proper user-friendly software, containing a good base of numerical methods for solving the arising nonlinear mathematical problems.

This paper is structured as follows. Section 2 contains the economic formulation of the task, and Section 3, its mathematical model, the solution approach and the results obtained. The interactive system AGRI used for solving the problems is briefly presented in Section 4.

## 2. Economic formulation of the task

Each kind of production, including the animal production, is based on certain fundamental principles related most often to the factor or batch of factors-results relationship. As these relationships are in conformity with certain laws, it is logically to speak of fundamental relationship or briefly, for an output function [4]. In animal production the limiting factors (usually fodders) tend (until some production level of production) to manifest themselves more as product formatting factors which means that a unit of effect gain (milk yield, wool production, daily gain, etc.) is obtained using less than a unit of factor gain.

After reaching of a certain point, the rate of increasing of the total result stops being anticipating compared to costs, or the well known in economics Law of Decreasing Return becomes valid [3]. The combination of the performance of resources idea with the limitation of output factors is the basic reason for us to state the idea of *factors-production* relationship in animal production. This function determines the maximum quantity of product (result of production) which can be obtained at a known combination of factor amounts. For example, the

performance in animal production is directly dependent on the variability of the factor "fodder". Since the output cannot be a result of only one factor, each *factors-production* relation is based on corresponding production system. In such a situation every alteration in the production system (breed, production line, etc.) will cause formulation of a new output function. In our case we assume the batch of factors fixed and the subject of economic analysis is the relation between the varying factor "fodder" and performance.

In animal production the most part of the production factors can be assumed as relatively fixed - for example, the breed, provision with buildings, machines, facilities, qualified farmers, etc., except the fodder, which do not show great variability. Obviously, the same level of performance can be reached using different combinations of the basic factors in animal production - the fodder, from the point of view of its volume and structure. The problems considering the necessary set of rations, providing different production, including the maximum, the most profitable and which of them should be assumed optimum, are still open. The seeking of proper tools when determining such type of function is caused by the fact that the relationship between fodder spent and the product obtained is more complicated and cannot be described linearly [1]. One of the determination approaches is through analysis of discrete values (experimental data), but it is unsuitable for our case because it does not allow the analysis of the output function as a continued process. The second possible approach which is adopted here, is, on the basis of practice data to formulate continued functions that allow the analysis of relationship as continued, with precise determination of the form of its appearance. In this case it is possible to work with individual fodders and groups of fodders (with fixed structure) and to look for their functional relation with the result - average wool production of ewes of wool type. One of the aims of this investigation is to indicate a methodology to obtain the above described functional relationship.

The basic goal of this investigation is to determine what volume and structure of fodders can provide (at invariable other housing conditions) maximum wool production per ewe. The second task is to study what amount of fodders fed in the sheds (according to their types) can provide optimum performance (average wool production), ensuring top performance.

In this sense, the task of this work is to determine and analyse the biological and economic extremum under conditions of shed and pasture system of ewe rearing. To achieve this, a great set of empiric data collected from 12 fine wool and 12 crossbred farms for a 3-year period (1991-1993) has been used (Table 2).

### 3. The mathematical model

Here we describe a mathematical approach for optimizing an empirically given function *factors-production* under some restrictions on the *factors*. To make things clear, we take the particular economic problem given in Section 2, namely the function *fodders wool production*. The problem is to find the optimal quantities of the *fodders* in the ration of the ewes, that ensures a maximal *wool production* (an average clip) of an ewe. The mathematical model is

based on empiric data for the relationship between the *wool production* and the feeding of the ewes.

Denote by  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  the ration of an ewe, where  $x_j$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ) is the quantity of the  $j$ -th fodder in the ration  $x$ . Denote by  $Y_E(x)$  the function of *wool production* (the average clip from an ewe), that depends on the ration  $x$ .  $Y_E(x)$  is known only empirically by its values  $Y_E(x^i)$  for different rations  $x^i = (x_1^i, x_2^i, \dots, x_n^i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ , where  $x_j^i$  is the quantity of the  $j$ -th fodder in the ration  $x^i$ . Further we call  $Y_E(x)$  by the short name *empiric function*.

The problem is to find an optimal ration  $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ , for which the *wool production* of an ewe is maximal. For this purpose, first, we need a mathematical form (a formula) describing the relation between the *wool production*  $Y_E(x)$  and the ration  $x$ , i.e., we need a mathematical function (denote it by  $Y_A(x)$ ) that approximate  $Y_E(x)$  sufficiently well in some sense. After  $Y_A(x)$  is determined, we can find  $x^*$  using mathematical methods for maximizing  $Y_A(x)$  under some restrictions on  $x$ , which are connected with the nutrition standards of a ration. Since  $x^*$  maximizes  $Y_A(x)$ , we accept that  $x^*$  sufficiently well maximizes the *empiric function*  $Y_E(x)$  too.

So, we solve the problem in two stages:

I. *Approximation*. At this stage we approximate the *empiric function*  $Y_E(x)$  by a function  $Y_A(a, x)$ , which belongs to a properly chosen class of mathematical functions. The last means, that the formula of  $Y_A(a, x)$  is chosen, but the coefficients  $a = (a_1, a_2, \dots, a_s)$ ,  $s \leq m$  in this formula are unknown. They have to be determined by means of *empiric data*, so that the *approximating function*  $Y_A(a, x)$  to be closest in some sense to the *empiric function*  $Y_E(x)$ .

In our research we apply a mean square approximation, i.e we determine the coefficients by solving the following least-squares optimization problem

$$\text{minimize } R(a) = \sum_{i=1}^m [Y_A(a, x^i) - Y_E(x^i)]^2 \text{ subject to } a \in R^s. \quad (1)$$

where  $x^i$  and  $Y_E(x^i)$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) are the empiric data available.

Let  $a^* = (a_1^*, a_2^*, \dots, a_s^*)$  be an optimal solution of (1), i.e.

$$R_{\min} = R(a^*)$$

The found *approximating function* is  $Y_A(a^*, x)$ . Since  $Y_A(a^*, x)$  depends now only on  $x$ , we note it by  $Y_A(x)$  at the stage *Optimization*.

The minimal value  $R(a^*)$  of the *mean square deviation*  $R(a)$  is the measure of "closeness" between the found *approximating function*  $Y_A(a^*, x)$  and the *empiric function*  $Y_E(x)$ . Note that  $R(a^*)$  becomes smaller as  $m$  gets bigger than  $s$ , i.e, as more empiric data are available.

II. *Optimization*. At this stage, we maximize the *approximating function*  $Y_A(x)$  on a region  $\Omega$ , determined by restrictions, which the ration  $x$  must satisfy. That leads to the optimization problem

$$\text{maximize } Y_A(x) \text{ subject to } x \in \Omega. \quad (2)$$

Each optimal solution  $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$  of problem (2) is an optimal ration, for which the *wool production* has the optimal value  $Y_A(x^*)$ .



Depending on the form of the objective function  $Y_A(x)$  and the constrained set  $\Omega$ , problem (2) belongs to different classes of optimization problems.

A particular realization of these two stages is described in Sections 3.1 and 3.2 respectively on the base of the concrete empiric data in the fine-fleece and semifine-fleece direction of ewe-breeding.

### 3.1 Approximation

The available empiric data is given in the first eleven columns of Table 2. They are the values  $Y_E(x^i)$  of the *empiric function*  $Y_E(x)$  at 72 different points  $x^i = (x_1^i, x_2^i, \dots, x_{10}^i)$ . The quantities  $Y_E(x^i)$  are the average clip of an ewe depending on the rations  $x^i$ ,  $i = 1, 2, \dots, 72$ .

The rations consists of ten sorts of fodders, namely:

$x_1$ - maize	$x_2$ - barley	$x_3$ - bran	
$x_4$ - lucerne silage	$x_5$ - haylage	$x_6$ - green maize	(3)
$x_7$ - green lucerne	$x_8$ - barley straw	$x_9$ - meadow hay	
$x_{10}$ - lucerne hay			

The numbers in each row " $x^i$ " of Table 2, situated in the columns denoted by " $x_1^i$ ", " $x_2^i$ ", ..., " $x_{10}^i$ " are the corresponding components of the ration  $x^i = (x_1^i, x_2^i, \dots, x_{10}^i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, 72$ .

In our research, we choose the approximating function  $Y_A(a, x)$  to be a quadratic function of a general form

$$Y_A(a, x) = a_0 + \sum_{k=1}^{10} a_k x_k + \sum_{k=1}^{10} \sum_{l=k+1}^{10} a_{kl} x_k x_l \quad (10)$$

$Y_A(a, x)$  has 68 unknown coefficients  $a_0, a_k$  ( $k=1, 2, \dots, 10$ ),  $a_{kl}$  ( $k=1, 2, \dots, 10; l=k+1, \dots, 10$ ), i.e.  $a = (a_0, a_1, \dots, a_{10}, a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1,10}, a_{23}, \dots, a_{2,10}, \dots, a_{9,10})$ . We find the coefficients by solving the optimization problem (1), in which  $s = 68$ ,  $m = 72$  and both the values  $Y_E(x^i)$  and the components  $x_1^i, x_2^i, \dots, x_{10}^i$  of  $x^i$  ( $i=1, 2, \dots, 72$ ) are taken from Table 2.

The optimal solution  $a^* = (a_0^*, a_1^*, \dots, a_{10}^*, a_{11}^*, a_{12}^*, \dots, a_{9,10}^*)$  is found by the interactive system AGRI (see Section 4). Replacing the components of  $a$  in (4) by the components of  $a^*$ , we determine the concrete formula (5) of the *approximating function*  $Y_A(x)$ . The *mean square deviation*  $R_{\min} = R(a^*) = 0.424$ .

$$\begin{aligned}
 Y_A(x) = & -22.979528 \\
 & -0.127849x_1 \quad +0.55868x_2 \quad -0.15293x_3 \quad -0.00289x_4 \\
 & +0.48404x_5 \quad +0.98359x_6 \quad +0.102104x_7 \quad -0.139124x_8 \\
 & -0.839553x_9 \quad +0.363612x_{10} \\
 & -0.001377x_1^2 \quad -0.000528x_2^2 \quad +0.000512x_3^2 \quad -0.005160x_4^2 \\
 & -0.005020x_5^2 \quad +0.012022x_6^2 \quad -0.001242x_7^2 \quad -0.000708x_8^2 \\
 & -0.000675x_9^2 \quad -0.002049x_{10}^2 \\
 & -0.002720x_1x_2 \quad +0.003449x_1x_3 \quad +0.000505x_1x_4 \\
 & +0.009448x_1x_5 \quad -0.010085x_1x_6 \quad +0.000085x_1x_7 \quad -0.000567x_1x_8 \\
 & -0.003120x_1x_9 \quad +0.002210x_1x_{10}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -0.004344x_2x_3 + 0.005647x_2x_4 - 0.016171x_2x_5 + 0.006617x_2x_6 \\
& + 0.006579x_2x_7 - 0.001684x_2x_8 + 0.016936x_2x_9 - 0.005644x_2x_{10} \quad (5) \\
& + 0.001222x_3x_4 + 0.002994x_3x_5 - 0.004219x_3x_6 + 0.004401x_3x_7 \\
& + 0.002324x_3x_8 - 0.002165x_3x_9 + 0.000335x_3x_{10} \\
& + 0.004235x_4x_5 - 0.009043x_4x_6 + 0.005469x_4x_7 - 0.000381x_4x_8 \\
& - 0.005802x_4x_9 + 0.005927x_4x_{10} \\
& + 0.008075x_5x_6 - 0.0008315x_5x_7 + 0.000648x_5x_8 + 0.003445x_5x_9 \\
& - 0.002663x_5x_{10} \\
& - 0.007865x_6x_7 + 0.002775x_6x_8 - 0.008203x_6x_9 - 0.006048x_6x_{10} \\
& + 0.003678x_7x_8 + 0.005584x_7x_9 + 0.004671x_7x_{10} \\
& - 0.000207x_8x_9 + 0.000388x_8x_{10} \\
& + 0.004290x_9x_{10}
\end{aligned}$$

We compute the *approximating values*  $Y_A(x^i)$  by replacing  $x_1, x_2, \dots, x_{10}$  in (5) by the components  $x_1^i, x_2^i, \dots, x_n^i$  of  $x^i$  from Table 2 ( $i=1, 2, \dots, 72$ ). The values  $Y_A(x^i)$ ,  $i=1, 2, \dots, 72$ , are given in the last column of Table 2, and they show that the function  $Y_A(x)$  given in (5) approximates the *empiric function*  $Y_E(x)$  sufficiently well.

### 3.2 Optimization

At the second stage the problem is to choose such a feeding of the ewes, which ensures the average clip of an ewe to be maximal. That means to choose an optimal structure and content of the ration of the ewes, using the fodders from (3). The ration has to be subject to the nutrition standards of ewes. It has to contain the necessary food substances, namely food-units (FU), digestible protein in the intestines (DPI), calcium (Ca), phosphorous (P), sulphur (S) and vitamin A (Vit A). The quantities (in grams) of which in a kilogram of dry substance (DS) of the fodders is given in Table 1.

	Food substances	FU	DPI	Ca	P	S	Vit A
	Forages	gr	gr	gr	gr	gr	thous. units
$x_1$	Maize	1.52	131	0.3	3.9	1.7	1.6
$x_2$	Barley	1.35	95	0.9	4.0	1.5	0.4
$x_3$	Bran	0.88	106	1.8	12.0	2.3	1.2
$x_4$	Lucerne silage	0.71	72	18.8	2.5	3.6	30.0
$x_5$	haylage	0.65	74	18.8	2.5	3.6	20.0
$x_6$	Green maize	1.05	82	4.5	2.8	2.0	32.0
$x_7$	Green lucerne	0.80	98	18.1	2.7	4.1	80.0
$x_8$	Barley straw	0.35	53	3.0	1.0	1.7	0.0
$x_9$	Meadow hay	0.68	80	7.5	2.6	2.4	10.0
$x_{10}$	Lucerne hay	0.61	94	16.7	2.5	3.4	8.0

Table 1 - Food contents in 1 kilogram of dry substance

The standard intervals defining the necessary quantities of dry substance and food substances in a ration are given below:

[450,960]	for dry substance (DS) in kg,
[370,850]	for food-units (FU) in gr,
[35000,90000]	for digestible protein in the intestines (DPI) in gr,
[2600,8500]	for calcium (Ca) in gr,
[1300,5000]	for phosphorous (P) in gr,
[900,3400]	for sulphur (S) in gr,
[2800,14000]	for vitamin A (Vit.A) in thousand units.

Hence, for the quantities  $x_1, x_2, \dots, x_{10}$  (kilograms) of fodders in a ration we have the following constraints:

$$\begin{aligned}
 450 &\leq x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} &&\leq 960 \\
 370 &\leq 1.52x_1 + 1.35x_2 + 0.88x_3 + 0.71x_4 + 0.65x_5 \\
 &\quad + 1.05x_6 + 0.80x_7 + 0.35x_8 + 0.68x_9 + 0.61x_{10} &&\leq 850 \\
 35000 &\leq 131.0x_1 + 95.0x_2 + 106.0x_3 + 72.0x_4 + 74.0x_5 \\
 &\quad + 8.20x_6 + 98.0x_7 + 53.0x_8 + 80.0x_9 + 94.0x_{10} &&\leq 90000 \\
 2600 &\leq 0.3x_1 + 0.9x_2 + 1.8x_3 + 18.8x_4 + 18.8x_5 \\
 &\quad + 4.5x_6 + 18.1x_7 + 3.0x_8 + 7.5x_9 + 16.7x_{10} &&\leq 8500 \quad (6) \\
 1300 &\leq 3.9x_1 + 4.0x_2 + 12.0x_3 + 2.5x_4 + 2.5x_5 \\
 &\quad + 2.8x_6 + 2.7x_7 + 1.0x_8 + 2.6x_9 + 2.5x_{10} &&\leq 5000 \\
 900 &\leq 1.7x_1 + 1.5x_2 + 2.3x_3 + 3.6x_4 + 3.6x_5 \\
 &\quad + 2.0x_6 + 4.1x_7 + 1.7x_8 + 2.4x_9 + 3.4x_{10} &&\leq 3400 \\
 2800 &\leq 1.6x_1 + 0.4x_2 + 1.2x_3 + 30.0x_4 + 20.0x_5 \\
 &\quad + 32.0x_6 + 80.0x_7 + 10.0x_9 + 8.0x_{10} &&\leq 14000
 \end{aligned}$$

We add also the natural restrictions for lower and upper bounds of the variables  $x_1, x_2, \dots, x_{10}$ , connecting with the practice. In order the mathematical model to be maximal close to the available empiric data, these bounds for each variable  $x_j$  are chosen to be respectively the minimal and the maximal quantity in the column " $x_j^i$ " of Table 2. The following box constraints are required:

$$\begin{aligned}
 60 &\leq x_1 \leq 128 \\
 61 &\leq x_2 \leq 114 \\
 23 &\leq x_3 \leq 112 \\
 50 &\leq x_4 \leq 104 \\
 38 &\leq x_5 \leq 100 \\
 20 &\leq x_6 \leq 48 \\
 14 &\leq x_7 \leq 50 \\
 6 &\leq x_8 \leq 143 \\
 16 &\leq x_9 \leq 86 \\
 27 &\leq x_{10} \leq 117
 \end{aligned} \quad (7)$$

To find an optimal ration  $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_{10}^*)$  means to maximize the function  $Y_A(x)$  from (5) under the restrictions (6) and (7), i.e., to solve the optimization problem

$$\text{Maximize } Y_A(x) \text{ from (5) subject to the constraints (6) and (7).} \quad (8)$$

The objective function (5) is a quadratic function and the constraints (6) and (7) are linear, i.e., (8) is a Quadratic Programming problem.

We solve (8) by means of the interactive *AGRI* (see Section 4). It was found that the objective function (5) is neither concave nor convex and has many local maxima. We give below the components of  $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_{10}^*)$ , which is the best among the locally optimal solutions determined by *AGRI*:

$$\begin{array}{llll} x_1^* = 70 & x_2^* = 114 & x_3^* = 75 & x_4^* = 92 \\ x_5^* = 74 & x_6^* = 38 & x_7^* = 50 & x_8^* = 6 \\ x_9^* = 61 & x_{10}^* = 98 & & \end{array} \quad (9)$$

and

$$Y_A^{\max} = Y_A(x^*) = 12.982.$$

So, theoretically, we obtain that the maximum *wool production* (the average clip) of an ewe is 12.982 kg and it is ensured by the ration (9), composed from the fooders (3). The structure of the foders in ration (9) in percentages is

$$\text{concentrates : futter beet : roughages} = 38.2 : 37.46 : 24.33.$$

The results in this section are found on the base of the empiric data from Table 2, i.e., on the base of the investigated totality of ewes, when a shed and pasture system of ewe breeding is applied at invariable other housing conditions.

We can see how the optimal ration  $x^*$ , satisfies the nutrition standards (6). For this purpose we substitute the variables  $x_1, x_2, \dots, x_{10}$  in (6) for  $x_1^*, x_2^*, \dots, x_{10}^*$  from (9) respectively and obtain the quantities of substances in the ration  $x^*$ :

$$\begin{array}{ll} \text{DS} = 732 & \text{(dry substance)} \\ \text{DPI} = 62533.6 & \text{(digestible protein)} \\ \text{P} = 2749 & \text{(phosphorous)} \\ \text{Vit A} = 11097.6 & \text{(vitamin A)} \end{array} \quad \begin{array}{ll} \text{FU} = 641.88 & \text{(food-units)} \\ \text{Ca} = 6729.5 & \text{(calcium)} \\ \text{S} = 1922.7 & \text{(sulphur)} \end{array}$$

They are within the required bounds of nutrition standards (6).

In conclusion, the results are valid only for the investigated set of farms and the concrete production circumstances. Our approach can be applied to solve similar stock-breeding problems.

$x^i$	Wool prod. $Y_A(x^i)$	maize $x_1^i$	barley $x_2^i$	bran $x_3^i$	luc.silage $x_4^i$	haylage $x_5^i$
$x^1$	7.540	120.000	79.000	35.000	96.000	99.000
$x^2$	8.890	128.000	83.000	44.000	89.000	89.000
$x^3$	9.318	110.000	112.000	23.000	86.000	85.000
$x^4$	9.984	108.000	109.000	75.000	92.000	74.000
$x^5$	7.712	86.000	70.000	76.000	89.000	74.000
$x^6$	8.482	79.000	79.000	101.000	103.000	77.000
$x^7$	7.412	77.000	69.000	68.000	80.000	60.000
$x^8$	9.486	87.000	80.000	89.000	87.000	82.000
$x^9$	7.912	82.000	83.000	74.000	80.000	71.000
$x^{10}$	7.104	72.000	69.000	69.000	61.000	49.000
$x^{11}$	6.077	61.000	62.000	74.000	59.000	48.000
$x^{12}$	5.223	63.000	58.000	67.000	59.000	48.000
$x^{13}$	7.618	79.000	73.000	78.000	93.000	83.000
$x^{14}$	8.631	122.000	110.000	31.000	90.000	74.000
$x^{15}$	9.418	82.000	73.000	96.000	104.000	100.000
$x^{16}$	9.776	100.000	98.000	116.000	97.000	74.000
$x^{17}$	7.804	82.000	80.000	91.000	92.000	80.000
$x^{18}$	8.591	81.000	76.000	93.000	82.000	75.000
$x^{19}$	7.630	68.000	73.000	100.000	73.000	72.000
$x^{20}$	9.518	91.000	89.000	75.000	80.000	74.000
$x^{21}$	8.140	76.000	73.000	102.000	72.000	65.000
$x^{22}$	6.966	72.000	73.000	80.000	58.000	54.000
$x^{23}$	5.920	67.000	71.000	72.000	54.000	51.000
$x^{24}$	5.108	65.000	63.000	73.000	61.000	60.000
$x^{25}$	7.380	67.000	70.000	81.000	87.000	65.000
$x^{26}$	8.714	86.000	80.000	101.000	87.000	83.000
$x^{27}$	9.512	69.000	72.000	109.000	86.000	82.000
$x^{28}$	9.608	93.000	93.000	107.000	87.000	83.000
$x^{29}$	7.901	80.000	81.000	73.000	75.000	74.000
$x^{30}$	8.714	76.000	73.000	93.000	86.000	82.000
$x^{31}$	7.601	91.000	72.000	102.000	63.000	58.000
$x^{32}$	9.306	73.000	76.000	112.000	72.000	65.000
$x^{33}$	8.004	75.000	70.000	88.000	72.000	66.000
$x^{34}$	6.871	69.000	73.000	91.000	72.000	68.000
$x^{35}$	5.910	69.000	70.000	81.000	54.000	51.000
$x^{36}$	5.203	65.000	64.000	77.000	53.000	52.000

Table 2 - Quantitive relations between the wool production and the fodders

$x^i$	gr.maize $x_6^i$	gr.luc. $x_7^i$	brar.strow $x_8^i$	med.hay $x_9^i$	luc.hay $x_{10}^i$	$Y_A(x^i)$
$x^1$	29.000	18.000	6.000	16.000	30.000	7.541
$x^2$	34.000	23.000	31.000	41.000	96.000	8.893
$x^3$	42.000	30.000	37.000	46.000	66.000	9.322
$x^4$	38.000	50.000	60.000	61.000	98.000	9.981
$x^5$	30.000	34.000	57.000	54.000	69.000	7.713
$x^6$	42.000	25.000	63.000	44.000	71.000	8.466
$x^7$	29.000	19.000	63.000	56.000	79.000	7.443
$x^8$	34.000	24.000	91.000	61.000	102.000	9.437
$x^9$	25.000	14.000	91.000	64.000	101.000	7.934
$x^{10}$	29.000	23.000	66.000	61.000	92.000	7.135
$x^{11}$	20.000	19.000	66.000	61.000	92.000	6.183
$x^{12}$	20.000	23.000	66.000	62.000	89.000	5.258
$x^{13}$	48.000	19.000	143.000	54.000	57.000	7.618
$x^{14}$	32.000	31.000	60.000	54.000	74.000	8.550
$x^{15}$	32.000	25.000	63.000	56.000	100.000	9.408
$x^{16}$	42.000	44.000	94.000	66.000	87.000	9.740
$x^{17}$	33.000	19.000	77.000	54.000	73.000	7.837
$x^{18}$	39.000	41.000	97.000	56.000	90.000	8.629
$x^{19}$	30.000	28.000	80.000	50.000	74.000	7.494
$x^{20}$	39.000	40.000	103.000	60.000	84.000	9.493
$x^{21}$	33.000	26.000	86.000	69.000	90.000	8.039
$x^{22}$	32.000	38.000	37.000	46.000	27.000	6.964
$x^{23}$	29.000	20.000	86.000	54.000	69.000	5.947
$x^{24}$	29.000	28.000	54.000	64.000	84.000	5.116
$x^{25}$	38.000	44.000	91.000	64.000	95.000	7.403
$x^{26}$	40.000	34.000	114.000	61.000	110.000	8.731
$x^{27}$	40.000	31.000	143.000	76.000	107.000	9.473
$x^{28}$	43.000	34.000	109.000	81.000	105.000	9.558
$x^{29}$	39.000	45.000	54.000	54.000	69.000	7.903
$x^{30}$	39.000	36.000	100.000	54.000	92.000	8.811
$x^{31}$	35.000	36.000	103.000	56.000	80.000	7.682
$x^{32}$	38.000	44.000	120.000	70.000	90.000	9.331
$x^{33}$	38.000	25.000	100.000	67.000	87.000	7.913
$x^{34}$	28.000	30.000	49.000	30.000	57.000	6.919
$x^{35}$	28.000	24.000	71.000	54.000	74.000	5.925
$x^{36}$	29.000	29.000	83.000	56.000	75.000	5.229

Table 2 - continuation of rows 1-36

$x^i$	Wool prod. $Y_E(x^i)$	maize $x_1^i$	barley $x_2^i$	bran $x_3^i$	luc.silage $x_4^i$	haylage $x_5^i$
$x^{37}$	6.362	65.000	68.000	79.000	63.000	57.000
$x^{38}$	7.512	83.000	70.000	72.000	86.000	71.000
$x^{39}$	8.663	81.000	81.000	106.000	79.000	43.000
$x^{40}$	7.814	89.000	73.000	79.000	91.000	76.000
$x^{41}$	9.141	82.000	76.000	85.000	82.000	78.000
$x^{42}$	8.860	121.000	81.000	39.000	90.000	90.000
$x^{43}$	6.914	70.000	68.000	68.000	59.000	50.000
$x^{44}$	7.210	74.000	71.000	72.000	63.000	61.000
$x^{45}$	7.860	89.000	73.000	79.000	91.000	76.000
$x^{46}$	8.818	127.000	86.000	42.000	86.000	38.000
$x^{47}$	9.308	111.000	114.000	36.000	88.000	87.000
$x^{48}$	5.906	60.000	61.000	73.000	60.000	47.000
$x^{49}$	6.450	69.000	68.000	81.000	56.000	52.000
$x^{50}$	7.781	81.000	80.000	93.000	94.000	81.000
$x^{51}$	8.312	78.000	76.000	104.000	73.000	66.000
$x^{52}$	7.603	67.000	72.000	102.000	74.000	71.000
$x^{53}$	8.960	127.000	114.000	32.000	94.000	76.000
$x^{54}$	8.217	77.000	74.000	112.000	74.000	69.000
$x^{55}$	7.212	71.000	70.000	91.000	60.000	61.000
$x^{56}$	7.460	81.000	80.000	104.000	73.000	79.000
$x^{57}$	8.121	76.000	73.000	108.000	79.000	68.000
$x^{58}$	8.660	86.000	74.000	94.000	83.000	76.000
$x^{59}$	9.100	93.000	91.000	112.000	96.000	71.000
$x^{60}$	6.130	66.000	70.000	74.000	50.000	51.000
$x^{61}$	6.610	69.000	71.000	89.000	71.000	69.000
$x^{62}$	7.521	90.000	71.000	101.000	60.000	56.000
$x^{63}$	8.140	75.000	71.000	92.000	70.000	63.000
$x^{64}$	7.844	70.000	69.000	74.000	86.000	66.000
$x^{65}$	9.111	69.000	70.000	118.000	89.000	88.000
$x^{66}$	8.460	72.000	71.000	94.000	86.000	81.000
$x^{67}$	7.413	90.000	73.000	98.000	61.000	52.000
$x^{68}$	7.510	97.000	84.000	106.000	67.000	60.000
$x^{69}$	8.330	78.000	74.000	89.000	73.000	66.000
$x^{70}$	8.121	73.000	70.000	88.000	71.000	84.000
$x^{71}$	9.316	91.000	94.000	112.000	89.000	84.000
$x^{72}$	6.080	70.000	69.000	80.000	56.000	760.000

Table 2 - rows 37-72

$x^i$	gr.maize $x_6^i$	gr.luc. $x_7^i$	brar.strow $x_8^i$	med.hay $x_9^i$	luc.hay $x_{10}^i$	$Y_A(x^i)$
$x^{37}$	26.000	22.000	71.000	73.000	88.000	6.355
$x^{38}$	28.000	31.000	53.000	51.000	63.000	7.465
$x^{39}$	28.000	29.000	65.000	49.000	82.000	8.661
$x^{40}$	32.000	36.000	59.000	56.000	72.000	7.782
$x^{41}$	30.000	22.000	89.000	70.000	94.000	9.162
$x^{42}$	35.000	23.000	31.000	42.000	97.000	8.854
$x^{43}$	28.000	22.000	67.000	63.000	94.000	6.880
$x^{44}$	32.000	34.000	59.000	71.000	87.000	7.217
$x^{45}$	32.000	36.000	58.000	54.000	71.000	7.936
$x^{46}$	23.000	31.000	42.000	48.000	94.000	8.816
$x^{47}$	48.000	32.000	39.000	48.000	69.000	9.302
$x^{48}$	21.000	19.000	67.000	60.000	91.000	5.756
$x^{49}$	30.000	39.000	124.000	66.000	71.000	6.451
$x^{50}$	34.000	22.000	88.000	56.000	76.000	7.760
$x^{51}$	34.000	28.000	88.000	71.000	93.000	8.380
$x^{52}$	31.000	29.000	81.000	52.000	76.000	7.674
$x^{53}$	36.000	37.000	66.000	56.000	78.000	9.035
$x^{54}$	36.000	28.000	87.000	71.000	93.000	8.108
$x^{55}$	36.000	41.000	131.000	63.000	34.000	7.216
$x^{56}$	31.000	29.000	81.000	54.000	76.000	7.466
$x^{57}$	38.000	29.000	87.000	66.000	93.000	8.257
$x^{58}$	40.000	42.000	98.000	63.000	91.000	8.592
$x^{59}$	42.000	41.000	91.000	67.000	86.000	9.110
$x^{60}$	30.000	26.000	88.000	56.000	73.000	6.109
$x^{61}$	30.000	34.000	49.000	31.000	62.000	6.577
$x^{62}$	34.000	36.000	102.000	50.000	81.000	7.465
$x^{63}$	41.000	28.000	111.000	63.000	61.000	8.145
$x^{64}$	36.000	50.000	92.000	65.000	97.000	7.820
$x^{65}$	47.000	32.000	143.000	86.000	117.000	9.137
$x^{66}$	44.000	38.000	101.000	56.000	98.000	8.404
$x^{67}$	39.000	38.000	101.000	50.000	59.000	7.384
$x^{68}$	41.000	36.000	93.000	59.000	77.000	7.536
$x^{69}$	39.000	29.000	111.000	69.000	88.000	8.377
$x^{70}$	41.000	22.000	94.000	71.000	106.000	8.142
$x^{71}$	37.000	31.000	90.000	76.000	94.000	9.375
$x^{72}$	29.000	36.000	71.000	62.000	77.000	6.057

Table 2 - continuation of rows 37-72



#### 4. Software

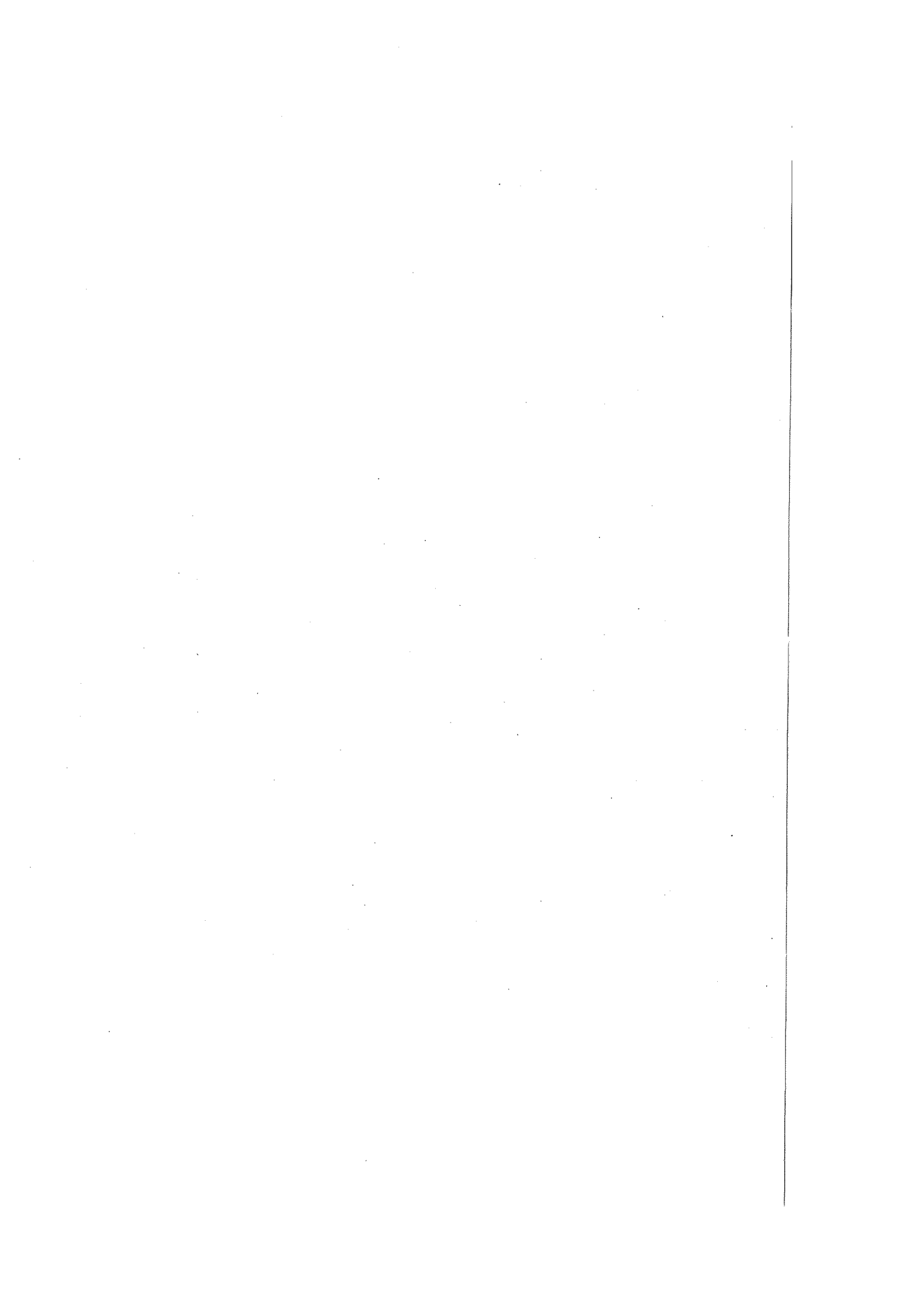
The problem considered in Section 3 is solved by the interactive system *AGRI* from the family "Practical Optimization" of interactive optimization systems (see [2]). The systems of this family have an userfriendly unified interface oriented to the specific features and terminology of practical problems included in the systems.

*AGRI* is intended to solve different classes of agricultural problems, some of which are well-known. In particular, *AGRI* solves problems similar to the problems considered in this paper, whose mathematical models lead to nonlinear optimization problems of the form (1) and (2).

The user interface of *AGRI* is oriented to the terminology of the corresponding agricultural problems. All customary means to edit, save, list and print the entered problems are available. The computational process can be optionally visualized and controlled by the user. That also includes possibilities to interrupt the calculations at any moment, in order to look over the current results and/or change the method and the values of some parameters, and to continue the process. Numerical results can be optionally saved and are easily retrieved for further processing. All that ensures the successful solving of real-life problems.

#### References

- [1] Allen, R.G.D., *Mathematical Analysis for Economists*, New York, St. Martin's Press Inc. (1964).
- [2] Kaltinska, R., *Practical Optimization*, Proc.of 26th Spring Conf. of Un. Bul. Math. (1997) 250-255, Sofia.
- [3] Kohler, H., *Intermediate Microeconomics: Theory and Applications*, Glenview, Ill.: Scott, Foresm and Company (1982).
- [4] Sonka, S.T., Heady, E.O. and Dahm, P.F., *Estimation of gain isoquants and a decision model application for production*, American Journal of Agricultural Economics (1976) 466-474.



# OPTIMALITY AND ALGORITHM FOR GENERALIZED INVEX CHEBYSHEV PROBLEM

**S. Mititelu**

Department of Mathematics  
Institute of Civil Engineering  
Bd. Lacul Tei 124  
RO-71302 Bucharest - Romania

**I.M.S. Stancu-Minasian**

Centre of Mathematical Statistics of the Romain Academy  
Bd. Magheru 22  
RO-70158 Bucharest 22 - Romania

## Abstract

In this paper Clarke's generalized directional derivative is used to establish necessary and sufficient optimality conditions for the Chebyshev problem with mixed constraints (inequality and equality constraints). For sufficient conditions it is furthermore assumed that the functions which define the object of the problem are pseudoconvex, those which define the inequality constraints are quasiinvex and those which define the equality constraints are inquasimonotonic. Moreover, if the functions of the problem are differentiable, we establish a new criterion of sufficient optimality of an admissible solution. Using this criterion, when the functions of the problem are also "strict", this paper presents an algorithm of the admissible directions type to solve Chebyshev's problem. A numerical example is given as an illustration.

## Keywords

nonlinear programming, Chebyshev problem, optimality conditions.

## 1. Introduction

Let  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  be an open and nonempty set and let  $f = (f_1, \dots, f_r) : A \rightarrow \mathbb{R}^r$ ,  $g = (g_1, \dots, g_m) : A \rightarrow \mathbb{R}^m$  and  $h = (h_1, \dots, h_s) : A \rightarrow \mathbb{R}^s$  be vector functions. We put  $\bar{1}, \bar{r} = \{1, \dots, r\}$ ,  $\bar{1}, \bar{m} = \{1, \dots, m\}$  and  $\bar{1}, \bar{s} = \{1, \dots, s\}$ . For  $x, y \in \mathbb{R}^n$  we write  $x \leq y$  if  $x_i \leq y_i$  for all  $i = 1, \dots, n$  and  $x \leq y$  if  $x \leq y$  but  $x \neq y$ .

The usual "Chebyshev problem" [2] (or according to Kuhn and Tucker [3] "maximum component minimum problem") can be formulated as

$$(CP) \quad \min_{x \in D} \{E(x) = \max_{1 \leq i \leq r} f_i(x)\}$$

were the set  $D = \{x \in A \mid g(x) \leq 0, h(x) = 0\}$  is assumed to be nonempty.

We shall mention some results obtained for the Chebyshev problem but in the reduced form

$$(1) \quad \min \{F(x) \mid g(x) \leq 0\}.$$

In 1951 Kuhn and Tucker [3] established the necessary conditions of extremum for problem (1) for the case of differentiable functions  $f_i (i \in \overline{1, r})$  and  $g_j (j \in \overline{1, m})$  as well as the sufficiency conditions for the case when these functions are also convex. In 1963 Pallu de la Barrière [12] established other necessary and sufficient conditions of extremum for problem (1), for the case of differentiable functions  $f_i (i \in \overline{1, r})$  and  $g_j (j \in \overline{1, m})$ . Problem (1) was also studied by Maruscian and Radulescu [6] ( $f_i$  are convex quadratic functions and  $g_j$  are linear functions), as well as by Zang [15] ( $f_i, g_j$  are differentiable functions). The latter gave both extremum conditions and a solution method to this problem. Recently, Weir and Mond [14] have established sufficient optimality conditions and duality theorems for problem (1) when  $f_i (i \in \overline{1, r})$  are pseudoconvex and  $g_j (j \in \overline{1, m})$  are differentiable quasiconvex functions. Such problems have been recently extended to the case when the functions  $f_i (i \in \overline{1, r})$  are linear or nonlinear fractional and  $g_j (j \in \overline{1, m})$  are differentiable and present (generalized) convexities of various kinds. A list of references on this subject can be found in Stancu-Minasian [13].

In this paper we approach the optimality of the Chebyshev problem in more general conditions, when the functions of the problem are generally nonsmooth. The main instrument we are using for establishing the results of the present paper is Clarke's generalized directional derivative. We shall give now the following notions and definitions.

Let  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  be a numerical function and let  $a \in A$ . Clarke's directional derivative of  $f$  at the point  $a$ , in the direction  $v \in \mathbb{R}^n$ , is defined by

$$f^0(a; v) = \limsup_{\substack{x \rightarrow a \\ \lambda \downarrow 0}} \frac{f(x + \lambda v) - f(x)}{\lambda}.$$

Mitielu [10] defined the subdifferential of the function  $f$  (generally nonlipschitzian) at the point  $a$  by the set

$$\partial f(a) = \{ \xi \in \mathbb{R}^n \mid f^0(a; v) \geq \xi'v, \forall v \in \mathbb{R}^n \}$$

and showed that if  $f^0(a; \cdot)$  is a finite function on  $\mathbb{R}^n$ , then  $\partial f(a)$  is a nonempty, unique, convex and compact set. Moreover, one has the relation

$$f^0(a; v) = \max_{\xi \in \partial f(a)} \xi'v = \bar{\xi}'v \quad (\bar{\xi} \in \partial f(a)).$$

Also, in what follows we shall use the following types of generalized invexity.

**Definition 1** [11].

a) The function  $f$  is said to be pseudoinvex at  $a \in A$  if there exists a vector function  $\eta : A \times A \rightarrow \mathbb{R}^n$  such that

$$\forall x \in A : f^0(a; \eta(x, a)) \geq 0 \Rightarrow f(x) \geq f(a).$$

b) In the same conditions, if

$$\forall x \in A, x \neq a : f^0(a; \eta(x, a)) \geq 0 \Rightarrow f(x) > f(a)$$

then  $f$  is called strictly pseudoinvex at  $a$ .

**Definition 2** [11].

a) The function  $f$  is said to be quasiinvex at  $a \in A$  if there exists a vector function  $\eta : A \times A \rightarrow \mathbb{R}^n$  such that

$$\forall x \in A : f(x) \leq f(a) \Rightarrow f^0(a; \eta(x,a)) \leq 0$$

b) In the same conditions, if

$$\forall x \in A, x \neq a : f(x) \leq f(a) \Rightarrow f^0(a; \eta(x,a)) < 0$$

then the function  $f$  is called strictly quasiinvex at  $a$ .

**Definition 3.** The function  $f$  is said to be inquasimonotonic at  $a \in A$ , if there exists a vector function  $\eta : A \times A \rightarrow \mathbb{R}^n$  such that

$$\forall x \in A : f(x) = f(a) \Rightarrow f^0(a; \eta(x,a)) = 0.$$

**2. Necessary optimality conditions for (CP)**

Let  $x^0 \in D$  be a point and let us consider the index sets  $I^0 = \{i \mid f_i(x^0) = F(x^0)\}$  and  $J^0 = \{j \mid g_j(x^0) = 0\}$ . We shall establish necessary optimality conditions of Kuhn-Tucker type for the problem (CP) at  $x^0$ , assuming the following regularity condition

$$(R) \begin{cases} \exists v \in \mathbb{R}^n \text{ such that : } g_{J^0}^0(x;v) \leq 0, h^0(x^0;v) = 0 \text{ and} \\ \exists \varepsilon > 0 \text{ such that : } f_i(x^0 + \varepsilon v) < F(x^0) \ (\forall i \in \overline{1, r} \setminus I^0), \\ \quad \quad \quad g_{\overline{1, m} \setminus J^0}^0(x^0 + \varepsilon v) \leq 0, h(x^0 + \varepsilon v) = 0 \end{cases}$$

Here  $g_{J^0}^0(x^0;v)$  is the vector of components  $g_j^0(x^0;v), \forall j \in J^0$ .

We shall need the following

**Lemma.** Let  $x^0$  be a local solution of (CP) and suppose that the constraint qualification (R) is satisfied. Then the system

$$(2) \begin{cases} f_{I^0}^0(x^0;v) < 0 \\ g_{J^0}^0(x^0;v) \leq 0 \\ h^0(x^0;v) = 0 \end{cases}$$

does not admit a solution in  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ .

The proof is similar to that of Lemma of [9], pag.437.

There follows the main result of this section.

**Theorem 1.** (Kuhn-Tucker necessary optimality conditons). Let  $x^0$  be a local solution of problem (CP), where the constraint qualification (R) is satisfied. Suppose that  $h^0(x^0, \cdot)$  is bounded. Then there exist vectors  $t \in \mathbb{R}^r, y \in \mathbb{R}^m$  and  $z \in \mathbb{R}^s$  such that the Kuhn-Tucker conditions at  $x^0$  for (CP) are satisfied, i.e.

$$(KTn) \begin{cases} \sum_{i=1}^r t_i f_i^0(x^0; v) + \sum_{j=1}^m y_j g_j^0(x^0; v) + \sum_{k=1}^s z_k h_k^0(x^0; v) = 0, \forall v \in R^n \\ t_i [f_i(x^0) - F(x^0)] = 0, i=1, \dots, r \\ t_i \geq 0, \sum_{i=1}^r t_i = 1 \\ y_j g_j(x^0) = 0; y_j \geq 0; g_j(x^0) \leq 0, j=1, \dots, m \\ h_k(x^0) = 0, k=1, \dots, s. \end{cases}$$

**Proof.** According to Lemma, system (2) does not admit a solution in  $R^n \setminus \{0\}$ . Since the function  $h_k^0(x^0; \cdot)$ ,  $k \in \overline{1, s}$  are finite, then according to [10] (Theorem 1.1) the subdifferentials  $\partial h_k(x^0)$ ,  $k \in \overline{1, s}$  are nonempty, unique, convex and compact sets. Moreover, there exist the subgradients  $\bar{\xi}_i \in \partial f_i(x^0)$ ,  $\forall i \in I^0$ ;  $\bar{\eta}_j \in \partial g_j(x^0)$ ,  $\forall j \in J^0$  and  $\bar{\xi}_k \in \partial f_k(x^0)$ ,  $\forall k \in \overline{1, s}$  such that

$$(3) \begin{cases} f_i^0(x^0; v) \geq \bar{\xi}_i' v, \forall i \in I^0, \forall v \in R^n \\ g_j^0(x^0; v) \geq \bar{\eta}_j' v, \forall j \in J^0, \forall v \in R^n \\ h_k^0(x^0; v) = \max_{\xi_k \in \partial h_k(x^0)} \xi_k' v = \bar{\xi}_k' v, \forall k \in \overline{1, s}, \forall v \in R^n. \end{cases}$$

Then, according to Lemma, the following system

$$\begin{cases} \bar{\xi}_i' v < 0, i \in I^0 \\ \bar{\eta}_j' v \leq 0, j \in J^0 \\ \bar{\xi}_k' v = 0, k \in \overline{1, s} \end{cases}$$

is incompatible.

According to Motzkin's theorem [4] (pag.28) there also exist the scalars

$$t_i \geq 0 \text{ with } \sum_{i \in I^0} t_i = 1; y_j \in R_+, j \in J^0; z_k \in R, k \in \overline{1, s}$$

such that

$$(4) \quad \sum_{i \in I^0} t_i \bar{\xi}_i + \sum_{j \in J^0} y_j \bar{\eta}_j + \sum_{k=1}^s z_k \bar{\xi}_k = 0$$

Now, multiplying relation (4) by  $v \in R^n$  and taking into account relation (3) we obtain

$$(5) \quad \sum_{i \in I^0} t_i f_i^0(x^0; v) + \sum_{j \in J^0} y_j g_j^0(x^0; v) + \sum_{k=1}^s z_k h_k^0(x^0; v) = 0, \forall v \in R^n.$$

We define  $t_i = 0$  if  $i \in \overline{1, r} \setminus I^0$ ;  $y_j = 0$  if  $j \in \overline{1, m} \setminus J^0$  and then (5) becomes the first relation from (KTn). Also, from the choice of the scalars  $t_i$  ( $i \in \overline{1, r}$ ) and  $y_j$  ( $j \in \overline{1, m}$ ) and due to the fact that  $x^0 \in D$ , there results that the other Kuhn-Tucker conditions are satisfied.

3. Sufficient conditions of extremum for problem (2)

First, we establish the sufficiency of the Kuhn-Tucker conditions at  $x^0 \in D$  for problem (CP) in the generalized invexity conditions of the functions involved in the Chebyshev problem (CP). Then one has

**Theorem 2.** (Kuhn-Tucker sufficient optimality conditions). We suppose that the functions  $f_i (i \in \overline{1, r})$  are pseudoinvex at  $x^0$  with respect to the functions  $\gamma_i : A \times A \rightarrow R^n$ ,  $g_j (j \in \overline{1, m})$  are quasiinvex at  $x^0$  with respect to the functions  $\eta_j : A \times A \rightarrow R^n$ ,  $h_k (k \in \overline{1, s})$  are inquasimonotonic at  $x_0$  with respect to the functions  $\theta_k : A \times A \rightarrow R^n$ . Also, we suppose that the following Kuhn-Tucker optimality conditions are satisfied:

$$(KTs) \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^r t_i f_i^0(x^0; \gamma_i(x, x^0)) + \sum_{j=1}^m y_j g_j^0(x^0; \eta_j(x, x^0)) + \sum_{k=1}^s z_k h_k^0(x^0; \theta_k(x, x^0)) = 0, \forall x \in D \\ t_i [f_i(x^0) - F(x^0)] = 0, i = 1, \dots, r \\ t_i \geq 0, \sum_{i=1}^r t_i = 1 \\ y_j' g_j(x^0) = 0, y_j \geq 0 \\ g(x^0) \leq 0, h(x^0) = 0. \end{array} \right.$$

Then  $x^0$  is a global solution of the problem (CP).

**Proof.** We have  $x^0 \in D$  and also

$$t_i = 0 \text{ and } f_i(x^0) < F(x^0), \forall i \in \overline{1, r} \setminus I^0$$

$$y_j = 0 \text{ and } g_j(x^0) < 0, \forall j \in \overline{1, m} \setminus J^0.$$

Then from the relations (KTs) we obtain

$$(6) \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i \in I^0} t_i f_i^0(x^0; \gamma_i(x, x^0)) + \sum_{j \in J^0} y_j g_j^0(x^0; \eta_j(x, x^0)) + \sum_{k=1}^s z_k h_k^0(x^0; \theta_k(x, x^0)) = 0, \forall x \in D \\ t_i [f_i(x^0) - F(x^0)] = 0, \forall i \in I^0 \\ t_i \geq 0, \sum_{i \in I^0} t_i = 1 \\ y_{j_0} \geq 0, y_{j_0}' g_{j_0}(x^0) = 0. \end{array} \right.$$

Since the functions  $g_j (j \in J^0)$  are quasiinvex at  $x^0$  with respect to the functions  $\eta_j (j \in J^0)$  it follows that

$$\forall x \in D, \forall j \in J^0 : g_j(x) \leq g_j(x^0) \Rightarrow g_j^0(x^0; \eta_j(x, x^0)) \leq 0.$$

Therefore,

$$(7) \sum_{j \in J^0} y_j g_j^0(x^0; \eta_j(x, x^0)) \leq 0, \forall x \in D.$$

Since the functions  $h_k (k \in \overline{1, s})$  are inquasimonotonic at  $x^0$  with respect to the functions  $\theta_k (k \in \overline{1, s})$  it follows that

$$\forall x \in D, \forall k \in \overline{1, s} : h_k(x) = h_k(x^0) \Rightarrow h_k^0(x^0; \theta_k(x, x^0)) = 0$$

and then we obtain

$$(8) \sum_{k=1}^s z_k h_k^0(x^0; \theta_k(x, x^0)) = 0, \forall x \in D.$$

Taking into account relations (7) and (8), from the first relation of (6) we infer

$$\sum_{i \in I^0} t_i f_i^0(x^0; \gamma_i(x, x^0)) \geq 0, \forall x \in D.$$

But the functions  $f_i(i \in I^0)$  are pseudoinvex at  $x^0$  with respect to  $\gamma_i(i \in I^0)$  and then

$$\forall x \in D, \forall i \in I^0 : f_i^0(x^0; \gamma_i(x, x^0)) \geq 0 \Rightarrow f_i(x) \geq f_i(x^0).$$

Consequently

$$\sum_{i \in I^0} t_i f_i^0(x^0; \gamma_i(x, x^0)) \geq 0 \Rightarrow \sum_{i \in I^0} t_i f_i(x) \geq \sum_{i \in I^0} t_i f_i(x^0).$$

This implies that

$$\sum_{i \in I^0} t_i \max_{1 \leq i \leq r} f_i(x) \geq (\sum_{i \in I^0} t_i) F(x^0), \forall x \in D.$$

or  $F(x) \geq F(x^0), \forall x \in D$ . Hence,  $x^0$  must be a global solution to problem (CP).

An optimality criterion of a feasible solution of the problem (CP) is given by the following

**Theorem 3.** Let  $x^0$  be a point of  $D$  and let us consider the sets  $I^0$  and  $J^0$  defined in section 2.

We suppose that  $f_i(i \in I^0)$  are pseudoinvex at  $x^0$  with respect to the same function  $\gamma : A \times A \rightarrow$

$\mathbb{R}^n$ ,  $g_j(j \in J^0)$  are quasiinvex at  $x^0$  with respect to the functions  $\eta_j : A \times A \rightarrow \mathbb{R}^n$  and  $h_k(k \in \overline{1, s})$

are inquasi-monotonic at  $x^0$  with respect to the functions  $\theta_k : A \times A \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

If the following system

$$(9) \begin{cases} f_i^0(x^0; \gamma(x, x^0)) < 0, i \in I^0 \\ g_j^0(x^0; \eta_j(x, x^0)) \leq 0, j \in J^0 \\ h_k^0(x^0; \theta_k(x, x^0)) = 0, k \in \overline{1, s} \end{cases}$$

is incompatible in  $D$ , then  $x^0$  is an optimal solution to the problem (CP).

**Proof.** Since the system does not admit a solution in  $D$ , then there exists a nonempty subset

$S^0 \subset I^0$  such that the following system

$$\begin{cases} f_i^0(x^0; \gamma(x, x^0)) \geq 0, i \in S^0 \\ f_i^0(x^0; \gamma(x, x^0)) < 0, i \in I^0 \setminus S^0 \\ g_j^0(x^0; \eta_j(x, x^0)) \leq 0, j \in J^0 \\ h_k^0(x^0; \theta_k(x, x^0)) = 0, k \in \overline{1, s} \end{cases}$$

is compatible in  $D$ .

Because the functions  $f_i(i \in S^0)$  are pseudoinvex at  $x^0$ , it follows that

$$(10) \forall y \in D : f_i^0(x^0; \gamma(y, x^0)) \geq 0 \Rightarrow f_i(y) \geq f_i(x^0) (\forall i \in S^0).$$

Also, for  $y \in D, f_i(i \in I^0 \setminus S^0)$  and a number  $\lambda > 0$ , sufficiently small, we have



$$\frac{f_i(x^0 + \lambda \mathcal{Y}(x, x^0)) - f_i(x^0)}{\lambda} \leq f_i^0(x^0; \mathcal{Y}(x, x^0)) < 0$$

or once more

$$f_i(x^0 + \lambda \mathcal{Y}(x, x^0)) < f_i(x^0), \forall i \in I^0 \setminus S^0.$$

Denoting  $x^0 + \lambda \mathcal{Y}(x, x^0) = y \in D$ , these relations become

$$(11) \quad f_i(y) < f_i(x^0), \forall i \in I^0 \setminus S^0.$$

Then, from (10) and (11) we obtain

$$F(y) = \max_{1 \leq i \leq r} f_i(y) = \max_{i \in S^0} f_i(y) \geq \max_{i \in S^0} f_i(x^0) = F(x^0).$$

Therefore  $x^0$  is an optimal solution of (CP), generally local.

#### 4. Algorithm for solving the problem (CP)

In this section, an algorithm is presented to determine an optimal solution of the Chebyshev problem. The algorithm is based on the following consequence of Theorem 3.

**Corollary.** Assume that the functions  $f_i (i \in \overline{1, r})$  are differentiable strictly pseudoinvex on  $A$  with respect to the same differentiable function  $\mathcal{Y} : A \times A \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $g_j (j \in \overline{1, m})$  are differentiable quasiinvex on  $A$  with respect to the differentiable functions  $\eta_j : A \times A \rightarrow \mathbb{R}^n$  and  $h_k (k \in \overline{1, s})$  are differentiable inquaasimonotonic on  $A$  with respect to the differentiable function  $\theta_k : A \times A \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Let  $x^0 \in D$  and  $I^0 = \{i \mid f_i(x^0) = F(x^0)\}$ . If the system

$$(12) \quad \begin{cases} v' \nabla f_i(x^0) < 0, \forall i \in I^0 \\ v' \nabla h_k(x^0) = 0, \forall k \in \overline{1, s} \\ v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \end{cases}$$

is incompatible, then  $x^0$  is a strictly local optimal solution of the problem (CP).

This means that if (12) is compatible, then  $x^0$  is not an optimal point of the problem (CP). For finding such a point, from  $x^0$  we move in the direction  $v^0$  which is an optimal solution of system (12). The direction  $v^0$  is more efficient if the point  $(v^0, y^0)$  is an optimal solution of the following linear program

$$(PL) \quad (x^0) \quad \begin{cases} v' \nabla f_i(x^0) + y < 0, \forall i \in I^0 \\ v' \nabla h_k(x^0) = 0, \forall k \in \overline{1, s} \\ v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, y > 0 \\ \max y \end{cases}$$

The following iteration  $x^1$  of the solution is on the half-line

$$D_{v^0} = \{x^0 + \lambda v^0 \mid \lambda > 0\}$$

according to the following algorithm.

**Algorithm for solving the problem (CP).** The algorithm consists of similar stages. The first stage has the following steps:

- 1) Let  $x^1 \in D, I^1 = \{i \mid f_i(x^1) = F(x^1)\}$  and  $\epsilon > 0$ . Go to step 2).

2) If the system

$$(13) \begin{cases} v' \nabla f_i(x^1) < 0, \forall i \in I^1 \\ v' \nabla h_k(x^1) = 0, \forall k \in \overline{I, s} \\ v \in R^n \setminus \{0\} \end{cases}$$

is incompatible, then  $x^1$  is an optimal point. Stop.

Otherwise, system (13) is compatible. Go to step 3).

3) Let  $v^1$  be a solution of system (13) (or of the linear program (PL)  $(x^1)$ ). Calculate

a1)  $t' = \min_j (\lambda_j')$ , where  $\lambda_j'$  are strictly positive roots of the following equations:

$$\begin{aligned} g_j(x^1 + \lambda v^1) &= 0, \forall j \in \overline{I, m} \\ h_k(x^1 + \lambda v^1) &= 0, \forall k \in \overline{I, s}. \end{aligned}$$

a2)  $t'' = \min_i (\lambda_i'')$ , where  $\lambda_i''$  are strictly positive roots of the equations:

$$v^1 \nabla f_i(x^1 + \lambda v^1) = 0, \forall i \in I^1.$$

a3)  $t''' = \min_{\substack{i, \ell \in I \\ i \neq \ell}} (\lambda_{i\ell}''')$ , where  $\lambda_{i\ell}'''$  are strictly positive roots of the following equations:

$$f_i(x^1 + \lambda v^1) = f_\ell(x^1 + \lambda v^1), i, \ell \in I^1, i \neq \ell.$$

a4) Choose  $t_1 = \min\{t', t'', t'''\}$  and calculate  $x^2 = x^1 + t_1 v^1$ . Proceed to step 4).

4) If  $F(x^1) - F(x^2) < \epsilon$ . Stop.

Otherwise, return to step 1) with  $x^2$  instead of  $x^1$ .

**Convergence of the algorithm.** Consider that  $D$  is a compact set. Assuming that  $x^1, x^2, \dots$  of successive approximations are not solutions of the problem (CP), then we obtain a sequence  $(x^k)_{k \in N} \subset D$  for which

$$F(x^1) > F(x^2) > \dots > F(x^k) > \dots > \min_{x \in D} F(x)$$

Hence, the sequence  $(F(x^k))_{k \in N}$  converges and  $\lim_{k \rightarrow \infty} F(x^k) \geq \min_{x \in D} F(x)$ .

Since  $D$  is a compact set and  $(x^k)_{k \in N} \subset D$ , according to Cezaro's lemma the sequence  $(x^k)_{k \in N}$  contains a convergent subsequence  $(x^{k_n})_{n \in N}$ . Let  $x^0 = \lim_{n \rightarrow \infty} x^{k_n}$  the limit of this

subsequence. It results that

$$\lim_{k \rightarrow \infty} F(x^k) = \lim_{n \rightarrow \infty} F(x^{k_n}) = F(x^0) \geq \min_{x \in D} F(x).$$

**Theorem 4.** If  $D$  is a compact set, then the problem (CP) admits a solution and the sequence of successive approximations contains a convergent subsequence whose limit  $x^0$  is an optimal solution of the problem (CP), i.e.  $\min_{x \in D} F(x) = F(x^0)$ .

**Proof.** According to Corollary, for the approximation  $x^{k_n}$  the following system is compatible

$$(14) \begin{cases} v' \nabla f_i(x^{k_n}) < 0, i \in I^{k_n} \\ v' \nabla h_k(x^{k_n}) = 0, k \in \overline{I, s} \\ v \in R^n \setminus \{0\} \end{cases}$$

where

$$I^{kn} = \{i \mid f_i(x^{kn}) = F(x^{kn})\}.$$

Passing to limit in system (14), we obtain that the following system

$$(15) \begin{cases} v' \nabla f_i(x^0) \leq 0, i \in I^0 \\ v' \nabla h_k(x^0) = 0, k \in \overline{1, s} \\ v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \end{cases}$$

is compatible.

Moreover, we shall show that system (15) is compatible only if we have  $v' \nabla f_i(x^0) = 0$  for some  $i \in I^0$ . On the contrary, let us consider that the system

$$(16) \begin{cases} v' \nabla f_i(x^0) < 0, i \in I^0 \\ v' \nabla h_k(x^0) = 0, k \in \overline{1, s} \\ v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \end{cases}$$

is compatible. Since the gradients  $\nabla f_i(x)$ ,  $i \in I^0$  are continuous functions there exists a ball  $B_r(x^0)$  centered in  $x^0$  and radius  $r$ , sufficiently small such that we have

$$(17) \begin{cases} v' \nabla f_i(y) < 0, \forall i \in I^0 \\ v' \nabla h_k(y) = 0, \forall k \in \overline{1, s} \\ v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \forall y \in B_r(x^0) \end{cases}$$

Consider the subsets (in finite number)

$$D_i = \{x \in D \mid f_i(x) = f_i(x^0) = F(x^0)\}, i \in I^0$$

separated by the hypersurfaces

$$H_{i,\ell} = \{x \in A \mid f_i(x) = f_\ell(x)\}, \forall i, \ell \in I^0, i \neq \ell.$$

Obviously,  $x^0 \in D_i, \forall i \in I^0$ . Since  $x^{kn} \rightarrow x^0$  it results that for a  $n_0 \in \mathbb{N}$ , sufficiently big, there exists an  $i^0 \in I^0$  such that  $x^{kn_0} \in B_r(x^0) \cap D_{i^0}$ , and for any  $\theta \in (0,1)$  we have  $\theta x^{kn_0} + (1-\theta)x^0 \in B_r(x^0) \cap D_{i^0}$ . Then, according to (17) we obtain

$$v' \nabla f_{i^0}(\theta x^{kn_0} + (1-\theta)x^0) < 0, \forall \theta \in (0,1).$$

Let us take  $v = x^{kn_0} - x^0$  and this relation becomes

$$(18) (x^{kn_0} - x^0)' \nabla f_{i^0}(\theta x^{kn_0} + (1-\theta)x^0) < 0, \forall \theta \in (0,1).$$

Applying Lagrange's formula for  $f_{i^0}$  on the interval

$$[x^{kn_0}, x^0] = \{x \in D \mid x = \lambda x^{kn_0} + (1-\lambda)x^0, 0 \leq \lambda \leq 1\}$$

it results that there exists a  $\bar{\theta} \in (0,1)$  such that

$$(19) f_{i^0}(x^{kn_0}) - f_{i^0}(x^0) = (x^{kn_0} - x^0)' \nabla f_{i^0}(\bar{\theta} x^{kn_0} + (1-\bar{\theta})x^0).$$

From relations (18) and (19) it results

$$(20) f_{i^0}(x^{kn_0}) - f_{i^0}(x^0) < 0.$$

On the other hand, by taking into account that  $x^0, x^{kn_0} \in D_{i^0}$  it results

$$(21) f_{i^0}(x^{kn_0}) - f_{i^0}(x^0) = F(x^{kn_0}) - F(x^0) > 0.$$

Relations (20) and (21) are contradictory. It means that the system (16) is incompatible. According to Corollary, it follows that  $x^0$  is an optimal solution of the problem (CP). The proof is complete.

**Application.** The algorithm will be illustrated with the help of the following numerical example.

Solve a stage for the following particular Chebyshev problem:

$$(22) \min_x \max \{ f_1(x) = x_1^2 + x_1x_2 - 9x_1 - 8x_2; f_2(x) = x_1^2 + 2x_2^2 - 6x_1 \}$$

subject to

$$(23) \begin{cases} g_1(x) = x_1^3 - 12x_1x_2 - 8 \leq 0 \\ g_2(x) = x_1^2 + x_2^2 - 8x_1 - 4x_2 + 11 \leq 0 \\ h(x) = x_1 + x_2 - 2 = 0. \end{cases}$$

**Solution.** According to Arrow and Enthoven [1], the function  $g_1(x)$  is quasiconvex on the set  $\mathbb{R}^2$  which includes the domain  $D$ , defined by relation (23). Function  $\varphi(u_1, u_2) = -u_1u_2$  is also quasiconvex [1] on  $\mathbb{R}_+^2$ . According to Mangasarian [5], function  $\varphi(8-x_1, x_1+x_2-1)$  is quasiconvex on the set  $\{(x_1, x_2) \mid 8-x_1 \geq 0, x_1+x_2-1 \geq 0\}$  which includes the domain  $D$ . Since  $\varphi(8-x_1, x_1+x_2-1) = f_1(x) + 8$ , it results that function  $f_1(x)$  is quasiconvex on  $D$ . Moreover,  $\nabla f_1(x) \neq 0$  on  $D$  and then  $f_1(x)$  is strictly pseudoconvex on  $D$  [7]. The function  $h(x)$  is linear and the functions  $g_2(x)$  and  $f_2(x)$  are convex because their hessian matrices are positive definite.

The gradients of the functions are

$$\begin{aligned} \nabla g_1(x) &= 3(x_1^2 - 4x_1, -4x_1)' & \nabla f_1(x) &= (2x_1 + x_2 - 9, x_1 - 8)' \\ \nabla g_2(x) &= 2(x_1 - 4, x_2 - 2)' & \nabla f_2(x) &= 2(x_1 - 3, 2x_2)' \\ \nabla h(x) &= (1, 1)'. \end{aligned}$$

**Stage 1.**

1) Consider initial point  $x^1 = (2, 0)' \in D$  and  $\varepsilon = 10^{-2}$ . We have  $g_1(x^1) = 0$ ,  $g_2(x^1) = -1$ ,  $h(x^1) = 0$ ,  $f_1(x^1) = -14$ ,  $f_2(x^1) = -8$ . Since  $f_2(x^1) > f_1(x^1)$  it follows that  $I^1 = \{2\}$  and  $F(x^1) = f_2(x^1) = -8$ .

2) System (14) becomes

$$\begin{cases} -v_1 < 0 \\ -v_1 - v_2 = 0. \end{cases}$$

3) Choose  $v^1 = (1, -1)'$  a solution of this system. Let  $x_\lambda^1 = x^1 + \lambda v^1 = (2 + \lambda, -\lambda)'$  and let us consider the half-line

$$D_1 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x = x_\lambda^1 = (2 + \lambda, -\lambda)', \lambda \geq 0\}.$$

a 1) The half-line  $D_1$  intersects the boundaries of  $D$  and then we have

$$\vartheta_1(\lambda) = g_1(x_\lambda^1) = \lambda^3 + 12\lambda^2 + 36\lambda = 0$$

This equation has no positive roots.

$$\vartheta_2(\lambda) = g_2(x_\lambda^1) = 2\lambda^2 - 1 = 0$$

This equation has only one strictly positive root  $\lambda_2' = 1/\sqrt{2} = 0.7$

$$\vartheta_3(\lambda) = h(x_\lambda^1) \equiv 0 \text{ i.e. we move in the plane } h(x) = 0.$$

- a2) Determine the minimum of the function  $f_2(x)$  on the half-line  $D_1$ . We have  $\varphi_2(\lambda) = f_2(x_\lambda^1) = 3\lambda^2 - 2\lambda - 8$ . The function  $\varphi_2(\lambda)$  reaches the minimum  $\lambda_2'' = 1/3 = 0.33$ .
- a3) The equation  $f_1(x) = f_2(x)$ ,  $\forall x \in D_1$  or equivalently  $f_1(2+\lambda, -\lambda) = f_2(2+\lambda, -\lambda)$  has no real solutions.
- a4)  $t_1 = \min\{\lambda_2', \lambda_2''\} = \min\{0.70; 0.33\} = 0.33$   
 $x^2 = x^1 + t_1 v_1 = (2.0)' + 0.33(1, -1)' = (2.33; -0.33)'$ .
- 4)  $F(x^2) = f_2(x^2) = f_2(2.33; -0.33) = -8 + 0.0003 = -7.9997$ .  
 $F(x^2) - F(x^1) = 0.0003 < 10^{-2} = \epsilon$ . Stop.
- Hence,  $x^2 = (2.33; -0.33)'$  can be considered as an approximative solution of the Chebyshev problem (24)-(25).

### References

- [1] Arrow, K.J. and Enthoven, A.C, *Quasi-concave programming*, *Econometrica* 29 (1961) 779-800.
- [2] Karlin, S., *Mathematical Methods and Theory in Games, Programming and Economics* Vol.I, Addison-Wesley, Reading-Mass (1959).
- [3] Kuhn, H.W. and Tucker, A.W., *Nonlinear programming*, In: Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, Univ. of California Press, Berkeley (1951) 483-492.
- [4] Mangasarian, O.L, *Nonlinear Programming*, McGraw-Hill Co, New York (1969).
- [5] Mangasarian, O.L., *Convexity, pseudo-convexity and quasi-convexity of composite functions*, *Cahiers Centre Études Rech. Opér.* 12 (1970) 114-122.
- [6] Marusciac, I. and Radulescu, M., *Un problème de la programmation quadratique à plusieurs fonctions économiques*, *Studia Univ. Babeş-Bolyai, Ser.Mat.-Mecfasc.1* (1970) 81-89.
- [7] Mititelu, St., *Fonctions convexes généralisées*, *Bull.Math. de la Soc.Sci.Math. de la R.S.Roumanie* 19 (1976) 101-111.
- [8] Mititelu, St., *Extremum conditions in the maximum component minimum problem*, *Bollettino U.M.I.* 6 (1982) 393-401.
- [9] Mititelu, St., *Optimality and Mond-Weir duality in nonsmooth programming*, *Stud.Cerc.Mat.* 45 (1993) 435-444.
- [10] Mititelu, St., *A survey on optimality and duality in nonsmooth programming*, Proceedings of the IVth International Workshop on Generalized Convexity, August 31-September 2, 1992, Pécs, Hungary, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems 405 (1994) Springer-Verlag.
- [11] Mititelu, St. and Stancu-Minasian, I.M., *Invexity at a point: generalizations and classification*, *Bull.Austral.Math.Soc.* 48 (1993) 117-126.
- [12] Pallu de la Barrière, J.R., *Complements à la théorie des multiplicateurs en programmation non-linéaire*, *Rev.Française Recherche Opérationnelle* 7 (1963) 163-180.
- [13] Stancu-Minasian, I.M., *A fourth bibliography of fractional programming*, *Optimization* 23 (1992) 53-71.
- [14] Weir, T. and Mond, B., *Sufficient optimality conditions and duality for a pseudoconvex minimax problem*, *Chaiers Centre Etudes Rech.Opér.* 33 (1991) 123-128.
- [15] Zang, I., *A smoothing-out technique for min-max optimization*, *Math.Programming* 19 (1980) 61-77.



# DESCRIÇÃO DE UM NOVO ALGORITMO PARA O PROBLEMA DE ESCALONAMENTO E ROTEAMENTO DE VEÍCULOS E ANÁLISE COMPARATIVA DO SEU DESEMPENHO

**José Carlos Soares Brandão**

Escola de Economia e Gestão  
Universidade do Minho  
Largo do Paço  
4709 Braga Codex - Portugal

## Abstract

This article describes a novel algorithm for the vehicle routing and scheduling problem, which is composed of two phases and based on the tabu search theory. The main constraints taken into account by the algorithm are the following: the vehicles depart from the depot and return to it after service; each vehicle makes only one trip a day and there is a maximum limit for its travelling time; the customers require to be served during a given time window. The performance of the algorithm is evaluated through computational testing with benchmark problems from the literature and comparing the results with those obtained by the best known algorithms.

## Resumo

Neste artigo descreve-se um novo algoritmo, composto de duas fases e alicerçado nos princípios da pesquisa tabu, para o problema de roteamento e escalonamento de veículos. As principais restrições consideradas neste tipo de problema são as seguintes: os clientes são todos abastecidos a partir de um armazém que é o ponto de partida e de chegada dos veículos; o tempo máximo de percurso de cada veículo é limitado; os clientes exigem serem servidos em determinados períodos do dia (janelas temporais). A fim de aferir a qualidade do algoritmo proposto, o seu desempenho é comparado com alguns dos melhores algoritmos respeitante a este tipo de problema apresentados na literatura.

## Keywords

vehicle routing, vehicle scheduling, tabu search, heuristics.

## 1. Introdução

O problema de roteamento e escalonamento de veículos (PREV) ("*vehicle routing and scheduling problem*") tem muitas aplicações, geralmente de enorme importância económica. Na realidade existem muitas variantes do PREV, correspondentes a uma grande multiplicidade de situações verificadas na distribuição (entrega e/ou recolha) de mercadorias e no transporte de pessoas. Este é um dos domínios da Investigação Operacional onde se tem feito mais investigação devido a três ordens de razões: grande variedade de problemas e subproblemas, resolução de elevada complexidade e relevante interesse económico. Deve salientar-se que o

PREV pertence à categoria dos problemas NP-completos (Lenstra e Rinnoy Kan [13]). Aliás, pode-se demonstrar que simplesmente determinar uma solução admissível para o PREV, no caso em que o número de veículos é limitado, já é um problema NP-completo (Savelsbergh [16]). Este artigo estuda uma variante do PREV que se designa muito frequentemente por problema de roteamento de veículos com janelas temporais ("*vehicle routing problem with time windows*"). A principal justificação para este artigo está em que apesar de já ter sido feita muita investigação sobre este problema continua a haver lugar para muitos melhoramentos tanto na qualidade das soluções como no tempo de resolução. Até à data o melhor algoritmo de resolução exacta do PREV, de que há resultados publicados, é devido a Desrochers et al. [6]. No entanto, este só permitiu a resolução exacta de 7 problemas com 100 clientes, mas em tempos bastante longos, e foram mesmo incapazes de resolver alguns problemas com 25 clientes.

A importância económica da distribuição resulta do facto de todos os recursos envolvidos - veículos, combustível, mão-de-obra - serem muito onerosos. Diversos autores têm feito estimativas dos custos de distribuição, as quais embora diferentes e sob diferentes perspectivas, são concordantes quanto ao seu peso elevado. Segundo Christofides et al. [4] num país industrializado a função logística corresponde a cerca de 10% do Produto Nacional Bruto e contribui com cerca de 15% para o preço médio de venda do produto. Por sua vez, a distribuição das mercadorias pelos clientes representa 30% a 40% do custo logístico total. A estimativa de Willinger e Willmott [23] é de que os custos de distribuição representam mais de 45% dos custos logísticos. Waters [22] afirma que os custos de distribuição são de cerca de 20% do valor do produto. No entanto, estes variam muito com o valor do produto, desde 1 a 2% para a maquinaria muito cara até 60% nos materiais de construção.

O PREV tal como é tratado neste artigo consiste em determinar um conjunto de rotas para cada veículo que minimize uma dada função objectivo satisfazendo as exigências dos clientes. A rota é uma sequência de clientes que um veículo deve visitar, cuja procura não excede a capacidade deste, começando no depósito e regressando a este no final. A localização geográfica do depósito (armazém) e do conjunto de clientes, assim como procura destes, são dados do problema. A parte de escalonamento, que torna o problema substancialmente mais complexo, resulta de os clientes exigirem serem servidos durante determinados períodos do dia (janelas temporais). Os veículos são todos do mesmo tipo e o tamanho da frota não é limitado, isto é, o número de veículos necessário só é conhecido após a resolução do PREV. Na prática, se uma empresa tem frota própria, isto significa que em determinados dias os veículos poderão não ser todos usados (frota em excesso), ou têm de ser alugados mais veículos, ou determinados clientes não serão servidos. Devido ao horário de trabalho dos condutores, supõe-se que cada rota não pode exceder uma determinada duração (cada veículo só percorre uma rota).



No algoritmo aqui desenvolvido a função objectivo originalmente considerada foi a minimização do tempo total de percurso (incluindo o tempo de espera nos clientes) pelo facto de ser este o factor com maior influência nos custos variáveis. Uma justificação completa e rigorosa desta afirmação pode-se encontrar em Brandão [2], aonde se apresentam todos os custos associados ao transporte de mercadorias, incluindo os custos fixos. Para se chegar a esta conclusão basta observar-se que o factor de custo mais influente nos custos variáveis é o salário dos condutores e que todos os outros custos, incluindo o de combustível, estão directa ou indirectamente relacionados com o tempo de percurso. No entanto, por que havia necessidade de comparar os resultados com os apresentados por outros autores considerou-se também outra função objectivo: minimização da distância total percorrida. Estas duas funções objectivo são bem distintas pelo que as soluções óptimas correspondentes também o são, tanto em casos reais como em problemas da literatura. Na vida real o caminho mais curto entre dois clientes é frequentemente diferente do caminho mais rápido entre esses clientes. É o que se passa, por exemplo, quando o caminho mais curto é pela estrada nacional enquanto o mais rápido é pela auto-estrada; ou o caminho mais curto implica atravessar uma zona com muito trânsito enquanto o mais rápido consiste em seguir um caminho mais longo que circunda essa zona. Mesmo nos problemas da literatura em que se admite que a distância entre clientes é numericamente igual ao tempo, a presença de janelas temporais faz com que os objectivos sejam distintos. Quando o objectivo é minimizar a distância, os tempos de espera não influenciem a pesquisa da solução e serão o que for necessário para satisfazer as restrições. Se o objectivo é minimizar o tempo, os tempos de espera são directamente considerados na busca da melhor solução, pois o valor da função objectivo é dado pela soma do tempo de percurso entre os vértices com o tempo de espera em cada cliente.

O algoritmo apresentado neste artigo baseia-se na pesquisa tabu e, por isso, designar-se-á por TABUPREV. O TABUPREV resulta da simplificação de um outro algoritmo utilizado na resolução de um problema prático muito mais complexo e que vem descrito detalhadamente em Brandão [2] e em Brandão e Mercer [3]. Neste caso prático consideraram-se as seguintes restrições adicionais: cada veículo podia fazer diariamente múltiplas viagens; veículos com diferentes capacidades e velocidades; acesso aos clientes dependente do tipo de veículo; veículos da empresa e alugados consoante as necessidades; intervalos de descanso para os condutores durante o período de condução. Deste modo a implementação computacional do TABUPREV, que também foi adaptado, é bastante menos eficiente do que seria se o programa tivesse sido originalmente projectado para ele.

A pesquisa tabu (PT) é uma meta-heurística, visto que contém em si outras heurísticas. Estas heurísticas são particularmente importantes na avaliação e execução de movimentos na passagem de uma solução para outra. A PT foi proposta e desenvolvida Glover (ver Glover [9,10] e Glover et al.[11]), inspirado pelos princípios da Inteligência Artificial. Um destes princípios consiste na utilização da memória, que é particularmente útil na resolução de

problemas complexos. O recurso à memória é também uma das características fundamentais da PT. Esta é uma propriedade que não se verifica nos algoritmos tradicionais de Investigação Operacional. Por exemplo, quando se aplica o método da 2-optimização a um circuito hamiltoniano, cada novo circuito (solução) depende apenas e só da solução imediatamente anterior e do mecanismo de geração de permutas imposto pelo método. Pelo contrário, na PT as soluções previamente exploradas (todas ou, mais geralmente, uma parte) são determinantes na geração de cada nova solução. Por conseguinte, a história da pesquisa é memorizada selectivamente e a criação e exploração de novas soluções é função da solução actual, da estrutura de vizinhança definida, da forma de avaliar cada solução e desse conhecimento histórico. Na PT podem existir diferentes tipos de memória, mas os dois tipos básicos são a memória de curto prazo e a de longo prazo. Um dos principais mecanismos para fazer para fazer o aproveitamento da memória de curto prazo é a lista tabu, na qual são guardados os atributos relativos às soluções exploradas mais recentes. Os conceitos principais usados na PT são: atributos, lista tabu e sua dimensão, critérios de aspiração, intensificação, diversificação, análise de objectivos, oscilação estratégica, vizinhança de uma solução e sua dimensão, movimentos e sua avaliação. A PT tem sido intensamente aplicada na resolução de diversos tipos de problemas de optimização combinatoria, com resultados muito bons. Apesar disso, a PT tem também algumas lacunas e está mal definida em alguns aspectos visto que a aplicação concreta dos conceitos da PT a problemas reais depende muito da intuição, da experimentação com exemplos representativos, do tipo de problema e até mesmo da sua dimensão. Por isso, o presente artigo pretende também dar uma pequena contribuição no sentido de tornar a aplicação da PT mais objectiva.

O TABUPREV tira partido da teoria da PT e de um algoritmo desenvolvido por Gendreau et al. [7] para o problema do caixeiro viajante (PCV), chamado GENI, que fornece rapidamente soluções muito boas para o PCV. O seu comportamento em termos da qualidade da solução e do tempo de computação depende muito de um parâmetro ( $p$ ) que define a vizinhança de pesquisa. Este parâmetro define o número de vizinhos mais próximos, de um dado vértice, que são considerados para determinar as permutas de posição no ciclo hamiltoniano. Segundo os autores, o melhor compromisso entre rapidez e qualidade parece ser  $p = 5$ . Como cada rota do PREV é um PCV com janelas temporais (PCVJT), o GENI foi adaptado pelo autor para o PCVJT, mas manteve-se o mesmo nome.

## 2. Notação e fórmulas

$V = \{0, 1, \dots, N\}$  é um conjunto de vértices, em que 0 representa o depósito e  $N$  o número total de clientes que devem ser servidos.  $A$  é um conjunto de arcos que ligam todos os vértices  $V$ .

$u_i$  - tempo de servir o cliente  $i$ ,  $i \in V$ .

$t_{ij}$  - tempo de percurso entre  $i$  e  $j$ , mais  $u_j$ ,  $(i,j) \in A$ .

$e_i$  - início mais cedo possível do serviço no cliente  $i$ ,  $i \in V$ .

$l_i$  - término mais tarde possível do serviço no cliente  $i$ ,  $i \in V$ .

$a_i$  - instante de chegada de facto ao cliente  $i$ ,  $i \in V$ .

$d_i$  - instante de partida do cliente  $i$ ,  $i \in V$ .

Cada rota é representada como  $r = [0, 1, \dots, n+1]$ , em que a origem, 0, e o destino,  $n+1$ , é sempre o depósito, e os números,  $1, \dots, n$ , representam os clientes, os quais são visitados nesta sequência.

$N_r$  - número total de rotas numa solução.

$W_i$  - tempo de espera no cliente  $i$ ,  $i \in V$ .

Este é o tempo que o condutor tem de esperar se chegar ao cliente antes da hora estabelecida para iniciar o serviço.

$Sf_i$  - folga para a frente do cliente  $i$ ,  $i \in V$ .

Esta folga mede o tempo para cada cliente  $i$ , na rota actual, que a chegada do veículo pode ser atrasada respeitando ainda o período de entrega em  $i$ .

$L_i$  - atraso no cliente  $i$ ,  $i \in V$ .

$L$  - atraso total numa rota. Se for necessário distinguir entre rotas, escreve-se  $L(i)$  para a rota  $i$ .

$nf$  - número de clientes admissíveis numa rota.

Neste contexto um cliente é admissível se é servido dentro do intervalo devido, caso contrário, diz-se não admissível.

$n_i$  - número de clientes não admissíveis numa rota.

$T$  - tempo máximo de condução diário de cada condutor.

$D(r)$  - distância percorrida na rota  $r$ .

$Ot(r)$  - tempo extraordinário na rota  $r$ , isto é, o tempo que excede  $T$ .

Embora legalmente os condutores possam realizar horas extraordinárias, as quais têm um custo superior, nos problemas de teste usados neste artigo isso não é permitido. Todavia, como na fase 1 se consideram também soluções não admissíveis, o tempo extraordinário poderá existir e é penalizado conforme se indica de seguida.

$K$  - constante que penaliza o tempo extraordinário (considera-se  $K = 1$ ).

O tempo de espera no cliente  $i$  é dado por (1)

$$W_i = \max\{0, e_i - a_i\} \quad (1)$$

Se um veículo chega atrasado a um cliente, i.e., se  $a_i > l_i$ , supõe-se que  $W_i = 0$ .

O tempo de percorrer uma rota  $r(t(r))$  é dado pelas expressões equivalentes (2) e (3). Deve relembrar-se que  $t_{ij}$  já inclui o tempo de serviço  $u_i$ .

$$t(r) = \sum_{i=0}^n [t_{i,i+1} + W_i]. \quad (2)$$

$$t(r) = a_{n+1} - a_0. \quad (3)$$

Para cada rota  $r$ ,  $a_0$  é o instante de chegada do veículo ao depósito para iniciar a rota e coincide com o instante de partida,  $d_0$ , sendo  $a_{n+1}$  o instante de regresso após o serviço aos

clientes. A sequência na qual os clientes são visitados é definida pela representação da rota  $r = [0, 1, \dots, n, n+1]$ . Por isso, e de modo a evitar que haja tempo de espera no primeiro cliente a ser servido,  $d_0$  é calculado através de (4).

$$d_0 = \max\{e_0, e_1 - t_{01}\}. \quad (4)$$

A *escala da rota*, que estabelece a sequência e a hora da visita aos clientes, pode ser inteiramente determinada utilizando as expressões (5) a (11), as quais são válidas para qualquer rota  $r$ .

$$Ot(r) = \max\{0, t(r) - T\}. \quad (5)$$

As equações (6) e (7), que definem o instante de partida do cliente  $i$ , são matematicamente equivalentes, mas a (7) tem a vantagem de ser evitar calcular o tempo de espera, que nunca é usado para outros fins, pelo que foi a equação usada na programação computacional do TABUPREV.

$$d_i = a_i + W_i, \quad i = 0, 1, \dots, n+1. \quad (6)$$

$$d_i = \max\{a_i, e_i\}, \quad i = 0, 1, \dots, n+1. \quad (7)$$

$$a_{i+1} = d_i + t_{i,i+1}, \quad i = 0, 1, \dots, n. \quad (8)$$

$$Sf_i = l_i - a_i, \quad i = 0, 1, \dots, n+1. \quad (9)$$

$$e_i \leq d_i \leq l_i, \quad i = 0, 1, \dots, n+1. \quad (10)$$

$$L_i = \max\{0, d_i - l_i\}, \quad i = 0, 1, \dots, n+1. \quad (11)$$

Se  $L_i > 0$  então  $Sf_i < 0$  e (10) não é satisfeita. Neste caso o cliente  $i$  diz-se *não admissível* na rota  $r$ , pois, considerando a sua posição actual na rota, não poderá ser servido dentro do intervalo de tempo por si exigido. O atraso de uma rota com  $n$  clientes não admissíveis é dado por (12).

$$L = \sum_{i=1}^{n_i} d_i - l_i. \quad (12)$$

Para determinar o que diz respeito à notação, deve referir-se que a expressão *mais próximo* pode ser interpretada como distância ou como tempo. Se nada for dito em contrário, deve-se interpretar como distância. A vizinhança  $\delta$  de um cliente é um conjunto formado pelos  $\delta$  *clientes mais próximos* desse cliente (o depósito não é considerado para este efeito).

### 3. Estrutura e características do algoritmo TABUPREV

O algoritmo TABUPREV é constituído por duas fases, que são aplicadas sequencialmente, em que a solução inicial da fase 2 é a melhor solução encontrada na fase 1. A solução inicial para a fase 1 é proveniente de um outro algoritmo que considera apenas as restrições respeitantes ao roteamento. Por conseguinte são consideradas todas as restrições, incluindo o tempo máximo de condução ( $T$ ), excepto as janelas temporais. Todavia, ao fazer o escalonamento da rota, no início da fase 1, o valor de  $T$  poderá ser de imediato ultrapassado. Este algoritmo vem integralmente descrito em Brandão [2] e, embora fosse importante para o algoritmo em que foi aplicado, a sua influência sobre o desempenho do TABUPREV é quase nula, pelo que seria supérfluo descrevê-lo aqui.

Na fase 1 do TABUPREV pretende-se atingir dois objectivos simultaneamente: determinação de uma solução admissível em termos de janelas temporais e tempo diário de condução; minimizar o "custo" (distância ou tempo, conforme o caso) da solução. Na fase 2 o objectivo é minimizar o custo, mantendo a solução sempre admissível.

A execução do TABUPREV, tanto na fase 1 como na fase 2, é um processo iterativo que é interrompido quando se atingir um determinado número de iterações ou um determinado limite de tempo de processamento. Cada iteração consiste em passar da solução corrente  $S$  para uma solução  $S'$ , que será a solução corrente na iteração seguinte, através de um determinado movimento. Em cada iteração são avaliados um conjunto de movimentos potenciais e destes é executado um. O conjunto dos movimentos potenciais é definido na Secção 3.1 e os critérios utilizados na selecção de um deles são explicados na Secção 3.2. Em cada iteração existe um conjunto de movimentos que é proibido realizar, que se designam por *movimentos tabu*, e que está na origem do nome da meta-heurística. A definição dos movimentos tabu é descrita na Secção 3.3.

### 3.1 Movimentos potenciais

Em cada iteração o conjunto de *movimentos potenciais*  $M_p(S)$  ( $S$  é a solução corrente) é o conjunto de todos os movimentos definidos com base no conjunto de candidatos e nos tipos de movimentos, incluindo os movimentos tabu.

*Critérios de aspiração* são um conjunto de regras que permitem a realização de um movimento que é tabu na iteração corrente. O conjunto dos *movimentos permitidos* ou *admissíveis* ( $M(S)$ ) é definido como:  $M(S) = M_p(S) \setminus \{\text{movimentos tabu que não beneficiam dos critérios de aspiração}\}$ .

No TABUPREV são executados dois tipos de movimentos: *inserção* e *permuta*. A inserção consiste em deslocar uma variável, do conjunto de candidatos, de uma posição para outra. A permuta consiste na troca de posição de duas variáveis do conjunto de candidatos. Barnes e Laguna [1] mostraram que a combinação destes dois tipos de movimentos era muito eficiente em problemas de escalonamento.

Em cada iteração existe uma solução  $S$  que é formada por um conjunto de rotas  $N_r$ . De cada rota  $r$  é escolhido aleatoriamente um conjunto de clientes ( $C_r$ ), cujo cardinal é determinado por (13).

$$\#C_r = \left\lfloor \frac{n}{c} \right\rfloor. \quad (13)$$

O melhor valor de  $c$  é determinado pela experiência, tendo-se utilizado  $c = 2$  nos testes computacionais deste artigo, e  $n$  é o número de clientes da rota  $r$ .

Da reunião do conjunto de clientes respeitante a cada rota resulta o *conjunto de candidatos* ( $C$ ) que é descrito por (14).

$$C = \bigcup_{r=1}^{N_r} C_r. \quad (14)$$

Os dois tipos de movimentos são descritos em seguida.

### i) Movimentos de inserção

O movimento de inserção consiste em retirar um cliente de uma rota (origem) e colocá-lo numa outra rota (destino). A rota de destino pode ser uma rota já existente ou uma rota nova. A criação de rotas novas pode ser muito importante, pois esta poderá ser a única maneira de tornar uma solução admissível. Isto garante que se encontra uma solução admissível se ela existir e se for dado tempo suficiente ao processo de pesquisa.

A inserção potencial de um cliente  $x_i \in r_i$  e  $x_i \in C$ , em  $r_j$  ( $r_i \neq r_j$ ) existe se, e só se, pelo menos um cliente de  $r_j$  pertence à vizinhança  $\delta$  de  $x_i$ , ou  $r_j$  é uma rota nova.

### ii) Movimentos de permuta

O movimento de permuta consiste na troca de rota de dois clientes que pertencem a rotas diferentes. A permuta potencial do cliente  $x_i \in r_i$  e  $x_j \in C$ , com  $x_j \in r_j$  e  $x_j \in C$  ( $r_i \neq r_j$ ) existe se e só se:

- (i) pelo menos um cliente de  $r_j$  pertence à vizinhança  $\delta$  de  $x_i$  e pelo menos um cliente de  $r_i$  pertence à vizinhança  $\delta$  de  $x_j$ ;
- (ii) pelo menos uma das rotas  $r_i$  e  $r_j$  contém mais do que um cliente.

A existência de qualquer movimento potencial exige ainda que esse movimento não provoque um excesso de carga em nenhuma das rotas que recebe os novos clientes.

Na fase 2 só são aceites movimentos que conduzam a soluções admissíveis, por isso, além das condições anteriores exige-se que a inserção ou a permuta não violem as janelas temporais e que a duração da rota não exceda  $T$ .

O parâmetro  $\delta$  é apenas uma maneira de limitar o número de movimentos potenciais sem que, provavelmente, a qualidade das soluções seja reduzida. Se  $\delta$  é muito grande, perde o seu significado e a sua função de diminuir a dimensão da vizinhança. Pelo contrário, se  $\delta$  é muito pequeno, restringe demasiado a pesquisa e é improvável que seja encontrada uma boa solução. Um bom compromisso poderá ser fazer  $\delta$  igual ao parâmetro  $p$  do algoritmo GENI. Visto que uma boa escolha é  $p$  igual a 5, usa-se também  $\delta = 5$ , sendo este um valor inicial que é ajustado durante a execução do modo que se explica na Secção 4. A vizinhança é definida em termos de distância. Apesar desta limitação o número de movimentos potenciais de permuta continua a ser muito grande. Por isso, em cada iteração, só se consideram estes movimentos se nenhum movimento de inserção for admissível ou de acordo com uma determinada frequência (por exemplo, de dez em dez iterações).

Segundo uma das regras dos movimentos potenciais, um cliente  $x_i$  só pode ser deslocado para a rota  $r_j$  se nesta rota existir pelo menos um cliente pertencente à vizinhança  $\delta$  de  $x_i$ . Por isso, se a rota  $r_i$ , aonde se encontra  $x_i$ , tiver mais do que  $\delta$  clientes poderá acontecer que todos os  $\delta$  vizinhos mais próximos  $x_j$  estejam em  $r_i$ . Neste caso,  $x_i$  não pode ser movimentado o que poderá impedir a pesquisa de alternativas melhores. A fim de tomar isto em consideração, existe nesta fase um outro procedimento (*parte 2*) que complementa o acabado de descrever (*parte 1*).

### Parte 2

As equações abaixo são usadas para calcular F1 e F2, que representam, respectivamente, o custo de uma solução admissível e de uma solução não admissível. O valor de F1 baseia-se no tempo de percurso e no tempo extraordinário. F2 inclui os mesmos factores de F1 e ainda um para avaliar o grau de não admissibilidade. Na fase 2, F2 é desnecessário, visto que só se trabalha com soluções admissíveis.

$$F1 = \sum_{i=1}^{Nr} t(i) + K \times Ot(i). \quad (15)$$

$$F2 = \sum_{i=1}^{Nr} t(i) + K \times Ot(i) + P \times L(i). \quad (16)$$

P é um factor de penalização que inicialmente é igual a 1. Se durante  $\alpha$  iterações consecutivas, todas as soluções forem não admissíveis, P é multiplicado por 2. Caso contrário, se todas as soluções foram admissíveis durante as últimas  $\alpha$  iterações consecutivas, P é dividido por 2. Primeiro testou-se  $\alpha = 10$ . A utilização de P para criar oscilação estratégica foi já aplicada com sucesso por diversos autores, tais como Kelly et al. [12], Mooney and Rardin [14] e Gendreau et al. [8], que variam P num algoritmo para o problema de roteamento de veículos da mesma maneira que no algoritmo presente. Todavia, a sua função no TABUPREV não é apenas diversificar a pesquisa mas também conduzi-la para a região admissível, sendo isto realizado com muito sucesso.

A *parte 1* é substituída pela *parte 2* quando é executado num determinado número de iterações (*limite*) sem melhorar quer  $F1^*$  quer  $F2^*$  ( $F1^*$  é o melhor valor conhecido de F1 de (15) e  $F2^*$  é o melhor valor conhecido de F2 de (16)). Por outro lado, a *parte 2* termina depois de *limite1* iterações sem melhoramento de  $F1^*$  ou  $F2^*$ .

Durante toda a fase (partes 1 e 2) é criada uma tabela de frequências para contar o número de vezes que um cliente se deslocou de uma rota para outra. Todas as vezes que se atinge o final da *parte 1*, calcula-se a frequência média de cada cliente. Durante a *parte 2*, C é fixo e é constituído por todos os clientes cuja frequência está abaixo da frequência média. Além disso, nos movimentos de inserção de  $x_i \in r_i$ ,  $\delta = \max\{5, n\}$ , onde n é o número de clientes em  $r_i$ . Na *parte 2*, não se executam movimentos de permuta.

A solução inicial da *parte 2* é a melhor solução admissível conhecida definida por (15). Se não for conhecida nenhuma solução admissível, a solução inicial é a melhor solução não admissível conhecida definida por (16). Os dois benefícios importantes da *parte 2* são que ela permite corrigir o efeito de uma escolha inapropriada de  $\delta$  e diversifica a pesquisa através do uso da memória de longo prazo.

### 3.2 Avaliação dos movimentos e critérios de aspiração

Nesta secção responde-se simultaneamente a duas questões: onde se põem os clientes deslocados e como se avalia o custo de um movimento.

Nos movimentos de *inserção*, se um cliente  $x_i \in r_i$ , com  $r_i = [0, \dots, x_h, x_i, x_j, \dots, 0]$ , é transferido para a rota  $r_k$ , faz-se a seguinte alteração: a nova rota  $r_i$  é  $r_i' = [0, \dots, x_h, x_j, \dots, 0]$  e a nova rota  $r_k$  é a rota gerada pelo algoritmo GENI (com  $p = 5$ ).

Nos movimentos de *permuta*, se um cliente  $x_i \in r_i$ , e  $x_j \in r_j$  são trocados, as novas rotas  $r_i$  e  $r_j$  são construídas em dois passos. Primeiro,  $x_i$  é retirado de  $r_i$  e  $x_j$  de  $r_j$  como no movimento de inserção. Segundo,  $x_i$  é inserido em  $r_j$  e  $x_j$  é inserido em  $r_i$ , ambos com o algoritmo GENI.

Na fase 1, o custo de um movimento é obtido de (16). Portanto, realiza-se o movimento *permitido* que gera a solução de menor custo calculada com (16). O valor de uma *solução admissível* é definido nesta fase por (15), sendo  $F1^*$  o valor mínimo. Se não tiver sido ainda descoberta nenhuma solução admissível considera-se  $F1^*$  infinito.

Na fase 1 há três *critérios de aspiração*: a)  $F2 < F2^*$ ; b) a solução é admissível e  $F1 < F1^*$ ; c) Se  $F1^*$  é infinito,  $Ot(r_i) > 0$  e  $Ot(r_i') = 0$  ou  $Ot(r_j) > 0$  e  $Ot(r_j') = 0$ . Quando uma ou mais destas condições é satisfeita, o estado tabu é ultrapassado. Na fase 2 o único critério de aspiração é  $F1 < F1^*$ .

### 3.3 Tamanho da lista tabu e atributos tabu

No TABUPREV, o conjunto de movimentos potenciais depende fundamentalmente do conjunto de candidatas, por isso, o tamanho da lista tabu baseia-se nele. Atendendo a que foi provado experimentalmente por muitos investigadores (por exemplo, Taillard [18]) que uma lista tabu de tamanho variável tende a dar melhores resultados que uma lista de tamanho fixo, o tamanho da lista tabu,  $\theta$ , é definido por um número aleatório no intervalo

$$\theta \in [\theta_{\min}, \theta_{\max}], \quad (17)$$

$$\text{onde } \theta_{\min} = \left\lceil \frac{N}{3c} \right\rceil \quad (18)$$

$$\text{e } \theta_{\max} = 2\theta_{\min}. \quad (19)$$

Nestas equações  $c$  é um parâmetro que o utilizador pode definir. Os melhores valores de  $\theta$  para cada tipo de problema e método de PT têm de ser encontrados empiricamente, realizando testes computacionais com diferentes tipos de problemas reais. Neste artigo os valores experimentados foram definidos usando  $c = 2$ .

O atributo usado, quer no movimento de *inserção* de  $k$ , quer no de *permuta* do par  $(i, j)$  é a rota à qual os clientes ( $k$  ou  $i$  ou  $j$ ) pertencem antes da deslocação. A restrição imposta em ambos os tipos de movimento é que um cliente que deixa uma rota não pode regressar a ela durante as  $\theta$  iterações seguintes.

## 4. Descrição global do TABUPREV

Esta secção fornece mais alguns dados operacionais acerca do algoritmo, pondo em conjunto e em sequência todas as operações descritas previamente, mostrando assim como é que as diferentes operações encadeiam.

Dentro do algoritmo GENI os  $p$  vizinhos mais próximos de cada vértice são definidos em termos de distância, qualquer que seja a função objectivo do TABUPREV.



Em seguida descreve-se as principais operações que constituem o algoritmo TABUPREV:

*Passo 1* (fase 1) - Esta fase consiste num determinado número de ciclos definido pelo utilizador. Nos exemplos resolvidos utilizou-se 2 ciclos. Cada ciclo é formado pela *parte 1* e pela *parte 2*, começando pela *parte 1*. Nesta fase existem dois contadores de iterações: um que conta o total de iterações realizadas e outro que conta o número de iterações realizadas sem melhoramento em F1 ou F2. Portanto, este contador é igualado a zero todas as vezes que há um melhoramento em F1 e/ou F2, quando se muda da *parte 1* para a *parte 2* e dentro de parte quando esta é reiniciada.

#### *Parte 1*

Executar um conjunto de movimentos do tipo inserção ou permuta tal como definidos na Secção 3.1. Os movimentos de permuta só se consideram de dez em dez iterações ou se não houver nenhum movimento de inserção admissível. Após um dado número (*limite* = 5 N) de iterações (em cada iteração executa-se um movimento) sem qualquer melhoramento de F1 ou de F2 ((15) e (16)), vai para a *parte 2* ou repete a *parte 1*. Isto é, a parte 1 é executada 2 vezes, dentro de cada ciclo, e só em seguida é que vai para a *parte 2*. Na primeira execução  $p = 5$  e  $\delta = 5$  e na segunda  $p = 6$  e  $\delta = 10$ .

#### *Parte 2*

Executar movimentos do tipo inserção definidos na Secção 3.1. Quando o número de iterações sem melhorar F1 ou F2 igualar um dado limite (*limite1* =  $\lceil 1,5N \rceil$ ), a execução continua no *Passo 2* se o número de ciclos estabelecido já tiver sido atingido, ou caso contrário na *parte 1*.

*Passo 2* (fase 2) - Tomando como solução inicial a melhor solução admissível encontrada na fase 1, executar movimentos do tipo inserção ou permuta tal como definidos na Secção 3.1, permitindo apenas movimentos que conduzem a soluções admissíveis. Os movimentos são avaliados por (15) e a execução termina após a realização de um determinado número de iterações consecutivas (*limite* = 3 N na parte 1 e *limite1* =  $\lceil 1,5N \rceil$  na parte 2) sem melhoramento de F1. Tal como na fase 1, os movimentos de permuta só se consideram de dez em dez iterações ou se não houver nenhum movimento de inserção admissível. Dentro da parte 1 só existe um ciclo e  $p=6$  e  $\delta=10$ .

## 5. Experiência computacional

A fim de se poder avaliar a qualidade do TABUPREV realizaram-se testes computacionais e os resultados obtidos são comparados com os provenientes de outros algoritmos. Para isso foram resolvidos 56 problemas da literatura cada um com 100 clientes, criados por Solomon [17] (este autor retirou os dados sobre a localização e a procura dos clientes de Christofides et al. [5]) e cujos dados ele forneceu. A informação respeitante a cada problema é a capacidade máxima do veículo (são todos iguais), tempo de percurso máximo, coordenadas do depósito e de cada um dos clientes, procura de cada cliente, janela temporal de cada cliente e tempo de o

servir. Estes problemas são euclidianos e considera-se que o tempo de percurso entre cada cliente é numericamente igual à distância respectiva. Os problemas dividem-se em seis grupos distintos que se designam por R1, C1, RC1, R2, C2 e RC2. Nos grupos R1 e R2, a localização dos clientes baseia-se numa distribuição uniforme. Nos problemas dos conjuntos de C1 e C2 os clientes estão agrupados, e nos problemas dos conjuntos RC1 e RC2 há uma mistura de clientes uniformemente distribuídos e agrupados. Nos conjuntos R1, R2, RC1 e RC2, as janelas temporais foram geradas aleatoriamente, enquanto que nos grupos C1 e C2 os clientes foram agrupados em rotas e só em seguida é que foram geradas as janelas.

No que concerne à distribuição, o que mais interessa às empresas é a minimização dos custos respectivos. Por isso, essa deve ser também a função objectivo dos algoritmos destinados ao planeamento da distribuição. Todavia, visto que a determinação dos custos é uma tarefa muito morosa, muito complexa e dependente de certas circunstâncias específicas de cada empresa, a generalidade dos autores utiliza como função objectivo a minimização da distância ou do tempo. Este procedimento não é totalmente desajustado porque ambas estas variáveis estão fortemente correlacionadas com os custos variáveis de distribuição (e entre si), sendo que, conforme se referiu na Secção 1, o tempo exerce mais influência sobre estes custos.

Desrochers et al. [6] abordam a resolução exacta do PREV e estabelecem como função objectivo a minimização da distância.

Solomon [17] considera que o tempo de percurso é mais importante que a distância e que o número de veículos é ainda mais relevante. Contudo, a função objectivo utilizada por este autor combina a distância e o tempo.

Rochat e Taillard [15], estabelecem como primeiro objectivo a minimização do número total de rotas e como segundo objectivo, subordinado à minimização do primeiro, a minimização da distância. Todavia, estes autores não esclarecem qual é a função objectivo que de facto usam no seu algoritmo. Por conseguinte, só na escolha final entre diversas soluções para um problema, é que estes autores seleccionam a solução com menor número de rotas.

Thangiah et al. [21] afirmam que uma solução com menor número de veículos e uma distância total de percurso maior é geralmente preferível a outra solução com maior número de veículos e menor distância. Todavia, ao fazerem a implementação, estes autores são incongruentes com a afirmação de que o primeiro objectivo é minimizar o número de rotas. Com efeito, a função objectivo que eles usam no sistema GenSAT é a minimização da distância, embora atribuindo também algum peso ao tempo. Por outro lado, Thangiah et al. [21] consideram que o número de veículos é igual ao número de rotas, ora isto não está correcto se cada veículo (condutor) fizer múltiplas rotas por dia, como é muito frequente na prática. Há neste momento já alguns artigos científicos que abordam esta questão, como é o caso de Brandão e Mercer [3], que aplicam estes conceitos num caso real, e Taillard et al. [19], que geram problemas de roteamento (sem janelas temporais) para testarem o algoritmo proposto.

De entre os custos fixos associados à frota de distribuição (excluindo, portanto, os armazéns), o mais importante é o custo de aquisição dos veículos. Por outro lado, o salário base dos condutores é um custo fixo, mas deve ser tratado como um custo variável se os condutores puderem desempenhar outras funções quando não são necessários para conduzir. No entanto, o custo das horas extraordinárias dos condutores deve ser sempre tratado como variável. Os custos fixos são fundamentais para se determinar a dimensão da frota de veículos mas, após a aquisição destes, a não utilização de alguns veículos não traz, no geral, qualquer benefício à empresa. Por conseguinte, a primazia que todos aqueles autores dão à minimização do número de veículos, no planeamento da distribuição diária, carece de justificação e parece resultar de uma confusão entre custos fixos e custos variáveis.

Importa ainda referir, no que concerne às funções objectivo, que a *tendência* geral é de que a minimização da distância conduz simultaneamente à minimização do número de rotas. No conjunto de 56 problemas resolvidos (448 soluções geradas) pelo GenSAT só em 12 dos problemas é que isto não se verifica. Nos mesmos 56 problemas resolvidos por Solomon [17] só não aconteceu isso em 2 problemas (322 soluções diferentes). No entanto, estas soluções não são óptimas, mas sim as melhores soluções encontradas pelo seu algoritmo. Se em vez disso se considerarem as melhores soluções conhecidas só num único problemas dos 56 é que isso não se verifica.

A função objectivo original do TABUPREV é a minimização do tempo total de percurso, por ser este o factor que tem maior influência nos custos variáveis. Todavia, como neste artigo se pretende também comparar o TABUPREV com os algoritmos mais recentes e com melhor desempenho, nomeadamente o sistema GenSAT de Thangiah et al. [21] e o algoritmo de Rochat e Taillard [15], optou-se por executar o TABUPREV com 3 versões distintas de função objectivo (FO):

- i)  $T_{\min}$  - A FO objectivo é definida por (15) e (16).
- ii)  $D_{\min}$  - A FO objectivo é definida por (15) e (16), substituindo nestas equações  $t(i)$  por  $D(i)$ .
- iii)  $TD_{\min}$  -  $F1$  é definido por (15), substituindo nesta equação  $t(i)$  por  $D(i)$ , e  $F2$  é definido por (16). Deste modo, na fase 1 combina-se a minimização da distância com a minimização do tempo total de percurso.

Como o TABUPREV se baseia em certos parâmetros aleatórios, nomeadamente o tamanho da lista tabu e o conjunto de candidatos, cada vez que o programa é executado a solução obtida pode ser diferente. Cada uma destas três versões foi executada duas vezes e, em cada versão, seleccionou-se a solução de menor **distância** total. Os resultados obtidos encontram-se na Tabela 1. Nesta tabela encontra-se também a melhor solução para cada problema de teste encontrada por Solomon [17], GenSAT, Rochat e Taillard [15] e a melhor solução conhecida. Solomon [17] gerou 7 soluções para cada problema do conjunto R1 e C1, através de 7 algoritmos diferentes, e para os problemas restantes utilizou apenas 5 destes algoritmos com os

quais gerou 5 soluções; para cada problema escolheu-se a melhor solução em termos de tempo. No GenSAT há 4 algoritmos cada um dos quais foi iniciado com duas soluções diferentes e de elevada qualidade fornecida por duas heurísticas distintas - uma igual à heurística de inserção (a melhor daqueles 7 algoritmos) de Solomon [17] e outra é uma heurística genética; das 8 soluções geradas para cada problema escolheu-se a de menor distância. Rochat e Taillard [15] apresentam apenas uma solução que é a melhor resultante de executar 5 vezes o mesmo algoritmo, com 5 soluções iniciais distintas. No TABUPREV os cálculos são efectuados com a mesma precisão que Desrochers et al. [6], isto é, a distância entre cada vértice é calculada em dupla precisão, em seguida é multiplicada por dez e depois truncada e, a partir daqui, o processamento é feito apenas com números inteiros. No fim a distância total (tempo) é dividida por dez e o valor resultante é arredondado para o inteiro mais próximo.

Tabela 1 - Comparação das soluções fornecidas pelo TABUPREV, com base em 3 funções objectivo diferentes, com as soluções de outros autores

Pro.	T <sub>min</sub>			D <sub>min</sub>			TD <sub>min</sub>			S <sub>D</sub> *	S <sub>R</sub> *	Solomon			GenSAT			Rochat			Melhor		
	T	O	R	D	R	D	D	R	D			T	O	R	T	O	R	T	O	R		T	O
R101	2289	1700	19	1653	20	1716	20	1653	20	1700	19	2715	1673	21	1600	20	1657	19	1608	18			
R102	1729	1618	18	1490	19	1541	18	1490	19	1541	18	2550	1843	19	1493	17	1477	18	1434	14			
R103	1319	1271	14	1226	15	1246	14	1226	15	1246	14	1695	1484	14	1207	13	1223	14	1207	13			
R104	1053	1043	12	993	11	1012	10	993	11	1012	10	1476	1168	11	1032	12	1023	12	1013	10			
R105	1474	1438	15	1362	15	1384	15	1362	15	1362	15	1629	1673	15	1407	15	1403	14	1405	14			
R106	1290	1285	13	1275	13	1290	13	1275	13	1275	13	1744	1475	14	1328	14	1294	12	1294	12			
R107	1168	1167	12	1097	11	1111	12	1097	11	1097	11	1539	1425	12	1140	12	1086	11	1086	11			
R108	980	970	10	960	11	966	11	960	11	977	10	1230	1135	10	969	10	965	10	965	10			
R109	1210	1207	12	1170	12	1172	13	1170	12	1170	12	1599	1442	13	1218	12	1166	12	1166	12			
R110	1132	1129	12	1078	12	1120	12	1078	12	1078	12	1406	1393	12	1105	11	1108	11	1105	11			
R111	1111	1105	12	1057	12	1071	12	1057	12	1057	12	1425	1231	12	1120	12	1071	11	1071	11			
R112	994	990	11	973	11	980	10	973	11	980	10	1118	1106	10	992	10	966	10	966	10			
Média	1312	1244	13,3	1194	13,6	1219	13,3	1194	13,6	1207	13,6	1636	1437	13,6	1219	13,3	1204	12,7	1195	12,4			
C101	829	829	10	827	10	827	10	827	10	827	10	829	829	10	829	10	829	10	827	10			
C102	829	829	10	833	10	842	10	829	10	829	10	1314	928	10	829	10	829	10	827	10			
C103	854	840	10	865	10	845	10	840	10	840	10	1338	1052	10	835	10	828	10	828	10			
C104	845	845	10	838	10	839	10	838	10	838	10	1453	1273	10	840	10	842	10	840	10			
C105	830	830	10	827	10	829	10	827	10	827	10	829	829	10	829	10	829	10	829	10			
C106	827	827	10	827	10	828	10	827	10	827	10	891	834	10	829	10	829	10	827	10			
C107	836	836	10	827	10	827	10	827	10	827	10	829	829	10	829	10	829	10	829	10			
C108	829	829	10	836	10	842	10	829	10	829	10	829	829	10	829	10	829	10	827	10			
C109	829	829	10	831	10	830	10	829	10	829	10	829	829	10	829	10	829	10	829	10			
Média	834	833	10	835	10	834	10	830	10	830	10	1016	924	10,6	831	10,6	836	10,6	829	10,6			
RC101	1783	1718	15	1647	15	1689	15	1647	15	1689	15	2194	1867	16	1669	14	1737	15	1669	14			
RC102	1558	1546	14	1485	14	1495	14	1485	14	1509	14	2023	1760	15	1458	15	1481	13	1481	13			
RC103	1296	1286	11	1274	11	1274	11	1274	11	1274	11	1755	1673	11	1110	11	1157	11	1157	11			
RC104	1165	1152	10	1110	10	1170	10	1110	10	1110	10	1397	1301	11	1213	11	1157	10	1157	10			
RC105	1663	1621	15	1559	16	1592	15	1559	16	1592	15	2187	1922	16	1602	14	1543	15	1543	15			
RC106	1424	1416	13	1386	13	1409	13	1386	13	1395	13	1689	1611	13	1426	13	1416	12	1416	12			
RC107	1279	1263	12	1212	12	1234	12	1212	12	1234	11	1627	1385	13	1264	12	1262	11	1262	11			
RC108	1185	1161	11	1118	11	1135	11	1118	11	1118	11	1328	1253	11	1169	11	1150	11	1150	11			
Média	1412	1395	12,6	1349	13,0	1382	12,8	1349	13,0	1389	12,4	1776	1597	13,4	1363	12,6	1376	12,3	1349	12,1			
R201	1726	1649	5	1161	8	1542	4	1161	8	1542	4	2080	1741	4	1354	4	1485	4	1354	4			
R202	1383	1357	6	1072	9	1342	4	1072	9	1342	4	2142	1730	4	1176	4	1101	4	1101	4			
R203	1167	1168	4	918	6	1118	4	918	6	1118	4	1811	1578	3	1126	3	913	4	913	4			
R204	883	878	4	785	4	839	3	785	4	839	3	1317	1059	3	803	3	825	3	803	3			
R205	1179	1174	4	981	7	1103	5	981	7	1174	4	1495	1471	3	1128	3	1206	3	1106	3			
R206	1044	1039	5	902	6	1003	3	902	6	1003	3	1452	1439	3	833	3	956	3	833	3			
R207	928	927	3	902	6	989	3	902	6	927	3	1279	1256	3	904	3	815	3	815	3			
R208	769	765	3	733	3	785	4	733	3	733	3	1187	1046	3	823	2	709	3	709	3			
R209	1034	1034	6	883	6	997	6	883	6	997	6	1495	1469	6	855	2	902	4	855	2			
R210	1111	1086	4	920	6	1052	5	920	6	1086	4	1573	1425	3	1052	3	1087	3	1052	3			
R211	811	811	4	777	4	833	5	777	4	777	4	1144	1095	3	816	3	794	3	794	3			
Média	1092	1082	4,2	910	5,9	1055	4,1	910	5,9	1049	3,8	1643	1391	3,2	868	3,0	961	3,4	840	3,2			
C201	589	589	3	589	3	589	3	589	3	589	3	591	591	3	591	3	592	3	590	3			
C202	633	632	3	599	3	618	4	599	3	599	3	956	775	3	707	3	592	3	591	3			
C203	662	642	3	599	3	687	3	599	3	599	3	1804	1747	4	791	3	592	3	591	3			
C204	630	614	3	614	3	609	3	609	3	609	3	891	884	3	685	3	598	3	591	3			
C205	607	607	3	590	3	596	3	590	3	590	3	606	606	3	588	3	589	3	589	3			
C206	595	595	3	608	3	678	3	595	3	595	3	767	767	3	588	3	688	3	588	3			
C207	651	615	3	587	3	633	3	587	3	587	3	680	660	3	588	3	588	3	588	3			
C208	586	586	3	599	3	609	3	586	3	586	3	607	607	3	588	3	686	3	588	3			
Média	618	610	3,0	597	3,0	625	3,1	593	3,0	593	3,0	893	830	3,1	641	3,0	691	3,0	690	3,0			
RC201	1923	1852	4	1293	9	1474	6	1283	9	1652	4	2384	1660	4	1294	4	1470	5	1249	4			
RC202	1736	1697	6	1108	8	1454	4	1106	8	1454	4	2128	1997	4	1291	4	1444	4	1221	4			
RC203	1252	1251	4	1018	6	1170	4	1019	6	1170	4	1673	1626	4	1203	3	1014	4	1014	4			
RC204	963	962	5	805	4	900	6	805	4	805	4	1539	1268	3	897	3	847	3	843	3			
RC205	1725	1676	6	1216	6	1455	5	1216	6	1455	5	2622	2134	5	1389	4	1787	5	1786	5			
RC206	1316	1308	4	1072	6	1323	4	1072	6	1308	4	1701	1682	4	1213	3	1208	4	1208	4			
RC207	1135	1130	6	884	7	956	5	884	7	956	5	1885	1635	4	1161	3	1079	4	1079	4			
RC208	856	855	6	801	4	828	5	801	4	801	4	1209	1184	3	919	3	920	3	919	3			
Média	1383	1347	4,9	1036	6,5	1194	4,9	1033	6,3	1225	4,3	1910	1657	3,9	1173	3,4	1168	4,0	1162	3,9			

Legenda: T - tempo total de percurso sem incluir o tempo de servir o cliente; D - distância total; R - número de rotas; S<sub>D</sub>\* - melhor solução em termos de distância dada pela TABUPREV, de entre as três apresentadas (T<sub>min</sub>, D<sub>min</sub>, TD<sub>min</sub>); S<sub>R</sub>\* - melhor solução com menor número de rotas dada pelo TABUPREV; Solomon - melhor solução em termos de tempo de Solomon [17]; GenSAT - melhor solução em termos de distância de Thangiah et al [20,21]; Rochat - melhor solução apresentada por Rochat e Taillard [15]; Melhor - melhor solução conhecida (Rochat e Taillard [15]).

A Tabela 2, construída a partir da Tabela 1, contém as diferenças médias percentuais das soluções do TABUPREV para cada tipo de problema, em relação às soluções dos outros algoritmos da Tabela 1. Esta diferença é dada por  $100(x-y)/y$ , sendo x e y obtidos, respectivamente, pelo algoritmo de comparação e pelo TABUPREV. Considera-se separadamente a melhor solução em termos de distância ( $S_D^*$ ), em número de rotas ( $S_R^*$ ) e, no caso de Solomon, a solução única gerada pela versão  $T_{min}$  ( $S_T$ ).

Podê verificar-se que, no que concerne à distância,  $S_D^*$  é no geral melhor do que qualquer dos algoritmos e mesmo do que o conjunto das melhores soluções conhecidas, algumas das quais são óptimas. No que diz respeito ao número de rotas,  $S_D^*$  é de pior qualidade, pois, tem em média um número de rotas superior. Naturalmente que em  $S_R^*$  esta diferença diminuiu bastante, mas mesmo assim o número médio de rotas ainda é superior. O algoritmo de Solomon é no geral de bastante pior qualidade, mas é um excelente ponto de partida para o GenSAT, principalmente em número de rotas. O TABUPREV permitiu obter melhor solução para 31 dos 56 problemas, 12 das quais são melhores em distância e simultaneamente o número de rotas é igual ou inferior.

O tempo de computação é difícil de comparar devido à utilização de computadores muito diferentes pelos vários autores. O GenSAT, que foi executado num NeXT 68040, parece ser um pouco mais rápido que o TABUPREV. Contudo, o algoritmo de Rochat e Taillard [15] que dá melhores resultados ainda que o GenSAT, tem um tempo de execução muito mais longo que o TABUPREV, conforme se pode ver na Tabela 2, visto que a estação de trabalho Silicon Graphics é muito mais rápida do que o Pentium.

Com o TABUPREV foi possível mostrar a importância de escolher como função objectivo aquela que melhor se ajusta às metas da empresa. As três versões do TABUPREV foram executadas com parâmetros de igual valor com os diferentes tipos de problemas. Por outro lado, as duas soluções para cada problema, em cada versão, diferem pouco no geral. Estes dois factos comprovam a robustez do TABUPREV.

Tabela 2 - diferença média percentual das soluções dos diferentes algoritmos relativamente ao TABUPREV

		R1 (%)		C1 (%)		RC1 (%)		R2 (%)		C2 (%)		RC2 (%)		M	I	P
		D	R	D	R	D	R	D	R	D	R	D	R			
GenSAT	$S_D^*$	2,0	-2,9	0,1	0,0	1,1	-3,1	8,5	-49,2	8,1	0,0	13,6	-46,0	44	3	9
	$S_R^*$	1,1	0,8	0,1	0,0	-0,4	0,8	-5,7	-16,7	8,1	0,0	-4,2	-20,9	31	3	22
Rochat	$S_D^*$	0,9	-5,9	0,0	0,0	2,0	-5,4	7,8	-42,4	-0,4	0,0	12,2	-36,5	37	3	16
	$S_R^*$	-0,1	-2,3	0,0	0,0	0,5	-1,6	-6,3	-5,6	-0,4	0,0	-5,4	-7,0	26	3	27
Melhor	$S_D^*$	0,1	-8,1	-0,1	0,0	0,0	-6,9	3,2	-45,8	-0,6	0,0	6,8	-38,1	31	3	22
	$S_R^*$	-0,9	-4,6	-0,1	0,0	-1,5	-3,2	-10,3	-11,1	-0,6	0,0	-10,0	-9,3	21	3	32
Solomon	$S_T$	29,2	1,9	21,8	0,0	25,7	6,9	41,3	-23,9	39,7	4,2	40,1	-20,5	50	3	3
CPU - TABUPREV (min)		13		1		11		75		13		40				
CPU - Rochat (min)		60		71		64		217		160		173				

Legenda: M - número de soluções do TABUPREV melhores que as do algoritmo respectivo; I - número de soluções iguais; P - número de soluções do TABUPREV piores;  $S_T$  - solução obtida pelo TABUPREV na versão  $T_{min}$ ; CPU - tempo médio de processamento de cada problema, o TABUPREV num Pentium Pro a 200 MHz e Rochat num Silicon Graphics Indigo a 100 MHz.

**Agradecimento:** este trabalho foi parcialmente financiado pelo projecto PRAXIS XXI nº 3/3.1/CEG/2661/95.

### Bibliografia

- [1] Barnes, J.W. e Laguna, M., *A tabu search experience in production scheduling*, in: F.Glover, M.Laguna, E.Taillard and J.C.D. de Werra (eds.), *Annals of Operations Research* 41 (1993) 141-156, Baltzer AG Science Publishers, Basel - Switzerland.
- [2] Brandão, J.C.S., *A Decision Support System and Algorithms for the Vehicle Routing and Scheduling Problem*, Doctor of Philosophy Thesis, Department of Management Science, Lancaster University (1994).
- [3] Brandão, J.C.S. e Mercer, A., *A Tabu Search Algorithm for the Multi-Trip Vehicle Routing and Scheduling Problem*, *European Journal of Operational Research* 100 (1997) 180-191.
- [4] Christofides, N. e Mingozzi, A., *Vehicle Routing: practical and algorithmic aspects*, in: C F H van Rijn (eds.), *Logistics - where ends have to meet*, Pergamon Press (1989).
- [5] Christofides, N., Mingozzi, A. e Toth, P., *The Vehicle Routing Problem*, in: N. Christofides, A. Mingozzi, P. Toth and C. Sandi (eds.), *Combinatorial Optimization*, Wiley, Chichester (1979).
- [6] Desrochers, M., Desrosiers, J. e Solomon, M., *A New Optimization Algorithm for the Vehicle Routing Problem with Time Windows*, *Operations Research* 40 (1992) 342-354.
- [7] Gendreau, M., Hertz, A. e Laporte, G., *New Insertion and Post-Optimization Procedures for the Traveling Salesman Problem*, *Operations Research* 40 (1992) 1086-1094.
- [8] Gendreau, M., Hertz, A. e Laporte, G., *A tabu search heuristic for the vehicle routing*, *Management Science* 40 (1994) 1276-290.
- [9] Glover, F., *Tabu search - part I*, *ORSA Journal on Computing* 1 (1989) 190-206.
- [10] Glover, F., *Tabu search - part II*, *ORSA Journal on Computing* 2 (1990) 4-31.
- [11] Glover, F., Taillard, E. e de Werra, J.C.D., *A User's Guide to Tabu Search*, in: F. Glover, Laguna, E. Taillard and J.C.D. de Werra (eds.), *Annals of Operations Research* 41 (1993) 3-28, Baltzer AG, Science Publishers, Basel - Switzerland.
- [12] Kelly, J.P., Golden, B. e Assad, A., *Large-scale controlled rounding using tabu search with strategic oscillation*, in: F. Glover, M. Laguna, E. Taillard and J.C.D. de Werra (eds.), *Annals of Operations Research* 41 (1993) 69-84, Baltzer AG, Science Publishers, Basel - Switzerland.
- [13] Lenstra, J.K. e Rinnoy Kan, A.H.G., *Complexity of Vehicle Routing and Scheduling Problems*, *Networks* 11 (1981) 221-227.
- [14] Mooney, E.L. e Rardin, R.L., *Tabu search for a class of scheduling problems*, in: F. Glover, Laguna, E. Taillard and J.C.D. de Werra (eds.), *Annals of Operations Research* 41 (1993) 3-28, Baltzer AG, Science Publishers, Basel - Switzerland.
- [15] Rochat, Y. e Taillard, E.D., *Probabilistic Diversification and Intensification in Local Search for Vehicle Routing*, Working Paper CRT-95-13, Centre de recherche sur les transports, Université de Montréal (1995).
- [16] Savelsbergh, M.W.P., *Computer Aided Routing* (Doctoral Dissertation), Centrum voor Wiskunde en Informatic, Amsterdam (1988).
- [17] Solomon, M.M., *Algorithms for the Vehicle Routing and Scheduling Problems with Time Window Constraints*, *Operations Research* 35 (1987) 254-265.
- [18] Taillard, E., *Robust Taboo Search for the Quadratic Assignment Problem*, *Parallel Computing* 17 (1991) 443-455.
- [19] Taillard, E., Laporte, G. e Gendreau, M., *Vehicle Routeing with Multiple Use of Vehicles*, *Journal of the Operational Research Society* 47 (1996) 1065-1070.
- [20] Thangiah, S.R., Osman, I.H. e Sun, T., *Hybrid Genetic Algorithms, Simulated Annealing and Tabu Search Methods for Vehicle Routing Problems with Time Windows*, Working Paper UKC/IMS/OR94/4, Institute of Mathematics and Statistics, University of Kent, UK (1994).
- [21] Thangiah, S.R., Osman, I.H. e Sun, T., *Metaheuristics for Vehicle Routing Problems with Time Windows*, Research Report N° UKC/IMS/OR94/8, Institute of Mathematics and Statistics, University of Kent, UK (1995).
- [22] Waters, C.D.J., *Expert Systems for Vehicle Scheduling*, *Journal of the Operational Research Society* 41 (1990) 505-515.
- [23] Willinger, D. e Willmott, A., *1988 Guide to Distribution Software*, Institute of Logistics and Distribution Management (1988).

# CONSTRUÇÃO MULTICRITÉRIO DA "MATRIZ DE CUSTOS" DE UM MODELO DE AFECTAÇÃO PARA GESTÃO DE STANDS DE AERONAVES

**Carlos A. Bana e Costa**  
Instituto Superior Técnico  
Dep. Eng. Civil/CESUR  
Av. Rovisco Pais  
1000 Lisboa - Portugal

**Ana Cristina Vitorino**  
ANA, EP  
Direcção de Estudos Aeroportuários (DEA)  
Rua D, Edifício 121 - Aeroporto de Lisboa  
1700 Lisboa - Portugal

## Abstract

One of the daily operational tasks, in any airport, is the assignment of a stand to each aircraft that lands on it. An assignment model, and its computer implementation, can provide decision support for the operators and save time when compared with the manual allocation of stands.

The assignment task depends on several points of view that can be different from airport to airport and from operator to operator. So, the conception of a model of aircraft automatic allocation must be done in interaction with the operational team of a certain airport. The model proposed in this paper has been conceived for the case of the airport of Faro, although it can be easily adapted to any other airport. The model is based on the ASSIGNMENT mathematical programming technique.

The construction of the "costs matrix" of the Assignment Problem is one of the most important and complex aspects in this work. A good solution for the problem depends on the coefficients of the "costs matrix", that must express the allocation conditions, many of them having a subjective nature. Moreover, the relative importance of the allocation criteria is not necessary the same for all of them. These problems were overcome by a multicriteria model conceived in an interactive process supported by the MACBETH approach - "Masuring Attractiveness by a Categorical Based Evaluation Technique". This is the main subject of this paper.

## Resumo

Uma das tarefas operacionais diárias de qualquer aeroporto consiste na atribuição de posições de estacionamento às aeronaves que nele escalam. A automatização desta tarefa, através da implementação em computador de um modelo de afectação, permite apoiar tecnicamente a tomada de decisões e também obter uma economia significativa de tempo relativamente à atribuição manual dos stands de estacionamento. A tarefa em questão depende de pontos de vista variáveis de aeroporto para aeroporto e de operador para operador. Assim sendo, a concepção de um modelo para estacionar automaticamente as aeronaves deve ser efectuada em estreita interacção com uma equipa operacional de um determinado aeroporto. Neste trabalho foi desenvolvido e implementado computacionalmente um modelo especialmente adaptado ao aeroporto de Faro, onde o estacionamento das aeronaves era ainda feito de forma manual. O modelo baseia-se na técnica matemática de AFECTAÇÃO e é facilmente adaptável a qualquer aeroporto.

A construção da "matriz de custos" do Problema de Afectação constitui uma das fases mais importantes e complexas deste trabalho. A obtenção de uma boa solução para o problema em causa depende dos coeficientes desta matriz que têm de traduzir os factores, frequentemente subjectivos, condicionantes do estacionamento. A subjectividade dos critérios actuais de atribuição de um determinado stand a uma aeronave e dos respectivos "pesos", levou ao desenvolvimento d um modelo multicritério, com base num processo interactivo de diálogo analista/avaliador suportado pela metodologia MACBETH - "Masuring Attractiveness by a Categorical Based Evaluation Technique". Este artigo descreve a construção deste modelo.

## Keywords

Assignment, Multicriteria Analysis, Decision Aid.

## 1. Introdução

### 1.1 Identificação do Problema

O aeroporto, parte essencial do sistema de transporte aéreo, é uma área de "interface", isto é, uma área onde se verifica uma mudança de modos de transporte, com a particularidade de um deles ser o transporte aéreo. Por esta razão, é o ponto de intersecção das duas principais componentes desse sistema, Companhia Aérea e Passageiro.

Para satisfazer eficazmente as necessidades destes clientes, é necessário que o aeroporto possua uma gestão operacional cuidada, devendo nomeadamente ser capaz de:

- registar toda a informação inerente aos diferentes voos:
  - ⇒ companhia aérea;
  - ⇒ tipo de aeronave;
  - ⇒ horas previstas e reais de aterragem e deslocação das aeronaves;
  - ⇒ número de passageiros;
  - ⇒ tipo de passageiros (internacionais, domésticos, etc.);
  - ⇒ origem, destino e escalas do voo;
  - ⇒ natureza do voo (regular, "charter", para estudantes, uso próprio, etc.);
  - ⇒ tipo de operação (escala comercial, escala técnica, voo de instrução ou teste, etc.);
  - ⇒ etc.

com o objectivo de contabilizar os montantes a facturar a cada companhia aérea em cada voo e de realizar estudos estatísticos que são usados, entre outros fins, para apoiar os técnicos e projectistas responsáveis pelas previsões de expansão de cada uma das zonas do aeroporto;

- afectar as diferentes infraestruturas aeroportuárias:
  - ⇒ balcões de "Check-In";
  - ⇒ portas de embarque e desembarque;
  - ⇒ tapetes de bagagem;
  - ⇒ terminais de chegada e partida;
  - ⇒ posições de estacionamento;
  - ⇒ etc.

aos diversos voos que diariamente se realizam, por forma a permitir a funcionamento diário do aeroporto.

Uma das principais tarefas operacionais diárias de gestão aeroportuária é a afectação das posições de estacionamento às aeronaves. Com o objectivo de autonomizar esta tarefa, foi estudado o caso particular do Aeroporto de Faro, tendo sido desenvolvido um "software" que faz a atribuição de posições de estacionamento às aeronaves que o escalam. Embora o "software" tenha sido concebido de acordo com as especificidades actuais deste aeroporto, houve a preocupação de criar um modelo suficientemente flexível para que não fique



desactualizado caso surjam alterações quer a nível da plataforma de estacionamento quer por surgirem novos modelos de aeronaves, e também que seja facilmente adaptável a qualquer outro aeroporto.

## 1.2 Descrição do Problema

Quando uma aerovane escala um aeroporto, é conduzida a um determinado local onde estaciona, permitindo assim a entrada e saída de passageiros, bagagens e mercadorias. Este local designa-se por posição de estacionamento ou, em gíria aeroportuária, *stand*.

A atribuição de uma posição de estacionamento a uma aeronave é efectuada por funcionários operacionais do aeroporto. Não dispondo de um sistema de apoio à decisão, esses funcionários realizam uma afectação "manual" holística, baseada em determinados aspectos nem sempre facilmente explicitáveis; podem no entanto identificar-se alguns critérios mais comuns:

- as características das posições de estacionamento (situação relativa à aerogare, tamanho, etc.);
- as dimensões da aeronave;
- a companhia aérea;
- o tipo de voo ou de operação (regular, "charter", etc.);
- tempo de escala;
- etc..

A preferência por um stand depende do critério em causa. Assim, o stand preferido para o estacionamento das aeronaves de uma determinada companhia aérea pode ou não coincidir com o stand preferido para o tipo de operação realizado por essa companhia aérea.

Imagine-se que os stands preferidos para o estacionamento das aeronaves da companhia aérea "X" são, por ordem decrescente de preferência, os stands A e B. Imagine-se também que para um voo regular o stand preferido é o A e para um voo "charter" é o B. Qual deverá ser o stand indicado para se fazer o estacionamento de uma aeronave da companhia aérea "X" que escala o aeroporto efectuando um voo "charter", se estes critérios forem considerados igualmente relevantes?

Para se responder a esta questão é necessário definir o grau de atractividade de cada stand relativamente a cada critério.

No exemplo acima, se para a companhia aérea "X" for muito importante o estacionamento da aeronave no stand A e, no que respeita ao estacionamento de voos "charter", o stand B for apenas ligeiramente preferível ao stand A, então a melhor posição de estacionamento para a aeronave da companhia "X" a escalar o aeroporto fazendo um voo "charter" será, naturalmente, o stand A. Se por outro lado os critérios "companhia aérea" e "tipo de operação" tiverem importância diferente, o stand a afectar a essa aeronave poderá ser outro. Imagine-se então que o critério "tipo de voo" é muito mais importante do que o critério "companhia aérea". Mesmo sendo o stand A muito mais atractivo que o B pelo critério "companhia aérea", a pouca

importância relativa - "peso" - deste critério poderá levar a que a aeronave seja estacionada no stand B.

Desta forma, para se desenvolver um modelo automático de atribuição de posições de estacionamento às aeronaves que escalam um aeroporto, foi necessário, para além de identificar os critérios influentes e os stands disponíveis, proceder à ordenação dos stands em termos de preferência segundo cada critério e ponderar os critérios.

O estudo baseou-se em indicações fornecidas pelos funcionários operacionais responsáveis por esta tarefa, que constituem assim os principais interlocutores do lado do "cliente" do trabalho, o Aeroporto de Faro. Embora estes funcionários se rejam por determinados critérios, não é trivial a sua identificação, já que as indicações por eles fornecidas são algo intuitivas, podendo até, aparentemente, variar de acordo com o funcionário inquirido. Assim sendo, a definição dos critérios, a sua hierarquização *qualitativa* e a ordenação dos stands relativamente a cada critério resultaram de um processo interactivo de diálogo com esses funcionários. O desenrolar dum processo de aprendizagem, em que se utilizou a metodologia MACBETH (cf. [1], [2]), como instrumento de apoio à avaliação, conduziu à parte quantitativa da construção do modelo (ver figura 1).

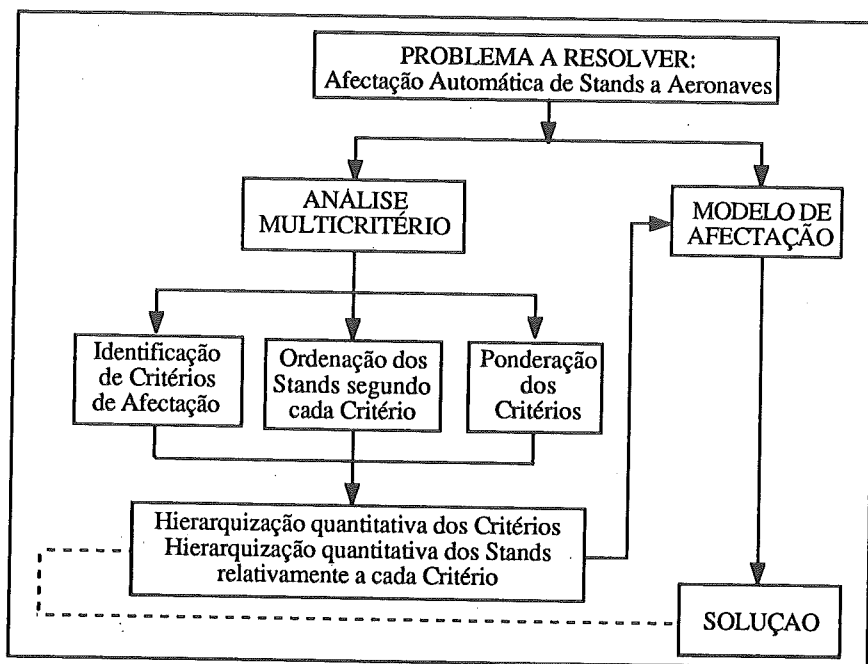


Figura 1 - Metodologias utilizadas nas diferentes fases de resolução do Problema de Afectação de Stands a Aeronaves

## 2. Concepção do Modelo

### 2.1 Aspectos Metodológicos

Neste trabalho, cruzam-se duas áreas da Investigação Operacional: AFECTAÇÃO e ANÁLISE MULTICRITÉRIO (ver figura 1).

O modelo desenvolvido e implementado computacionalmente para fazer a atribuição automática dos stands às aeronaves baseia-se na técnica matemática de AFECTAÇÃO. A construção da "matriz de custos" do Problema de Afectação constitui uma das fases mais importantes e complexas deste trabalho. A obtenção de uma boa solução para o problema em causa depende dos coeficientes desta matriz, que têm de traduzir, o melhor possível, os factores condicionantes de estacionamento.

Existem duas opções metodológicas:

- 1) Formular o problema como um "problema multicritério de afectação". Trata-se de um problema teórico complexo, pouco estudado na literatura (cf. [7], [9]).
- 2) Formular o problema como um problema clássico de afectação com uma função objectivo única. Ao contrário do anterior, trata-se de um problema bem estudado na literatura da Investigação Operacional. No entanto, é usualmente ignorada a questão da construção da "matriz de custos", que é assumida como dada, o que é uma hipótese muitas vezes irrealista, nomeadamente quando vários critérios de decisão estão presentes.

Neste artigo é adoptada a formulação 2) mas é proposto um procedimento original para a construção da "matriz de custos", com base numa abordagem multicritério. Assim, para levar em conta a multiplicidade dos critérios a considerar na atribuição de stands a aeronaves, desenvolveu-se um modelo MULTICRITÉRIO, através de um processo interactivo de diálogo analista/avaliador, suportado pela metodologia MACBETH, que permitiu obter a "matriz de custos" do Problema de Afectação.

### 2.2 Concepção do Modelo de Afectação

Reunida toda a informação que permite definir o problema em estudo, concluiu-se que este poderia ser traduzido por um conjunto de *PROBLEMAS DE AFECTAÇÃO "encadeados"*, que são resolvidos um de cada vez e estando sempre o *j-ésimo* problema dependente de todos os problemas anteriores ( $j = 2, \dots, n^{\circ}$  de problemas a resolver).

Em cada problema, o número de aeronaves é sempre menor ou igual ao número de stands, sendo os stands os mesmos para todos os problemas mas podendo variar o número de aeronaves a afectar. Atendendo a esta condição, enquadrou-se cada problema no caso particular do Problema de Afectação designado por *PROBLEMA DE AFECTAÇÃO RECTANGULAR*, que consiste num Problema de Afectação em que a matriz de custos é rectangular. A formulação matemática clássica do problema de afectação rectangular, embora em tudo semelhante à do

problema clássico de afectação (com a excepção de algumas das restrições), é seguidamente apresentada devido à importância de que se reveste para o caso em estudo.

### 2.3 Formulação Matemática Clássica do Problema de Afectação com Matriz de Custos Rectangular

Considerando que,

$m$  - é o número de stands existentes no aeroporto;

$n$  - é o número de aeronaves do Problema, com  $n \leq m$ ;

Pretende-se afectar  $n$  de  $m$  stands a  $n$  aeronaves de maneira a que se obtenha:

- para cada stand, no máximo, uma aeronave;

- para cada aeronave um e um só stand;

tendo como objectivo a minimização do custo total envolvido no plano de afectação, onde os custos  $c_{ij}$  de afectar o  $j$ -ésimo ( $j = 1, \dots, m$ ) stand à  $i$ -ésima aeronave ( $i = 1, \dots, n$ ) são conhecidos.

Sendo,

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se no stand } j \text{ for estacionada a aeronave } i \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

o Problema traduz-se por:

$$\text{Minimizar } Z = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m c_{ij} x_{ij}$$

$$\text{s.a.} \quad \sum_{j=1}^m x_{ij} = 1 \quad (i = 1, \dots, n)$$

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} \leq 1 \quad (j = 1, \dots, m)$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad (i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, m)$$

Como neste caso  $m \geq n$ , isto é, o número de stands é necessariamente maior ou igual ao número de aeronaves, a solução do Problema é um subconjunto dos stands existentes.

Para resolver cada *Problema de Afectação Rectangular* é utilizado um algoritmo próprio para problemas deste tipo (cf. [5]), que é uma adaptação do Algoritmo Húngaro<sup>1</sup>.

A construção da "matriz de custos" do Problema de Afectação constitui a fase mais importante na obtenção de uma boa GESTÃO DIÁRIA DOS STANDS. A dificuldade de obtenção desta matriz incide no facto de neste caso de "*atribuição de stands a aeronaves*" os "custos" não serem valores económicos conhecidos, como normalmente acontece nos casos típicos de aplicação do Problema de Afectação (cf. [4], [6]). A metodologia utilizada para a sua construção é descrita no parágrafo seguinte.

<sup>1</sup> Algoritmo Húngaro - é um algoritmo PRIMAL-DUAL aplicado ao Problema de Afectação.  
Algoritmo PRIMAL-DUAL - algoritmo utilizado para resolver Problemas de Programação Linear.  
(cf. capítulo 6.5 de [4]: "The Primal-Dual Method", capítulo 5 de [8]: "The Primal-Dual Algorithms".

## 2.4 Construção da "Matriz de Custos" do Problema de Afectação

Os custos  $c_{ij}$  constituem os coeficientes da "matriz de custos" do Problema de Afectação e a sua determinação, tal como já foi referido em 2.1, é complexa. Estes coeficientes, que devem traduzir a filosofia de atribuição dos stands às aeronaves, não são conhecidos *a priori* nem se conseguem obter de uma forma directa. Assim sendo, foi necessário definir uma estrutura de "custos" - *quantificação* - adequada ao contexto em questão.

Refira-se que, para que uma aeronave possa ser estacionada num stand é necessário que este esteja em boas condições de funcionamento - operativo - e que não esteja ocupado por outra aeronave. Em termos técnicos, basta atribuir um "custo" muito elevado aos stands já ocupados e aos stands inoperativos, por forma a evitar a sua afectação às aeronaves.

Em relação aos restantes stands - operativos e desocupados - o processo de quantificação dos custos de atribuição de stands às aeronaves não é tão simples. Para o apoiar recorreu-se à Análise Multicritério, mais concretamente, à metodologia MACBETH.

Com esta metodologia obtém-se uma "matriz de atractividades globais", sendo a "matriz de custos" do problema clássico de afectação simétrica dessa matriz e passando o objectivo a ser a maximização da atractividade global.

## 2.5 Matriz de Atractividade Global

### 2.5.1 Modelo Multicritério

Os coeficientes da "matriz de atractividades" são valores representativos da atractividade global de cada stand para cada aeronave constituinte do Problema de Afectação. Para os determinar recorreu-se a um modelo multicritério de avaliação, cuja construção passa por três fases importantes: estruturação, avaliação e análise de sensibilidade. Este modelo engloba os seguintes passos:

1. Identificação dos critérios e sub-critérios de atribuição de stands;
2. Ordenação dos stands ( $s_i = 1, \dots, s$ ) em termos de atractividade parcial relativamente a cada sub-critério  $j$ ;
3. Associação a cada stand  $s_i$  de um valor numérico  $v_j(s_i)$  por cada sub-critério  $j$ , de tal modo que a diferença  $v_j(s_i) - v_j(s_m)$  entre dois stands  $s_i$  e  $s_m$  represente numericamente a diferença de atractividade entre  $s_i$  e  $s_m$  pelo sub-critério  $j$ ; arbitrou-se, o que não é minimamente restritivo, que  $v_j(s_j^*) - v_j(s_{*j}) = 100 - 0$  traduz a diferença de atractividade parcial entre o melhor stand  $s_j^*$  e o pior stand  $s_{*j}$  segundo o sub-critério  $j$ ;
4. Determinação do valor global  $V(s_i)$  de cada stand, com base no seguinte modelo aditivo de agregação:

$$V(s_i) = \sum_{j=1}^k p_j \cdot v_j(s_i) \quad (1)$$

em que  $k'$  é o número de sub-critérios que se aplicam ao voo em análise e  $p_j > 0$  ( $j = 1, \dots, k$ ), sendo  $k$  o número total de sub-critérios. Para calcular  $V(s_j)$  é necessário atribuir a cada sub-critério  $j$  um valor numérico  $p_j$  representativo da sua "importância relativa" ("peso"); formalmente,  $p_j$  é uma taxa de substituição que traduz numericamente a atractividade global correspondente a 1 unidade da escala  $v_j$  de atractividade parcial segundo o sub-critério  $j$ , permitindo assim a harmonização das escalas de valor parcial  $v_j$  ( $j = 1, \dots, k$ ). Note-se que, fazendo

$$\sum_{j=1}^k p_j = 1, \text{ ter-se-á sempre } \sum_{j=1}^{k'} p_j \leq 1 \text{ qualquer que seja o voo em análise.}$$

Na quantificação das atractividades parciais dos stands e dos "pesos" dos sub-critérios utilizou-se a abordagem MACBETH (ver outras aplicações em [3]).

Na secção seguinte será descrita de forma sucinta a aplicação do modelo multicritério ao caso particular do Aeroporto de Faro.

### 2.5.2 Estruturação

#### *Identificação dos Critérios*

No processo manual e informal de afectação de stands, os critérios usados pelos funcionários operacionais responsáveis por esta tarefa não se encontram bem explícitos. Por isso, o primeiro passo na concepção de um modelo formal de afectação foi necessariamente o da identificação da família de critérios a considerar na avaliação dos stands. Esta fase foi realizada em estreita interacção com os operacionais, em que houve a preocupação de garantir as propriedades de exaustividade, não-redundância e independência da família de critérios.

Uma primeira conclusão importante deste processo de estruturação consistiu em considerar que existe uma família de critérios para aeronaves que chegam e partem no mesmo dia e outra família de critérios para aeronaves que chegam num dia e partem noutra (aeronaves que fazem "Night Stop"). Estes critérios são os seguintes:

*Critérios aplicados às aeronaves que chegam e partem no mesmo dia:*

- ⇒ Localização do Stand relativamente à Aerogare;
- ⇒ Tipo de Operação (Regular(R), Cargueiro(C), Escala Técnica(ET), Posição(P));
- ⇒ Classe de Aeronave (definida em função das duas dimensões - "Narrow Small" (NS), "Narrow Medium" (NM), "Narrow Large" (NL), "Wide Small" (WS), "Wide Medium" (WM), "Wide Large" (WL));
- ⇒ Operador (neste aeroporto apenas se faz distinção entre a Portugalia - PGA - e os restantes operadores (ELSE), pois esta companhia possui neste aeroporto equipamento de "handling", que se situa próximo de determinados stands).

*Critérios aplicados às aeronaves fazem night stop:*

- ⇒ Tipo de Operação (Regular(R), Cargueiro(C), Escala Técnica(ET), Posição(P));
- ⇒ Operador (para as aeronaves que fazem "Night Stop" faz-se a distinção entre a TAP, a Portugalia e os restantes operadores (ELSE)).

Como se pode verificar nas figuras 2 e 3, para cada critério existem vários sub-critérios que adiante são designados por tipos (ex: *critério*: tipo de operação; *tipos*: regular, cargueiro, escala técnica, etc.). Nas figuras, as ramificações a tracejado são referentes a sub-critérios gerais, mas segundo os quais não existe qualquer preferência a nível de stands no caso específico do Aeroporto de Faro.

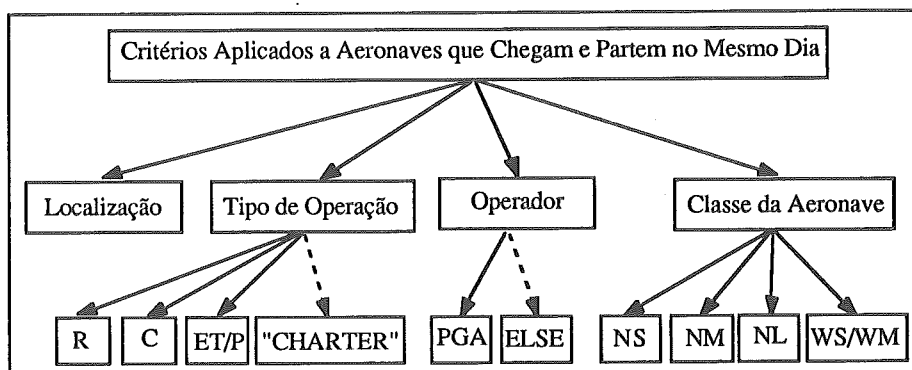


Figura 2 - Representação em árvore dos critérios e sub-critérios aplicados a aeronaves que chegam e partem no mesmo dia.

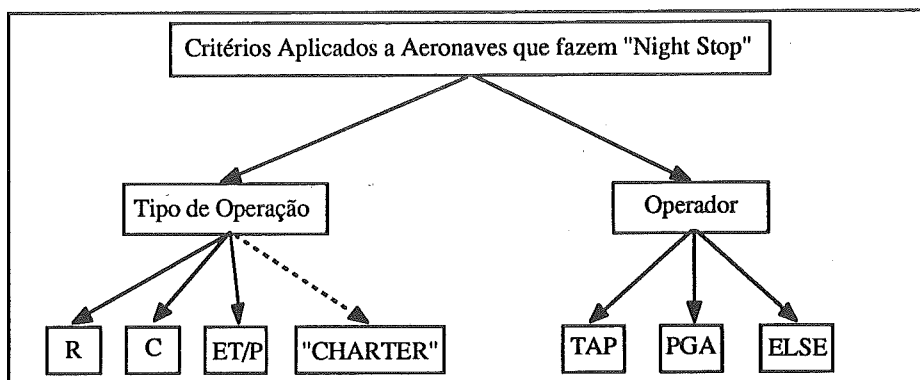


Figura 3 - Representação em árvore dos critérios e sub-critérios aplicados a aeronaves que fazem "Night Stop".

#### Identificação das Alternativas

As alternativas deste modelo multicritério são os stands ( $s_i = 1, \dots, s$ ). O aeroporto de Faro está dotado de  $s = 20$  stands.

### 2.5.3 Avaliação Parcial dos Stands

Para avaliar os stands segundo cada sub-critério, ou seja, para obter valores numéricos representativos da atractividade parcial dos stands, recorreu-se à abordagem MACBETH. Este processo consistiu basicamente em:

- para cada sub-critério construiu-se um modelo de preferências parciais sobre o conjunto dos stands (ordenação dos stands por ordem decrescente de preferência);
- para cada sub-critério, recorrendo ao modo de questionário da abordagem MACBETH, obteve-se do avaliador<sup>2</sup> juízos qualitativos sobre a diferença de atractividade entre cada dois stands, resultando daí uma matriz de juízos qualitativos (semânticos);
- aplicou-se o método MACBETH a cada matriz de juízos de diferença de atractividade e obteve-se, para cada sub-critério, uma escala de valores parciais para os stands - passagem de valor semântico a valor quantitativo.

Apresenta-se de seguida um exemplo de construção de valores de atractividade parcial dos stands segundo um dado sub-critério:

*Considere-se o sub-critério "TIPO DE OPERAÇÃO para voos CARGUEIROS".*

*Para o avaliador a ordenação dos stands por ordem decrescente de preferência para estacionar um CARGUEIRO é:*

<i>Preferência</i>	<i>Stands</i>
1 <sup>º</sup>	A02
2 <sup>º</sup>	A16
3 <sup>º</sup>	A01, A03, A04, A05, A06, A07, A08, A09, A10, A11, A12, A13, A14, A18, A20, A22, A24, A26

*A01, A03, ..., A26 são indiferentes em termos de atractividade (parcial) para estacionar um CARGUEIRO.*

*Portanto, um conjunto de stands de referência a avaliar para estacionar um CARGUEIRO pode ser {A02, A16, A01} (os stands estão ordenados por ordem decrescente de atractividade e A01 representa toda a classe 3).*

*Em seguida o avaliador do Aeroporto de Faro exprimiu os juízos de diferença de atractividade entre A02 e A16, A16 e A01, A02 e A01, por uma das 6 categorias semânticas de MACBETH:*

- C<sub>1</sub> → diferença de atractividade MUITO FRACA*
- C<sub>2</sub> → diferença de atractividade FRACA*
- C<sub>3</sub> → diferença de atractividade MODERADA*

<sup>2</sup> No nosso caso, designa-se por "avaliador" o conjunto de funcionários operacionais que responderam às questões necessárias à aplicação de MACBETH.



$C_4$  → diferença de atractividade **FORTE**

$C_5$  → diferença de atractividade **MUITO FORTE**

$C_6$  → diferença de atractividade **EXTREMA**

Os juízos expressos foram:

a diferença de atractividade entre A02 e A16 é **FORTE** ( $C_4$ )

a diferença de atractividade entre A16 e A01 é **FORTE** ( $C_4$ )

a diferença de atractividade entre A02 e A01 é **EXTREMA** ( $C_6$ )

A matriz correspondente é:

$$\begin{matrix} & \begin{matrix} A02 & A16 & A01 \end{matrix} \\ \begin{matrix} A02 \\ A16 \\ A01 \end{matrix} & \begin{bmatrix} & & \\ & C_4 & C_6 \\ & & C_4 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Após aplicar-se MACBETH obtiveram-se os seguintes valores de atractividade parcial (valores compreendidos entre 0 e 100) para os stands em questão:

Stand	Valor da Atractividade
A02	100
A16	50
A01	0

#### 2.5.4 "Pesos"

Como vimos em 2.5.2, em cada critério existem vários sub-critérios, designados por tipos:

Critério	Tipo
Localização do stand relativamente à aerogare	—
Tipo de Operação	Regular Cargueiro Escala Técnica/Posição "Charter"
Operador	TAP PORTUGÁLIA (PGA) Outros
Classe da Aeronave	NS NM NL WS/WM

Um voo reúne características dos diferentes critérios, isto é, pertence a uma determinada Companhia Aérea, realiza um qualquer Tipo de Operação e a respectiva aeronave enquadra-se numa das Classes dimensionais definidas. No entanto, é impossível que, dentro de um determinado critério, um voo pertença a mais do que um tipo (por exemplo, ou é um voo regular ou cargueiro, nunca os dois ao mesmo tempo). A atribuição de um stand a uma aeronave depende das suas características e das do voo que efectua, isto é, se é um voo regular

ou cargueiro, se pertence à TAP ou à PGA, etc.. Desta forma, para automatizar este procedimento importa atribuir "pesos" aos diferentes tipos (sub-critérios) dentro de cada critério e não directamente ao critério.

A atribuição de "pesos" aos diferentes sub-critérios é feita em duas fases:

1. Numa primeira fase, determinam-se os "pesos internos" de cada um dos tipos dentro de cada critério;
2. Depois, definem-se "pesos externos" entre tipos dos diferentes critérios, permitindo assim a comparação directa entre todos os tipos.

Para tal, foi utilizado o *modo de questionário* que a seguir se exemplifica, para o caso do critério "Tipo de Operação".

**Determinação dos "pesos internos" referentes aos tipos do critério "Tipo de Operação"**

Suponhamos que 3 aeronaves, cada uma delas referente a um dos tipos de operação referidos nesse critério:

R - REGULAR;

ET/P - ESCALA TÉCNICA/POSIÇÃO;

C - CARGUEIRO

estão estacionadas nos seus "PIORES" stands, ou seja, R está estacionada no stand A09, ET/P no stand A20 e C no stand A22.

	PIOR	MELHOR
R	A09	A16
ET/P	A20	A07
C	A22	A02

**PRIMEIRO:** Pretende-se saber, para cada uma dessas aeronaves, quanto vale, em termos de diferença de atractividade, estacioná-la no seu MELHOR stand em vez de a estacionar no seu PIOR stand.

Esta quantificação é difícil, tendo sido conseguida colocando as seguintes questões ao avaliador, para que ele respondesse usando as categorias semânticas de MACBETH:

PERGUNTA: Qual é o acréscimo de atractividade correspondete a:	RESPOSTA
estacionar R em A16 em vez de A09?	Muito Forte (C <sub>5</sub> )
estacionar ET/P em A07 em vez de A20?	C <sub>5</sub>
estacionar C em A02 em vez de A22?	C <sub>5</sub>

**SEGUNDO:** Confrontou-se o avaliador com várias situações com o objectivo de se avaliar dois tipos de cada vez, da seguinte forma:

Imagine-se que existem duas aeronaves para estacionar, A e B, e que só se pode dar uma de duas situações, ou "A ficar no melhor stand pelo tipo X e B ficar no pior stand pelo tipo Y" ou "A ficar no pior stand pelo tipo X e B ficar no melhor stand pelo tipo Y". O avaliador terá de julgar qual a situação preferida e dizer quanto é que vale essa preferência em termos semânticos.

Concretizando,

situação 1                      STAND

	MELHOR	PIOR
R	A16	
C		A22

R fica no A16 e C no A22

OU

situação 2                      STAND

	MELHOR	PIOR
R		A09
C	A02	

R fica no A09 e C no A02

Pergunta: Qual é a situação preferida?

Resposta: situação 1

Pergunta: É uma preferência **EXTREMA? MUITO FORTE? FORTE? MODERADA? FRACA? MUITO FRACA?**

Resposta: FRACA  $\equiv$  C<sub>2</sub>

Este procedimento foi repetido para todos os pares possíveis de diferentes tipos do critério em questão.

**TERCEIRO:** Finalmente, com as respostas semânticas obtidas, constrói-se a matriz de juízos de valor sobre a qual se aplica o método MACBETH para se obter uma primeira sugestão de "pesos internos" dos vários tipos relativamente ao critério Tipo de Operação.

$$\begin{matrix}
 a_R & a_C & a_{ETIP} & a_0 \\
 a_C & & & \\
 a_{ETIP} & & & \\
 a_0 & & & 
 \end{matrix}
 \begin{bmatrix}
 & & & \\
 C_2 & C_3 & C_5 & \\
 & C_3 & C_5 & \\
 & & & C_5
 \end{bmatrix}$$

Nesta matriz estão-se a comparar alternativas de referência que são definidas com base nos melhores e piores stands segundo os vários tipos do critério "Tipo de Operação". Neste caso concreto, quando se está a comparar  $a_R$  com  $a_C$ , correspondente à componente (1,1) da matriz, está-se a comparar a situação de um voo do tipo R ficar no seu melhor stand e um voo do tipo C ficar no seu pior stand ( $a_R$ ) com a situação de um voo do tipo C ficar no seu melhor stand e um voo do tipo R ficar no seu pior stand ( $a_C$ ).

Os "pesos internos" resultantes da aplicação de MACBETH à matriz são:

Tipo	"Peso Interno"	"Peso Interno" Normalizado
R	100	0.354
C	92	0.326
ETIP	90	0.33

Este procedimento repete-se para todos os diferentes critérios, permitindo obter os "pesos internos" dos tipos dentro de cada critério.

Em seguida, determinam-se os respectivos "pesos externos". Para tal, selecciona-se dentro de cada critério o seu tipo (sub-critério) com maior "peso interno", relativamente aos quais se procede a um questionário em tudo idêntico ao efectuado para determinar os "pesos internos". Fica-se assim a conhecer os "pesos externos" dos tipos de maior "peso interno" de cada critério. Os "pesos externos" dos restantes tipos são obtidos por rescalonamento.

### 2.5.5 Avaliação Global dos Stands

Os valores de atractividade parcial de cada um dos stands segundo cada sub-critério, juntamente com os "pesos" ("externos") dos sub-critérios, permitem calcular, pelo modelo de agregação aditivo (1), o valor de atractividade global V de cada stand. V traduz a avaliação do stand por todos os critérios em conjunto.

**Exemplo de construção de valores de atractividade global:**

Considere-se os seguintes voos:

OPERADOR	Nº de Voo Chegada	Nº de voo Partida	TIPO DE AERONAVE	TIPO DE OPERAÇÃO
TRA	245	246	733	Cargueiro
AIH	573	640	M83	Regular

Para o voo TRA 245 246 os stands são avaliados pelos sub-critérios Localização ... (L), Classe NS e Tipo de Operação C; para o voo AIH 573 640 os stands são avaliados pelos sub-critérios Localização ... (L), Classe NM e Tipo de Operação R.

Aplicando o modelo afitivo tem-se:

Para o voo TRA 245 246 733 (NS) Cargueiro

Supondo que apenas os stands A01 e A16 estão aptos a estacionar

	L			NS			C			valor global
	"peso"	valor atractiv.		"peso"	valor atractiv.		"peso"	valor atractiv.		
A01	0.045	× 0	+	0.081	× 100	+	0.182	× 0	=	8.10
A16	0.045	× 100	+	0.081	× 0	+	0.182	× 50	=	13.60

a aeronave seria estacionada no stand A16.

Para o voo AIH 573 640 M83 (NM) Regular

Supondo que apenas os stands A10 e A18 estão aptos a estacionar,

$$\begin{array}{l}
 \text{L} \qquad \text{NM} \qquad \text{R} \\
 \text{A10: } 0.045 \times 60 + 0.069 \times 100 + 0.198 \times 50 = 19.50 \\
 \text{A18: } 0.045 \times 100 + 0.069 \times 63.6 + 0.198 \times 100 = 28.69 \Rightarrow \text{Melhor}
 \end{array}$$

a aeronave seria estacionada no stand A18.

A abordagem descrita permite obter os coeficientes da "matriz de atractividades globais", sendo a "matriz de custos" do Problema de Afectação a sua matriz simétrica. A partir do conhecimento da "matriz de custos" é possível resolver o Problema de Afectação que permite o cálculo automático das posições de estacionamento das aeronaves.

### 2.5.6 Análise de Sensibilidade: Ajustamento dos "Pesos" Iniciais

Os "pesos" dos critérios que estão na realidade a ser aplicados na "matriz de custos" do Problema de Afectação, resultam dum ajustamento que foi necessário fazer aos "pesos" iniciais (ver tabelas 1 e 2) obtidos.

Quando se testou o modelo de Afectação com os "pesos" inicialmente atribuídos aos diferentes critérios de estacionamento de aeronaves, notou-se que o estacionamento referente às aeronaves que chegam e partem no mesmo dia, em alguns casos, não correspondia ao "pretendido". Este desajuste, entre a solução obtida pelo programa para os "pesos" iniciais e a feita manualmente, não foi de todo estranha, uma vez que aquando da aplicação do questionário

necessário à metodologia utilizada para avaliar parcialmente os stands segundo cada critério e para determinar os "pesos" dos critérios, notou-se alguma heterogeneidade nas respostas dos funcionários operacionais, as quais reflectem a forma como eles estacionam as aeronaves.

Após análise e discussão com o avaliador, da situação de estacionamento das aeronaves que chegam e partem no mesmo dia, concluiu-se que o "peso" do critério "LOCALIZAÇÃO DOS STANDS RELATIVAMENTE À AEROGARE" - critério L, que era superior a qualquer um dos referentes à Classes de Aeronaves, levava a que os stands de maiores dimensões não fossem salvaguardados para o estacionamento das aeronaves de maior envergadura. À medida que as aeronaves escalavam o aeroporto iam, qualquer que fosse o seu tamanho, sendo estacionadas nos stands de melhor localização em termos de aerogare. O pequeno "peso" do critério relacionado com a Classe de Aeronave e o grande "peso" do critério L originavam frequentes estacionamentos de aeronaves de pequena envergadura em stands de grande dimensão, pelo que por vezes aconteciam situações de ruptura em que não existiam stands disponíveis para o estacionamento de aeronaves de grande envergadura que chegavam a seguir.

O desenrolar dum processo de aprendizagem, interactivo, de diálogo com o avaliador, em que se utilizou novamente a metodologia descrita nos parágrafos 2.5.3 e 2.5.4, por mais duas vezes, conduziu aos actuais "pesos" finais (ver tabelas 1 e 2). Com estes "pesos", o modelo passou a fornecer resultados de alta qualidade não tendo sido necessário proceder, até agora, a quaisquer outras alterações.

"PESOS" REFERENTES AOS CRITÉRIOS APLICADOS A AERONAVES QUE CHEGAM E PARTEM NO MESMO DIA		
Crítério	"Pesos" Iniciais	"Pesos" Finais
LOCALIZAÇÃO REGULAR	12.6	4.5
CARGUEIRO	19.4	19.8
ESC.TÉCNICA/POSIÇÃO PORTUGALIA	16.2	18.2
NS	11.3	17.8
NM	16.0	14.8
NL	8.0	8.1
WS/WM	6.7	6.9
	5.5	5.6
	4.2	4.3

Tabela 1 - "Pesos" Iniciais e "Pesos" Finais referentes aos critérios aplicados a aeronaves que chegam e partem no mesmo dia.

"PESOS" REFERENTES AOS CRITÉRIOS APLICADOS A AERONAVES QUE FAZEM "NIGHT STOP"		
Crítério	"Pesos" Iniciais	"Pesos" Finais
REGULAR	30.2	30.2
CARGUEIRO	14.3	14.3
ESC.TÉCNICA/POSIÇÃO	7.1	7.1
TAP	25.2	25.2
PORTUGALIA	16.2	16.2
ALL	7.2	7.2

Tabela 2 - "Pesos" Iniciais e "Pesos" Finais referentes aos critérios aplicados a aeronaves que fazem "Night Stop".

Na figura 4 está esquematizado o processo de aprendizagem atrás descrito.

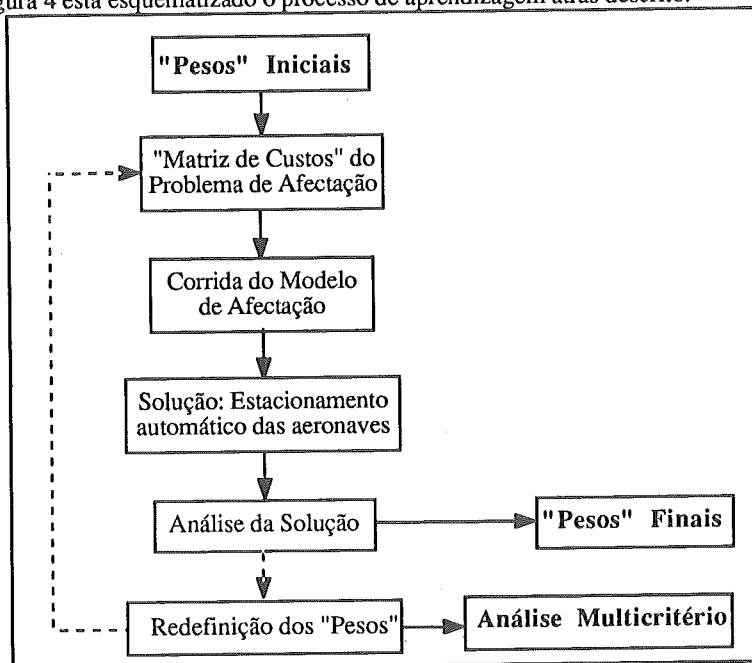


Figura 4 - Esquema do Ajustamento iterativo aos "pesos" iniciais.

### 3. Análise dos Resultados Computacionais

O programa informático de Gestão/Planeamento de Stands foi testado e instalado no Aeroporto de Faro, onde se encontra em funcionamento desde Março de 1996.

O processo normal de utilização do programa consiste em:

- primeiro, fazer-se o Planeamento Automático, o qual vai servir de base ao Planeamento Manual;
- em seguida, a solução obtida pelo Planeamento Automático é analisada pelo Avaliador;
- finalmente, fazem-se alterações manuais a esta solução, se tal for necessário, obtendo-se o Planeamento Manual.

Os resultados obtidos com este "Sistema de Apoio à Decisão" têm sido julgados bastante bons pelo Avaliador, não tendo sido necessário fazer alterações significativas ao Planeamento Automático de Stands.

Neste capítulo, a título exemplificativo são analisados os Planeamentos Automáticos de Stands relativos aos dias 18, 23 e 24 de Maio e 15 e 21 de Junho de 1996, bem como as alterações manuais feitas posteriormente, pelos funcionários operacionais (cf. [10]).

Para se fazer o Estacionamento Automático utilizam-se Margens de Segurança de Antecipação e de Atraso, ou seja, considera-se que uma aeronave pode chegar antes da sua hora

prevista de chegada e pode partir depois da sua hora prevista de partida. Portanto, o tempo de ocupação de um stand será o tempo previsto de estadia (diferença entre a hora de partida e a hora de chegada) mais o tempo resultante das margens de segurança.

Analisa-se em seguida os Planeamentos referentes aos dias 18, 23 e 24 de Maio, apenas em alguns dos períodos em que se verificaram situações críticas de estacionamento.

No Planeamento Automático de Stands para os dias 23 e 24 de Maio foram utilizadas margens de segurança de antecipação e de atraso de 10 minutos.

Nestes dias os stands A02, A04, A06, A08, A10, A12 e A14 estiveram inoperativos por se encontrarem em remodelação, pelo que houve dificuldade em fazer o estacionamento das aeronaves por haver falta de stands disponíveis para estacionar. Nestes dias a capacidade operativa da plataforma esteve reduzida a 13 stands (20 - 7 em remodelação).

Relativamente ao dia 23 de Maio houve alguns voos cujas aeronaves ficaram sem stand atribuído. Tal deve-se ao facto, já referido, da reduzida capacidade operativa da plataforma e às elevadas margens de segurança utilizadas.

Utilizando-se uma regra para definir os Problemas de Afectação, que neste artigo não é apresentada (cf. [10]), resultou uma divisão no Horário Diário para Planeamento em que o primeiro Problema de Afectação teve os seguintes voos:

OPERADOR	Nº DE VOO CHEGADA	Nº DE VOO PARTIDA	HORA DE CHEGADA	HORA DE PARTIDA	SUB-TIPO DE AERONAVE
MXG	662	663	8:20	9:20	727
MON	5750	5751	8:30	9:30	757
AMM	812	813	8:40	9:50	320
CKT	564	565	8:45	9:55	L11
AMM	1224	1225	8:55	9:45	734
MON	1662	1663	9:05	10:10	320
AMM	244	245	9:10	10:10	757
SBE	176	177P	9:20	10:15	72S
AMM	534	535	9:25	10:25	757
TLA	716	319	9:30	10:20	320
MON	7886	7887	9:35	10:35	AB6

O voo AMM 528/321 já não fez parte deste conjunto de voos porque a sua hora de chegada  $9:40-10\text{min} = 9:30$  é igual à hora de partida do voo MXG  $662/663$   $9:20+10\text{min} = 9:30$  pertencente a esse conjunto. Assim, ficaram reunidas as condições para se começar a formar outro conjunto de voos, a partir do voo AMM 528/321, que deu origem a outro Problema de Afectação.

No Planeamento Automático a aeronave referente ao voo TLA 716/319 não tem stand atribuído porque não existe mais nenhum stand disponível compatível com as suas dimensões. Apesar dos stands A01, A09 e A13 ainda estarem desocupados, as suas dimensões não são as adequadas ao estacionamento do seu sub-tipo de aeronave (320).

No processo manual de estacionamento o stand A09 foi atribuído à aeronave de sub-tipo 320, mesmo sendo as dimensões do stand incompatíveis com as da aeronave. Esta atribuição foi feita com os riscos inerentes a esse tipo de estacionamento, por haver falta de stands.



No Planeamento Manual verificaram-se mais situações deste tipo, em aeronaves pertencentes a outros Problemas de Afectação.

Verificou-se também, no mesmo dia, que o stand A16 foi atribuído manualmente a dois voos cujas horas de estacionamento se sobrepõem:

OPERADOR	Nº DE VOO CHEGADA	Nº DE VOO PARTIDA	HORA DE CHEGADA	HORA DE PARTIDA
AMM	528	321	9:40	10:40
MON	3182	3183	10:10	11:10

Verificou-se a ocorrência de mais situações idênticas a esta. A afectação de um stand a dois voos com sobreposição de horário resulta, provavelmente, da vontade de estacionar todas as aeronaves, na esperança de que não seja necessário utilizar as margens de segurança ou até de que se verifiquem substanciais atrasos na hora de chegada. Nestes casos, o Planeamento Automático indica que as aeronaves têm que ficar em fila de espera, na plataforma de estacionamento. O Planeamento Manual feito desta forma pode, em certos casos, funcionar, reduzindo os tempos de espera ou até permitindo o estacionamento de todas as aeronaves. No entanto, para além de não serem respeitadas algumas regras de estacionamento (compatibilidade aeronave - stand), este procedimento pode originar situações de ruptura que levam a tempos de espera para estacionamento muito superiores àqueles que resultariam do Planeamento Automático.

Em relação ao dia 24 de Maio, a única modificação feita ao Planeamento Automático foi a alteração do stand atribuído à aeronave do voo BCY 3502, do stand A03 para o stand A09. Atendendo às características do voo, estes dois stands têm exactamente o mesmo valor de atractividade global, sendo por isso indiferente estacionar num ou noutro.

No que respeita ao dia 18 de Maio, em que os stands A02, A04, A06, A08 e A10 estiveram inoperativos, refira-se que ao voo LIB 360/361 não foi atribuído qualquer stand no Planeamento Automático, mas no Planeamento Manual foi-lhe atribuído o stand A24. A razão pela qual não foi atribuído stand a esta aeronave no Planeamento Automático foi o facto de as margens de segurança utilizadas terem sido de 10 minutos para antecipações e de 20 minutos para atrasos. No Planeamento Manual foi atribuído o stand A24 apesar de teoricamente este apenas ficar disponível às 9:15 (8:55+20min) pelo voo AEF 636/637 e de o voo LIB 360/361 poder chegar às 9:10 (9:20-10min). Verifica-se então que, mesmo com sobreposição (teórica) nas horas de partida e de chegada, a atribuição manual do stand A24 foi feita; provavelmente, devido ao elevado volume de tráfego que houve nesse dia.

É de realçar que, no teste ao modelo relativo ao dia 18 de Maio, já havia o Planeamento Manual quando se fez o Planeamento Automático, pelo que foi possível compará-los e detectar algumas diferenças entre eles, que não são de estranhar visto que existem vários stands absolutamente equivalentes em termos de atractividade global. No entanto, os resultados do Planeamento Automático foram considerados bastante bons pelos utilizadores.

Foi ainda possível testar a capacidade de adaptação do programa a alterações à plataforma de estacionamento, já que durante a fase de teste ao modelo o Aeroporto de Faro sofreu uma profunda remodelação a nível dos stands de estacionamento que foram reconfigurados. Esta reconfiguração deu origem a alterações na sua numeração e nas suas dimensões, e, consequentemente, nas suas capacidades em termos de estacionamento de aeronaves; por exemplo, um determinado stand que antes estacionava apenas aeronaves com envergadura até 30m, pode agora estacionar aeronaves com envergadura até 40m, ou então, dar-se a situação contrária. Assim, foi possível comprovar a grande flexibilidade do modelo, já que, após ter sido actualizado o ficheiro com as compatibilidades aeronave - stand, o programa ter fornecido imediatamente bons resultados. Verifica-se até que raramente são feitas alterações manuais aos resultados do Planeamento Automático de Stands.

Esta capacidade de adaptação do programa foi testada com dois Planeamentos Automáticos efectuados após a remodelação da Plataforma de Estacionamento. Os Planeamentos analisados são referentes aos dias 15 e 21 de Junho.

Relativamente ao dia 15 de Junho, Sábado, que é um dia crítico por se realizarem muitos voos, o modelo "portou-se muito bem". Apenas houve uma única modificação ao Planeamento Automático que foi a alteração do stand atribuído ao voo CFG 6806/6807, do stand A16 para o stand A14. Em termos de atractividade global, o stand A16 é mais atractivo do que o stand A14, não havendo assim motivo aparente para se ter feito esta alteração manual.

No Planeamento Automático desse dia também houve um caso de não atribuição de stand a uma aeronave. A aeronave que realizou o voo LTU 030/131 é de grande envergadura sendo apenas possível estacioná-la nos stands A14, A18 e A22, que estavam atribuídos a outras aeronaves, também de grande envergadura.

O Planeamento Automático do dia 21 de Junho não sofreu qualquer alteração.

Mantendo-se os critérios de atribuição de um stand a uma aeronave, os resultados destes Planeamentos Automáticos comprovam a "boa" adaptação do modelo a alterações à configuração dos stands.

#### 4. Conclusões

Este artigo mostra que é possível automatizar uma tarefa operacional aeroportuária com um elevado grau de subjectividade - *o estacionamento de aeronaves* -, isto é, em que os funcionários responsáveis se orientam por um grande número de critérios, sendo alguns deles intuitivos. A complexidade e a multiplicidade de critérios envolvidos e a grande carga intuitiva associada a esta tarefa levavam a crer, numa primeira análise, que a sua automatização seria extremamente complexa e que dificilmente poderia fornecer resultados consistentes. Assim, numa primeira fase, apenas se esperava obter uma solução que fosse um ponto de partida para o estacionamento das aeronaves, servindo de apoio aos funcionários responsáveis por esta tarefa. Na realidade, os resultados obtidos estão a superar todas as expectativas, uma vez que só raramente tem sido necessário introduzir alterações ao *estacionamento* resultante do modelo

desenvolvido e implementado computacionalmente. É de realçar também o êxito obtido no que respeita à capacidade de adaptação do programa a alterações à plataforma de estacionamento. Os resultados obtidos após a remodelação do aeroporto de Faro estão a ser utilizados quase sistematicamente sem qualquer tipo de correcção.

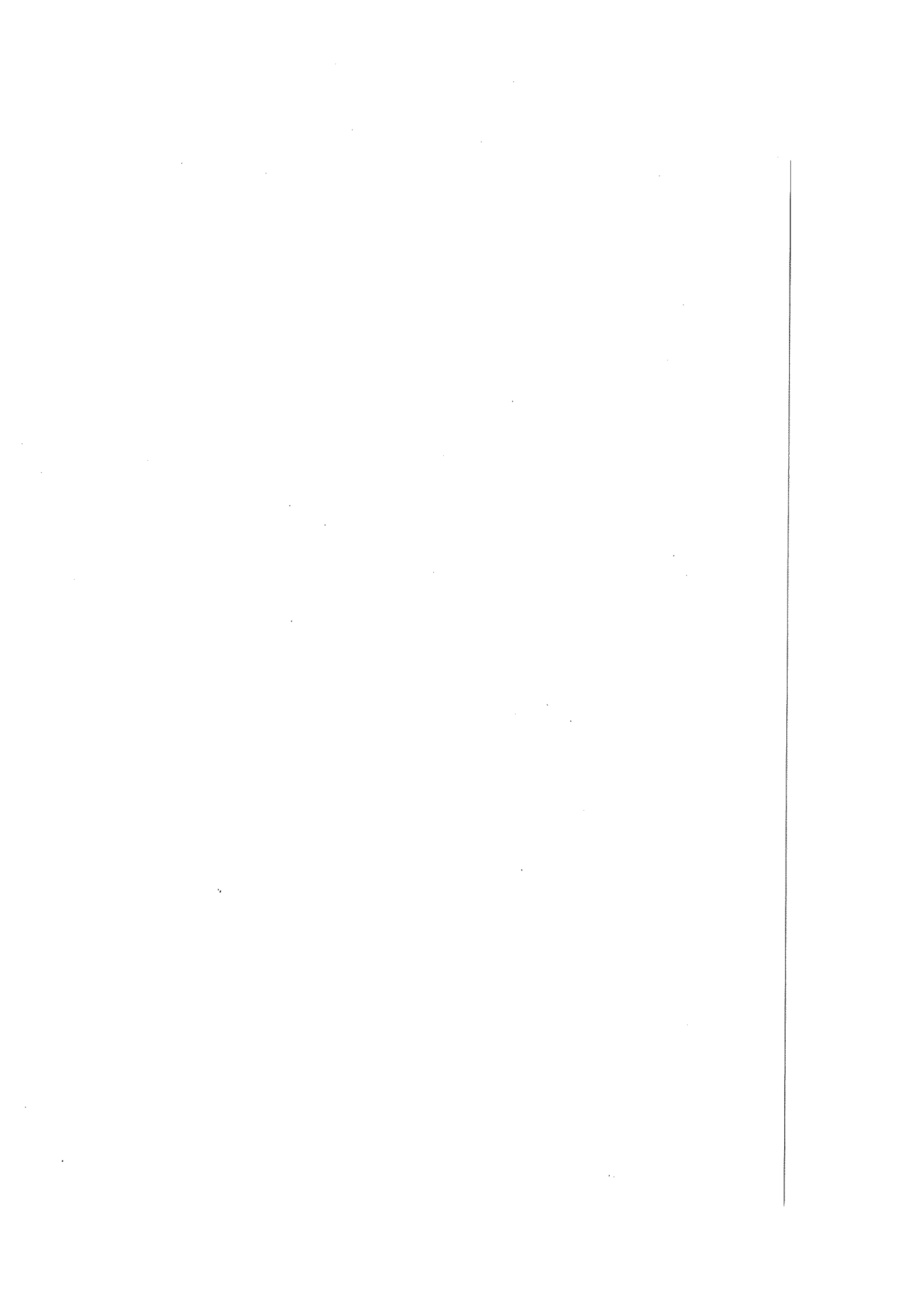
A boa qualidade da solução de estacionamento de aeronaves obtida pelo modelo deve-se à utilização simultânea de duas técnicas de Investigação Operacional, a Análise Multicritério e a Afectação. A primeira permitiu definir, de entre a multiplicidade de critérios existentes e da forma intuitiva como eram aplicados, regras concretas para efectuar o estacionamento das aeronaves. A segunda permitiu, com base nas regras definidas, formular o problema matematicamente tomando assim possível a sua resolução automática. Assim, pode-se afirmar que neste trabalho se cruzaram com sucesso estas duas técnicas tendo sido obtidos resultados muito bons.

No entanto, é importante realçar que a intervenção humana neste processo é imprescindível e que este trabalho se destina a apoiar a tomada de decisões nesta área, facilitando mas não substituindo a componente humana.

A demonstração das potencialidades ligadas à utilização simultânea das duas técnicas de Investigação Operacional referidas, pelos bons resultados obtidos, é talvez uma das vertentes mais positivas deste trabalho. Estes resultados levam a crer que é possível alargar a utilização destas técnicas a outras áreas da Gestão Operacional Aeroportuária. Assim sendo, este trabalho pode vir a ser um catalisador de novos projectos deste tipo, os quais se poderão basear num método semelhante ao que propomos.

### Bibliografia

- [1] Bana e Costa, C.A, Vansnick, J.C., *MACBETH - An interactive path towards the construction of cardinal value functions*, International Transactions in Operational Research 1 (1994) 489-500.
- [2] Bana e Costa, C.A, Vansnick, J.C., *MACBETH - Uma nova abordagem ao problema da construção de uma função de valor cardinal*, Investigação Operacional 15 (1995) 15-35.
- [3] Bana e Costa, C.A, Vansnick, J.C., *Applications of the MACBETH approach in the framework of an additive aggregation model*, Journal of Multi-Criteria Decision Analysis (em edição).
- [4] Bazarara, M.S., Jarvis, J.J., *Linear Programming and Network Flows*, John Wiley & Sons (1977).
- [5] Bourgeois, F., Lassale, J.C., *Algorithm 415: Algorithm for the Assignment Problem (Rectangular Matrices) [H]*, in CERN (ed.), *Collected Algorithms from CACM (1970-71)*.
- [6] Hillier, F.S., Lieberman, G.J., *Introduction to Operations Research*, McGraw-Hill (1990).
- [7] Malhotra, R., Bhatia, H.L, Puri, M.C., *Bicriteria assignment problems*, Operations Research 19 (1982) 84-96.
- [8] Papadimitriou, C.H., Steiglitz, K., *Combinatorial Optimization: Algorithms and Complexity*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey (1982).
- [9] Teghem, J., Ulungu, E.L., *Bicriteria assignment problem*, International Conference on Methods and Applications of Multicriteria Decisions Making (extended abstracts), Mons, Bélgica, FUCAM (1997) 144-147.
- [10] Vitorino, A.C., *Gestão de Stands de Aeronaves - Uma aplicação ao Aeroporto de Faro*, Tese de Mestrado em Investigação Operacional e Engenharia de Sistemas, Instituto Superior Técnico, Lisboa, Fevereiro (1997).



# IMPACTO DOS EFEITOS DE CALENDÁRIO NAS VENDAS DE GASOLINA

M<sup>a</sup> Helena Mouriño Silva Nunes

Departamento de Estudo Económicos  
Banco de Portugal  
Rua Francisco Ribeiro, 2  
1150 Lisboa - Portugal

## Abstract

The general behaviour of the gasoline sales contains calendar effects due to changing month length, weekly periodicity's, holidays (which represents the calendar effects). Moreover, it's important to model the impact of extended weekends, "Carnival" and "Easter" effects. Finally, it became necessary to seasonally adjust the remaining series.

The number of Saturdays, Sundays and Holidays do not change the volume of sales, but the working-days already has an impact. The additional analysis of the precipitation did not reveal significant to describe the sales. After the adjustment, a much smoother series is obtained, especially in terms of homologous growth rates.

## Resumo

Os traços gerais da evolução das vendas de gasolina são, de certa forma, camuflados pelas diferenças entre o número de dias de cada mês, pelas periodicidades semanais e pelos feriados (que representam os efeitos de calendário de uma forma geral). Devido à natureza da série em estudo, para além de quantificar o impacto dos factores citados, interessa também examinar com algum detalhe o comportamento das vendas em fins-de-semana alargados e nas épocas festivas do Carnaval e da Páscoa. Com base nos modelos estatísticos encontrados, pretende-se eliminar da série não só esses efeitos de calendário como também a sazonalidade remanescente.

O número de sábados, domingos e feriados não altera o volume de vendas, mas o número de dias úteis no mês já tem um impacto nesses valores. A análise adicional da influência da precipitação não se revelou significativa. A exclusão dos factores citados permitiu construir indicadores cujas taxas de crescimento homogêneas são mais estáveis do que as dos valores originais.

## Keywords

Intervention Analysis, Trading Day and Holiday Variation, RegARIMA Models, Seasonal Adjustment.

## 1. Introdução

As diferenças entre o número de dias de cada mês, as periodicidades semanais, os feriados móveis numa forma genérica e as eventuais *pontes* próximas dos fins-de-semana, constituem alguns dos factores que estão na origem de alterações no padrão das vendas mensais de gasolina. Além disso, as épocas festivas do Carnaval e da Páscoa são também caracterizadas por um aumento do nível da série, com impacto em diferentes meses consoante o ano (como têm calendário móvel, os seus efeitos não são anulados pelas técnicas de correcção de

sazonalidade). Para que seja possível estabelecer uma interpretação económica correcta da evolução das vendas, há todo o interesse em remover esses *efeitos aparentes*, o que constitui o principal objectivo deste artigo.

Para tornar mais rigorosas as estimativas dos parâmetros associadas aos efeitos citados, foram feitas algumas tentativas para adicionar ao modelo em construção uma variável que permitisse quantificar a dimensão do *stock* de viaturas em Portugal. Perante a impossibilidade de obter tal informação, analisou-se a série referente aos Novos Matriculados mas os resultados foram pouco animadores, pelo que foi tomada a decisão de abandonar este tipo de estudo<sup>1</sup>.

Antes de proceder à análise dos dados propriamente dita, tornou-se necessário seleccionar a fonte de informação a utilizar, uma vez que em alguns meses dos últimos anos tem-se encontrado diferenças acentuadas entre as vendas de gasolina disponibilizadas mensalmente ao Banco de Portugal por duas instituições distintas. Ao analisar a série obtida junto de uma delas foram detectados *outliers*, o que conduziu à necessidade de estabelecer alguns contactos com ambas as instituições. Como resultado, decidiu-se utilizar a série que é disponibilizada com um menor desfasamento temporal.

Um factor que, até certo ponto, poderá estar na origem de um enviesamento dos dados e consequentemente dos resultados dos estudos a seguir apresentados, diz respeito à forma de contabilização do final do mês por parte das empresas que vendem este produto, pois ao longo do tempo tem-se verificado uma alteração mais ou menos significativa do procedimento utilizado. Como exemplo, convém referir que durante algum tempo a instituição que disponibiliza as vendas a analisar neste artigo adoptou a seguinte regra: num determinado mês, a contabilização das vendas de gasolina era feita até ao último dia útil. Em termos práticos, significa que quando o final do mês coincidia com um fim-de-semana e/ou feriados, as vendas só seriam contabilizadas no mês seguinte. Se esses fins-de-semana fossem caracterizados por um volume de vendas elevado (como por exemplo, um fim-de-semana próximo da Passagem de Ano), esta regra poderia alterar substancialmente o padrão das mesmas. Para eliminar os efeitos desta natureza, a Petrogal está a introduzir um processo de contabilização das vendas em tempo real, o qual já se encontra em funcionamento nos postos com maior volume de vendas. Devido à falta de informação sobre a data de entrada em vigor deste novo processo e ao desconhecimento das regras aplicadas pelas restantes empresas do ramo, não foi possível modelar o fenómeno em causa.

Em resumo, a série em estudo corresponde às vendas de gasolina entre Janeiro de 1986 e Agosto de 1996<sup>2</sup>, à qual foi aplicada a transformação logarítmica. Uma análise às suas propriedades estatísticas permitiu confirmar a existência de tendência bastante acentuada e de

<sup>1</sup> Devido à escassez de informação, não foi possível examinar a influência do número de veículos vendidos (de acordo com a cilindrada) sobre as vendas de gasolina.

<sup>2</sup> Apesar da informação disponível já ter início em Janeiro de 1977, a alteração na estrutura da série por volta de Dezembro de 1985 é de tal forma significativa que se decidiu retirar o período inicial da análise.

uma forte componente periódica aos 12 meses. Curiosamente, a periodicidade de quatro meses também é importante para descrever a evolução da componente sazonal<sup>3</sup>.

Foram realizados alguns estudos com vista a remover outros efeitos de natureza não económica que, de alguma forma, possam influenciar os valores das vendas, nomeadamente o impacto da pluviosidade. Com base na informação disponibilizada pelo Instituto de Meteorologia procedeu-se à construção de Índices de Pluviosidade, cujas notas metodológicas de um deles podem ser encontradas no Anexo B. Do ponto de vista estatístico, os resultados revelaram que o impacto desta variável adicional não é significativo.

O artigo encontra-se estruturado da seguinte forma: a formulação teórica dos modelos estatísticos a ajustar aos dados é apresentada na Secção 2, assim como os principais resultados dos ajustamentos. Na Secção 3 é estabelecida a comparação entre a evolução dos valores originais e das séries corrigidas dos efeitos de calendário e de sazonalidade. Finalmente, na Secção 4 são apresentados alguns dos comentários mais pertinentes.

## 2. Modelação dos Dados

Na década de setenta, Box e Jenkins introduzem uma nova classe de modelos que permite estabelecer uma relação dinâmica entre um determinado conjunto de variáveis de *input* e os valores observados para uma variável de *output*: Modelos de Funções de Transferência Lineares. Estes modelos foram especialmente desenvolvidos para os casos em que tais efeitos só fazem sentir-se após ter decorrido um certo período de tempo. A equação linear às diferenças que permite representar os modelos citados, tem a seguinte forma:

$$\delta(B) y_t = \omega(B) x_{t-b} \Leftrightarrow y_t = \omega(B) \delta^{-1}(B) x_{t-b}, \quad (2.1)$$

partindo dos pressupostos que a variável de *output* ( $y_t$ ) é influenciada por uma única variável independente ( $x_t$ ), que  $b$  representa o desfasamento temporal até que  $x_t$  comece a afectar os valores da variável de *output*,

$$\delta(B) = (1 - \delta_1 B - \dots - \delta_r B^r) \text{ e } \omega(B) = (\omega_0 + \omega_1 B + \dots + \omega_s B^s),$$

onde  $B$  é o operador de atraso definido por  $B y_t = y_{t-1}$ .

A equivalência na expressão 2.1 verifica-se sempre que o operador  $\delta(B)$  seja invertível.

Tendo em conta que na generalidade das situações práticas o processo que dá origem à variável de *output* é influenciado por perturbações aleatórias de natureza bastante diversificada, é possível alterar a formulação (2.1) de forma a incluir um termo de erro aleatório. Com base nas hipóteses de que o erro (a designar por  $N_t$ ) é independente do nível da série  $x_t$  e é aditivo em relação à influência da variável de *input*, as formulações citadas sofrem a seguinte alteração:

$$y_t = \omega(B) \delta^{-1}(B) x_{t-b} + N_t, \quad (2.2)$$

em que  $N_t$  segue um processo ARIMA( $p, d, q$ )  $\times$  (P, D, Q) $_s$ .

<sup>3</sup> Foram elaboradas algumas análises para tentar interpretar esta componente periódica, mas os resultados revelaram-se pouco satisfatórios, pelo que não foi possível modelar o fenómeno subjacente.

Em [2] encontra-se uma descrição detalhada de alguns métodos para a identificação, ajustamento e análise dos resíduos provenientes da modelação (2.2).

A análise de Intervenção é uma metodologia desenvolvida com base na hipótese de que os factores externos que afectam os valores de uma série cronológica têm efeito imediato (ou seja,  $b = 0$ ), podendo, ou não, ter repercussões nos valores de  $y_t$  para os instantes posteriores. É com base nesta metodologia que se pretende atingir os objectivos referidos na Secção 1.

O modelo matemático para descrever o impacto de calendário numa forma geral, dos feriados em véspera de fim-de-semana, das *pontes* à Segunda e à Sexta, do Carnaval e da Páscoa nas vendas de gasolina, tem a seguinte forma:

$$\text{Gas}_t = \text{DS}_t^B \times \exp(C_t)^{\alpha_1} \times \exp(P_t)^{\alpha_2} \times \exp(F2_t)^{\alpha_3} \times \exp(F6_t)^{\alpha_4} \times \exp(P2_t)^{\alpha_5} \times \exp(P6_t)^{\alpha_6} \times N_t, \quad (2.3)$$

em que  $\text{Gas}_t$  é a série das vendas de gasolina;  $\text{DS}_t$  representa o efeito Dias-de-Semana no mês  $t$ ;  $C_t$ ,  $P_t$  designam os efeitos do Carnaval e da Páscoa no mês  $t$ , respectivamente; as variáveis  $F2_t$ ,  $F6_t$ ,  $P2_t$  e  $P6_t$  correspondem aos efeitos dos feriados à Segunda-Feira, à Sexta-Feira, *pontes* à Segunda-Feira e à Sexta-Feira no mês  $t$ , respectivamente;  $\beta$  e  $\alpha_i$  ( $i = 1, \dots, 7$ ) são os parâmetros desconhecidos que descrevem o impacto das respectivas variáveis nas vendas;  $N_t$  designa a componente que não é influenciada pelos factores determinísticos em questão e supõe-se ser gerada por um processo  $\text{ARIMA}(p,d,q) \times (P,D,Q)_s$ . Convém referir que a adição de uma constante à expressão (2.3) poderia causar problemas de multicolineariedade.

A análise do impacto dos efeitos de calendário dá origem ao aparecimento de dois indicadores (a designar por Indicador 1 e 2): o Indicador 1 diz respeito à modelação de todos os dias úteis numa única variável, ao passo que o Indicador 2 é construído a partir da modelação explícita de cada um dos dias da semana. Ou seja:

$$\text{Indicador 1: } \text{DS}_t = \text{DU}_t^\gamma \times Z_{6t}^{\beta_6} \times Z_{7t}^{\beta_7}, \text{ com } \text{DU}_t = \sum_{i=1}^5 Z_{it} \quad (2.4)$$

$$\text{Indicador 2: } \text{DS}_t = \prod_{i=1}^7 Z_{it}^{\beta_i},$$

onde  $Z_{it}$  é o número de dias do tipo  $i$  que ocorre no mês  $t$  ( $i = 1, \dots, 6$ , representa o número de Segundas, ..., Sábados que não são feriados;  $i = 7$  corresponde aos dias de descanso, isto é, domingos e feriados) e  $\beta_i$  é o parâmetro desconhecido que quantifica esse impacto;  $\text{DU}_t$  é a variável que designa o número de dias úteis no mês  $t$ ,  $\gamma$  é o parâmetro que quantifica esse efeito nas vendas.

Para modelar com rigor a influência dos feriados móveis seria necessário dispor das vendas diárias deste produto. Devido à impossibilidade em obter tal informação, tornou-se necessário estabelecer algumas hipóteses acerca da forma como esses feriados afectam as vendas. Seguindo a metodologia sugerida em [1], procedeu-se à modelação de cada um deles definindo um período de influência (a designar por  $\tau$ ), assumindo que todos os dias desse intervalo têm o mesmo peso nas vendas e considerando uma função  $H(\tau,t)$  que representa a proporção de dias



do período  $\tau$  que se encontra no mês  $t$ . De notar que ao fixar o valor de  $t$ , a função citada é, em geral, contínua mas não é diferenciável em  $\tau$ . Para cada um dos feriados móveis a analisar, foram aplicados testes F sequenciais de forma a definir com rigor o valor a atribuir a  $\tau$ . Os resultados (Anexo A) demonstram que a época da Páscoa, os feriados à Segunda e à Sexta, afectam as vendas durante um período de quatro dias, ao passo que para o Carnaval e para as pontes à Segunda e à Sexta, o intervalo de influência é alargado para cinco dias.

Deste modo, a metodologia adoptada pressupõe que para cada ano em estudo, a soma de qualquer um dos efeitos dos feriados móveis ao longo do período de influência, é igual a um. Em primeira análise, trata-se de uma hipótese demasiado restritiva já que não é tomada em consideração o facto de certos feriados poderem apresentar um maior impacto no aumento das vendas, tal como poderá ser o caso da Páscoa e do Carnaval, não sendo também possível estabelecer uma eventual distinção entre as duas épocas festivas citadas. Mais uma vez, a falta de informação sobre a evolução diária das vendas associada à problemática do modo de contabilização dos valores no final de cada mês (Secção 1), conduziu à necessidade em estabelecer um critério desta natureza para evitar introduzir variações espúrias em todo o processo de modelação. Esta condicionante é, parcialmente, ultrapassada com a obtenção das estimativas dos parâmetros associadas a cada um dos efeitos citados, já que elas devem reflectir o maior ou menor impacto desses factores sobre as vendas.

Tendo em consideração os aspectos citados, foram estabelecidas as seguintes modelações:

## 2.1 Efeito do Carnaval e da Páscoa

### 2.1.1 Carnaval

De acordo com os resultados apresentados no Anexo A, considerou-se que este feriado afecta as vendas entre Sexta-Feira e Terça-Feira de Carnaval, tendo sido atribuído o peso de  $1/5$  a cada um desses dias. Assim, foi definida a variável  $C_t$  que apenas toma valores não nulos nos meses de Fevereiro e Março:

$$C_t = \begin{cases} 0, & \text{se } t \neq \text{Fevereiro e Março} \\ 1/5 c_1, & \text{se } t = \text{Fevereiro} \\ 1 - 1/5 c_1, & \text{se } t = \text{Março} \end{cases},$$

em que  $c_1$  é o número de dias do período de Carnaval que pertencem ao mês de Fevereiro e, portanto, o mês de Março tem  $(5-c_1)$  dias. Deste modo, as quantidades  $1/5 c_1$  e  $1 - 1/5 c_1$  medem a proporção do Efeito de Carnaval que se reflecte nos meses de Fevereiro e Março, respectivamente.

### 2.1.2 Páscoa

Com base nos resultados do Anexo A, verifica-se que a Páscoa afecta as vendas de gasolina nos dias compreendidos entre Quinta-Feira e Domingo de Páscoa, pelo que foi atribuído o peso de  $1/4$  a cada um desses dias. Definiu-se uma variável auxiliar,  $P_t$ , que apenas toma valores não nulos nos meses de Março e Abril, isto é:

$$P_t = \begin{cases} 0, & \text{se } t \neq \text{Março e Abril} \\ 1/4 p_1, & \text{se } t = \text{Março} \\ 1 - 1/4 p_1, & \text{se } t = \text{Abril} \end{cases}$$

em que  $p_1$  corresponde ao número de dias do período de Páscoa que pertencem ao mês de Março e, portanto, o mês de Abril contém  $(4-p_1)$  dias. Tal como para efeito de Carnaval, também aqui as quantidades  $1/4 p_1$  e  $1 - 1/4 p_1$  medem a proporção do Efeito de Páscoa que se reflecte nos meses de Março e Abril, respectivamente.

## 2.2 Efeito dos Feriados próximos do Fim-de-Semana

Os resultados do Anexo A revelam que os efeitos desta natureza podem afectar as vendas durante os quatro dias que se encontram nas suas imediações, pelo que foi atribuído o peso  $1/4$  a cada um desses dias. Assim, o impacto do feriado à Segunda pode ser sentido desde Sexta até Segunda e o feriado à Sexta pode influenciar as vendas entre Quinta e Domingo. Consoante o posicionamento do feriado no mês, assim o seu impacto poderá ser sentido ainda no mês anterior ou mês seguinte. Supondo que os feriados em causa ocorrem no mês  $t$ , este efeito é descrito da seguinte forma:  $F2_t = 1/4 s_{t,t}$ , em que  $s_{t,t}$  representa o número de dias do mês  $t$  que sofre o impacto do feriado à Segunda posicionado no mês  $t$ .

$$\text{Se } s_{1t} \neq 4 \Rightarrow \begin{cases} F2_{t-1} = 1/4 s_{t-1,t} \\ F2_{t+1} = \frac{1}{4} (4 - s_{t,t} - s_{t-1,t}) \end{cases}$$

onde  $s_{t-1,t}$  corresponde ao número de dias do mês  $(t-1)$  que sofrem o impacto do feriado à segunda que ocorre no mês  $t$ .

Seguindo o mesmo tipo de raciocínio, tem-se:  $F6_t = 1/4 u_{t,t}$ , em que  $u_{t,t}$  designa o número de dias do mês  $t$  que sofre o impacto do feriado à Sexta posicionado no mês  $t$ .

$$\text{Se } u_{1t} \neq 4 \Rightarrow \begin{cases} F6_{t-1} = 1/4 u_{t-1,t} \\ F6_{t+1} = \frac{1}{4} (4 - u_{t,t} - u_{t-1,t}) \end{cases}$$

onde  $u_{t-1,t}$  representa o número de dias do mês  $(t-1)$  que sofrem a influência do feriado à sexta que ocorre no mês  $t$ .

## 2.3 Efeito das Pontes

Os feriados à Terça e à Quinta podem estar na origem de *pontes* à Segunda e Sexta correspondentes. Os resultados apresentados no Anexo A revelam que a *ponte* à Segunda afecta as vendas dos dias situados entre Sexta e Terça, e que a *ponte* à Sexta pode influenciar as vendas para o período compreendido entre Quarta e Domingo. Assim, foram definidas as seguintes variáveis:  $P2_t = 1/5 v_{t,t}$ ,  $P6_t = 1/5 l_{t,t}$ , em que  $v_{t,t}$  e  $l_{t,t}$  designam o número de dias do mês  $t$  que sofrem o impacto da *ponte* à Segunda e à Sexta, respectivamente.

$$\text{Se } v_{1t} \neq 5 \Rightarrow \begin{cases} P2_{t-1} = 1/5 v_{t-1,t} \\ P2_{t+1} = \frac{1}{5} (5 - v_{t,t} - v_{t-1,t}) \end{cases}$$

em que  $v_{t-1,t}$  representa o número de dias do mês (t-1) que sofrem o impacto da *ponte* à Segunda que ocorre no mês t.

$$\text{Se } l_{1t} \neq 5 \Rightarrow \begin{cases} P6_{t-1} = 1/5 l_{t-1,t} \\ P6_{t+1} = \frac{1}{5} (5 - l_{t,t} - l_{t-1,t}) \end{cases},$$

em que  $l_{t-1,t}$  designa o número de dias do mês (t-1) que sofrem impacto da *ponte* à sexta que ocorre no mês t.

## 2.4 Formulação Final

Tendo em conta as características da série em estudo (Secção 1), foram aplicadas diferenças sazonais e consecutivas à série das vendas de gasolina logaritmizadas de forma a torná-la estacionária. O modelo (2.3) sofre, então, as seguintes alterações:

### Indicador 1:

$$\begin{aligned} \nabla \nabla_{12} \text{LGas}_t = & \gamma \nabla \nabla_{12} \text{LDU}_t + \beta_6 \nabla \nabla_{12} \text{LZ}_{6t} + \beta_7 \nabla \nabla_{12} \text{LZ}_{7t} + \alpha_1 \nabla \nabla_{12} \text{C}_t + \alpha_2 \nabla \nabla_{12} \text{P}_t + \\ & + \alpha_3 \nabla \nabla_{12} \text{F2}_t + \alpha_4 \nabla \nabla_{12} \text{F6}_t + \alpha_5 \nabla \nabla_{12} \text{P2}_t + \alpha_6 \nabla \nabla_{12} \text{P6}_t + n_t \end{aligned} \quad (2.5)$$

### Indicador 2:

$$\begin{aligned} \nabla \nabla_{12} \text{LGas}_t = & \sum_{i=1}^7 \beta_i \nabla \nabla_{12} \text{LZ}_{it} + \alpha_1 \nabla \nabla_{12} \text{C}_t + \alpha_2 \nabla \nabla_{12} \text{P}_t + \alpha_3 \nabla \nabla_{12} \text{F2}_t + \alpha_4 \nabla \nabla_{12} \text{F6}_t + \\ & + \alpha_5 \nabla \nabla_{12} \text{P2}_t + \alpha_6 \nabla \nabla_{12} \text{P6}_t + \varepsilon_t, \end{aligned}$$

com  $n_t$  e  $\varepsilon_t$  a designarem os erros associados aos Indicadores 1 e 2, respectivamente;  $\nabla$  é o operador às diferenças, ou seja,  $\nabla y_t = y_t - y_{t-1}$ ;  $\text{LDU}_t$  é a série dos dias úteis logaritmizada;  $\text{LZ}_{it}$  é o logaritmo do número de dias do tipo i que ocorre no mês t ( $i = 1, \dots, 7$ ).

## 2.5 Estimação

Como não é possível conhecer *a priori* o modelo ARIMA mais adequado para descrever  $\eta_t$  e  $\varepsilon_t$ , numa primeira fase do estudo foi ajustado o modelo de regressão linear aos dados, de acordo com a metodologia apresentada em [1]. A justificação deste procedimento está relacionada com o facto das funções de autocorrelação e autocorrelação parcial dos resíduos diferirem das relativas às séries  $n_t$  e  $\varepsilon_t$  correspondentes, por uma quantidade que converge em probabilidade para zero.

Os resultados revelaram que os processos  $\text{ARIMA}(1,0,1) \times (0,0,1)_{12}$  e  $\text{ARIMA}(0,0,1) \times (0,0,1)_{12}$  são os mais adequados para descrever  $n_t$  e  $\varepsilon_t$  respectivamente. Ou seja:

$$n_t = (1 - \phi B)^{-1} (1 + \theta B) (1 + \Theta B^{12}) a_t \quad \text{e} \quad \varepsilon_t = (1 + \theta B) (1 + \Theta B^{12}) a_t^*, \quad (2.6)$$

onde  $a_t$  e  $a_t^*$  são processo de ruído branco com médias zero e variâncias  $\sigma_a^2$  e  $\sigma_{a^*}^2$ , respectivamente.

Para estimar os parâmetros do modelo foi aplicado o Método dos Mínimos Quadrados Não Linear. O algoritmo de pesquisa utilizado no processo de optimização dos parâmetros

corresponde ao Método de Gauss-Newton, com as estimativas iniciais determinadas a partir da solução das Equações de Yule-Walker. Uma descrição detalhada desta metodologia pode ser encontrada em [7]. É utilizado o Processo de Convergência Linear (págs. 203-204 de [2]) na determinação dos valores iniciais para os termos das médias móveis. As estimativas dos parâmetros encontram-se na Tabela 2.1.

Variáveis	Indicador 1				Indicador 2			
	Modelo Completo		Modelo Reduzido		Modelo Completo		Modelo reduzido	
	estimativa	p-value	estimativa	p-value	estimativa	p-value	estimativa	p-value
Nº Dias Úteis	1.089	0.003	0.873	0.000	--	--	--	--
Nº Segundas	--	--	--	--	0.139	0.079	0.171	0.000
Nº Terças	--	--	--	--	0.206	0.019	0.234	0.000
Nº Quartas	--	--	--	--	0.098	0.197	0.133	0.000
Nº Quintas	--	--	--	--	0.153	0.060	0.190	0.000
Nº Sextas	--	--	--	--	0.088	0.292	0.099	0.001
Nº Sábados	0.014	<b>0.846</b>	--	--	-0.058	<b>0.415</b>	--	--
Nº Dias Desc.	0.094	<b>0.316</b>	--	--	-0.021	<b>0.840</b>	--	--
Feriados à Seg.	0.031	0.003	0.028	0.006	0.033	0.028	0.031	0.026
Feriados à Sex.	0.017	0.078	0.016	0.093	0.009	<b>0.541</b>	--	--
Pontes à Seg.	0.019	0.061	0.020	0.048	0.031	0.045	0.029	0.034
Pontes à Sex.	0.038	0.000	0.036	0.000	0.051	0.000	0.049	0.000
Carnaval	0.089	0.006	0.117	0.000	0.114	0.001	0.128	0.000
Páscoa	0.045	0.013	0.052	0.003	0.057	0.006	0.059	0.001
$\phi$	-0.322	0.021	-0.349	0.010	--	--	--	--
$\theta$	-0.523	0.000	-0.517	0.000	-0.696	0.000	-0.700	0.000
$\Theta$	-0.386	0.000	-0.375	0.000	-0.381	0.000	-0.387	0.000
<b>Estatísticas de Ajustamento</b>								
R <sup>2</sup>	0.970	--	0.969	--	0.972	--	0.972	--
$\hat{\sigma}$	0.042	--	0.042	--	0.042	--	0.042	--
DW	2.008	--	2.005	--	2.161	--	2.141	--

Tabela 2.1 - Resultados dos ajustamentos subjacentes às expressões (2.5) e (2.6), para os modelos completos e reduzidos: Estimativas dos parâmetros e p-values; Estatísticas para examinar a qualidade do ajustamento: R<sup>2</sup>, desvio padrão e estatística de Durbin-Watson

Para o Indicador 1, verifica-se que do ponto de vista estatístico o número de Sábados e de dias de descanso não afecta as vendas de gasolina (a realização de um teste F parcial adequado

conduziu a uma estatística de teste com o valor 0.053, e um *p-value* igual a 0.974). Todas as restantes variáveis são importantes para descrever o fenómeno em causa.

No que diz respeito ao Indicador 2, o número de Sábados, de dias de descanso e de feriados à Sexta não parece ter impacto na alteração das vendas (em termos de *p-values*). De facto, a aplicação de um teste F parcial para analisar a hipótese de os coeficientes citados serem iguais a zero, conduziu a uma estatística de teste com o valor 0.018 e um *p-value* de 0.999.

De referir que nos modelos reduzidos as séries correspondentes aos erros aleatórios continuam a ser descritas correctamente pelos processos ARIMA definidos em (2.6).

Ao analisar os valores da Tabela 2.1 surge desde logo um comentário pertinente: as estimativas dos Sábados e dias de descanso apresentam sinais contrários nos Indicadores 1 e 2. Como ambas as variáveis podem ser consideradas iguais a zero, qualquer tentativa de interpretar economicamente este resultados torna-se infrutífera. De facto, não é possível ter uma ideia clara de qual o sinal mais adequado para os parâmetros relativos aos Sábados e dias-de-descanso, pois o tipo de utilização dado aos veículos automóveis sofreu uma profunda alteração entre a década de oitenta e noventa: durante os anos oitenta a generalidade dos automóveis eram apenas utilizados aos fins-de-semana e no período de férias, ao passo que na actualidade eles constituem um dos principais meios de transporte nas deslocações diárias para os empregos. Também não é simples comparar a qualidade dos indicadores em termos do rigor da modelação subjacente, uma vez que o efeito associado à contabilização do volume de vendas no final de cada mês limita, desde logo, todas as análises desta natureza: não é possível saber até que ponto a modelação dos efeitos de calendário por uma única variável consegue reduzir a influência da condicionante citada, quando comparada com a formulação matemática em que se analisa explicitamente cada um dos dias úteis. Para dar um pouco mais de ênfase à afirmação, convém referir que o próprio modelo ARIMA utilizado no ajustamento do Indicador 1 apresenta um termo autoregressivo adicional, quando comparado com o Indicador 2. Um estudo detalhado das vendas diárias de gasolina seria um auxílio extremamente importante para clarificar a resolução desta questão.

Apesar das restrições referidas no parágrafo anterior, a generalidade dos resultados aponta para que uma grande fracção da gasolina vendida seja para consumo diário ao longo dos vários dias úteis. Tendo em conta separadamente os feriados prolongados e as épocas festivas do Carnaval e da Páscoa, a quantidade de gasolina consumida aos Sábados, Domingos e Feriados não é relevante. Esta afirmação justifica o facto de a precipitação não influenciar de uma forma significativa as vendas de gasolina<sup>4</sup>. Para além disso, os resultados permitem ainda confirmar que as épocas festivas do Carnaval e da Páscoa são caracterizadas por tráfego bastante intenso.

Para além das estimativas dos parâmetros, na Tabela 2.1 estão ainda resumidas algumas das estatísticas que permitem analisar a qualidade dos ajustamentos. Conclui-se que tanto os

---

<sup>4</sup> Ao introduzir a variável adicional referente à precipitação na expressão (2.3), concluiu-se que este efeito não é significativo.

modelos completos como os reduzidos conseguem descrever correctamente a variação dos dados, não havendo portanto uma perda de informação relevante ao excluir as variáveis adequadas dos modelos subjacentes aos Indicadores 1 e 2.

A elaboração de análises detalhadas nos domínios do tempo e da frequência aos resíduos dos ajustamentos em causa, permitiu concluir que todos eles têm um comportamento semelhante a um ruído branco.

A correcção das vendas mensais de gasolina foi realizada do seguinte modo: para os dias da semana foram removidos os desvios em relação ao respectivo valor médio. No que diz respeito ao Carnaval, Páscoa, feriados à Segunda e à Sexta e *pontes* também à Segunda e Sexta, os seus efeitos foram totalmente eliminados das vendas. As séries finais são dadas por:

**Indicador 1:**

$$\text{Gas}_t^* = \text{Gas}_t \left( \frac{\text{DU}_t}{\text{ADU}} \right)^{-\hat{\gamma}} \prod_{i=6}^7 \left( \frac{Z_{it}}{\text{AZ}_i} \right)^{-\hat{\beta}_i} \times \left[ \exp(C_t)^{\hat{\alpha}_1} \exp(P_t)^{\hat{\alpha}_2} \exp(F2_t)^{\hat{\alpha}_3} \exp(F6_t)^{\hat{\alpha}_4} \exp(P2_t)^{\hat{\alpha}_5} \exp(P6_t)^{\hat{\alpha}_6} \right]^{-1} \quad (2.7)$$

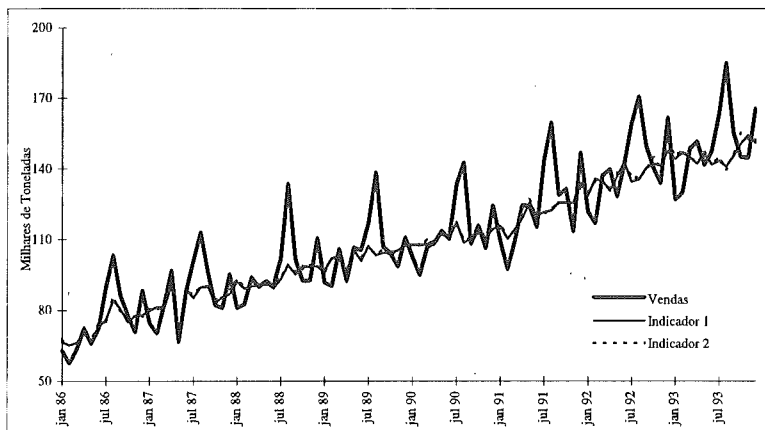
**Indicador 2:**

$$\text{Gas}_t^* = \text{Gas}_t \prod_{i=1}^7 \left( \frac{Z_{it}}{\text{AZ}_i} \right)^{-\hat{\beta}_i} \times \left[ \exp(C_t)^{\hat{\alpha}_1} \exp(P_t)^{\hat{\alpha}_2} \exp(F2_t)^{\hat{\alpha}_3} \exp(F6_t)^{\hat{\alpha}_4} \exp(P2_t)^{\hat{\alpha}_5} \exp(P6_t)^{\hat{\alpha}_6} \right]^{-1}$$

onde ADU é a média da série correspondente ao número de dias úteis;  $\text{AZ}_i$  ( $i = 1, \dots, 7$ ) designa a média da série relativa ao número de dias do tipo  $i$ ;  $\hat{\alpha}_i$ ,  $\hat{\beta}_i$  e  $\hat{\gamma}$  são as estimativas que se encontram na Tabela 2.1.

As séries obtidas a partir da expressão (2.7) têm uma estrutura periódica análoga à dos valores originais salientando-se, portanto, a forte sazonalidade e a componente periódica aos quatro meses. Para eliminar a influência sazonal foi aplicado o Método das Médias Móveis. Uma análise às propriedades espectrais das séries corrigidas de sazonalidade permitiu concluir que este procedimento eliminou totalmente as duas componentes periódicas citadas.

Os gráficos das Figuras 2.1 e 2.2 permitem visualizar os resultados finais, em níveis e em taxas de variação homóloga, respectivamente.



(a)

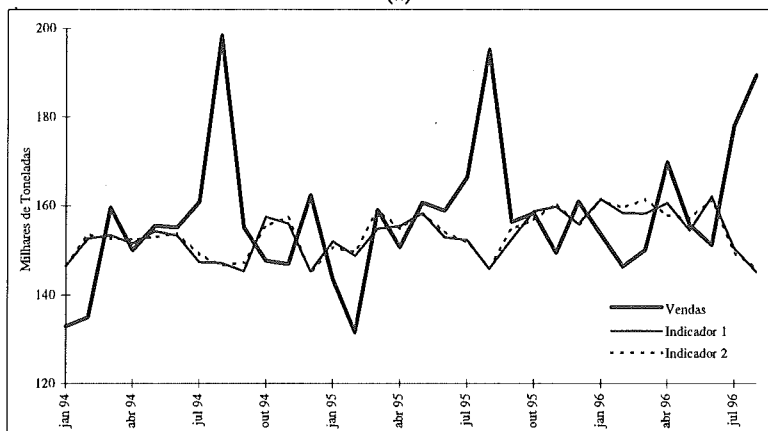


Figura 2.1 - Comparação entre as vendas de gasolina e os Indicadores 1 e 2, em níveis: (a) Período: Janeiro 1986-Dezembro 1993; (b) Período: Janeiro 1994-Agosto 1996

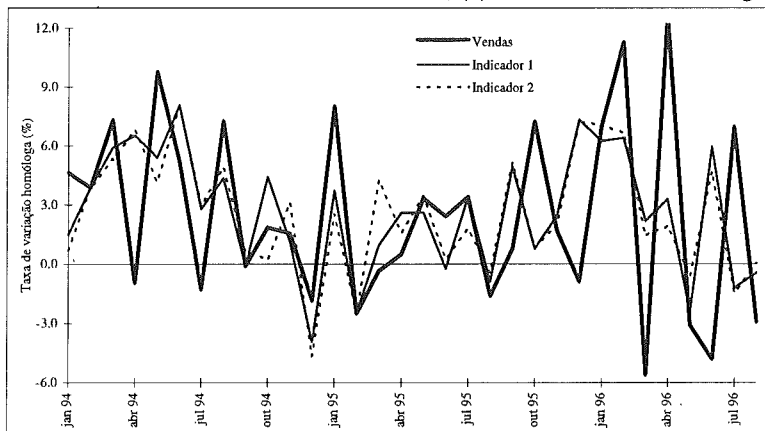


Figura 2.2 - Comparação entre as vendas de gasolina e os Indicadores 1 e 2, em taxas de variação homóloga (Período: Janeiro 1994-Agosto 1996)

### 3. Principais Resultados

O objectivo da presente Secção consiste em estabelecer uma comparação entre a evolução das vendas e dos indicadores construídos a partir da remoção dos efeitos de calendário e da sazonalidade. A alteração verificada no padrão das séries citadas a partir de Janeiro de 1994, conduziu à necessidade em recorrer a dois gráficos distintos para representar com clareza a evolução das vendas em níveis para todo o período em análise (Figura 2.1(a) e (b), respectivamente). Devido à forte instabilidade inerente à própria natureza das taxas de variação homólogas, os valores que constituem o gráfico da Figura 2.2 estão limitados ao período entre Janeiro de 1994 e Agosto de 1996, pois o facto de ser um intervalo relativamente curto permite analisar com rigor a evolução das taxas em questão. De notar que a comparação estabelecida entre os Indicadores 1 e 2 é apenas realizada com base nos modelos reduzidos.

Com a adesão de Portugal à União Europeia (UE), o ano de 1986 constituiu um marco extremamente importante para o desenvolvimento da economia portuguesa devido às modificações de alguns parâmetros em que decorria a actividade económica e às próprias regras de conduta da política económica. Tal como foi referido na Secção 1, as vendas de gasolina reflectem bem este comportamento pois no período anterior à data citada a sua evolução é caracterizada por um padrão totalmente diferenciado do restante intervalo de tempo em estudo.

A adesão à UE permitiu o acesso a numerosos artigos de consumo devido ao desagravamento fiscal e aduaneiro. Por outro lado, a descida substancial das taxas de juro nominais e a recuperação real do poder de compra das famílias, estimularam a propensão ao consumo. Um dos sectores em que este enquadramento económico se fez sentir com maior intensidade corresponde ao consumo de bens duradouros, o qual engloba a aquisição de veículos automóveis. Consequentemente, o período entre 1986 e 1993 é caracterizado por um forte crescimento das vendas de gasolina (Figura 2.1a). No entanto, interessa salientar que em 1992 a economia portuguesa já registou um certo abrandamento, apesar do consumo de bens duradouros ter-se mantido bastante dinâmico. O ano de 1993 correspondeu de facto ao início de um período de recessão, com uma diminuição do rendimento disponível. Verificou-se, assim, uma queda no consumo de bens duradouros, que teve reflexo nas vendas de gasolina a partir de 1994 ao manter os seus valores mais, ou menos, constantes até ao fim do período em análise, com exclusão óbvia das alterações inerentes a aspectos de carácter sazonal (Figura 2.1b).

Perante as afirmações do parágrafo anterior, conclui-se que o padrão genérico que caracteriza a evolução das séries representadas na Figura 2.1 ao longo dos anos em estudo, consegue reflectir com rigor o comportamento da própria economia portuguesa. De notar, ainda, que os gráficos relativos aos valores corrigidos confirmam a eliminação completa dos picos existentes nos valores originais.

A evolução homóloga das séries em causa (Figura 2.2) é caracterizada por um comportamento que, de certa forma, pode ser considerado como "cíclico". A instabilidade da taxa de variação homóloga referente aos valores originais é de tal modo acentuada, que não é



possível detectar um comportamento dessa natureza na série. De salientar que durante o ano de 1995 os Indicadores apontam para um certo crescimento das vendas. De facto, apesar do segundo semestre de 1994 ser caracterizado pelo início da recuperação económica, só em 1995 é que este efeito se fez sentir no consumo privado, o que poderá justificar de alguma forma esta afirmação.

#### 4. Comentários Finais

As modelações elaboradas neste artigo não conseguiram eliminar a pseudo-frequência existente nos dados aos quatro meses, a qual deve encontrar-se relacionada com erros de medição provenientes da forma como são contabilizadas as vendas no final de cada mês (Secção 1). Na realidade, é apenas com a aplicação do método das médias móveis que esta componente consegue ser eliminada dos dados.

A selecção entre os Indicadores 1 e 2 é um pouco complexa. De facto, a escolha do Indicador 1 pressupõe que não existem diferenças relevantes entre as vendas ao longo de cada um dos dias úteis. Apesar do Indicador 2 não exigir este tipo de restrições, não é possível obter uma interpretação económica das diferenças entre as estimativas apresentadas para cada uma dessas variáveis. Para cada um dos indicadores citados, o modelo reduzido parece ser o mais indicado uma vez que a eliminação de algumas das variáveis ao modelo completo mantém praticamente inalterável as capacidades de ajustamento dos mesmos.

Não há grande interesse em utilizar estes indicadores para obter médias móveis de três e doze meses e taxas de variação acumuladas. Isto porque os cálculos subjacentes às médias móveis anulam não só os efeitos de calendário que possam existir nos dados, como também as periodicidades de quatro e doze meses citadas atrás.

Convém, ainda, referir que o Indicador de vendas de gasolina corrigido de efeitos de calendário não constitui um substituto ao indicador não corrigido para todas as utilizações. Por exemplo, na previsão ou estimação do produto anual é apropriado utilizar as vendas de gasolina. Em contrapartida, dever-se-á proceder à anulação dos efeitos de calendário sempre que se pretenda realizar uma apreciação da evolução intra anual do produto.

#### Bibliografia

- [1] Bell, W.R. e Hillmer, S.C., *Modelling Time Series with Calendar Variation*, Journal of the American Statistical Association 78 (1983) 526-534.
- [2] Box, G.E.P. e Jenkins, G.M., *Time Series Analysis, forecasting and control* - Revised Edition, Holden-Day, California (1976).
- [3] Cleveland, W.S., *Seasonal and Calendar Adjustment*, Handbook of Statistics 3 (1983) 39-72.
- [4] Cleveland, W.S. Devlin, S.J., *Calendar Effects in Monthly Time Series: Detection by Spectrum Analysis and Graphical Methods*, Journal of the American Statistical Association 371 (1980) 487-496.
- [5] Cleveland, W.S., e Devlin, S.J., *Calendar Effects in Monthly Time Series: Modeling and Adjustment*, Journal of the American Statistical Association 379 (1982) 520-528.
- [6] Escrivá, J.L. e Sastre, M.T., *La desestacionalización de los agregados monetarios*, Boletín Económico, Março (1988) Banco de España.
- [7] Greene, W.H., *Econometric Analysis* - Second Edition, Prentice-Hall, New Jersey (1993).
- [8] Harvey, A.C., *Forecasting, structural time series models and the Kalman filter*, Cambridge University Press, New York (1991).

### ANEXO A - Determinação do Período de Influência de cada um dos Feriados Móveis

O presente Anexo destina-se a seleccionar, de uma forma rigorosa, o intervalo de tempo em que cada um dos feriados móveis afecta os valores das vendas de gasolina. A metodologia corresponde, basicamente, à aplicação de um conjunto de testes F sequenciais, descrita em [1]. Para aplicar este método foi estabelecido *a priori* um limite máximo para esse período de influência que, devido à natureza do problema em estudo, corresponde aos dezasseis dias que circundam os feriados citados.

Seja  $h(i,t)$  uma função que toma o valor 1 se o  $i$ -ésimo dia associado a um determinado feriado móvel se encontra no mês  $t$ ; caso contrário, toma o valor zero. Na Tabela A.1 encontram-se os valores atribuídos à função  $h(i,t)$  para cada um dos feriados móveis.

Carnaval	Páscoa	Feriado à Segunda	Feriado à Sexta	Ponte à Segunda	Ponte à Sexta
$h(1,t) \rightarrow$ Sexta antes do Carnaval	$h(1,t) \rightarrow$ Quinta antes da Páscoa	$h(1,t) \rightarrow$ Sexta antes do Feriado	$h(1,t) \rightarrow$ Quinta antes do Feriado	$h(1,t) \rightarrow$ Sexta antes do Feriado	$h(1,t) \rightarrow$ Quarta antes do Feriado
•	•	•	•	•	•
•	•	•	•	•	•
•	•	•	•	•	•
$h(5,t) \rightarrow$ Terça de Carnaval	$h(4,t) \rightarrow$ Domingo de Páscoa	$h(4,t) \rightarrow$ Segunda (Feriado)	$h(4,t) \rightarrow$ Domingo após o Feriado	$h(5,t) \rightarrow$ Terça (Feriado)	$h(5,t) \rightarrow$ Domingo após o Feriado
$h(6,t) \rightarrow$ Quarta após o Carnaval	$h(5,t) \rightarrow$ Quarta antes da Páscoa	$h(5,t) \rightarrow$ Terça após o Feriado	$h(5,t) \rightarrow$ Quarta antes do Feriado	$h(6,t) \rightarrow$ Quarta após o Feriado	$h(6,t) \rightarrow$ Terça antes do Feriado
•	•	•	•	•	•
•	•	•	•	•	•
•	•	•	•	•	•
$h(10,t) \rightarrow$ Domingo após o Carnaval	$h(9,t) \rightarrow$ Sábado antes da Páscoa	$h(10,t) \rightarrow$ Domingo após o Feriado	$h(9,t) \rightarrow$ Sábado antes do Feriado	$h(10,t) \rightarrow$ Domingo após o Feriado	$h(9,t) \rightarrow$ Sábado antes do Feriado
$h(11,t) \rightarrow$ Quinta antes do Carnaval	$h(10,t) \rightarrow$ Segunda após a Páscoa	$h(11,t) \rightarrow$ Quinta antes do Feriado	$h(10,t) \rightarrow$ Segunda após o Feriado	$h(11,t) \rightarrow$ Quinta antes do Feriado	$h(10,t) \rightarrow$ Segunda após o Feriado
•	•	•	•	•	•
•	•	•	•	•	•
•	•	•	•	•	•
$h(16,t) \rightarrow$ Sábado antes do Carnaval	$h(16,t) \rightarrow$ Domingo após a Páscoa	$h(16,t) \rightarrow$ Sábado antes do Feriado	$h(16,t) \rightarrow$ Domingo após o Feriado	$h(16,t) \rightarrow$ Sábado antes do Feriado	$h(16,t) \rightarrow$ Domingo após o Feriado

Tabela A.1 - Descrição da função  $h(i,t)$  associada a cada um dos feriados móveis

Tendo em conta que não existe nenhum critério científico para agrupar os  $h(i,t)$  a não ser a necessidade em assegurar a independência das variáveis explanatórias, este procedimento foi realizado com base nas características específicas de cada um dos feriados em questão. Assim, foram estabelecidos os seguintes agrupamentos:

#### Carnaval:

$$C_1 = \alpha_1 [h(1,t) + \dots + h(5,t)] + \alpha_2 [h(6,t) + \dots + h(10,t)] + \alpha_3 [h(11,t) + \dots + h(16,t)]$$

#### Páscoa:

$$P_1 = \alpha_1 [h(1,t) + \dots + h(4,t)] + \alpha_2 [h(5,t) + \dots + h(9,t)] + \alpha_3 [h(10,t) + \dots + h(16,t)]$$

**Feriado à Segunda:**

$$F2_t = \alpha_1[h(1,t) + \dots + h(4,t)] + \alpha_2[h(5,t) + \dots + h(10,t)] + \alpha_3[h(11,t) + \dots + h(16,t)]$$

**Feriado à Sexta:**

$$F6_t = \alpha_1[h(1,t) + \dots + h(4,t)] + \alpha_2[h(5,t) + \dots + h(9,t)] + \alpha_3[h(10,t) + \dots + h(16,t)]$$

**Ponte à Segunda:**

$$P2_t = \alpha_1[h(1,t) + \dots + h(5,t)] + \alpha_2[h(6,t) + \dots + h(10,t)] + \alpha_3[h(11,t) + \dots + h(16,t)]$$

**Ponte à Sexta:**

$$P6_t = \alpha_1[h(1,t) + \dots + h(5,t)] + \alpha_2[h(6,t) + \dots + h(9,t)] + \alpha_3[h(10,t) + \dots + h(16,t)]$$

Um dos resumos dos principais resultados da aplicação dos testes sequenciais referidos encontra-se na Tabela A.2. Conclui-se, então, que o efeito dos vários feriados móveis em estudo só tem reflexos para o período associado ao parâmetro  $\alpha_1$  (considerando níveis de significância iguais, ou superiores, a 1%). Perante estes resultados, não faz qualquer sentido testar a hipótese de igualdade dos parâmetros  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  e  $\alpha_3$ .

j	Carnaval	Páscoa	Feriado à Segunda	Feriado à Sexta	Ponte à Segunda	Ponte à Sexta
1	7.453	7.604	9.255	7.700	8.790	12.987
2	0.453	2.644	2.013	0.381	0.284	3.287
3	2.951	1.687	2.123	3.572	0.312	1.871

Tabela A.2 - Valor da estatística  $F_0$  analisar, sequencialmente, a hipótese  $H_0 : \alpha_1 = \dots = \alpha_j, \alpha_{j+1} = \dots = \alpha_3 = 0, j = 1, 2, 3$

## ANEXO B - Índice de Precipitação

Para o período entre Janeiro de 1986 e Novembro de 1995, o Instituto de Meteorologia disponibilizou os valores mensais da precipitação total nas seguintes estações meteorológicas: Viana do Castelo, Porto, Vila Real, Bragança, Coimbra, Viseu, Castelo Branco, Penhas Douradas, Portalegre, Lisboa, Évora, Beja, Faro, Cabo Carvoeiro e Sagres. Pretende-se agregar esta informação de forma a construir um Índice de Pluviosidade que, pelas razões óbias, se encontra restrito a Portugal Continental.

Como não foi possível obter os valores totais da precipitação para todos os distritos do País, houve necessidade de estimar a pluviosidade para os distritos não disponíveis (ou seja, Aveiro, Braga, Guarda, Leiria, Santarém e Setúbal). Tais estimativas foram determinadas com base nos seguintes pressupostos: considerou-se que a precipitação em Aveiro e na Guarda é igual à de Viseu; que a pluviosidade em Braga é idêntica à de Viana de Castelo; que a precipitação em Leiria pode ser considerada igual à de Coimbra, e que a pluviosidade em Santarém e Setúbal é idêntica à de Lisboa. Ignorou-se a informação referente à estações de Penhas Douradas, Cabo Carvoeiro e Sagres por corresponderem a situações climáticas extremas.

Numa primeira abordagem ao problema, foram realizados alguns estudos das séries relativas à pluviosidade nas várias estações meteorológicas, tendo-se verificado que as séries não apresentavam tendência, sendo todas elas caracterizadas por uma periodicidade de 12 meses mais ou menos nítida.

Para que o índice consiga reflectir correctamente o impacto da pluviosidade em cada uma das regiões consoante a sua densidade populacional, decidiu-se utilizar o quociente entre o número de habitantes num determinado distrito e o número total de habitantes. Deste modo, o peso do  $i$ -ésimo distrito do mês  $t$  é dado por:

$$\text{Peso Distrito}_{i,t} = \frac{\text{População Distrito}_{i,t}}{\sum_{j=1}^{18} \text{População Distrito}_{j,t}}, \quad i = 1, \dots, 18,$$

onde  $\text{População Distrito}_{i,t}$  designa a População Residente no  $i$ -ésimo distrito no mês  $t$ .

As séries citadas foram construídas com base na informação relativa à População Residente em cada um dos distritos de Portugal, divulgada na publicação *Boletim Mensal de Estatística* do Instituto Nacional de Estatística (INE).

O Índice de Precipitação foi calculado de acordo com a seguinte expressão matemática:

$$\text{Precipitação Total}_t = \sum_{i=1}^{18} \text{Precipitação Total Distrito}_{i,t} \times \text{Peso Distrito}_{i,t}$$

em que  $\text{Precipitação Total Distrito}_{i,t}$  designa o valor da precipitação total para o mês  $t$  na estação meteorológica situada no distrito  $i$  ( $i = 1, \dots, 18$ ).

A análise realizada à série final, permitiu que o índice de precipitação é caracterizado por uma periodicidade de 12 meses bastante acentuada não apresentando tendência. Deste modo, tem-se a garantia de que a perda de informação estatística proveniente da agregação dos valores da pluviosidade nas várias estações numa única série, é desprezável.



## INSTRUÇÕES AOS AUTORES

Os autores que desejem submeter um artigo à Investigação Operacional devem enviar três cópias desse trabalho para:

Prof. Joaquim J. Júdice  
Departamento de Matemática  
Universidade de Coimbra  
3000 Coimbra, Portugal

Os artigos devem ser escritos em Português ou Inglês. A primeira página deve conter a seguinte informação:

- Título do artigo
- Autor(es) e instituição(ões) a que pertence(em)
- Abstract (em inglês)
- Resumo
- Keywords (em inglês)
- Título abreviado

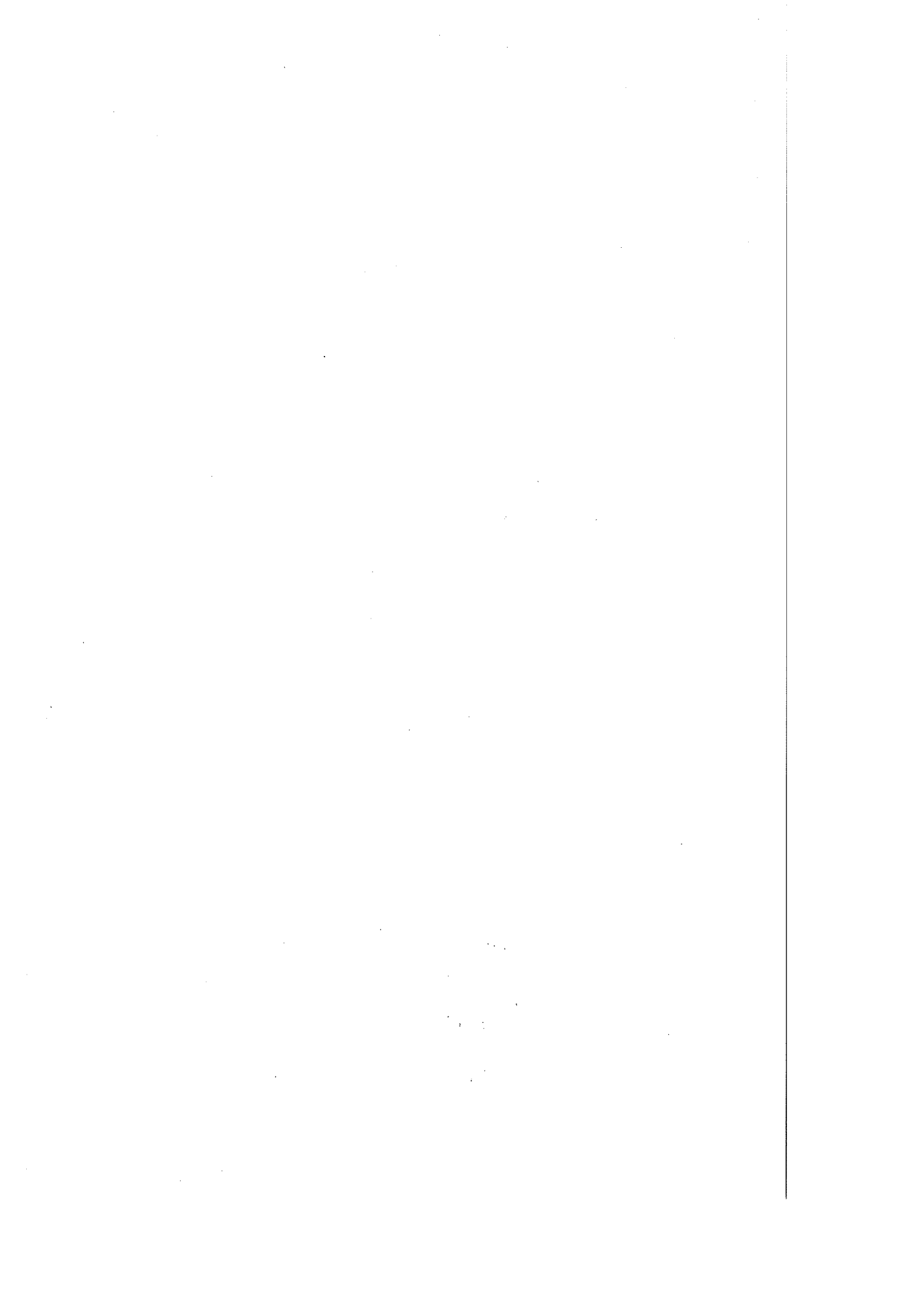
As figuras devem aparecer em separado de modo a poderem ser reduzidas e fotocopiadas. As referências devem ser numeradas consecutivamente e aparecer por ordem alfabética de acordo com os seguintes formatos:

Artigos: autor(es), título, título e número da revista (livro com indicação dos editores), ano, páginas.

Livros: autor(es), título, editorial, local de edição, ano.







**Fotografia, Montagem  
Impressão e Acabamentos**  
Tip.Nocamil  
COIMBRA

## ÍNDICE

A. P. Póvoa, S. Macchietto, Design of multipurpose batch plants with operational pre-conditions.....	113
I. Georgiev, R. Kaltinska, V. Videv, D. Guirguinov, Optimization of quantitative relationship in animal science .....	137
S. Mititelu, I. M. Stancu-Minasian, Optimality and algorithm for generalized invex Chebyshev problem .....	151
J. C. Brandão, Descrição de um novo algoritmo para o problema de escalonamento e roteamento de veículos e análise comparativa do seu desempenho.....	163
C. Bana e Costa e A. C. Vitorino, Construção multicritério da "matriz de custos" de um modelo de afectação para gestão de stands de aeronaves.....	179
M. H. Nunes, Impacto dos efeitos de calendário nas vendas de gasolina ...	201



Associação Portuguesa para o Desenvolvimento  
da Investigação Operacional

CÉSUR - Instituto Superior Técnico - Avenida Rovisco Pais  
1000 Lisboa - Telef. 80 74 55