

INVESTIGAÇÃO OPERACIONAL

Dezembro 1994

Número 2

Volume 14

Publicação Científica da



Associação Portuguesa para o Desenvolvimento
da Investigação Operacional

INVESTIGAÇÃO OPERACIONAL

Volume 14 - nº 2 - Dezembro 1994

Publicação semestral

Editor Principal: Joaquim J. Júdice
Universidade de Coimbra

Comissão Editorial

M. Teresa Almeida
Inst. Sup. Economia e Gestão

Laureano Escudero
IBM, Espanha

J. Pinto Paixão
Univ. de Lisboa

Jaime Barceló
Univ. de Barcelona

J. Soeiro Ferreira
Univ. do Porto

M. Vaz Pato
Inst. Sup. Economia e Gestão

Paulo Barcia
Univ. Nova de Lisboa

J. Fernando Gonçalves
Univ. do Porto

Celso Ribeiro
Univ. Católica, Rio Janeiro

Isabel Branco
Univ. de Lisboa

Clóvis Gonzaga
Univ. Fed., Rio Janeiro

A. Guimarães Rodrigues
Univ. do Minho

António Câmara
Univ. Nova de Lisboa

Luís Gouveia
Univ. de Lisboa

Mário S. Rosa
Univ. de Coimbra

C. Bana e Costa
Inst. Superior Técnico

Rui C. Guimarães
Univ. do Porto

J. Pinho de Sousa
Univ. do Porto

M. Eugénia Captivo
Univ. de Lisboa

J. Assis Lopes
Inst. Superior Técnico

Reinaldo Sousa
Univ. Católica, Rio Janeiro

Jorge O. Cerdeira
Inst. Sup. de Agronomia

N. Maculan
Univ. Fed., Rio Janeiro

L. Valadares Tavares
Inst. Superior Técnico

João Clímaco
Univ. de Coimbra

Ernesto Q. Martins
Univ. de Coimbra

Isabel H. Themido
Inst. Superior Técnico

J. Dias Coelho
Univ. Nova de Lisboa

Vladimiro Miranda
Univ. do Porto

B. Calafate Vasconcelos
Univ. do Porto

J. Rodrigues Dias
Univ. de Évora

José M. Viegas
Inst. Superior Técnico

A Revista "INVESTIGAÇÃO OPERACIONAL" está registada na Secretaria de Estado da Comunicação Social sob o nº 108335.

Esta Revista é distribuída gratuitamente aos sócios da APDIO. As informações sobre inscrições na Associação, assim como a correspondência para a Revista devem ser enviadas para a sede da APDIO - Associação Portuguesa para o Desenvolvimento da Investigação Operacional - CESUR, Instituto Superior Técnico, Av. Rovisco Pais, 1000 Lisboa.

Este Volume foi subsidiado por :

Junta Nacional de Investigação Científica e Tecnológica (JNICT)

Fundação Calouste Gulbenkian

Para efeitos de dactilografia e composição, foram utilizados equipamentos gentilmente postos à disposição pelo CEAUL (DEIO - Faculdade de Ciências de Lisboa).

Assinatura: 5.000\$00

CONCEPÇÃO DE UMA "BOA" ALTERNATIVA DE LIGAÇÃO FERROVIÁRIA AO PORTO DE LISBOA: UMA APLICAÇÃO DA METODOLOGIA MULTICRITÉRIO DE APOIO À DECISÃO E À NEGOCIAÇÃO (Concepção multicritério de uma linha ferroviária)

Carlos A. Bana e Costa
Fernando Nunes da Silva
Instituto Superior Técnico, Dep. Eng. Civil / CESUR
Av. Rovisco Pais, 1000 Lisboa

Abstract

The construction of a new railway link to the port of Lisbon has been postponed many times, as a result of a conflict of different viewpoints held by various public stakeholders, namely between the municipality of Lisbon (CML) and the GNFL (Lisbon Railway Node Bureau), while the Portuguese Railway Company (CP) has assumed a more flexible attitude. Recently, the development of the urban plan for Alcântara (the zone of the city where the railway line links to the port) has presented an opportunity to try to dissolve the conflict, by creating a (potential) compromise solution that explicitly takes into account the different value systems of the stakeholders. This paper describes the multicriteria methodology followed by the planning team for the construction of a new "good" solution based on the study of the impacts of the existing alternatives. In particular, we describe the structuring phase of the study and the use of a disaggregation-aggregation approach in the evaluation phase.

Resumo

A nova ligação ferroviária ao porto de Lisboa tem vivido ao longo dos últimos anos numa situação de impasse provocada por um conflito de pontos de vista entre as entidades envolvidas. Nomeadamente, enquanto a Câmara Municipal de Lisboa (CML) considera muito graves os impactos urbanísticos das soluções propostas pelo Gabinete do Nó Ferroviário de Lisboa (GNFL), este tem por sua vez mostrado fortes reservas face aos custos das soluções alternativas avançadas pela CML. Entretanto, os estudos relativos ao Plano de Urbanização do Vale de Alcântara vieram criar condições para a concepção de uma nova alternativa de consenso, levando em conta os sistemas de valores dos vários intervenientes. Neste artigo apresenta-se a metodologia multicritério seguida pela equipa do plano para construir uma "boa" solução a partir do estudo dos impactos das alternativas existentes. Em particular, descrevem-se a fase de estruturação do problema e a utilização de uma abordagem do tipo desagregação-agregação na fase de avaliação.

Keywords

Multicriteria analysis, negotiation support, disaggregation/aggregation.

1. Descrição do problema e caracterização do contexto decisório

A ligação ferroviária ao porto de Lisboa na zona de Alcântara processa-se actualmente através de um ramal que atravessa de nível três vias estruturantes da cidade de Lisboa, a saber, a Av. 24 de Julho e o sistema formado pelas Av. da Índia e Av. de Brasília, para além de interferir com o funcionamento da rotunda de Alcântara, principal nó rodoviário da zona, onde circulam mais de 3000 veículos na hora de ponta. Este atravessamento de nível impede uma eficaz exploração do transporte ferroviário no serviço ao porto, já que obriga à realização deste

serviço em período nocturno ou em horas mortas do fim-de-semana, a fim de que o corte das ligações rodoviárias tenha o menor impacte possível na circulação automóvel. Tal implica ainda que a formação de comboios se processe na frente ribeirinha do Tejo, junto à zona da FIL, com o consequente impacte negativo no aproveitamento desse espaço para fins de recreio e lazer da população.

Ao longo da última década têm sido formuladas várias soluções técnicas para resolver este problema, quer por parte da entidade responsável pelo planeamento e execução das obras de infraestrutura ferroviária na região de Lisboa (o Gabinete do Nó Ferroviário de Lisboa - GNFL), quer por parte do próprio município (CML) preocupado em que as soluções ferroviárias tenham o menor impacte possível no tecido urbano da zona. Chegou-se assim a uma situação em que existem nove soluções tecnicamente viáveis para resolver o problema do acesso ferroviário ao porto de Lisboa na zona de Alcântara (ver figuras 1a, 1b e 1c). Duas propostas são da responsabilidade do GNFL e outras três da CML. Cada um destes dois grupos de soluções alternativas reflecte as principais preocupações dos seus proponentes, relegando para segundo plano os pontos de vista dos outros. Assim, enquanto o GNFL revela uma clara intenção de privilegiar os aspectos técnicos associados à complexidade das obras a executar e ao custo da construção da nova infraestrutura, a CML privilegia os aspectos de impacte urbanístico e ambiental da nova linha ferroviária, não considerando como relevante o custo da sua construção. Inicialmente, antes da criação do GNFL, a CP, enquanto empresa exploradora do serviço de transporte, ciente da indispensabilidade do apoio - ou, pelo menos, a não oposição - do município, tinha já apresentado quatro outras alternativas, desenvolvidas pela PROFABRIL, que procuravam, em níveis diferentes, um certo compromisso com a CML. Também nessa altura se goraram as negociações.

Assim, o ambiente em que se desenvolve o processo de tomada de decisão tem sido caracterizado pela defesa intransigente do sistema de valores de cada interveniente, e, conseqüentemente, por um evidente impasse na obtenção de uma solução para o problema, pois que nenhuma entidade pode decidir unilateralmente. Com efeito, não só qualquer projecto que utilize uma parcela do espaço público disponível necessita do aval da CML - entidade a quem compete a gestão desse espaço, e conseqüentemente o licenciamento do seu uso - como qualquer solução tem de obter o acordo do GNFL - entidade financiadora - e da CP - preocupada em que a exploração ferroviária seja não só viável como economicamente rentável.

A realização do Plano de Urbanização do Vale de Alcântara, encomendado pela CML a uma equipa de projectistas de que o CESUR assegura a componente de transportes, veio entretanto permitir equacionar o problema em novos moldes. Na verdade, partindo das propostas fortemente contrastadas de cada um dos intervenientes CML e GNFL, foi possível desenvolver, com o recurso a uma metodologia multicritério, uma nova solução (ver figura 1d) que, não sendo a "óptima" para cada actor de per si, reúne condições para ser aceite por todos os intervenientes como uma "boa" solução de compromisso.

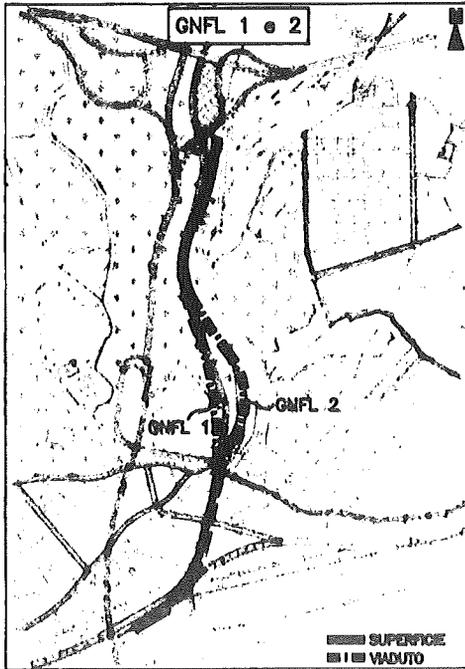


FIGURA 1a

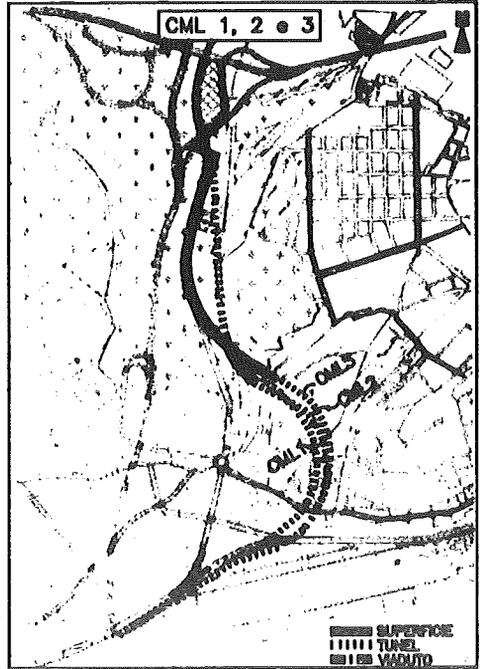


FIGURA 1b

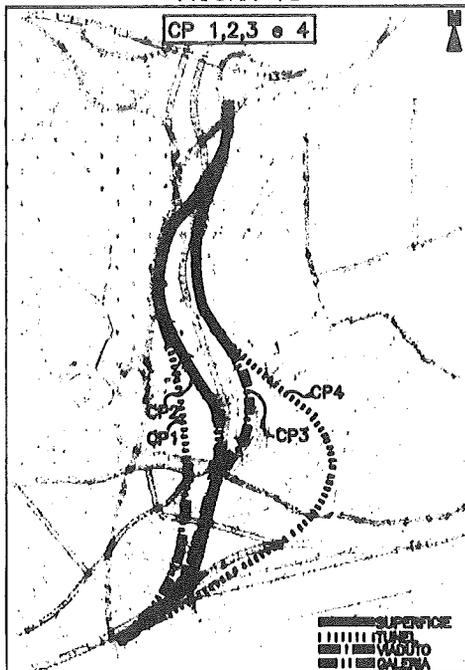


FIGURA 1c

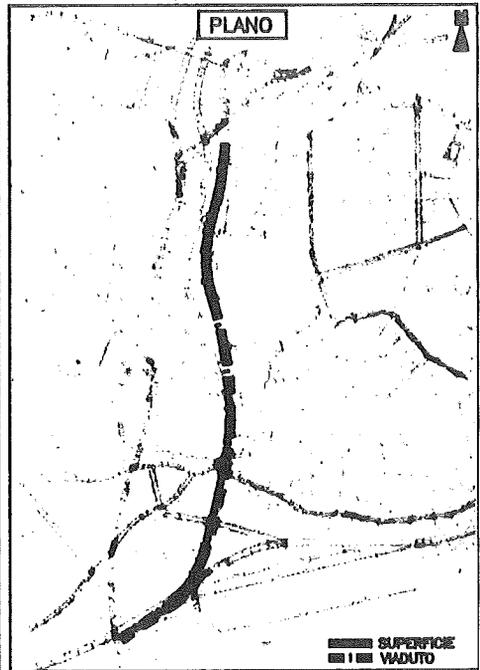


FIGURA 1d

2. Fase de estruturação

2.1. Família de pontos de vista fundamentais

Como deve ser em qualquer actividade de apoio à avaliação e/ou à negociação (cf. [Bana e Costa, 1992a]), o estudo desenvolvido pelo CESUR é suportado em modelos formais (por oposição a "informal") tendo em vista a elaboração de *recomendações* que respondam o mais claramente possível às questões que se colocam aos vários intervenientes no processo. A equipa de estudo, para compreender a complexidade da situação em que foi chamada a intervir e lançar as bases de orientação da sua actividade em cada estado de avanço do trabalho - *a problemática do apoio à decisão ou problemática técnica* (cf. [Bana e Costa, 1993] - começou por analisar e caracterizar dois sistemas interligados, a saber, o *sistema das acções* (aqui, soluções alternativas) e o *sistema dos actores*.

Em relação à sua inserção no processo de decisão, importa notar que a equipa do PU do Vale de Alcântara estava impedida, pelo cliente, de contactar com os diferentes intervenientes durante a elaboração do estudo. De facto, segundo a solicitação da CML, deveria este ser considerado um estudo preparatório de uma fase de negociação posterior, o que não significa de todo que os sistemas de valores dos actores não tivessem que estar presentes no desenvolvimento dos trabalhos. Acrescente-se, ainda, que da análise do sistema de actores, resultou claro que os conflitos que se procuram ultrapassar com o desenvolvimento de uma nova solução de compromisso residem fundamentalmente nos valores subjacentes às alternativas (duas mais três) da responsabilidade do GNFL e da CML.

Nestas circunstâncias, partiu-se da análise destas 5 alternativas (GNFL1, GNFL2, CML1, CML2, CML3) com vista a detectar (indirectamente) os principais pontos de vista privilegiados e negligenciados pelos respectivos proponentes (ver quadro I). Depois, para estabelecer uma primeira base de negociação, a equipa de estudo definiu uma *família* de nove *pontos de vista fundamentais* que se propõe ser aceite consensualmente por todos os intervenientes, *independentemente* da maior ou menor relevância ("importância") que cada um destes lhes atribua, isto é, sem impor qualquer restrição às preferências "inter-pontos de vista".

Os nove pontos de vista fundamentais podem ser agrupados em quatro grandes *áreas de interesse*, a saber: *Impacte Ambiental e Urbanístico*, *Integração no Sistema de Transportes*, *Complexidade Construtiva* e *Encargos com a Construção* (ver quadro II). Das quatro Áreas de Interesse, apenas a segunda - *integração no sistema de transportes* - não se encontra suficientemente explícita nas alternativas propostas pelos actores, mas foi considerada de interesse fundamental pela equipa do Plano, preocupada, como é evidente, não só com os aspectos de serviço do porto mas também com a qualidade global do serviço de transporte prestado, tanto mais que o ramal de Alcântara passou entretanto a assegurar um serviço de passageiros, e o metropolitano de Lisboa projecta a construção de uma linha para a zona. Do mesmo modo, a equipa do Plano considerou fundamental o ponto de vista *possibilidade de faseamento da construção*, atendendo à necessidade de manter o ramal de Alcântara em

impactes das soluções alternativas em termos de PV_j - por isso chamamos a I_j um *descriptor* de impactes (cf. [Bana e Costa, 1992b]), noção que se aproxima da de *attribute* da terminologia da Teoria de Utilidade Multi-atributos (*Multiattribute Utility Theory*, [Keeney e Raiffa, 1976], [Keeney, 1992]). Um descriptor pode ser *quantitativo* ou *qualitativo*, *discreto* ou *contínuo*, *directo*, *indirecto* ou *construído*, e nada garante a sua unicidade, isto é, um mesmo ponto de vista pode ser descrito por vários indicadores diferentes (ver, a este propósito, [Edwards e Newman, 1982] e [Bana e Costa, 1992b]). Os cuidados a ter na operacionalização dos pontos de vista resultam então ainda mais agravados quando os descritores são escolhidos e definidos sem a intervenção/validação dos actores, como foi no caso em estudo, dada a condição de não interacção imposta.

Na construção dos descritores I_1 a I_9 dos pontos de vista PV_1 a PV_9 (quadro III) tivemos presente a necessidade de encontrar uma relação estreita e facilmente perceptível - e portanto potencialmente aceite pelos diferentes actores - entre cada ponto de vista e a forma de avaliar a sua satisfação, bem como a facilidade da sua quantificação ou da definição qualitativa da escala de impactes que lhe está associada. Nesta definição dos descritores, a equipa do Plano apoiou-se ainda em estudos idênticos onde foi possível estabelecer uma interacção entre os agentes de decisão e a equipa de estudo (ver [Mac Crimmon, 1969], [Roy e Hugonnard, 1982], [Bovy, 1983], [Simos, 1990], entre outros).

Quadro III. Descritores dos pontos de vista fundamentais

Pontos de vista	Descritores de impactes
PV_1	I_1 - Comprimento em viaduto, aterro ou vala aberta em áreas expostas (metros)
PV_2	I_2 - Comprimento do atravessamento à superfície em viaduto ou em vala aberta, em áreas consolidadas (metros)
PV_3	I_3 - Número de interfaces possíveis com transportes colectivos
PV_4	I_4 - Proximidade das estações aos principais geradores de tráfego existentes ou previstos (escala qualitativa)
PV_5	I_5 - Facilidade de inserção do ramal de Alcântara na zona portuária (escala qualitativa)
PV_6	I_6 - Comprimento do traçado em túnel ou em vala aberta em áreas geologicamente instáveis (metros)
PV_7	I_7 - Sobreposição do traçado com outras infraestruturas (escala qualitativa)
PV_8	I_8 - Possibilidade de fasear a construção e implicações com o ramal de Alcântara (escala qualitativa)
PV_9	I_9 - Custo total da construção da linha (milhões de contos)

I_1, I_2, I_3, I_6 e I_9 são descritores *quantitativos*, *indirectos* os dois primeiros e *directos* os restantes, *discreto* I_3 e *contínuos* os outros quatro. Por sua vez, os descritores I_4, I_5, I_7 e I_8 são *qualitativos* e *construídos* a partir de indicadores de base, e cada um deles é um conjunto discreto de níveis de impacte *plausíveis* segundo o *PV* respectivo (ver tabelas seguintes, em que N1 designa o pior nível plausível).

exploração durante a construção da nova linha, o que vem ao encontro do sistema de valores defendidos pela CP.

Quadro I. Pontos de vista privilegiados e negligenciados pela CML e pelo GNFL

<u>Caracterização dos sistemas de valores dos actores GNFL e CML:</u>	
⊕	Pontos de vista privilegiados ...
⊖	Pontos de vista negligenciados ...
nas soluções que propõem:	
GNFL:	
⊕	Conflitualidade com infraestruturas existentes ou previstas
⊕	Complexidade das obras de arte a realizar
⊕	Custos de construção
⊖	Integração paisagística
⊖	Efeito de corte no tecido urbano
⊖	Possibilidade de faseamento da construção
CML:	
⊕	Integração paisagística
⊕	Efeito de corte no tecido urbano
⊕	Ligação ao terminal portuário
⊕	Conflitualidade com infraestruturas existentes ou previstas
⊖	Complexidade das obras de arte a realizar
⊖	Custos de construção
⊖	Possibilidade de faseamento da construção

Quadro II. Família de pontos de vista fundamentais

Áreas de Interesse	Pontos de Vista Fundamentais
Impacte ambiental e urbanístico	PV_1 - Integração paisagística PV_2 - Efeito de corte no tecido urbano
Integração no sistema de transportes	PV_3 - Conexão com outros modos de transporte PV_4 - Centralidade urbana das estações PV_5 - Ligação ao terminal portuário
Complexidade construtiva	PV_6 - Complexidade das obras de arte a realizar PV_7 - Conflitualidade com infraestruturas existentes ou previstas PV_8 - Possibilidade de faseamento da construção
Encargos com a construção	PV_9 - Custos de construção

2.2. Operacionalização dos pontos de vista fundamentais

A primeira condição a impôr para que um ponto de vista fundamental PV_j seja operacional, para a construção de um modelo de avaliação, é que lhe seja associado um conjunto I_j de níveis de impacte bem definidos e ordenados entre o melhor e pior níveis. É com base em I_j que será posteriormente possível *descrever*, de forma não ambígua e o mais objectiva possível, os

Descritor (I_4) do ponto de vista (PV_4) "centralidade urbana das estações":	
Níveis	Descrição
N 5	Todas as estações têm bons acessos rodoviários e pedonais, e situam-se em áreas centrais
N 4	A maioria das estações tem bons acessos, e situam-se em áreas centrais
N 3	Os acessos são aceitáveis, a localização nem sempre é central
N 2	Os acessos são aceitáveis, a localização não é central
N 1	Maus acessos e localização não central

Descritor (I_5) do ponto de vista (PV_5) "ligação ao terminal portuário":	
Níveis	Descrição
N 6	Acesso directo sem deslocação do actual feixe de linhas, e sem interferência no nó de Alcântara-Mar
N 5	Acesso directo com reformulação do feixe de linhas, e sem interferência no nó de Alcântara-Mar
N 4	Acesso indirecto sem deslocação do feixe de linhas, e sem interferência no nó de Alcântara-Mar
N 3	Acesso indirecto com reformulação do feixe de linhas, e sem interferência no nó de Alcântara-Mar
N 2	Acesso indirecto sem deslocação do feixe de linhas, e com interferência no nó de Alcântara-Mar
N 1	Acesso indirecto com reformulação do feixe de linhas, e com interferência no nó de Alcântara-Mar

Descritor (I_7) do ponto de vista (PV_7) "conflitualidade com outras infraestruturas existentes":	
Níveis	Descrição
N 5	Não interfere com nenhuma infraestrutura existente ou prevista
N 4	Interfere com o ramal de Alcântara ou (exclusivo) com o acesso ao porto, e não interfere com a Av. de Ceuta
N 3	Interfere com o ramal de Alcântara e o acesso ao porto, e não interfere com a Av. de Ceuta
N 2	Interfere com o ramal de Alcântara e com a Av. de Ceuta, ou (exclusivo) com o acesso ao porto e a Av. de Ceuta
N 1	Interfere com todas as infraestruturas

Descritor (I_8) do ponto de vista (PV_8) "faseamento da construção":	
Níveis	Descrição
N5	É possível fasear a obra em todos os seus troços: Campolide - Alcântara-Terra, Alcântara-Terra - Alcântara-Mar e Alcântara-Mar - Alcântara-Porto, mantendo a funcionar o ramal de Alcântara
N4	Só permite duas fases (Campolide-Alc.-Terra, Alc.-Terra-porto), mantendo a funcionar o ramal de Alcântara
N3	Não permite fases, mas mantém o ramal de Alcântara em funcionamento
N2	Permite duas fases, mas não mantém o ramal de Alcântara a funcionar
N1	Não permite fases, nem mantém o ramal de Alcântara a funcionar

2.3. Perfis de impactes das alternativas

Uma vez definidos os descritores, foi possível determinar para cada uma das alternativas propostas pelos diferentes actores (GNFL, CML e CP) os respectivos impactes segundo os nove pontos de vista considerados. Os resultados da análise efectuada apresentam-se no quadro IV, em que cada coluna representa o *perfil de impactes* da alternativa respectiva. Nos casos em que a equipa do Plano hesitou entre dois níveis consecutivos, o impacte foi considerado intermédio entre os níveis em questão. Os impactes quantitativos estão evidentemente expressos nas unidades referidas no quadro III e os níveis de impacte discretos são os anteriormente descritos.

Note-se no entanto, que nada pode ser directamente concluído a respeito do *valor intrínseco* das propostas, e isto porque um impacte pode ser *melhor* (ou *pior*) do que outro e serem ambos *bons*, ou ambos *maus* ou um bom e o outro mau. Esta distinção entre juízos *comparativos* (ou *relativos*) e juízos *absolutos* (ou *intrínsecos*), de há muito bem conhecida da Psicologia Cognitiva (cf. [Blumenthal, 1977]) e da Filosofia do Valor (cf. [von Wright, 1963]) não tem merecido a devida atenção na literatura da Teoria da Decisão, quase sempre focalizada sobre o problema da escolha (relativa) da melhor acção sem tratar de saber se ela é suficientemente boa (cf. [Bana e Costa, 1993]).

Quadro IV. Tabela de impactes

	GNFL 1	GNFL 2	CML 1	CML 2	CML 3	CP 1	CP 2	CP 3	CP 4
$i_1(.)$	1500	1440	495	0	215	450	450	1630	0
$i_2(.)$	1200	1020	400	260	300	580	700	1120	0
$i_3(.)$	2	2	1	1	1	1	2	2	1
$i_4(.)$	N4	N4	N3/N2	N3/N2	N3/N2	N3	N4	N5	N3
$i_5(.)$	N3	N3	N4	N6	N6	N1	N1	N1	N5
$i_6(.)$	156	156	750	1505	975	566	0	0	1170
$i_7(.)$	N5	N4	N5	N4	N5	N4	N2	N2	N5
$i_8(.)$	N3	N1	N3	N3	N3	N3	N3	N2	N3
$i_9(.)$	2.29	2.37	3.96	5.47	4.76	6.53	6.78	3.22	5.70

Um conceito poderoso para tornar operacional as noções absolutas de *bom* e *mau* é o de *nível neutro de impacte* sobre um dado ponto de vista, uma vez que o seu conhecimento torna possível distinguir entre *impactes atractivos* ou *positivos* (os que são melhores do que o nível neutro) e *impactes repulsivos* ou *negativos* (os que são piores do que o nível neutro). Como diz Vansnick [1989, p. 636] *um nível neutro é um impacte considerado nem favorável nem desfavorável em termos de um ponto de vista* e corresponde por definição ao zero de uma escala bipolar de valor (cf. [Rescher, 1969], p. 64).

Para a família de pontos de vista fundamentais do quadro II, a equipa do Plano definiu os níveis neutros de impacte, apresentados no quadro V a par dos melhores e piores níveis possíveis ou plausíveis. Note-se que o nível neutro segundo PV_3 coincide com o pior (1 interface) e que segundo PV_4 o nível neutro é intermédio entre os níveis N3 e N2.

Os nove níveis melhores (respectivamente, piores) definem a chamada *alternativa ideal* (respectivamente, *anti-ideal*). Por sua vez, os nove níveis neutros definem uma alternativa fictícia (não necessariamente realista) chamada *robot neutro* [Bana e Costa, 1992b] que tem a particularidade de ser *globalmente neutra qualquer que seja a importância relativa atribuída aos pontos de vista* (desde que estes sejam preferencialmente independentes entre si). Com referência ao robot neutro, os perfis de impactes das várias propostas podem ser representados graficamente por forma a evidenciar os seus impactes negativos e positivos (figura 2).

Quadro V. Níveis de impacte piores, neutros e melhores

Ponto de vista fundamental	Pior nível de impacte	Nível neutro de impacte	Melhor nível de impacte
PV_1	1630 metros	450 metros	0 metros
PV_2	1200 metros	400 metros	0 metros
PV_3	1 interface	1 interface	2 interfaces
PV_4	N1	N3/N2	N5
PV_5	N1	N3	N6
PV_6	1505 metros	156 metros	0 metros
PV_7	N1	N3	N5
PV_8	N1	N3	N5
PV_9	6.79 milhões de contos	3.22 milhões de contos	2.29 milhões de contos

Tendo presentes os pontos de vista fundamentais, o robot neutro e os perfis de impactes das propostas da CML, do GNFL e da CP, a equipa do Plano construiu uma nova alternativa, que se deseja de compromisso, tecnicamente viável e realista, com a qual se procurou corrigir os impactes mais negativos, de cada um dos três grupos de propostas, em termos dos pontos de vista dos restantes actores, e maximizar a satisfação dos pontos de vista considerados mais relevantes por todos eles. Esta nova alternativa, a seguir designada simplesmente por "PLANO"

(ver figura 1d) e cujo perfil de impactes é também representado na figura 2, foi posteriormente confrontada com as restantes num processo multicritério de avaliação.

3. Fase de avaliação

3.1. Avaliação das alternativas segundo cada ponto de vista fundamental

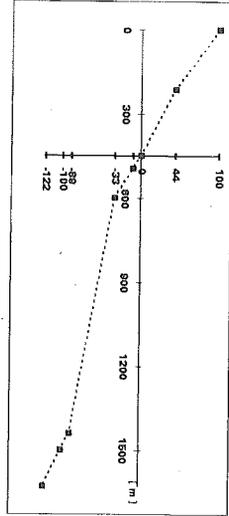
Os impactes da tabela 1 permitem apenas *ordenar* as propostas por cada um dos vários pontos de vista, não oferecendo uma *medida* nem da *diferença de valor* ou *atractividade* entre duas quaisquer delas, nem do *valor intrínseco* de cada uma. Para avaliar as propostas, em termos cardinais, por cada ponto de vista (PV_j , $j = 1, \dots, 9$) tomado isoladamente, construiu-se uma *função-critério* v_j com base em juízos absolutos sobre a diferença de atractividade entre impactes formulados pela equipa do Plano (representada por um de nós, Nunes da Silva). Com excepção dos pontos de vista PV_3 (cujo descritor só tem dois níveis) e dos pontos de vista PV_6 (Complexidade) e PV_9 (Encargos) - cujas funções foram tomadas lineares sobre os descritores respectivos, por estes serem directos -, o método utilizado para a construção das *escalas de valor local* v_j foi o *MACBETH - Measuring Attractiveness by a Categorical Based Evaluation Technique* (de que o outro de nós, Bana e Costa, é co-autor) e cuja descrição remetemos para [Bana e Costa e Vansnick, 1994]. Nas figuras 3, as escalas v_j propostas pelo *MACBETH* foram transformadas de modo a que os níveis neutros tenham sempre valor 0 ($v_j(\text{neutro}_j) = 0$) e os níveis melhores valor 100 ($v_j(\text{melhor}_j) = 100$). Desta forma, a níveis de impacte atractivos (respectivamente, repulsivos) correspondem sempre valores positivos (respectivamente, negativos) segundo cada (função-)critério v_j ($j = 1, \dots, 9$).

Evidentemente, o valor local de cada proposta a segundo cada ponto de vista PV_j (ver quadro VI) é dado pelo valor $v_j(i_j(a))$ do seu impacte $i_j(a)$. Note-se que $v_j(i_j(a))$ é uma *medida* de valor intrínseco de a , uma vez que está referenciado ao valor do nível neutro e ao valor do melhor nível segundo PV_j . Recorde-se ainda que v_j é uma *escala de intervalos*, pelo que só tem sentido quocientes entre diferenças de valor, e nunca quocientes directamente entre dois valores.

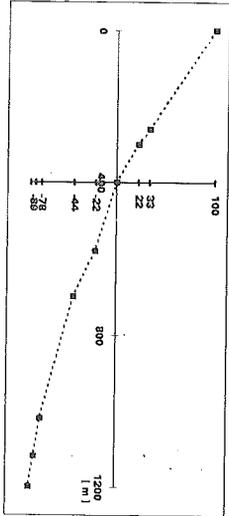
Quadro VI. Matriz multicritério

	GNFL 1	GNFL 2	CML 1	CML 2	CML 3	CP 1	CP 2	CP 3	CP 4	Plano
$v_1(\cdot)$	-100	-89	-10	100	44	0	0	-122	100	-33
$v_2(\cdot)$	-89	-78	0	33	22	-22	-44	-88	100	-26
$v_3(\cdot)$	100	100	0	0	0	0	100	100	0	100
$v_4(\cdot)$	68	68	0	0	0	23	68	100	23	100
$v_5(\cdot)$	0	0	33	100	100	-67	-67	-67	67	0
$v_6(\cdot)$	0	0	-481	-965	-625	-363	100	100	-750	100
$v_7(\cdot)$	100	47	100	47	100	47	-47	-47	100	100
$v_8(\cdot)$	0	-155	0	0	0	0	0	-55	0	100
$v_9(\cdot)$	100	91	-80	-242	-166	-356	-384	0	-267	51

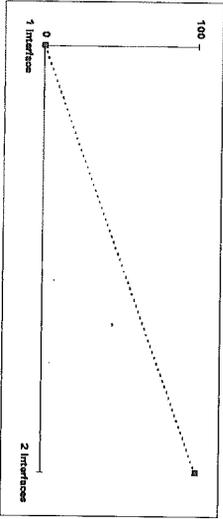
PV1 - INTEGRAÇÃO PASCALISTICA



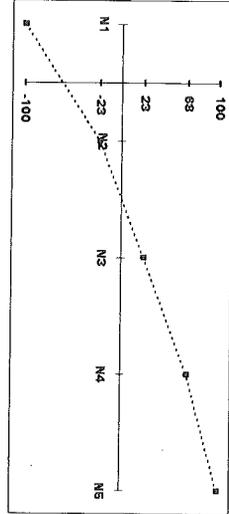
PV2 - EFEITO DE CORTE (DO TECIDO URBANO)



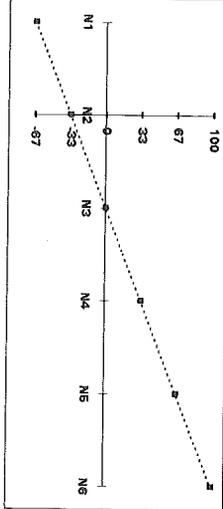
PV3 - CONEXÃO COM OUTROS MODOS DE TRANSPORTE



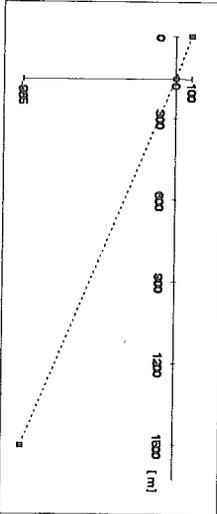
PV4 - CENTRALIDADE URBANA DAS ESTAÇÕES



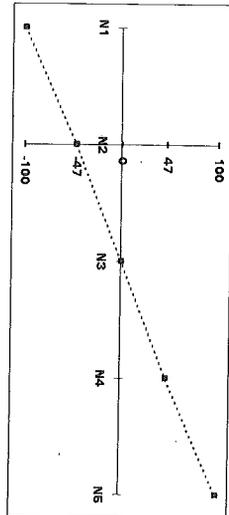
PV5 - LIGAÇÃO AO TERMINAL PORTUÁRIO



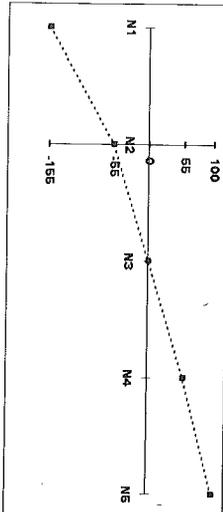
PV6 - COMPLEXIDADE DAS OBRAS DE ARTE A REALIZAR



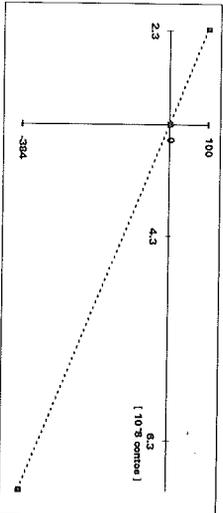
PV7 - CONFLITUALIDADE COM INFRAESTRUTURAS EXISTENTES OU PREVISITAS



PV8 - FASEAMENTO DA CONSTRUÇÃO



PV9 - ENCARGOS COM A CONSTRUÇÃO



3.2. Modelo de avaliação global das alternativas

Para calcular o valor global $V(a)$ de cada proposta a , adoptou-se um modelo de agregação aditiva dos valores locais v_j ($j = 1, \dots, 9$), matematicamente:

$$V(a) = \sum_{j=1}^9 p_j \cdot v_j(i_j(a)), \text{ com:}$$

$$V(\text{Ideal}) = 100$$

$$V(\text{Robot Neutro}) = 0$$

$$v_j(\text{melhor}_j) = 100, \quad j = 1, \dots, 9$$

$$v_j(\text{neutro}_j) = 0, \quad j = 1, \dots, 9,$$

donde: $\sum_{j=1}^9 p_j = 1$ e $p_j > 0$ ($j = 1, \dots, 9$),

em que p_j é uma constante de escala (scaling constant, [Weber e Borcherdig, 1993]) do critério v_j (vulgarmente designado por "peso"). Na grande maioria das aplicações práticas deste modelo, começa-se por determinar directamente os factores de escala p_j aplicando um procedimento de ponderação, por exemplo, a *tradeoff procedure* [Keeney e Raiffa, 1976] ou o método *swing weighting* [von Winterfeldt e Edwards, 1986]. No entanto, as características da situação decisória em estudo não recomendam seguir-se esta via, pois que, tendo os vários intervenientes certamente preferências inter-critérios diferentes, seria irrealista considerar que um qualquer sistema de pesos particular poderia reunir consenso.

3.3. Aplicação de uma abordagem do tipo desagregação-agregação

Não sendo possível interrogar directamente os intervenientes para determinar os parâmetros do modelo V , seguiu-se uma via diferente da tradicional, com o duplo objectivo de encontrar:

1. Uma função de valor (global) V compatível com a ordenação holística das propostas da CML e do GNFL que é preferida pela CML:

$$\text{CML2} \rightarrow \text{CML3} \rightarrow \text{CML1} \rightarrow \text{GNFL2} \rightarrow \text{GNFL1},$$

isto é, determinar V tal que:

$$V(\text{CML2}) > V(\text{CML3}) > V(\text{CML1}) > V(\text{GNFL2}) > V(\text{GNFL1});$$

2. uma função de valor (global) V compatível com a ordenação holística das propostas da CML e do GNFL que é preferida pelo GNFL:

$$\text{GNFL1} \rightarrow \text{GNFL2} \rightarrow \text{CML1} \rightarrow \text{CML3} \rightarrow \text{CML2},$$

isto é, determinar V tal que:

$$V(\text{GNFL1}) > V(\text{GNFL2}) > V(\text{CML1}) > V(\text{CML3}) > V(\text{CML2}).$$

A definição das ordenações acima apresentadas, informação de base para a implementação desta abordagem, não foi difícil. Com efeito, é claro que, para o GNFL, a alternativa que melhor satisfaz os seus pontos de vista é a GNFL1, dado ser aquela que não só tem menor custo como permite manter o ramal de Alcântara em exploração durante a sua construção. Inversamente, a "pior" alternativa será, ainda para o GNFL, a proposta CML2, pois não só

implica um maior custo de construção, como é aquela que apresenta maior complexidade construtiva. Pelo contrário esta é a alternativa privilegiada pela CML, já que minimiza os impactes ambientais e paisagísticos.

As alternativas propostas pela CP não foram incluídas nesta fase do estudo pois, como se referiu anteriormente, constituem já uma tentativa de compromisso com a posição da CML, e portanto não traduzem inequivocamente uma preferência clara por uma determinada *família* de pontos de vista fundamentais. Na verdade, como se pode observar na figura 1c, os traçados das propostas CP contemplam, não só soluções em túnel - de difícil execução mas de inegável menor impacte ambiental e urbanístico - como também soluções em viaduto ou vala aberta que, embora apresentando menores custos e sendo de menor dificuldade técnica de construção, têm todavia o inconveniente de revelarem maiores impactes negativos segundo os pontos de vista "integração paisagística" e "efeito de corte".

Tecnicamente, para alcançar o duplo-objectivo fixado, recorreu-se ao Sistema de Apoio à Decisão PREFCALC (cf. [Jacquet-Lagrèze, 1984]), que implementa uma abordagem do tipo *desagregação-agregação* (cf. [Jacquet-Lagrèze, 1979 e 1990]). A ideia subjacente é engenhosa: partir de juízos holísticos de valor global sobre um sub-conjunto de alternativas (no caso, uma ordenação de 5 das propostas) e encontrar os parâmetros do modelo para os quais a função V é compatível com (reproduz) esses juízos (ordenação) - *fase de desagregação* - e em seguida aplicar o modelo V assim encontrado para determinar os valores globais de todas as alternativas - *fase de agregação*. O cálculo de V é feito pelo método de regressão ordinal UTA I (cf. [Jacquet-Lagrèze e Siskos, 1982]). Na literatura, os casos descritos de aplicação desta metodologia (cf. [Jacquet-Lagrèze e Shakun, 1984], [Moscarola e Siskos, 1984]) deixam livres não só os valores para as constantes p_j mas também as funções-critérios v_j . No nosso caso, adaptámos o PREFCALC para determinar apenas os p_j ($j = 1, \dots, 9$), entrando directamente as funções v_j com *inputs*. Finalmente, note-se que o conjunto de soluções possíveis é um poliedro no espaço dos parâmetros desconhecidos. A solução oferecida pelo PREFCALC é a que maximiza a mínima diferença de valor global entre duas alternativas.

3.4. Interpretação dos resultados da aplicação do sistema PREFCALC

A aplicação da abordagem descrita no parágrafo anterior, para as ordenações da CML e do GNFL definidas no mesmo parágrafo, conduziu naturalmente a dois valores globais diferentes, $V_{GNFL}(a)$ e $V_{CML}(a)$, para cada proposta a (ver quadro VII), excepto obviamente para o robot neutro cujo valor global é sempre 0 (ver § 2.3 e § 3.2).

É oportuno recordar que a problemática deste estudo é a concepção de uma proposta de consenso, nomeadamente entre os intervenientes GNFL e CML de posições mais extremadas, tendo sido neste sentido que a equipa do Plano desenvolveu a sua proposta PLANO. Ora, o modelo multicritério construído permite definir formalmente o que entender por *proposta de consenso*, neste contexto: será qualquer proposta que seja *globalmente boa*, isto é, cujo valor global seja positivo - superior ao do robot neutro.

A análise do quadro VII mostra que *qualquer das 9 soluções iniciais está longe de ser globalmente boa (consensual), pois que nenhuma apresenta valores globais sempre positivos*. É por isso, afinal, que existe conflito: o quadro VII confirma que as propostas do GNFL são, naturalmente, boas para o GNFL, o mesmo se passando do lado da CML com as suas propostas, mas, desafortunadamente, o que é bom para um é mau para o outro interveniente. Por outro lado, no que se refere às propostas da CP, enquanto CP3 se aproxima das do GNFL mas sendo má para a CML, CP4 responde às preocupações da CML (tem até o melhor valor global na perspectiva CML) mas é nitidamente má na perspectiva GNFL. De CP1 e CP2 os números apontam para um consenso infelizmente pela negativa.

A proposta da equipa do PLANO é, finalmente, a que está mais próxima de ser consensual: é boa, até é a melhor, na perspectiva GNFL e pode considerar-se neutra na perspectiva CML.

Quadro VII. Valores globais das propostas para os sistemas de valores do GNFL e da CML

	GNFL 1	GNFL 2	CML 1	CML 2	CML 3	CP 1	CP 2	CP 3	CP 4	Plano	Robot Neutro
V_{GNFL}	67	46	-23	-64	-44	-95	-59	36	-64	77	0
V_{CML}	-48	-42	0	30	22	-30	-34	-58	68	-2	0

4. Conclusões

O estudo descrito neste artigo mostra as potencialidades das Metodologias Multicritérios, quando aplicadas em contextos decisionais complexos, para modelizar sistemas de preferência, para abrir caminho ao diálogo e à participação, para ajudar a elaborar, a justificar e/ou a transformar juízos de valor e, também, no apoio à construção de boas soluções para os problemas que se colocam no seio das organizações e em particular ao nível do sector público - talvez seja esta até a maior das suas virtudes.

No caso do problema da ligação ferroviária ao porto de Lisboa, o modelo de avaliação está concebido e implementado informaticamente, e portanto está pronto a ser utilizado quer como suporte a cada interveniente isoladamente, quer em eventuais futuras negociações. Mas também a equipa do Plano pode socorrer-se dele para fazer melhor. De facto, caso a equipa consiga alterar a sua proposta PLANO no sentido de melhorar um ou mais dos seus impactes menos bons, poderá gerar uma solução mais robusta do ponto de vista do consenso. Por exemplo, menos 200 m de nível de impacte em PV_1 e PV_2 , baixando de 600m para 400m, mesmo que implicasse um agravamento ligeiro dos encargos com a construção, por exemplo, mais 10% de impacte (um aumento de custo de 2,75 para 3 milhões de contos) e mantendo inalterados os níveis nos outros pontos de vista, resultaria numa solução, chamemos-lhe PLANOVO, a que o modelo de avaliação atribui os valores globais $V_{GNFL}(\text{PLANOVO}) = 69$ e $V_{CML}(\text{PLANOV}) = 6$, que continua a ser a melhor na perspectiva GNFL e passa a positiva na perspectiva CML.

Por fim, pode ser apontado com um ponto fraco da metodologia a opção pela construção de funções de valor com base em juízos de valor da própria equipa do Plano, sem intervenção dos

actores. De facto, o recurso a outras abordagens multicritérios, do tipo subordinação (*surclassement*, cf. [Roy e Bouyssou, 1993]) por exemplo, teria permitido contornar esse problema derivado da não interacção equipa de estudo - intervenientes, mas outros problemas surgiriam, nomeadamente os relativos à definição de limiares de veto, ou outros novos parâmetros, e maiores dificuldades de implementação. A opção que tomámos teve em conta os prós e os contras de cada abordagem disponível, no contexto decisório particular em questão. Entretanto, note-se que as funções de valor utilizados no modelo de agregação, e até o próprio modelo em si, são apenas hipóteses de trabalho no seio da via *construtivista* que defendemos ser a mais adequada seguir na actividade do apoio à decisão (cf. [Bana e Costa, 1994]). Além disso, a componente *descritivista* do modelo, traduzida na derivação de valores globais para as alternativas a partir de ordenações parciais, foi ela própria utilizada numa perspectiva puramente construtiva, enquanto hipótese de trabalho. Este mesmo tipo de argumentação pode ser utilizada para justificar a construção do *robot neutro* pela equipa de estudo, que também deve ser entendida como hipótese de trabalho a ser validada em fase posterior de negociação entre os vários intervenientes. De qualquer modo, o sistema concebido não é fechado: ele está plenamente aberto a alterações em qualquer das variáveis do modelo - a ser usado para encontrar respostas a dúvidas ou questões dos actores, incluindo a equipa do Plano, e como chave para abrir a porta à descoberta de novas soluções.

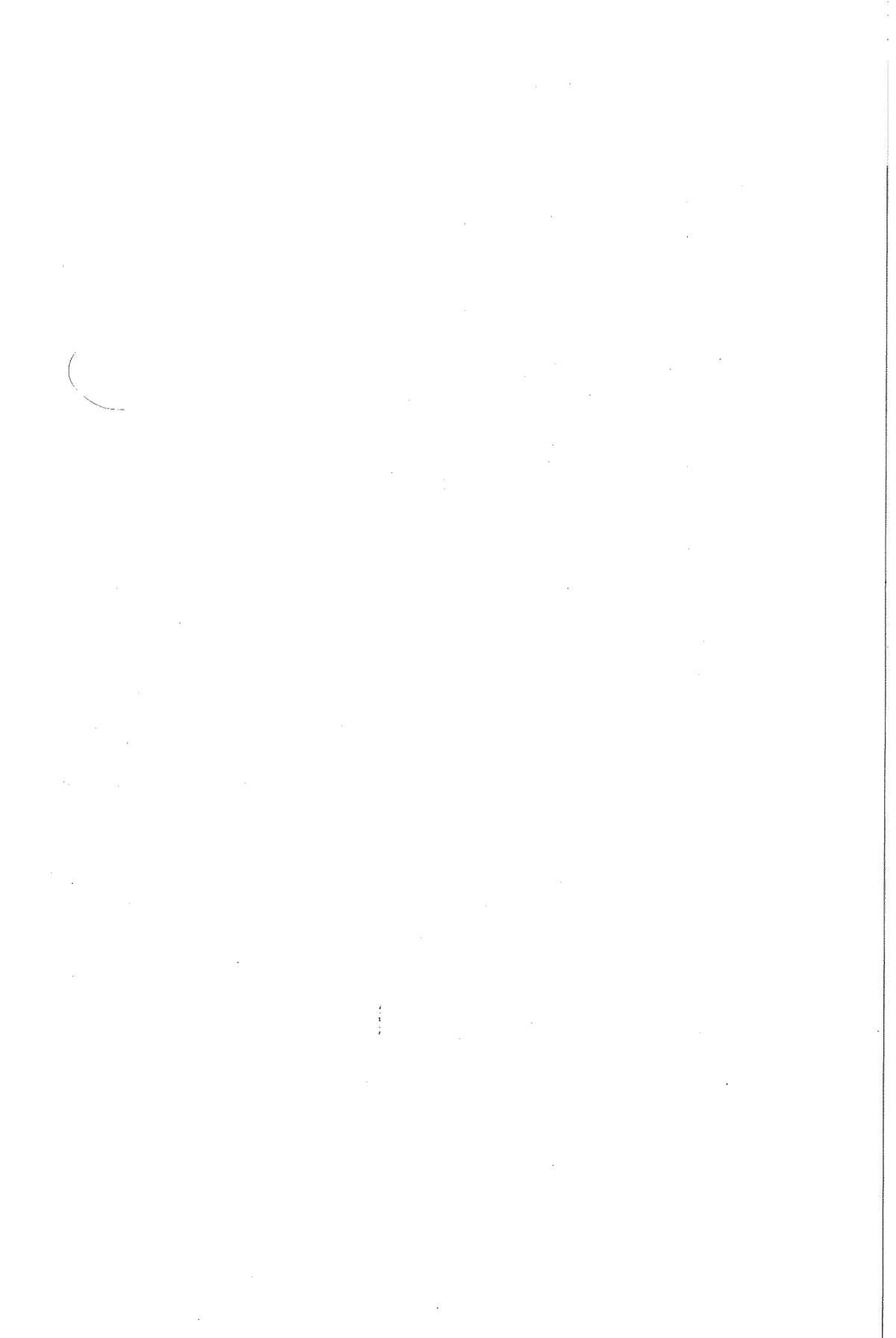
Ainda uma nota final relativa à não divulgação dos valores obtidos para as constantes de escala ("pesos"), seja para o modelo GNFL seja para o modelo CML. Lembre-se que, no quadro teórico de um modelo aditivo, os valores das constantes de escala dependem dos intervalos de escala arbitrados para as funções-critérios (ver, a propósito, [Weber e Borcherding, 1993]), não sendo pois os valores desses parâmetros directamente associáveis à noção intuitiva de importância dos pontos de vista fundamentais respectivos. Dito de outro modo, a divulgação dos pesos poderia levar a interpretações incorrectas sobre a importância relativa de cada ponto de vista para cada um dos actores.

Agradecimentos

Os autores agradecem a valiosa colaboração do Eng. Carlos Correia, bolseiro do CESUR e membro da equipa de estudo, na preparação do artigo e na produção das figuras. Uma palavra também de agradecimento e muito apreço, pelo cuidado posto por um revisor anónimo na análise crítica do artigo.

Referências

- [1] Bana e Costa, C.A. (1992a), Structuration, Construction et Exploitation d'un Modèle Multicritère d'Aide à la Décision, *Tese de Doutoramento em Engenharia de Sistemas, UTL, IST*, 1993.
- [2] Bana e Costa, C.A. (1992b), Absolute and relative evaluation problematiques. The concept of neutral level and the MCDA Robot Technique, in Cerny, D. Glückaufová and D. Loula (eds.), *Proceedings of the International Workshop on Multicriteria Decision Making, Methods - Algorithms - Applications, Liblice, march 18-22, 1991, Prague* (7-15).
- [3] Bana e Costa, C.A. (1993), Les problématiques dans le cadre de l'activité d'aide à la décision, *Document du LAMSADE*, 80, Université de Paris-Dauphine, França.
- [4] Bana e Costa, C.A. (1994), Convictions et Aide à la Décision, *Newsletter of the European Working Group "Multicriteria Aid for Decisions"*, Series 2, nº3, (1-3).
- [5] Bana e Costa, C.A., Vansnick, J.-C. (1994), Uma nova abordagem ao problema da construção de uma função de valor cardinal: MACBETH, comunicação ao *Congresso IO 94*, Braga, Março de 1994.
- [6] Blumenthal, A.L. (1977), *The Process of Cognition*, Prentice-Hall.
- [7] Bovy, Ph. H. (1983), Transports Collectifs du Sud-Ouest Lausannois, Rapport de Synthèse 1, *ITEP/Etat de Vaud*, Suíça.
- [8] Edwards, W., Newman, J.R. (1982), *Multiatribute Evaluation*, Sage.
- [9] Jacquet-Lagrèze, E. (1979), De la logique d'agrégation des critères à une logique d'agrégation-désagrégation de préférences et de jugements, *Cahiers de l'ISMEA : Série Sciences de Gestion*, 13 (839-859).
- [10] Jacquet-Lagrèze, E. (1984), PREFCALC: Evaluation et décision multicritère, *Révue de l'Utilisateur de l'IBM PC*, 3 (38-55).
- [11] Jacquet-Lagrèze, E. (1990), Interactive Assessment of preferences using holistic judgements: the PREFCALC system, in C.A. Bana e Costa (ed.), *Readings in Multiple Criteria Decision Aid*, Springer-Verlag, (335-350).
- [12] Jacquet-Lagrèze, E., Siskos, J. (1982), Assessing a set of additive utility functions for multicriteria decision making, *EJOR*, 10, 2 (151-164).
- [13] Jacquet-Lagrèze, E., Shakun, M.F. (1984), Decision support systems for semistructured buying decisions, *EJOR*, 16, 1 (48-56).
- [14] Keeney, R.L. (1992), *Value-Focused Thinking: A Path to Creative Decisionmaking*, Harvard University Press.
- [15] Keeney, R.L., Raiffa, H. (1976), *Decisions with Multiple Objectives: Preferences and Value Tradeoffs*, John Wiley.
- [16] MacCrimmon, K.R. (1969), Improving the system design and evaluation process by the use of trade-off information: an application to northeast corridor transportation planning, RM-5877-DOT, Rand Corporation.
- [17] Moscarola, J., Siskos, J. (1984), Analyse a posteriori d'une étude d'aide à la décision en matière de gestion d'un réseau de distribution, in E. Jacquet-Lagrèze, J. Siskos (eds.), *Méthode de Décision Multicritère*, Editions Hommes et Techniques (143-167).
- [18] Rescher, N. (1969), *Introduction to Value Theory*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs.
- [19] Roy, B., Bouyssou, D. (1993), *Aide Multicritère à la Décision : Méthodes et Cas*, Economica.
- [20] Roy, B., Hugonnard, J.Ch. (1982), Ranking of suburban line extension projects on the Paris metro system by a multicriteria methods, *Transportation research*, 16A (301-312).
- [21] Simos, J. (1990), *Evaluer l'Impact sur l'Environnement*, Presses Polytechniques et Universitaires Romandes.
- [22] Vansnick, J.-C. (1989), Application of multicriteria decision-aid to allocating budget for building repairs and maintenance, in M.T. Tabucanon and V. Chankong (eds.) *Proceedings of the International Conference on Multiple Criteria Decision Making: Applications in Industry and Service*, Asian Institute of Technology, Bangkok, 6-8 décembre (629-642).
- [23] Weber, M., Borcherding, K. (1993), Behavioral influences on weight judgements in multiattribute decision making, *EJOR*, 67 (1-12).
- [24] Von Winterfeldt, D., Edwards, W. (1986), *Decision Analysis and Behavioral Research*, Cambridge University Press.
- [25] Von Wright, G.H. (1963), *The Logic of Preference*, Edinburgh University



PRINCIPAL PIVOTING ALGORITHMS FOR A CONCAVE GENERALIZED LINEAR COMPLEMENTARITY PROBLEM

A.M. Faustino

Departamento de Engenharia Civil
Universidade do Porto
4000 Porto

J.J. Júdice

Departamento de Matemática
Universidade de Coimbra
3000 Coimbra

Abstract

We discuss a single and a block principal pivoting algorithms for the solution of a linear complementarity problem with finite upper-bounds on the variables (BLCP) when its matrix is negative semi-definite (NSD). We show that both algorithms possess finite convergence when M is a symmetric NSD matrix. The algorithms can still process the BLCP in the unsymmetric case, but we have not been able to establish their finite terminations. However, we show that the block algorithm has finite convergence and is strongly polynomial if all the nonzero off diagonal elements of the NSD matrix have the same sign. The same properties are shared by the single method when M is a nonpositive NSD matrix.

Computational experience is included to highlight the great efficiency of these two algorithms for the solution of large-scale BLCPs with NSD matrices.

Resumo

Neste artigo são discutidos dois algoritmos pivotais principais simples e por blocos para a resolução do problema linear complementar com limites superiores nos valores das variáveis (BLCP) quando a sua matriz é negativa semi-definida (NSD). Prova-se que ambos os algoritmos têm convergência finita quando M é simétrica NSD. Os algoritmos podem ainda ser utilizados no caso não simétrico, apesar de não se ter conseguido provar convergência finita. Contudo, mostra-se que o algoritmo pivotal por blocos possui convergência finita e é polinomial quando a matriz NSD tem elementos não diagonais do mesmo sinal. As mesmas propriedades são partilhadas pelo algoritmo pivotal simples quando a matriz é não positiva NSD.

Finalmente são apresentados alguns resultados computacionais que atestam a grande eficiência dos dois algoritmos para a resolução de BLCPs com matrizes NSD de grandes dimensões.

Keywords

Linear Complementarity Problem, Concave Quadratic Programming, Affine Variational Inequalities, large-scale problems

1. Introduction

The Generalized Linear Complementarity Problem with finite upper-bounds is usually denoted by BLCP and consists of finding vectors $z \in \mathbb{R}^n$ and $w \in \mathbb{R}^n$ such that

$$\left. \begin{array}{l}
 w = q + Mz \\
 0 \leq z_i \leq b_i \\
 z_i = 0 \Rightarrow w_i \geq 0 \\
 z_i = b_i \Rightarrow w_i \leq 0 \\
 0 < z_i < b_i \Rightarrow w_i = 0
 \end{array} \right\} i = 1, 2, \dots, n \quad (1)$$

where q is a given n -vector, $b_i < +\infty$ for all $i = 1, \dots, n$ and M is a square matrix of order n . The BLCP is said to be Concave if M is a negative semi-definite (NSD) matrix, that is, it satisfies

$$x^T Mx \leq 0 \quad \text{for all } x \in \mathbb{R}^n$$

If M is a symmetric matrix, then the BLCP represents the first-order optimality conditions of the quadratic program [3]

$$\begin{array}{ll}
 \text{Minimize} & f(z) = q^T z + \frac{1}{2} z^T Mz \\
 & z \in S
 \end{array} \quad (2)$$

where

$$S = \{z \in \mathbb{R}^n : 0 \leq z_i \leq b_i, i = 1, \dots, n\} \quad (3)$$

In general, the BLCP is equivalent to the so-called Affine Variational Inequality Problem (AVI) [4]

$$\begin{array}{ll}
 \text{Find} & \bar{z} \in S \quad \text{such that} \\
 & (q + M\bar{z})^T (z - \bar{z}) \geq 0 \quad \text{for all } z \in S
 \end{array} \quad (4)$$

where S is the set defined by (3). Since this last problem has a solution if all the bounds b_i are finite [4], then the same result holds for the BLCP. However, the BLCP may have a solution even if some of the bounds are infinite [2]. In this paper we only consider the case where $0 < b_i < +\infty$ for all $i = 1, \dots, n$. If all these upper-bounds are infinite the BLCP reduces to the well-known Linear Complementarity Problem (LCP) [2,12], that is usually stated in the following form

$$w = q + Mz, \quad z \geq 0, \quad w \geq 0, \quad z^T w = 0$$

In [5] we have studied in detail the LCP when M is a NSD matrix. In particular, we have developed a strongly polynomial single principal pivoting algorithm for the case where all the off-diagonal elements have the same sign.

It is well-known [10,12] that the BLCP can be solved in polynomial-time if M is a (symmetric or unsymmetric) positive semi-definite matrix, that is, satisfies $x^T Mx \geq 0$ for all $x \in \mathbb{R}^n$. Several algorithms [2,7,10,11,14] have been developed for the solution of the BLCP in this case. On contrary, the Concave BLCP is NP-hard [1]. We have proposed in [6] an extension of Lemke's method [2] capable of dealing with the Concave BLCP when all the upper-bounds are finite. In this paper we discuss two principal pivoting algorithms for the same purpose. Computational experience is included showing the appropriateness of these techniques

for large-scale concave BLCPs. We also show that this type of problem can be solved in strongly polynomial-time if all the off-diagonal elements of M have the same sign.

The organization of the paper is as follows. In sections 2 and 3 the algorithms are described together with the study of their convergences. Finally, computational experience on the solution of some large-scale concave BLCPs is presented in the last section of this paper.

2. The Single Principal Pivoting Algorithm

Consider again the BLCP (1) and assume that all the upper-bounds b_i are finite. Hence [2] the BLCP is equivalent to the following LCP

$$\begin{aligned}
 w &= q + Mz + I_n \beta \\
 v &= b - I_n z \\
 w, v, z, \beta &\geq 0 \\
 v^T \beta &= z^T w = 0
 \end{aligned}
 \tag{5}$$

where I_n is the identity matrix of order n . A Complementary Solution for the LCP is a solution of the system of linear equations

$$\begin{aligned}
 w &= q + Mz + I_n \beta \\
 v &= b - I_n z
 \end{aligned}
 \tag{6}$$

satisfying $z_i w_i = \beta_i v_i = 0$ for all $i = 1, 2, \dots, n$. It is easy to see that the solution

$$z = 0, \quad \beta = 0, \quad w = q, \quad v = b
 \tag{7}$$

is complementary for the LCP (5). Furthermore this solution is also basic in the linear programming terminology. The variables z_i and β_i are nonbasic while w_i and v_i are the basic variables of the basic solution (7). If $q \geq 0$, this basic solution is feasible and solves the LCP, that is, $z = 0$ is a solution of the BLCP. On the other hand this solution is said to be infeasible if the vector q has at least a negative component. As is discussed in [2], principal pivoting algorithms are procedures that use in each iteration complementary basic infeasible solutions until reaching feasibility. In this case a solution of the BLCP is at hand.

We can associate to the basic solution (7) of the LCP (5) the sets $F = \{i : q_i < 0\}$ and $G = \{i : q_i \geq 0\}$ and write the equalities (6) of the LCP in the following tableau format

	1	z_F	z_G	β_F	β_G
$w_F =$	q_F	M_{FF}	M_{FG}	$I_{ F }$	0
$w_G =$	q_G	M_{GF}	M_{GG}	0	$I_{ G }$
$v_F =$	b_F	$-I_{ F }$	0	0	0
$v_G =$	b_G	0	$-I_{ G }$	0	0

where $|R|$ denotes the number of elements of the set R , $I_{|R|}$ is the identity matrix of order $|R|$, M_{RS} is the submatrix of M that contains all the elements belonging to the rows $i \in R$ and

columns $j \in S$ and q_R is the subvector of q corresponding to the indices of the set R . If we perform a block principal pivot operation [2] with pivot

$$\begin{bmatrix} M_{FF} & I_{|F|} \\ -I_{|F|} & 0 \end{bmatrix}$$

the following tableau is obtained

	1	v_F	z_G	w_F	β_G
$\beta_F =$	\bar{q}_F	M_{FF}	$-M_{FG}$	$I_{ F }$	0
$w_G =$	\bar{q}_G	$-M_{GF}$	M_{GG}	0	$I_{ G }$
$z_F =$	b_F	$-I_{ F }$	0	0	0
$v_G =$	b_G	0	$-I_{ G }$	0	0

(8)

where

$$\begin{cases} \bar{q}_F = -(q_F + M_{FF}b_F) \\ \bar{q}_G = q_G + M_{GF}b_F \end{cases} \tag{9}$$

Now consider the tableau (8). If $\bar{q} = (\bar{q}_F, \bar{q}_G) \geq 0$, then $z = (b_F, 0)$ is a solution of the BLCP. Otherwise there is at least an $i \in F \cup G$ such that $\bar{q}_i < 0$. By performing a pivot operation with pivot

$$\begin{bmatrix} m_{ii} & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

then \bar{q}_i is transformed into

$$\bar{\bar{q}}_i = -(\bar{q}_i + m_{ii} b_i)$$

Since $m_{ii} \leq 0$, $b_i > 0$ and $\bar{q}_i < 0$, then $\bar{\bar{q}}_i > 0$ and the infeasibility i has been removed. Furthermore after this principal pivot operation the tableau has a form similar to (8), in which the sets F and G are updated by

$$\begin{cases} i \in F \Rightarrow F = F - \{i\}, G = G \cup \{i\} \\ i \in G \Rightarrow F = F \cup \{i\}, G = G - \{i\} \end{cases}$$

and the vectors \bar{q}_F and \bar{q}_G satisfy (9). Another iteration of this type of procedure can now be performed. We have then described a principal pivoting algorithm that may be applied to a BLCP with a symmetric or an unsymmetric NSD matrix.

Since the tableaus have always the same form (8), they are not required in the description of the algorithm that takes the following simple form

Single Principal Pivoting Algorithm

Step 0 – Set $F = \emptyset$ and $G = \{1, \dots, n\}$.

Step 1 – Compute \bar{q} by (9).

Step 2 – If $\bar{q} = (\bar{q}_F, \bar{q}_G) \geq 0$ stop: $z = (b_F, 0)$ is a solution of the BLCP. Otherwise let

$$r = \min\{i : \bar{q}_i < 0\} \tag{10}$$

Set

$$F = \begin{cases} F - \{r\} & \text{if } r \in F \\ F \cup \{r\} & \text{if } r \in G \end{cases} \tag{11}$$

and $G = \{1, \dots, n\} - F$. Go to Step 1.

If M is a symmetric NSD matrix, then this algorithm is exactly Keller's method [9] for the computation of a stationary point of the quadratic program (2). It is then possible to prove that the value of the objective function reduces in each iteration and this is sufficient to guarantee finite termination for the algorithm [9]. If M is unsymmetric NSD, this correspondence between the BLCP and the quadratic program (2) no longer takes place. So there is no monotone argument for establishing finite convergence of the algorithm in this case. It is, however, possible to show that the algorithm requires at most n iterations when M is a NSD nonpositive matrix.

Theorem 1 – If M is a (symmetric or unsymmetric) nonpositive NSD matrix, then the single principal pivoting algorithm requires at most n iterations.

Proof: We prove this theorem by showing that $\bar{q}_F \geq 0$ in each iteration. Hence there are only infeasibilities in the set G , whence the algorithm cannot have more than n iterations. The procedure starts with $F = \emptyset$. In the first iteration we look for the first infeasibility r in the set G and move this index to F . But by the definition (9), $q_r < 0$, whence $\bar{q}_r = -q_r \geq 0$ after the principal pivot operation. Since $F = \{r\}$ the results holds for the first iteration.

Suppose that at an iteration k the vector \bar{q}_F is nonnegative. Then by (9) we have

$$q_i + \sum_{j \in F} m_{ij} b_j \leq 0 \quad \text{for all } i \in F \tag{12}$$

Let r be the index given by (10). In order to prove the theorem, we have to show that $\bar{q}_{F_1} \geq 0$ for $F_1 = F \cup \{r\}$. But by (9)

$$\begin{aligned} \bar{q}_r &= -(q_r + \sum_{j \in F_1} m_{rj} b_j) \\ &= -(q_r + \sum_{j \in F} m_{rj} b_j + m_{rr} b_r) \\ &= -(q_r + \sum_{j \in F} m_{rj} b_j) - m_{rr} b_r \end{aligned}$$

Since r satisfies (10), then

$$q_r + \sum_{j \in F} m_{rj} b_j < 0$$

Furthermore $m_{rr} \leq 0$, since M is a NSD matrix. Therefore $\bar{q}_r \geq 0$. Consider now an index $i \in F$.

By the definition (9) we have

$$\begin{aligned} \bar{q}_i &= -(q_i + \sum_{j \in F_1} m_{ij} b_j) \\ &= -(q_i + \sum_{j \in F} m_{ij} b_j) - m_{ir} b_r \geq 0 \end{aligned}$$

since (12) holds and M is a nonpositive matrix. ♦

This theorem shows that the single principal pivoting algorithm is strongly polynomial when M is a nonpositive NSD matrix. It is interesting to note that symmetry is not required for the theorem to hold. We believe that the algorithm possesses the finite termination property when M is an unsymmetric NSD matrix, but we have not been able to show this so far.

To finish this section, we describe the implementation of the algorithm for small or large scale BLCPs. To do this, we introduce an array MARK of dimension n satisfying

$$\text{MARK}(i) = \begin{cases} -1 & \text{if } i \in F \\ 1 & \text{if } i \in G \end{cases}$$

Another array Q of n real numbers is also considered in the implementation of the algorithm. This vector is initialized by $Q(i) = q_i, i = 1, \dots, n$. Whenever there is the change (11) in the sets F and G this array is updated by

$$Q(i) = \begin{cases} Q(i) + m_{ir} b_r & \text{if } r \in G \\ Q(i) - m_{ir} b_r & \text{if } r \in F \end{cases} \quad (13)$$

Furthermore the array MARK is modified by $\text{MARK}(i) = -\text{MARK}(i)$. By using these two arrays MARK and Q , it is easy to compute the values \bar{q}_i that are required by the algorithm. In fact, we have

$$\bar{q}_i = \text{MARK}(i) \cdot Q(i), \quad i = 1, \dots, n \quad (14)$$

Since $F = \emptyset$ means $\text{MARK}(i) = 1, i = 1, \dots, n$, then the implementation of the single principal pivoting algorithm takes the following simple form:

Algorithm Single

Step 0 - Set $\text{MARK}(i) = 1, Q(i) = q_i, i = 1, \dots, n$ and $\text{NUPD} = 0$.

Step 1 - For $i = 1, 2, \dots, n$

Compute $\text{VAL} = \text{MARK}(i) \cdot Q(i)$
If $\text{VAL} < 0$ do
For $j = 1, \dots, n$
$Q(j) = Q(j) + m_{ji} b_i \text{MARK}(i)$
$\text{MARK}(i) = -\text{MARK}(i)$
$\text{NUPD} = \text{NUPD} + 1$

Step 2 - If $\text{NUPD} = 0$, go to Exit. Otherwise set $\text{NUPD} = 0$ and go to Step 1.

Exit - The vector

$$z_i = \begin{cases} 0 & \text{if } \text{MARK}(i) = 1 \\ b_i & \text{if } \text{MARK}(i) = -1 \end{cases}$$

is a solution of the BLCP.

If the dimension n of the BLCP is quite large and the matrix M is sparse, then it should be stored in a collection of vectors scheme [8]. In order to speed up the products of Step 1, it is advisable to store M columnwise as an unsymmetric matrix (even if M is symmetric).

3. The Block Principal Pivoting Algorithm

Block principal pivoting algorithms allow the interchange of the status of many variables in each iteration and have been shown to be quite efficient for the solution of large-scale LCPs and BLCPs when M is a positive definite matrix [7], that is, it satisfies $x^T M x > 0$ for all $x \neq 0$. The algorithm to be described in this section considers basic solutions of the form $(z_F = b_F, z_G = 0)$, where F and G are the sets introduced in the previous section. In each iteration these sets F and G are modified according to the infeasibilities i corresponding to $\bar{q}_i < 0$, where \bar{q} is the vector given by (9). The steps of the algorithm are presented below.

Block Principal Pivoting Algorithm

Step 0 - Set $F = \{i : q_i < 0\}$ and $G = \{i : q_i \geq 0\}$

Step 1 - Compute \bar{q} by (9).

Step 2 - Let

$$K = \{i : \bar{q}_i < 0\}$$

If $K = \emptyset$ stop: $z = (b_F, 0)$ is a solution of the BLCP. Otherwise go to Step 3.

Step 3 - Let

$$F_1 = K \cap F, \quad G_1 = K \cap G \tag{15}$$

Set

$$F = F - F_1 \cup G_1, \quad G = G - G_1 \cup F_1 \tag{16}$$

and go to Step 1.

The next theorem establishes the convergence of the algorithm when M is a symmetric NSD matrix.

Theorem 2 - If M is a symmetric NSD matrix, the block principal pivoting algorithm converges to a solution of the BLCP in a finite number of iterations.

Proof: Since M is a symmetric matrix, then the BLCP reduces to the computation of a stationary point of the concave quadratic program (2). The number of extreme points of the constraint set S of this program is finite. Since the block algorithm only visits extreme points of S , then it terminates in a finite number of iterations provided there is a strict decrease of the value of the objective function in each iteration. To show this, let $(\bar{z}_F = b_F, \bar{z}_G = 0)$ be the current feasible solution and let K be the infeasibility set associated to it. If F_1 and G_1 are the sets defined by (15) and $F_2 = F - F_1, G_2 = G - G_1$, then

$$\begin{cases} q_{F_1} + M_{F_1 F_1} b_{F_1} + M_{F_1 F_2} b_{F_2} > 0 \\ q_{F_2} + M_{F_2 F_1} b_{F_1} + M_{F_2 F_2} b_{F_2} \leq 0 \\ q_{G_1} + M_{G_1 F_1} b_{F_1} + M_{G_1 F_2} b_{F_2} < 0 \\ q_{G_2} + M_{G_2 F_1} b_{F_1} + M_{G_2 F_2} b_{F_2} \geq 0 \end{cases} \tag{17}$$

Let Z be the new extreme point that is obtained after the modifications (16) in the sets F and G .

Then it is easy to see that

$$\mathcal{Z} = \bar{z} + d$$

where d is the direction given by

$$d_{F_1} = -b_{F_1}, d_{F_2} = d_{G_2} = 0, d_{G_1} = b_{G_1}$$

Since b is a positive vector, then it follows from (17) that

$$(q + M\bar{z})^T d < 0 \quad (18)$$

that is, d is a descent direction for the function f of the quadratic program (2). Hence

$$\begin{aligned} f(\mathcal{Z}) &= q^T(\bar{z}+d) + \frac{1}{2}(\bar{z}+d)^T M(\bar{z}+d) \\ &= (q^T \bar{z} + \frac{1}{2} \bar{z}^T M \bar{z}) + (q + M\bar{z})^T d + \frac{1}{2} d^T M d \end{aligned}$$

Since (18) holds and M is a NSD matrix, then

$$f(\mathcal{Z}) < q^T \bar{z} + \frac{1}{2} \bar{z}^T M \bar{z} = f(\bar{z})$$

and this proves the theorem. \diamond

As for the single principal pivoting algorithm, the convergence for the unsymmetric case is much harder to study, since we can no longer exploit the reduction of the BLCP to the concave quadratic program (2). Next, we address two cases where we have successfully established finite termination for the algorithm.

Theorem 3 - If M is a (symmetric or unsymmetric) nonpositive NSD matrix then the block principal pivoting algorithm terminates in at most n iterations.

Proof: As in theorem 1, we prove this property by showing that $\bar{q}_F \geq 0$ in each iteration of the algorithm. By the choices of the initial sets F and G , we have initially $\bar{q}_F = -q_F > 0$. Hence the set of infeasibilities K is given by

$$K = G_1 = \left\{ i \in G: q_i + \sum_{j \in F} m_{ij} b_j < 0 \right\} \quad (19)$$

After the first iteration the set has been modified to $\bar{F} = F \cup K$. But for each $i \in F$ we have

$$\bar{q}_i = -\left(q_i + \sum_{j \in F} m_{ij} b_j + \sum_{j \in K} m_{ij} b_j \right) \geq 0$$

since $q_F < 0$ and M is a nonpositive matrix. Furthermore for each $i \in K$

$$\begin{aligned} \bar{q}_i &= -\left(q_i + \sum_{j \in F} m_{ij} b_j + \sum_{j \in K} m_{ij} b_j \right) \\ &= -\left(q_i + \sum_{j \in F} m_{ij} b_j \right) - \sum_{j \in K} m_{ij} b_j \geq 0 \end{aligned}$$

by (19) and the nonpositivity of the elements of the matrix M . The theorem now follows by induction. \diamond

So, we have established that the block principal pivoting algorithm is also strongly polynomial when M is a nonpositive NSD matrix. As before, no symmetry is required for the property to hold. Next, we show that the algorithm is also polynomial if M is a (symmetric or unsymmetric) NSD matrix with nonnegative off-diagonal elements. To do this, we need the following result.

Lemma 3 - Consider the tableau

$$\begin{array}{l}
 w = \\
 v =
 \end{array}
 \begin{array}{|c|cc}
 & z & \beta \\
 \hline
 & M & I_m \\
 & -I_m & 0
 \end{array}
 \tag{20}$$

where M is a NSD matrix of order m , I_m is the identity matrix of order m , $q < 0$ and $b > 0$. If \bar{q} is the vector obtained by a principal pivot operation with pivot

$$\begin{bmatrix} M & I_m \\ -I_m & 0 \end{bmatrix}
 \tag{21}$$

then there is at least an i such that $\bar{q}_i \geq 0$.

Proof: It is easy to see that the matrix (21) is nonsingular. Then it can be used as a pivot to transform (20) into a tableau of the form

$$\begin{array}{l}
 \beta = \\
 z =
 \end{array}
 \begin{array}{|c|cc}
 & v & w \\
 \hline
 & M & I_m \\
 & -I_m & 0
 \end{array}$$

where

$$\bar{q} = -(q + Mb)$$

If $\bar{q} < 0$ then $q + Mb > 0$ and $q^T b + b^T Mb > 0$. This is impossible, since $q < 0$, $b > 0$ and M is a NSD matrix. This proves the lemma. \blacklozenge

We are now in position of establish the last result of this paper.

Theorem 4 - If M is a (symmetric or unsymmetric) NSD matrix with nonnegative off-diagonal elements, then the block principal pivoting algorithm terminates in at most n iterations.

Proof: Throughout this proof we represent by J^k the set J at the iteration k . In the first iteration we have

$$\bar{q}_{F^1} = -(q_{F^1} + M_{F^1 F^1} b_{F^1})$$

$$\bar{q}_{G^1} = q_{G^1} + M_{G^1 F^1} b_{F^1}$$

Since $q_{G^1} \geq 0$, by the definition of the algorithm, and all the elements of $M_{G^1 F^1}$ are nonnegative, then $\bar{q}_{G^1} \geq 0$ and

$$G_1^1 = G \cap K^1 = \emptyset, \quad F_1^1 = K^1 \subseteq F^1$$

Therefore the sets F and G are updated by

$$F^2 = F^1 - K^1, \quad G^2 = G^1 \cup K^1$$

In the second iteration we have

$$\bar{q}_{F^2} = -(q_{F^2} + M_{F^2 F^1} b_{F^1}) + M_{F^2 K^1} b_{K^1}$$

But

$$-(q_{F^2} + M_{F^2 F^1} b_{F^1}) \geq 0$$

since these variables have not changed their status in the first iteration. Furthermore $M_{F^2 K^1} \geq 0$, which together with (22) implies that $\bar{q}_{F^2} \geq 0$.

On the other hand, the vector \bar{q}_{G^2} is given by $\bar{q}_{G^2} = (\bar{q}_{G^1}, \bar{q}_{K^1})$, where

$$\bar{q}_{G^1} = (q_{G^1} + M_{G^1F^1} b_{F^1}) - M_{G^1K^1} b_{K^1}$$

$$\bar{q}_{K^1} = (q_{K^1} + M_{K^1F^1} b_{F^1}) - M_{K^1K^1} b_{K^1}$$

But

$$q_{G^1} \geq 0$$

and

$$M_{G^1F^1} b_{F^1} - M_{G^1K^1} b_{K^1} \geq 0$$

since $K^1 \subseteq F^1$ and the off-diagonal elements of M are nonnegative. Therefore $\bar{q}_{G^1} \geq 0$. Hence either $\bar{q}_{K^1} \geq 0$ and a solution of the BLCP is at hand or

$$K^2 \cap F^2 = \emptyset, \quad K^2 = G_1^2 \subseteq K^1$$

But, if $K^2 = K^1$, all the elements $\bar{q}_i, i \in K^1$ remain negative after a principal pivot operation with pivot

$$\begin{bmatrix} M_{K^1K^1} & I_{|K^1|} \\ -I_{|K^1|} & 0 \end{bmatrix}$$

and $q_{K^1} < 0$. This is impossible by Lemma 3, whence $K^2 \subset K^1$.

In the third iteration, the sets F and G are updated as follows

$$F^3 = F^2 \cup K^2, \quad G^3 = G^2 - K^2$$

After these modifications, the corresponding vector \bar{q} satisfies

$$\bar{q}_{G^3} = q_{G^3} + M_{G^3F^2} b_{F^2} + M_{G^3K^2} b_{K^2}$$

But $q_{G^3} + M_{G^3F^2} b_{F^2} \geq 0$, since there are no infeasibilities in the set G^2 . Moreover $M_{G^3K^2}$ is a nonnegative matrix. Hence $\bar{q}_{G^3} \geq 0$ and there are no infeasibilities in the set G in the third iteration of the algorithm, that is, $K^3 \cap G^3 = \emptyset$.

The new components \bar{q}_{F^2} of the vector \bar{q}_{F^3} are given by

$$\bar{q}_{F^2} = -(q_{F^2} + M_{F^2F^2} b_{F^2} + M_{F^2K^2} b_{K^2})$$

But $K^2 \subset K^1$, whence

$$F^2 \cup K^2 \subset F^2 \cup K^1 = F^1$$

If $L = F^1 - (F^2 \cup K^2)$, then

$$M_{F^2F^2} b_{F^2} + M_{F^2K^2} b_{K^2} = M_{F^2F^1} b_{F^1} - M_{F^2L} b_L$$

and as before

$$\bar{q}_{F^2} = -(q_{F^2} + M_{F^2F^1} b_{F^1}) + M_{F^2L} b_L \geq 0$$

Therefore either the components \bar{q}_{F^2} of \bar{q}_{F^3} are nonnegative and a solution of the BLCP is at hand or, by using similar arguments to those used in iteration 2, we can prove that

$$K^3 = F_1^3 \subset K^2$$

So it follows by induction that for each i

$$K^{i+1} \subset K^i$$

and

$$\begin{cases} i \text{ is odd} \Rightarrow K^i = F_1^i = K^i \cap F^i \\ i \text{ is even} \Rightarrow K^i = G_1^i = K^i \cap G^i \end{cases}$$

where K^i is the set of infeasibilities and F^i and G^i are the sets of the variables that are at the upper and lower bounds respectively in iteration i . It then follows that the block principal pivoting algorithm requires at most n iterations. ♦

We can then state that a BLCP with a NSD matrix can be solved in polynomial-time if all the off-diagonal elements have the same sign. It is important to stress that this result does not depend on the symmetry of the matrix M . We conjecture that the block principal pivoting algorithm can solve a BLCP with any unsymmetric NSD matrix and finite lower and upper bounds, but we have not been able to achieve this result so far.

The implementation of the block principal pivoting algorithm follows the same ideas that have been employed in the implementation of the single principal pivoting method. The procedure consists of two main steps. In the first step the set of infeasibilities is constructed and is stored in the array INF of dimension smaller than or equal to n . Step 2 carries out the modifications in the arrays Q and MARK that have been introduced in the implementation SINGLE of the single principal pivoting algorithm. However, the integer variable i of the main loop belongs to the set INF that has been constructed in Step 1. After these considerations, we are in position to present the steps of the implementation BLOCK of the block principal pivoting algorithm.

Algorithm Block

Step 0 - Set $MARK(i) = 1$ and $Q(i) = q_i$, for $i = 1, \dots, n$.

Step 1 - Set $NINF = 0$.

```

    For  $i = 1, \dots, n$ 
    |   If  $MARK(i) Q(i) < 0$  do
    |        $NINF = NINF + 1$ 
    |        $INF(NINF) = i$ 
    |
    |   If  $NINF = 0$  go to Exit. Otherwise go to Step 2.
    
```

Step 2 - For $i = 1, \dots, NINF$

```

    |    $k = INF(i)$ 
    |   For  $j = 1, \dots, n$ 
    |   |    $Q(j) = Q(j) + m_{jk} b_k MARK(k)$ 
    |   |    $MARK(k) = - MARK(k)$ 
    |
    
```

Go to Step 1.

Exit - The vector

$$z_i = \begin{cases} 0 & \text{if } MARK(i) = 1 \\ b_i & \text{if } MARK(i) = -1 \end{cases}$$

is a solution of the BLCP.

If we call an iteration the set of instructions that are performed in Steps 1 and 2 of the algorithms SINGLE and BLOCK, it follows that the former method requires smaller computational effort per iteration. If the matrix M is nonpositive, there are no infeasibilities in

the set F , whence only the indices i associated with $\text{MARK}(i) = 1$ are searched for possible infeasibilities. Hence the computational efforts of the algorithms are reduced in this case. Finally, if all the off-diagonal elements of M are nonnegative, then, by theorem 4, the infeasibilities in the block algorithm occur alternatively in the sets F and G . This feature can also be exploited in order to reduce the amount of work of each iteration of the block algorithm in this case. It is important to add that this property is not shared by the SINGLE algorithm, which should be implemented in its usual way. This discussion seems to indicate that the SINGLE algorithm may be more appropriate for BLCPs with general or nonpositive NSD matrices, while the BLOCK method may be more recommended for NSD matrices with nonnegative off-diagonal elements.

4 - Computational Experience

In this section we present computational experience with the SINGLE and BLOCK algorithms for the solution of some large-scale BLCPs with symmetric NSD matrices. All the experiments have been performed on a CDC CYBER 180-830 of University of Porto. To generate our test problems, we have considered some positive definite matrices taken from known sources and multiply all their entries by (-1) in order to get NSD matrices. We have generated six test problems, where $-M$ is a finite difference matrix [2] in TP4, $-M$ are randomly generated as in [8] in TP1, TP2 and TP3 and $-M$ are matrices similar to those described in [13] in the test problems TP5 and TP6. It is also important to add that M is nonpositive in the first two test problems TP1 and TP2, the matrices of test problems TP3 and TP4 have nonnegative off-diagonal elements while the matrices of TP5 and TP6 have off-diagonal elements with different signs. For each problem TP_i , $i = 1, \dots, 6$, we have constructed 5 different vectors q whose components are randomly generated and have a number of negative and positive components that is fixed a priori. Finally all the b_i have been set equal to one.

The results of the experience are displayed in table 1. For each problem TP_i we present the best (B), the worst (W) and the average (A) performance of the algorithms in terms of the CPU time for the five BLCPs that differ on the right-hand side vector q . In this table we use the following notations.

n = dimension of the BLCP = order of the matrix M .

NZ = number of nonzeros of the matrix M .

NEGMIN (NEGMAX) = minimum number of negative (positive) components of the vector q among the five BLCPs with the matrix associated to the test problem TP_i .

NI = number of iterations = number of times that Step 1 of the algorithms takes place.

T = CPU time in seconds.

Probl.	n	NZ	NEGMIN	NEGMAX		SINGLE		BLOCK	
						NI	T	NI	T
TP1	3000	11660	505	2240	B	2	.08	2	.08
					A	2	.10	2	.10
					W	2	.12	2	.12
TP2	3000	13108	518	1950	B	5	.17	6	.20
					A	5	.18	8	.24
					W	7	.22	13	.34
TP3	3000	13532	505	3000	B	2	.12	2	.06
					A	2	.21	2	.15
					W	3	.34	3	.27
TP4	3000	15902	505	3000	B	2	.13	2	.07
					A	2	.25	3	.21
					W	3	.36	3	.30
TP5	3000	24070	243	3000	B	4	.37	7	.47
					A	5	.43	7	.54
					W	8	.58	6	.64
TP6	3000	28062	243	3000	B	5	.40	7	.48
					A	5	.46	8	.59
					W	7	.63	7	.70

Table 1 - Performance of the principal pivoting algorithms

The results displayed in Table 1 clearly illustrate the great efficiency of both algorithms in all the test problems. The algorithms seem to be quite robust, since the gap between the best and worst performance is quite small for each set TP_i of BLCPs. The number of negative or positive components of the vector q does not seem to have any effect on the performance of the algorithms. The results also confirm the statements presented at the end of the previous section. In fact, the SINGLE algorithm seems to be more appropriate for BLCPs with nonpositive NSD matrices, while the BLOCK method is superior on the solution of concave BLCPs whose matrices M have nonnegative off-diagonal elements. However, the gaps are quite small.

The simplicity of the implementation of the principal pivoting algorithms discussed in this paper and these computational results lead us to strongly recommend them for the solution of large-scale concave BLCPs with finite lower and upper-bounds, when the matrix M is symmetric or unsymmetric NSD with off-diagonal elements of the same sign. We believe that the algorithms also possess finite convergence for general unsymmetric NSD matrices, but we have not been able to establish this result so far. This is one of the major topics of our current research.

References

- [1] S. Chung, NP-Completeness of the linear complementarity problem, *Journal of Optimization Theory and Applications* 60 (1989) 393-399.
- [2] R.W.Cottle, J.S.Pang and R.E.Stone, *The Linear Complementarity Problem*, Academic Press, New York, 1992.
- [3] P.E.Gill, W.Murray and M.H.Wright, *Practical Optimization*, Academic Press, 1981.
- [4] P.T.Harker and J.S.Pang, Finite-dimensional variational inequality and nonlinear complementarity problems, *Mathematical Programming* 48 (1990) 161-220.
- [5] J.J.Júdice and A.M. Faustino, Solution of the concave linear complementarity problem, in "*Recent Advances in Global Optimization*", edited by P.Pardalos and C.Floudas, Princeton University Press, 1992, pp.76-101.
- [6] J.J.Júdice, J.Machado and A.M.Faustino, An extension of Lemke's method for the solution of a generalized linear complementarity problem, in "*System Modelling and Optimization*", edited by P.Kall, *Lecture Notes in Control and Information Sciences* 180, Springer-Verlag, 1992, pp.221-230.
- [7] J.J.Júdice and F.M.Pires, A block principal pivoting algorithm for large-scale strictly monotone linear complementarity problems, *Computers and Operations Research* 21 (1994) 587-596.
- [8] J.J.Júdice and F.M.Pires, Direct methods for convex quadratic programs subject to box constraints, *Investigação Operacional* 9 (1989) 23-56.
- [9] E.L.Keller, The general quadratic programming problem, *Mathematical Programming* 5 (1973) 311-337.
- [10] M.Kojima, N.Megiddo, T.Noma and A.Yoshise, A unified approach to interior-point algorithms for linear complementarity problem, *Lecture Notes in Computer Science* 538, Springer-Verlag, Berlin, 1991.
- [11] J.J.Moré and G.Toraldo, Algorithms for bound constrained quadratic programming problems, *Numerische Mathematik* 55 (1989) 377-400.
- [12] K.Murty, *Linear Complementarity, Linear and Nonlinear Programming*, Helderman Verlag, Berlin, 1988.
- [13] J.S.Pang, A new and efficient algorithm for a class of portfolio selection problems, *Operations Research* 28 (1980) 754-767.
- [14] P.M.Pardalos, Y.Ye and C.G.Han, An interior-point algorithm for large-scale quadratic programming problems subject to bound constraints, *SIAM Journal on Optimization* 1 (1991) 91-113.

GENETIC ALGORITHMS IN OPTIMAL ELECTRIC AND GAS DISTRIBUTION NETWORK PLANNING

L. Miguel Proença
J.V. Ranito
INESC Porto

Vladimiro Miranda
INESC Porto
DEEC/FEUP
Universidade do Porto

Abstract

This paper presents a new comprehensive methodology based on genetic algorithms for multistage electric and gas distribution network planning. This methodology takes into account several aspects usually neglected in traditional approaches like, for example, multiple criteria and representation of uncertainties. A case study is presented illustrating the proposed approach followed by a discussion on the advantages of this methodology in the planning context.

Resumo

Este artigo representa uma nova metodologia baseada em algoritmos genéticos para o planeamento da expansão de redes de distribuição de energia eléctrica e de gás. Esta metodologia entra em consideração com diversos aspectos geralmente ignorados nos modelos tradicionais como, por exemplo, critérios múltiplos e representação de incertezas. O artigo apresenta ainda um exemplo de aplicação do modelo, seguido de conclusões sobre as vantagens da abordagem proposta no contexto do planeamento.

Keywords

Genetic Algorithms, Multiple Criteria Optimization, Electricity Distribution Networks, Gas Distribution Networks, Power System Analysis.

1. Introduction

Many mathematical models have been proposed in the past for optimal electrical and gas distribution network planning. Due to the extreme complexity of the problems, most of the proposed models overlook project option that planners consider fundamental in distribution system design. One of the most important neglected aspects is that we are dealing with a dynamic multitemporal problem. So, the vast majority of the models found in the literature are static models, giving an optimal solution for a single period. Furthermore, these models are aimed at a so called "optimal solution" and are based on an approach usually considered unacceptable by system planners: single criterion optimization.

Another important point, generally ignored in these models, concerns the representation of uncertainties: the system planner identifies a large number of uncertainties of different types that should be incorporated in the models.

This paper presents a new methodology for distribution system planning that considers all these aspects and is based on concepts new to the field: risk, robustness and multicriteria analysis.

The mathematical grounds for this methodology are provided by a technique developed in recent years known as genetic algorithms. This technique has been chosen because it has, when dealing with difficult multicriteria problems, several advantages over traditional mathematical models.

General methodology

The planning methodology proposed in this paper for distribution networks is based on the following points:

- Identification of criteria and uncertainties;
- Representation of possible development scenarios by a tree of futures;
- Generation of solutions and expansion strategies using genetic algorithms;
- Selection of an ideal strategy for each future;
- Generation of robust expansion strategies allowing a final decision to be taken.

Genetic Algorithms

A genetic algorithm is a model of machine learning which derives its behavior as an image of the process of evolution in nature [1]. For a period of over 4 billion years, nature has produced, applying the process of evolution, complex organisms that no engineer would ever dream of designing. These organisms represent almost optimal solutions to a large number of very complex problems. Today, we have the model (Darwin's theory) and we have the hardware (computers). All we have to do is to try to emulate nature.

This is done by defining a population of individuals represented by chromosomes, in essence a set of character strings that are analogous to the 4-base chromosomes that we see in our own DNA. Each individual represents a potential solution for the problem being optimized. Each individual performance is evaluated by a fitness function (the objective function) that plays the role of environment and establishes the basis for selection.

Although there are many forms [2] for Genetic Algorithms, we will only refer to the canonical algorithm. This means that we will be dealing with three genetic operators (selection, crossover and mutation) and linear, binary, fixed-size chromosomes. Canonical GAs use a fixed-size, non-overlapping population scheme and each new generation is created by the selection operator and altered by crossover and mutation. The first population is generated at random in order to obtain a uniform sample of the space of solutions.

Genetic Algorithm components

Each chromosome represents a potential solution for the problem to solve and must be expressed in binary form. For instance, if we want to maximize the function $f(x) = x^2$, in the integer interval $I = [0,31]$, we could simply code x in binary base, using 5 bits. Each solution must be evaluated by the fitness function to produce a value. In our example, the chromosome **11011** would receive the fitness value $27^2 = 729$, while the chromosome **00111** would receive the value $7^2 = 49$. The pair (chromosome, fitness) represents an individual.

The selection operator creates a new population (or generation) by selecting individuals from the old population, biased towards the best. This means that there will be more copies of the best individuals, although there may be some copies of the worst. This operator can be implemented in a variety of ways, although we use here a technique known as Stochastic Tournament [3]. This implementation is suited to a future distributed implementation and is very simple: every time we want to select an individual for reproduction, we choose two, at random, and the best wins with some fixed probability, typically 0.8. This scheme can be enhanced by using more individuals on the competition [4] or even by considering evolving winning probability, eventually leading to Boltzman Tournament [3], generalizing the Simulated Annealing paradigm [5].

Crossover is the main genetic operator and consists in swapping chromosome parts between individuals. The simplest crossover operator is implemented by selecting a random crossover point in the chromosome, and swapping the genes that reside between the crossover point and the end of the chromosome. For example, if we have two individuals:

$$A = 010 \mid 00 \quad ; \quad B = 010 \mid 11$$

and choose a crossover point $C = 3$ (indicated by '|') the resulting individuals after crossover would be:

$$A' = 010 \mid 11 \quad ; \quad B' = 010 \mid 00$$

Crossover is not performed on every pair of individuals, its frequency being controlled by a crossover operator probability. This probability should have a large value, typically $P_c = 0.8$.

The last genetic operator is mutation and consists in toggling a random bit in an individual. This operator should be used with some care, with low probability, typically $P_m = 0.001$, for normal populations.

How does a Genetic Algorithm work?

A canonical GA is a very simple process: we first generate a random initial population, evaluate it and start creating new populations by applying genetic operators. This high-level behavior can be depicted on the following piece of pseudo-C:

```
main()
{
    int gen;
    generate(oldpop);
    for(gen = 0; gen < MAXGEN; gen++)
    {
        evaluate(oldpop);
        newpop = select(oldpop);
        crossover(newpop);
        mutation(oldpop);
        oldpop = newpop;
    }
}
```

Obviously, there is the need for some bookkeeping functions, for statistics and so on, but they are not central to this explanation.

This very simple behavior hides a powerful processing, done by the GA. In fact, the combination of selection and crossover leads to a proliferation of individuals that possess small, tightly coupled blocks of bits leading to good performance. These blocks, usually called *schemata* [6], are replicated through selection and combined or separated by crossover.

Mutation also plays a role in this process introducing new genetic material in the population. Nevertheless, too much mutation can be harmful: a mutation probability of 0.5 always leads to random search [1], independently of crossover probability.

So, GAs tend to select individuals with good performance and recombine some of their building blocks, creating more and more copies of good schemata, simply by the use of selection and crossover. This hidden processing is called implicit parallelism because the number of schemata processed in each generation is typically $O(N^3)$, being N the population size [Holland75]. This compares very well with the number of fitness function evaluations, N . This characteristic is distinctive of Genetic Algorithms [2].

It is very important to stress that a GA is not a "random search" for a solution to a problem (highly fit individual). The GA uses stochastic processes, but the result is distinctly non-random (better than random).

The main advantages that GAs present in comparison with conventional methods are:

- Since GAs perform a search in a population of points and are based on probabilistic transition rules, they are less likely to converge to local minima (or maxima).
- GAs do not require "well behaved" objective functions, easily tolerating discontinuities.
- GAs are well adapted to distributed or parallel implementations.

Nevertheless, the power of conventional methods is recognized. GAs should only be used when it is impossible (or very difficult) to obtain efficient solutions by these traditional approaches.

Planning model

The objective of distribution planning is to provide the design for an orderly expansion of facilities to supply economical, reliable and safe electric energy (or gas) to end users. This section presents a model to solve the problems of optimal sizing, timing and location of distribution network items, using genetic algorithms. The model allows, among others, the incorporation of constraints related to network radiality and voltage (or pressure) drops. A more detailed description of this model can be found in [7] and [8].

The need for an expansion strategy will lie on demand growth. The planning period will be divided into several stages. The result will be a list of investments to be made at each stage.

The genetic algorithm approach is drawn under the following general lines, for both the electrical energy and gas distribution problems:

- 1 - The variables chosen to represent a multistage network solution are encoded in a chromosome.
- 2 - A genetic algorithm is applied directly to a randomly chosen initial population of solutions. Each solution is evaluated through a fitness function. This function depends on the problem being optimized (electrical or gas). The fitness function deals with non-compliance with technical constraints, strongly penalizing the solutions that are not feasible.
- 3 - At the end of the process, a family of well fitted plans is available.

Variables

It is assumed that the following can be defined:

- 1 - A set of possible futures, organized as a tree of futures, each one divided into m stages.
- 2 - For each future, at every stage:
 - 2.1 Demand forecasts and location of loads;
 - 2.2 Possible sites for substations (or injection nodes) and run-ways for lines;
 - 2.3 The capacity of several types of lines that may be used.

For an m -stage planning problem, the following (0-1) integer decision variables are defined:

$$F_{is} = \begin{cases} 1 & \text{if line } i \text{ is used at stage } s \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$S_{is} = \begin{cases} 1 & \text{if substation (or injection node, for} \\ & \text{gas networks) } i \text{ is used at stage } s \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$E_{is} = \begin{cases} 1 & \text{if substation expansion (injection node} \\ & \text{capacity increase) } i \text{ is used at stage } s \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Existing facilities are considered by fixing their respective values to 1.

Chromosome coding

The direct coding of the above variables into a chromosome has been tried and tested. Although the results obtained were satisfactory, the process was not very efficient, because the extremely large number of unfeasible solutions appearing at each generation led to a large computing time before reaching an acceptable stability.

Therefore, we devised a new coding process. Its requirements were: it should lead to a minimum amount of unfeasible solutions generated; and it should provide very fast decoding, as this operation is required at every fitness evaluation. Its characteristics are:

- a) at one time stage, some nodes may be assigned with demand values, while others may have a forecasted zero load;
- b) a node with a positive demand must be connected to, at least, one feeder, while nodes with zero demand may either have no connections or have one or more connections in order to allow flow to other nodes;
- c) each node is represented in the chromosome by a number of bits needed to encode the number of possible connections to it - e.g., if four lines connect to the node, one needs two bits, if it is a positive demand node, or a three bit string, if it is a zero demand node (to include the case where no line goes through that node);
- d) a substation or injection node is assumed as a special type of line, that may be connected to the nodes chosen as possible building sites;

This encoding strategy is such that it gives, as a result, only solutions with a number of lines=(nodes-1), a radiality condition. A few other details were included in the model, which are not relevant to its understanding but helped in gaining computer efficiency. The details of the implementation of the coding are extremely complex, so they will be omitted from this paper. This coding strategy has no influence whatsoever in the genetic operators behavior because the decoding is performed inside the evaluation procedure (see below).

Fitness function

The fitness function must reflect both the desired and the unwanted properties of a solution, rewarding the former and penalizing the latter. In the electrical distribution problem, desired properties are, for instance, low cost and high reliability, while unwanted features are non-radial configurations (open loops are accepted, but not closed loops), violations of thermal cable limits or of voltage drop constraints. In gas distribution the most important property is high quality in node pressure (small deviations from the nominal pressure).

Fitness is evaluated a posteriori; therefore the objective function may be non-linear, non-convex, whatever. This is very advantageous over strict mathematical programming approaches.

The general trend is to maximize fitness. The general scheme of evaluation of fitness for both the electric and the gas distribution problem can be resumed in the following way:

```

evaluate(chromossome)
{
    float fitness;
    decode(chromossome);
    if(!(technical constraints)) then return(low_fitness);
    fitness=f(Cr1,Cr2,...,Crn);
    return(fitness);
}

```

Cr₁-Cr_n are the criteria from which the fitness is evaluated (see below). Normally the fitness function is obtained through the weighted addition of the respective attributes. Any other method could be considered and implemented.

The technical constraints referred depend on the nature of the problem (see below).

Criteria

The criteria chosen for the evaluation of the fitness of a solution depend on the type of problem being optimized and on the judgment of the planner.

The criteria chosen for the electrical energy distribution problem were:

- C₁ - Investment cost;
- C₂ - Voltage drop quality;
- C₃ - Power losses;
- C₄ - Reliability (Energy not supplied due to contingencies).

For the gas distribution problem:

- C₁ - Investment cost;
- C₂ - Node pressure quality.

One must realize that other criteria could have been included in the fitness evaluation, without any major problems.

Technical constraints

The electrical energy distribution system must comply with the following constraints:

- Radial configuration;
- Voltage drop limits;
- Power demand specifications;
- Power flow availability.

The constraints considered for the gas distribution problems were:

- Radial configuration;
- Node pressure limits;
- Gas demand specifications.

For both problems we made the assumption that new installation facility candidates are known beforehand.

Case Study

The proposed approach was applied to an electrical distribution system composed by 54 nodes, 16 lines and two substations in the initial system and 45 lines and 2 substations in project. The example was developed for a planning horizon of 3 years divided in 3 time stages. This system is represented in figure 1 where solid lines represent the initial system and dotted lines represent possible sites for the expansion of the system.

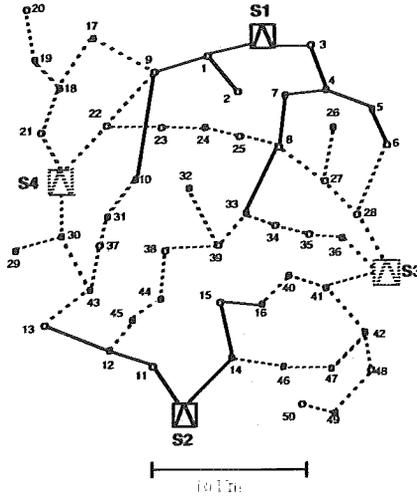


Fig.1: Initial system

For the representation of future uncertainties, several processes can be used. In this example we use a procedure based on a technique known as *tree of futures*.

The possible futures can be represented on the form of a graph, representing the possibilities of evolution within the planning horizon. Figure 2 describes in an aggregated form a hypothetical growth of electric load in the system represented on figure 1. This growth is due to moderate load increases in existing nodes (5%-10%) added to loads that will appear in certain nodes.

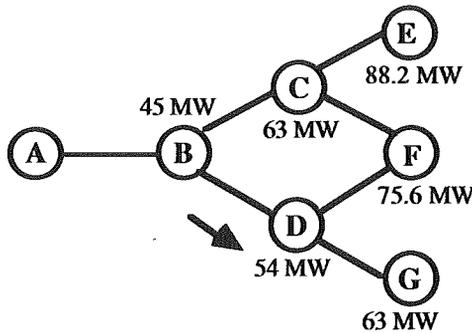


Fig.2: Tree of futures. The global load growth is represented in MW. On stages A,B,C and D, decisions have to be taken.

For each possible trajectory in the tree of futures, a group of solutions is obtained using the genetic algorithm approach described in the last section. Genetic algorithms have the feature of having as a result not only one solution but several solutions filtered through the genetic process. Using a technique of weight variation it is possible to obtain a large number of non-dominated solutions.

Then, a **conditional decision set** is chosen for each trajectory. A conditional decision set is a set of alternatives or plans that may be considered as acceptable compromises between

the objectives and, therefore, will be good candidates as a final decision, in a given future. A conditional decision set is generally constituted by a subset of non-dominated solutions. The selection of this set can be done using well-known multicriteria methods. This issue is not discussed in this paper. We admit that the definition of this set is left to the Planner/Decision Maker.

To each of these sets one may define a **conditioned ideal** associated to the best value in each criterion and a **conditional anti-ideal**, corresponding to the worst value for each criterion. Figure 3 shows a family of solutions and the respective conditional decision set for the trajectory ABDF. They were obtained, for a given future (in this case the trajectory ABDF), by a direct application of the genetic process using the method described in the last section. These solutions are all non-dominated in the 4-attribute space and are represented in the figure by a projection on a bi-attribute space (cost and reliability).

The points plotted in gray are other 4-attribute non-dominated solutions, obtained by other genetic processes, using different weights for the criteria. They are shown so that we could draw a curve representing a convex approximation to the non-dominated border. It is interesting to notice that some of these points lay outside the convex region of this border. These solutions would hardly be found by classical mathematical programming methods such as the weighted addition of the functions representing the objectives.

These solutions were obtained for a population of 40, and for 300 generations (a value for which a robust stability of the *best so far* solution has been consistently observed). On average the run times have been around 300 sec., in a NEXTStation (33 MHz), but these times can be drastically reduced in future distributed implementations.

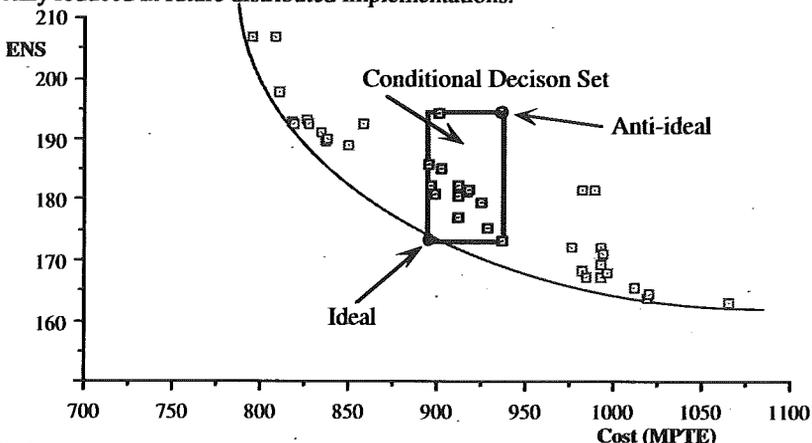


Fig.3: Conditional decision set for trajectory ABDF represented on a bi-attribute space (cost versus reliability - in average annual energy not supplied)

This procedure is applied for every possible trajectory on the tree of futures represented on figure 2. The following table presents, for each trajectory, the ideal values for two criteria:

- a) cost, in $\text{PTE} \times 10^6$ aggregating investment and losses;
- b) reliability, in Energy Not Supplied (ENS) in MWh/year.

IDEALS

Trajectory	Cost (PTE $\times 10^6$)	ENS (MWh/year)
A.B.D.G	770	152
A.B.D.F	902	172
A.B.C.F	921	178
A.B.C.E	976	198

The next step is to find a robust expansion strategy, according to the principle of risk minimization (see formal definition below). This means that the network expansion strategy should contemplate every evolution trajectory as a possibility to be taken into account. In this phase another genetic algorithm is used. This time we have to codify and try to optimize an expansion strategy, so all the possible future decisions (depending on the future that actually occurs) have to be codified.

The variables used to represent a multi-stage strategy are the same used in the previous phase to represent a network solution for one possible trajectory, but a different set of variables has to be considered for each stage where the decision depends on the future that corresponds to the situation.

In this phase the chromosome coding strategy is similar to the process used before. In the case illustrated in figure 2 the following decisions would have to be codified:

- Decision to be taken in time stage 1 (A).
- Decision to be taken in time stage 2 (B).
- Decision to be taken in time stage 3 if future C occurs.
- Decision to be taken in time stage 3 if future D occurs.

At last, the fitness function in this phase follows exactly the same steps as in the previous phase, until a feasible strategy is found. To be feasible, a strategy has to be suitable for all the possible futures represented in the tree futures. Then, the fitness will be evaluated using the principle of risk minimization.

Figures 3 to 6 show the final strategy to be adopted for the network expansion. It is important to notice that this strategy is not a plan, but a flexible set of plans, to be implemented along time according to the actual evolution of the previously considered uncertainties.

A substation within a square means that there has been a reinforcement in capacity of that substation; shadowed lines represent feeders already installed that are not used in a given stage, remaining as open loops.

The following table presents the strategic decisions concerning the substations and the deviations that occur after each decision is taken according to the sequence of possible futures.

Phase	Decision	Consequences	Cost (PTE×10 ⁶)	ENS(MWh/year)
A	Reinforce S1		12.4	0
B	Build S3+S4	If C occurs →	2.2	5.7
		If D occurs →	18	(-2.2)
C	Reinforce S2	If E occurs →	14	10.1
		If F occurs →	66	5.7
D	(nothing)	If F occurs →	2.4	20
		If G occurs →	12.1	2.1

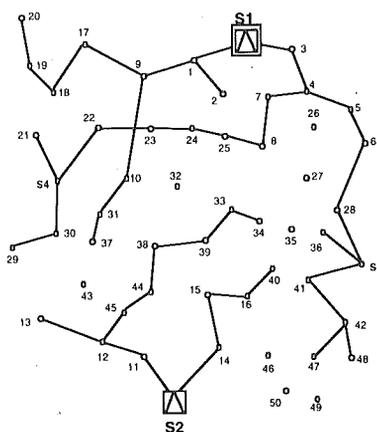


Fig.3: Decision plan A

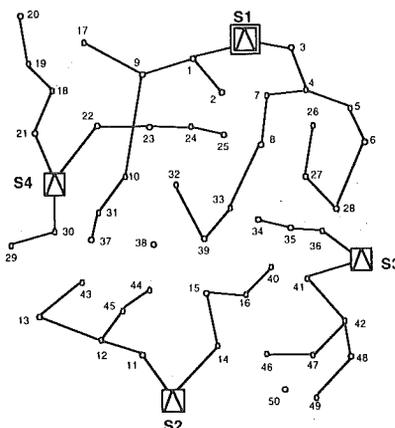


Fig.4: Decision plan B

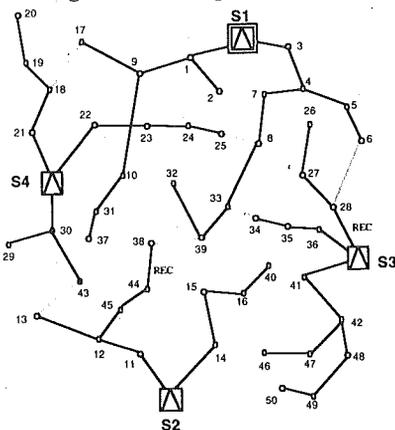


Fig.5: Decision plan D

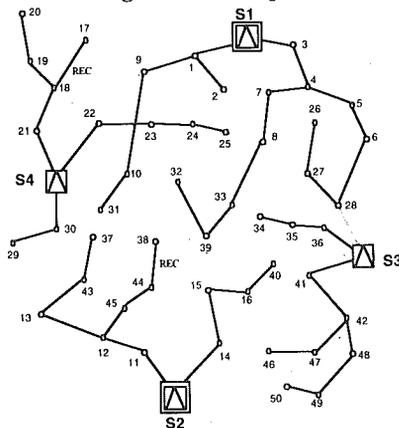


Fig.6: Decision plan C

The next table presents global deviations that are obtained with the best risk aversion strategy, relatively to the ideal solutions that would be possible to adopt, if one could know beforehand what future would occur. These deviations can be interpreted as potential regrets, from the *risk analysis* point of view.

Trajectory	"Regrets"			
	Cost [\$]	ENS [MWh/year]	Cost (%)	ENS (%)
A.B.D.G	30.1	12.3	3.9	8.2
A.B.D.F	20.4	30.2	2.3	17.6
A.B.C.F	68.2	23.8	7.4	13.4
A.B.C.E	16.2	28.2	1.7	14.2

The risk aversion strategy is defined as the one that minimizes regret, measured as the overall distance between a strategy and the ideals in all futures:

$$\min \{ \text{Max} [(f_{ik}^x - f_{ik}^{\text{opt}})], k = 1, \dots, u \} \quad (\text{for each attribute})$$

being:

u : number of futures

f_{ik}^{opt} : value of attribute i in future k , in the ideal.

f_{ik}^x : value of attribute i in future k , of solution x .

Conclusions

This paper presents a new methodology for electric and gas distribution network planning. This methodology leads to the substitution of the optimal solution concept by a new integrated notion of expansion strategies in order to obtain solutions that are more flexible and adaptable to changing futures. It was developed based on two points: a technique based on genetic algorithms for the generation of solutions and expansion strategies; and a planning philosophy based on the robustness evaluation of these strategies.

On the other hand, the planner will obtain indices that measure the distance between the strategies to implement and the ideal solutions he would choose if he could have a perfect knowledge about the future.

The planning philosophy adopted is the one that minimizes the regret in the decisions taken and this implies that the consequences of these decisions are evaluated within the large set of uncertainties and futures defined. Genetic Algorithms have proven to be a valuable and practical tool to achieve this goal.

References

- [1] D.E.Goldberg, Genetic Algorithms in Search, Optimization and Machine Learning, Addison-Wesley, 1989.
- [2] D.E.Goldberg, A Note on Boltzman Tournament Selection for Genetic Algorithms and Population-Oriented Simulated Annealing, Complex Systems Publications, 1991
- [3] D.E.Goldberg, K.Deb, A Comparative Analysis of Selection Schemes Used in Genetic Algorithms, Genetic Algorithms in Search, Optimization and Machine Learning, Summer School, Stanford, 1991.
- [4] J.Grefenstette, Conditions for Implicit Parallelism, Navy Center for Applied Research in Artificial Intelligence, Internal Report, Washington, 1991.
- [5] J.H.Holland, Adaptation in Natural and Artificial Systems, The University of Michigan Press, Ann Arbor, 1975.
- [6] L.M.Proença, Algoritmos genéticos no planeamento da expansão de sistemas de distribuição de energia eléctrica, MSc Thesis, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, 1993.
- [7] S.Kirkpatrick, C.D.Gelatt, M.P.Vecchi, Optimization by Simulated Annealing, Science 220, N° 4598, 1993.
- [8] V.M.Miranda, J.V.Ranito, L.M.Proença, Genetic Algorithms in Optimal Multistage Distribution Network Planning, to be published in IEEE Transactions on Power Systems.

INTRODUÇÃO À TÉCNICA DE DEA-DATA ENVELOPMENT ANALYSIS

Jorge Manuel Santos
IST - UTL
P677@alfa.ist.utl.pt

Isabel Themido
CESUR/IST-UTL
Av. Rovisco Pais
1000 Lisboa, Portugal

Abstract

The objective of this tutorial on Data Envelopment Analysis is to introduce this non parametric analysis method to the relative efficiency of Organisational Units. DEA, introduced in the USA in 1978, allows the determination of the Organisational Units that have maximum efficiency in the Pareto sense. As a result of the analysis, information can also be gathered as to the reduction of Input or increase in Output necessary for inefficient organisational units to reach their optimum, and the characterization of inefficient organisational units as a linear combination of those entities classified as optimum. DEA techniques have been used mainly in the evaluation of the efficiency of public sector organizations and in situations in which profit alone is not a sufficient criteria to evaluate performance.

Resumo

Com este "tutorial", sobre *Data Envelopment Analysis* (DEA), pretende-se divulgar esta técnica, não paramétrica, de análise, da eficiência relativa de Unidades Organizacionais, que surgiu nos EUA, em 1978. A técnica de DEA permite lidar com múltiplos *Inputs* e múltiplos *Outputs*, para determinar as Unidades Organizacionais que evidenciam um desempenho óptimo no sentido de Pareto. Como resultado da análise obtém-se ainda informação acerca da redução de *Inputs* e/ou aumento de *Outputs*, necessário para que as Unidades Organizacionais ineficientes alcancem o óptimo e uma caracterização destas como uma combinação linear das Unidades Organizacionais classificadas como óptimas. A técnica DEA tem sido utilizada sobretudo no estudo da eficiência de organizações do sector público e em situações em que o lucro numa organização não seja critério suficiente para aferir do seu desempenho.

Keywords

Data Envelopment Analysis, Efficiency Measurement, Mathematical Programming, Farrell Efficiency.

1. Introdução

O objectivo deste artigo é o de dar a conhecer a técnica de DEA - *Data Envelopment Analysis*, uma técnica de análise de eficiência, da qual ainda se conhecem muito poucas aplicações em Portugal. Faz-se primeiro uma breve retrospectiva dos desenvolvimentos da técnica de DEA para o caso dos dois modelos mais usuais - Modelos Charnes, Cooper e Rhodes (CCR) e Banker, Charnes e Cooper (BCC). Seguidamente aborda-se, através de exemplos, o caso de economias de escala constante e as representações gráficas mais usuais nas duas perspectivas possíveis:

- Minimização do consumo de factores de produção (*Inputs*);
- Maximização do produto (*Outputs*).

O modelo para economias de escala variável é abordado apenas no seu caso mais simples – um *Input* e um *Output* – por ser o único passível de representação geométrica no plano. Tal como no ponto anterior são abordadas ambas as perspectivas.

Ao longo da exposição evitou-se o recurso ao formalismo matemático que se condensou em apêndice, juntamente com a nomenclatura mais específica desta técnica. Os resultados apresentados foram obtidos através da resolução dos problemas de programação linear apresentados no apêndice.

2. Uma breve visão histórica

A técnica de *Data Envelopment Analysis* é uma técnica de programação matemática, para análise de eficiência, desenvolvida por Charnes Cooper e Rhodes que a descrevem pela primeira vez em 1978 (Charnes, Cooper e Rhodes, 1978).

Nesse artigo introduz-se o conceito de eficiência, visto do mesmo modo que em engenharia se define rendimento - como o quociente entre o observado e o "teoricamente previsível". Aqui a expressão "teoricamente previsível", deverá ser entendida como o melhor desempenho observado, já que é difícil, se não mesmo impossível, na grande maioria dos casos conhecer a fronteira de eficiência, pelo que a técnica de *Data Envelopment Analysis* fornece apenas medidas de eficiência relativa.

O modelo proposto na altura sofreu apenas uma pequena alteração no ano seguinte, pelos próprios autores (Charnes, Cooper e Rhodes, 1979), no sentido de tornar o método mais selectivo e de garantir que eficiência unitária equivaleria a optimalidade no sentido de Pareto.

Este modelo é ainda hoje largamente utilizado sendo conhecido como modelo CCR, as iniciais dos seus autores, e também, pelo acima exposto, por Engineering Ratio Models.

Esta técnica de análise de eficiência é considerada como bastante robusta, por não exigir nenhuma definição à priori, nem da forma da função de produção, nem da distribuição estatística dos desvios (resíduos) entre valores esperados e observados, daí ser classificada como uma técnica não paramétrica.

De facto a técnica de DEA apenas assume a convexidade e linearidade do espaço de possibilidades de produção, condições que lhe são introduzidas axiomáticamente por Banker em 1980.

O modelo CCR tinha contudo a limitação de ser intrinsecamente apenas aplicável a economias de escala constante. Esta limitação foi ultrapassada em 1984 devido sobretudo aos trabalhos de Banker e dos já referidos Charnes e Cooper que culminaram no modelo BCC (Banker, Charnes e Cooper 1984).

Nos anos que se seguiram surgiram muitos novos modelos mas de reduzida importância e aplicação.

No sentido de esclarecer alguns termos, como é o caso de eficiência técnica e eficiência alocativa, faz-se seguidamente uma breve apresentação do trabalho de Farrell, sendo depois apresentadas as formulações matemáticas dos modelos CCR e BCC.

2.1 O trabalho de Farrell ou os primórdios da técnica de *Data Envelopment Analysis*

Este autor é usualmente referido nos trabalhos de *Data Envelopment Analysis* como um dos seus precursores, já que introduziu, pela primeira vez, o conceito de eficiência de preços ou de alocação versus o de eficiência técnica, agregando estes dois num só conceito, o de eficiência global.

Considere-se a título de exemplo a situação apresentada na figura 1 em que se representa a curva SS' que é uma isoquanta do produto (isoproduto) para condições óptimas de produção¹, (fronteira de eficiência) e em que AA' é uma recta de preços constantes (isocustos). O ponto P representa uma Unidade Organizacional (Decision Making Unit)² que produz apenas uma unidade de *Output*.

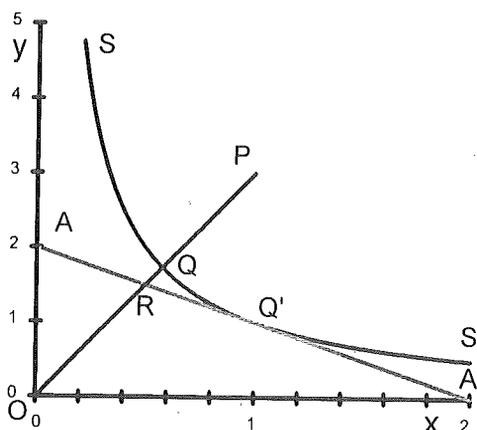


Figura 1: Corte no espaço de possibilidades de produção à cota 1

Baseando-se neste caso, Farrell define eficiência alocativa como o quociente OR/OQ e eficiência técnica como OQ/OP . Ao produto destas duas eficiências deu-se o nome de eficiência global: $(OR/OQ) \times (OQ/OP) = OR/OP$.

Se bem que a eficiência alocativa seja importante, (no mínimo porque deste gráfico decorre a bem conhecida ideia de que o ponto óptimo é aquele em que as linhas de isocustos são tangentes às curvas de isoproduto), em termos da técnica de *Data Envelopment Analysis* a preocupação central será a eficiência técnica que muito justamente é também referida como eficiência de Farrell.

Merece ainda destaque o facto de Farrell ter aplicado pela primeira vez o modelo a que mais tarde se chamaria Dual³ do modelo CCR, à agricultura de 48 estados americanos.

¹ Esta curva poderá ser obtida por vários métodos estatísticos que nada têm a ver com a *Data Envelopment Analysis*. Neste caso concreto optou-se por uma função de Cobb Douglas.

² As iniciais destas três palavras são a origem do termo DMU que se emprega amiúde neste campo, para referir Unidades Organizacionais semelhantes mas com um mínimo de autonomia de decisão. Se esta autonomia não existisse não faria sentido analisar a eficiência destas unidades.

³ Presentemente existe uma certa confusão acerca da designação de Dual para este problema dado existirem autores que o referem por Primal. Para evitar confusões utiliza-se a designação de problema da envolvente para este e a designação de problema dos multiplicadores para o seu dual.

2.2 O modelo Charnes Cooper e Rhodes

Em 1978 surgiu o modelo CCR que define eficiência como o quociente da soma ponderada dos *Outputs* pela soma ponderada dos *Inputs*.

$$Ef_0 = \frac{\sum_{i=1}^I \mu_{i0} y_{i0}}{\sum_{j=1}^J v_{j0} x_{j0}}$$

Ef_0 – Eficiência do DMU₀

μ_{i0} – Peso atribuído ao *Output* i do DMU₀

v_{j0} – Peso atribuído ao *Input* j do DMU₀

y_{i0} – *Output* i do DMU₀

x_{j0} – *Input* j do DMU₀

I – Número de *Outputs* considerados

J – Número de *Inputs* considerados

A cada uma das parcelas do numerador (contribuição de cada *Output*, depois de ponderado) é usual chamar-se *Output* virtual. Do mesmo modo designam-se as parcelas do denominador por *Inputs* virtuais, pelo que esta medida de eficiência consiste no quociente do somatório dos *Outputs* virtuais pelo somatório dos *Inputs* virtuais.

Esta definição parece algo redutora e baseada em aspectos muito discutíveis, nomeadamente o da escolha dos pesos, e de facto assim seria se se ficasse por aqui. A ideia base da técnica de DEA reside em cada Unidade Organizacional ser livre na escolha dos seus próprios pesos, (no sentido de maximizar a sua eficiência) apenas com a restrição de nenhuma Unidade Organizacional (ela própria inclusivé), apresentar eficiências superiores à unidade.

A ideia anteriormente exposta traduz-se pelo seguinte problema de programação fraccionária linear:

$$\text{Max: } w_0 = \frac{\sum_{i=1}^I \mu_{i0} y_{i0}}{\sum_{j=1}^J v_{j0} x_{j0}}$$

$$\text{Sujeito a: } w_m = \frac{\sum_{i=1}^I \mu_{i0} y_{im}}{\sum_{j=1}^J v_{j0} x_{jm}} \leq 1 \quad m = 1, \dots, M$$

$$v_{j0} \geq \epsilon \quad j = 1, \dots, J$$

$$\mu_{i0} \geq \epsilon \quad i = 1, \dots, I$$

(ϵ é uma pequena quantidade não Arquimediana, normalmente usa-se $\epsilon = 10^{-6}$)

Embora Charnes Cooper e Rhodes tenham resolvido este problema pelo método de Charnes & Cooper (Charnes e Cooper, 1962) que transforma o problema fraccionário num de programação linear através de mudanças de variáveis e introdução de restrições extra, a via que se seguirá conduz ao mesmo resultado de um modo mais intuitivo.

Para tal bastará reparar que para maximizar esta função fraccionária basta maximizar o numerador e manter o denominador constante. Na prática é usual forçar o denominador a valer 100% ou 1.

Deste modo obtém-se o seguinte programa linear:

$$\begin{aligned} \text{Max:} \quad & w_0 = \sum_{i=1}^I \mu_{i0} y_{i0} \\ \text{Sujeito a:} \quad & \sum_{j=1}^J v_{j0} x_{j0} = 1 \\ & \sum_{i=1}^I \mu_{i0} y_{im} \leq \sum_{j=1}^J v_{j0} y_{jm} \quad m = 1, \dots, M \\ & v_{j0} \geq \epsilon \quad j = 1, \dots, J \\ & \mu_{i0} \geq \epsilon \quad i = 1, \dots, I \end{aligned}$$

(ϵ é uma pequena quantidade não Arquimediana, normalmente usa-se $\epsilon = 10^{-6}$)

É interessante obter o dual deste programa na forma canónica da Programação Linear onde surgem as variáveis de folga S_i^+ e S_j^- que representam respectivamente o déficite no *Output* e o desperdício no *Input* j do DMU em estudo. Obtem-se a seguinte formulação (Santos, 1994):

$$\begin{aligned} \text{Min:} \quad & z_0 - \epsilon \left\{ \sum_{i=1}^I S_i^+ + \sum_{j=1}^J S_j^- \right\} \\ \text{Sujeito a:} \quad & \sum_{m=1}^M \lambda_m x_{jm} + S_j^- = z_0 x_{j0} \quad j = 1, \dots, J \\ & \sum_{m=1}^M \lambda_m y_{im} - S_i^+ = y_{i0} \quad i = 1, \dots, I \\ & \lambda_m \geq 0 \quad m = 1, \dots, M \\ & S_j^- \geq 0 \quad j = 1, \dots, J \\ & S_i^+ \geq 0 \quad i = 1, \dots, I \end{aligned}$$

Esta formulação é conhecida por "o problema da envolvente em minimização de *Inputs* do modelo CCR".

Procurando interpretar o significado concreto desta formulação ressalta claramente a razão de ser da referência à minimização de *Inputs*. De facto pretende-se determinar a menor percentagem z_0 de todos os *Inputs* do DMU₀ que ainda seja superior à combinação linear

$\sum_{m=1}^M \lambda_m x_{jm}$. Do lado do *Output* pretende-se que com os coeficientes λ_m obtidos, todos os *Outputs* do DMU em análise sejam inferiores aos obtidos para um DMU eficiente, fictício com *Outputs* $\sum_{m=1}^M \lambda_m x_{im}$ $i = 1, \dots, I$.

Resumindo, pode-se afirmar que esta perspectiva visa encontrar a proporção mínima de *inputs* da unidade em estudo que a torne quase eficiente, isto é coincidente com uma unidade fictícia obtida por uma combinação linear de DMUs eficientes.

Assim como se descreveu o modelo CCR na perspectiva da minimização de *Inputs*, de modo análogo se poderia descrever o referido modelo na via da maximização de *Outputs* que conduz aos mesmos resultados excepto no que respeita às folgas.

2.3 O modelo BCC

O modelo BCC obtém-se facilmente do problema da envolvente em minimização de *Inputs* acrescentando uma restrição extra que garante que o DMU em análise será comparado com uma combinação convexa dos restantes DMUs ao invés duma combinação linear, como sucedia no modelo CCR.

Acrescentada essa restrição adicional $\left(\sum_{m=1}^M \lambda_m = 1 \right)$ obtém-se o seguinte problema linear de minimização:

$$\begin{aligned} \text{Min:} \quad & z_0 - \varepsilon \left\{ \sum_{i=1}^I S_i^+ + \sum_{j=1}^J S_j^- \right\} \\ \text{Sujeito a:} \quad & \sum_{m=1}^M \lambda_m x_{jm} + S_j^- = z_0 x_{j0} \quad j = 1, \dots, J \\ & \sum_{m=1}^M \lambda_m y_{im} - S_i^+ = y_{i0} \quad i = 1, \dots, I \\ & \sum_{m=1}^M \lambda_m = 1 \quad m = 1, \dots, M \end{aligned}$$

$$\lambda_m \geq 0 \quad m = 1, \dots, M$$

$$S_j^- \geq 0 \quad j = 1, \dots, J$$

$$S_i^+ \geq 0 \quad i = 1, \dots, I$$

Tal como no modelo CCR, o problema da envolvente tem um problema dual associado, conhecido como o problema dos pesos, cuja formulação é a seguinte:

$$\text{Max: } w_0 = \frac{\sum_{i=1}^I \mu_{i0} y_{i0} + u_0}{\sum_{j=1}^J v_{j0} x_{j0}}$$

$$\text{Sujeito a: } w_m = \frac{\sum_{i=1}^I \mu_{i0} y_{im} + u_0}{\sum_{j=1}^J v_{j0} x_{jm}} \leq 1 \quad m = 1, \dots, M$$

$$v_{j0} \geq \epsilon \quad j = 1, \dots, J$$

$$\mu_{i0} \geq \epsilon \quad i = 1, \dots, I$$

$$u_0 \in \mathbb{R} \text{ (Livre)}$$

Como se pode constatar este modelo é ainda mais flexível que o anterior; conduzindo a valores de eficiência nunca inferiores, pois apresenta a variável u_0 indicadora de economias de escala crescente ou decrescente consoante esta é positiva ou negativa respectivamente.

3. O exemplo a expor

A selecção dos factores de produção e dos produtos a considerar na análise é um problema de capital importância para a aplicação bem sucedida da técnica de DEA a problemas reais, mas que cai fora do âmbito deste artigo. Para uma discussão deste ponto ver Boussofiane (Boussofiane, Dyson e Thanassoulis 1991). Vai-se contudo dar uma ideia geral de como essa escolha deverá ser feita.

Um *Input* é algo de que a unidade necessita para a produção de *Outputs*. Uns serão controláveis (Capital, Trabalho, Espaço...) mas outros poderão não o ser (População, Clima, Níveis de conhecimento dos alunos à entrada, Classe social donde estes são originários...). A definição dos *Inputs* e *Outputs* deve sempre obedecer à regra de "quanto maior melhor". Por exemplo na avaliação duma turma poder-se-ia definir como *Input* a percentagem de bons alunos ou a de maus; a escolha correcta é a primeira pois é a percentagem de bons alunos a que obedece à regra de "quanto maior melhor".

Quanto a *Outputs* a situação é idêntica. Por exemplo em avaliações de sistemas prisionais é evidente que as fugas são uma consequência do pior desempenho numa prisão pelo que este aspecto deveria ser introduzido em termos de não fugas, isto é permanências.

Vai-se a título meramente didáctico desenvolver um caso de análise de eficiência em que se supõe 12 Unidades Organizacionais similares que produzem dois *Outputs* y_1 e y_2 (bens e/ou serviços) consumindo para tal dois *Inputs*, x_1 e x_2 . Os dados são apresentados na tabela 1.

Uma primeira tentativa de análise da eficiência destas doze Unidades Organizacionais, consistiria na determinação de ratios para cada par *Output/Input* e daí tirar conclusões que seriam sempre algo discutíveis pois um DMU mal classificado num ratio, mas bem classificado noutra, poderia sempre argumentar que o ratio onde obteve uma elevada classificação é o mais importante.

DMU	x_1	x_2	y_1	y_2
1	4	140	2	28
2	5	90	1	22.5
3	6	36	6	12
4	10	300	8	60
5	11	66	7	16.5
6	8	36	6	12
7	9	12	7	6
8	5	210	3	30
9	5.5	33	4.4	5.5
10	8	288	4	72
11	10	80	2	20
12	8	8	1	4

Tabela 1: Dados do exemplo a apresentar

A técnica de *Data Envelopment Analysis* não vai por si só resolver este problema, pode sim incorporar informação no sentido de privilegiar um ou outro *Input* ou *Output* (Dyson e Thanassoulis 1988).

4. Economias de escala constante

Numa economia de escala constante, a um acréscimo de *Inputs* corresponde, por definição, um acréscimo proporcional de *Outputs*. Este caso é resolvido no âmbito da técnica de DEA pelo modelo CCR cuja formulação matemática se apresentou no ponto 2.2.

4.1 Um *Input* e apenas um *Output*

A situação mais simples de analisar será a correspondente a um só *Output* versus um só *Input* admitindo economias de escala constante.

Analisando a figura 2 que representa y_1 em função apenas de x_1 , verifica-se que existe uma e apenas uma Unidade Organizacional eficiente, que é o DMU 3, que consegue produzir seis unidades de *Output* a partir de 6 de *Input*, pelo que se dirá que é eficiente, uma vez que nenhum outro DMU obteve um ratio tão elevado quanto este.

No que se refere ao DMU 1, este é inefficiente. De facto com o mesmo *Input* de 4 unidades este poderia ter atingido o ponto CO através da maximização do seu *Output*. Mais especificamente, ele poderia ter duplicado o seu produto sem ultrapassar a fronteira de eficiência (que é a semirecta que une a origem com o ponto eficiente, o DMU 3, pelo que a sua ineficiência é de 2.0 e a sua eficiência apenas de 0.5).

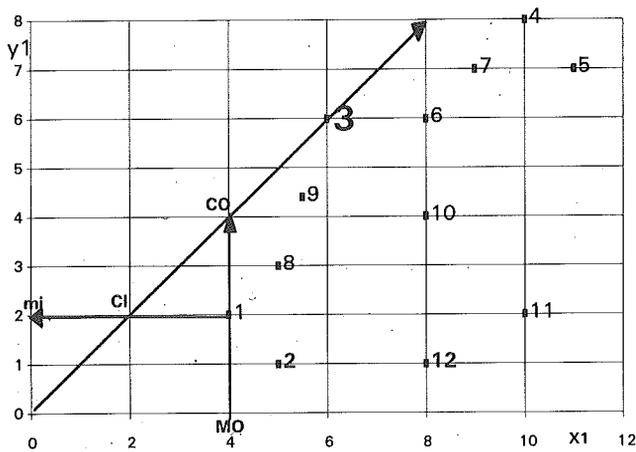


Figura 2: Representação dos 12 DMUs em termos de um *Output*(y_1) e de um *Input*(x_1)

Era também possível minimizar os *Inputs* do DMU 1 até ele chegar ao ponto CI, o que implicaria reduzir o seu *Input* em 50%, pelo que ele tem uma eficiência de 0.5, igual à obtida pela outra via. Adianta-se já que em economias de escala constante o valor da eficiência obtido, tanto pela via da maximização dos *Outputs*, como pela da minimização de *Inputs*, é sempre igual. Apenas os pontos de referência são diferentes: obtém-se CO para ponto Compósito em maximização dos *Outputs* e CI para ponto Compósito em minimização de *Inputs*.

Matematicamente tem-se:

$$Ef = \frac{\overrightarrow{MO\ 1}}{\overrightarrow{MO\ CO}} = \frac{\overrightarrow{Ci\ mi}}{\overrightarrow{1\ mi}}$$

Em que: *

Ef – eficiência do DMU1

* Os pontos referidos estão representados na figura 2.

CO – ponto Compósito em maximização de *Outputs*

Ci – ponto Compósito em minimização de *inputs*

mi – um ponto no eixo dos yy utilizado na minimização de *inputs*

MO – um ponto no eixo dos xx utilizado na Maximização de *Outputs*

Foi anteriormente utilizado o conceito de pontos compósitos, que se encontram assinalados na figura 2 para o DMU 1. Esta designação advém do facto de estes pontos poderem ser obtidos a partir de uma combinação linear dos DMUs eficientes, neste caso apenas o DMU 3. Apresenta-se, na última coluna da tabela 2, o escalar $\lambda 3i$, pelo qual se deverá multiplicar as coordenadas do DMU 3 para obter as coordenadas dos pontos compósitos de cada um dos doze DMUs, em minimização de *Inputs*.

O significado da penúltima coluna da tabela 2 é equivalente ao da última ($\lambda 3i$), para o caso da Maximização de *Outputs* ($\lambda 3O$). Exemplificando novamente com o DMU1, temos:

$CO(4;4) = 4/6 \times (6;6)$ para Maximização de *Outputs* e:

$Ci(2;2) = 2/6 \times (6;6)$ para minimização de *Inputs*

DMU	x1	y1	y1/x1	$\lambda 3 O$	$\lambda 3 i$
1	4.0	2.0	0.500	0.667	0.333
2	5.0	1.0	0.200	0.833	0.167
3	6.0	6.0	1.000	1.000	1.000
4	10.0	8.0	0.800	1.667	1.333
5	11.0	7.0	0.636	1.833	1.167
6	8.0	6.0	0.750	1.333	1.000
7	9.0	7.0	0.778	1.500	1.167
8	5.0	3.0	0.600	0.833	0.500
9	5.5	4.4	0.800	0.917	0.733
10	8.0	4.0	0.500	1.333	0.667
11	10.0	2.0	0.200	1.667	0.333
12	8.0	1.0	0.125	1.333	0.167

Tabela 2: Eficiência ($y1/x1$) e escalares $\lambda 3$ para maximização de *Outputs* ($\lambda 3O$) e para minimização de *Inputs* ($\lambda 3i$)

Convém ainda salientar que a coluna $y1/x1$ apresenta valores iguais aos obtidos para a eficiência, apenas por o ratio mais elevado correspondente ao DMU eficiente ser unitário. De facto se assim não fosse haveria que normalizar $y1/x1$, dividindo todos os valores pelo seu máximo para garantir eficiência unitária (100%) para esse DMU eficiente.

Esta análise foi evidentemente muito simples e serviu apenas para ilustrar alguns conceitos fundamentais.

Seguidamente ir-se-á acrescentar mais um *Output*, à análise.

4.2 Um Input e dois Outputs

Este caso apenas seria passível de representação gráfica a 3 dimensões; contudo, como se assume economias de escala constante, é possível normalizar os dois Outputs pelo Input x_1 , de acordo com a tabela 3.

DMU	x_1	y_1	y_2	y_1/x_1	y_2/x_1
1	4.0	2.0	28.0	0.500	7.000
2	5.0	1.0	22.5	0.200	4.500
3	6.0	6.0	12.0	1.000	2.000
4	10.0	8.0	60.0	0.800	6.000
5	11.0	7.0	16.5	0.636	1.500
6	8.0	6.0	12.0	0.750	1.500
7	9.0	7.0	6.0	0.778	0.667
8	5.0	3.0	30.0	0.600	6.000
9	5.5	4.4	5.5	0.800	1.000
10	8.0	4.0	72.0	0.500	9.000
11	10.0	2.0	20.0	0.200	2.000
12	8.0	1.0	4.0	0.125	0.500

Tabela 3: Outputs normalizados pelo Input x_1

Como se verá seguidamente, a representação gráfica deste caso vai justificar o nome da técnica, uma vez que na Figura 3 todos os dados são analisados por comparação com a envolvente.

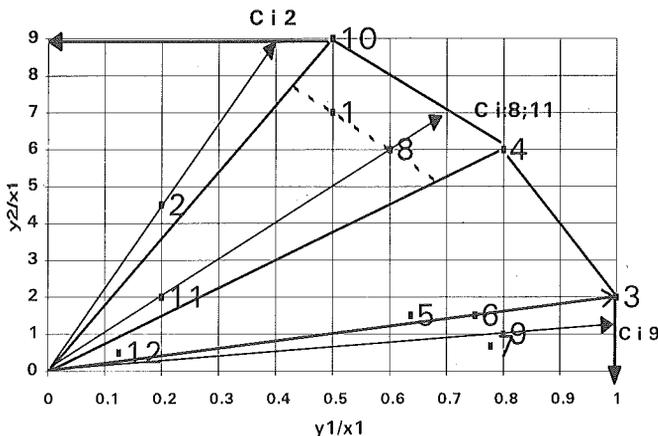


Figura 3: Minimização de Inputs – representação no plano, dos dados e respectiva envolvente

Como se pode verificar facilmente, o número de Unidades Organizacionais eficientes subiu para 3 e a eficiência de todas as outras Unidades Organizacionais também aumentou, por motivos que mais adiante se perceberá melhor.

DMU	λ_3	λ_4	λ_{10}	$s1^+$	$s2^+$	Eficiência
1	0	0.0952	0.3095	0	0	0.857
2	0	0	0.3125	0.25	0	0.500
3	1.0	0	0	0	0	1
4	0	1.0	0	0	0	1
5	1.0909	0.0568	0	0	0	0.647
6	1.0	0	0	0	0	0.750
7	1.1667	0	0	0	8.00	0.778
8	0	0.2857	0.1786	0	0	0.857
9	0.7333	0	0	0	3.30	0.800
10	0	0	1.0	0	0	1
11	0	0.1905	0.1190	0	0	0.286
12	0.1061	0.0455	0	0	0	0.136

Tabela 4: Minimização de *Inputs* - variáveis duais (λ_s), folgas e eficiência para o caso de dois *Outputs* e um *Input*

Apresentam-se na tabela 4, os resultados obtidos que devem ser interpretados em conjunto com a figura 3.

Veja-se por exemplo o caso do DMU 6 com eficiência de $3/4$, colinear com a origem, sendo o DMU 3 o seu ponto compósito. Enquanto o DMU 3, consome 6 unidades de *Input*, o DMU 6 consome 8, produzindo ambos exactamente os mesmos *Outputs*. Tal significa que para o DMU 6 atingir a performance do DMU 3, deveria reduzir o seu *Input* para $8 \times (6/8) = 6$ já que se considera a via da minimização do *Input* para atingir a eficiência.

O DMU 6 ilustra também o significado dos coeficientes λ_s . Neste caso o único λ não nulo é o λ_3 . Multiplicando os valores referentes ao DMU 3 por λ_3 , obtém-se o ponto compósito, que neste caso calha ser o próprio DMU de referência, que pode ser alcançado pela contracção de $3/4$ no *Input* do DMU 6.

Estes coeficientes indicam portanto quais são os DMUs de referência (ou grupo de pares) para um dado DMU em análise. No caso dos DMUs 1, 8 e 11, vê-se pelo gráfico que ao contraírem o seu *Input*, irão atingir a fronteira de eficiência na aresta limitada pelos DMUs 10 e 4; mas tal transparece também da consulta da tabela 4, em que para os DMUs em análise, os únicos λ_s não nulos são o λ_4 e o λ_{10} .

O que foi acima exposto, aplica-se também ao grupo de DMUs 5 e 12, apenas com a diferença do DMU 3 tomar agora o lugar do DMU 10.

Falta apenas esclarecer o significado das variáveis si^+ , que surgem quando a projecção eficiente⁴ dum DMU na fronteira fica localizada num troço paralelo a qualquer um dos eixos.

Vejamos o caso do DMU 2 cuja eficiência é de 0.5 pelo que, se reduzir o seu *Input* para metade, atingirá a fronteira no ponto $Ci2$ cujas coordenadas são $x1 = 2.5$; $y1 = 1.0$, $y2 = 22.5$. Nesta situação verifica-se que o $Ci2$ é idêntico ao DMU 10 que no entanto consegue alcançar mais 0.1 (ver figura 3) em $y1/x1$ do que $Ci2$, o que significa que este pode incrementar a sua produção de $y1$ em $s1^+ = 2.5 \times 0.1 = 0.25$ pelo que o ponto a alcançar pelo DMU2 para se tornar eficiente deverá ser o ponto $x1 = 2.5$; $y1 = 1.25$ e $y2 = 22.5$. Este ponto encontra-se sobreposto com o DMU 10 por se estar a trabalhar apenas a duas dimensões⁵.

Situação idêntica se passa com os DMUs 7 e 9 só que agora existe a possibilidade de melhoria na produção de $y2$ em vez de $y1$ pelo que a variável que mede esta folga se denomina $s2^+$. A estas variáveis, si^+ , deu-se o nome de variáveis de folga por analogia com as da Programação Linear⁶.

Repare-se que, em vez de reduzir o *Input* do DMU2 para metade, conservando os *Outputs*, também se poderia passar estes para o dobro enquanto o *Input* se mantinha constante. Estar-se-ia a optar pela via da maximização de *Outputs* o que, nesta situação de economias de escala constante, apenas altera o valor das variáveis de folga. Neste caso a variável de folga em $y1$ seria ainda 0.1 do *Input*, isto é, meia unidade do *Output* $y1$. No caso geral tem-se:

$$\frac{\text{Folgas em minimização de Inputs}}{\text{Folgas em maximização de Outputs}} = \text{Eficiência}$$

Este tipo de análise, que se acabou de fazer com recurso à tabela 4, é claramente uma análise de envolvente, em que se procura determinar uma envolvente dos dados, definida pelos vértices correspondentes às Unidades Organizacionais eficientes.

Os vértices correspondem, portanto, às Unidades Organizacionais eficientes e a partir duma combinação linear destes podem-se obter todos os pontos compósitos das Unidades Organizacionais ineficientes, à excepção das que se encontrem em arestas paralelas aos eixos, caso em que surge a necessidade de recorrer a variáveis de folga.

Repare-se que os λ s dão uma informação importante acerca de semelhanças entre DMUs. De facto, vê-se que o alvo do DMU 5 estará muito mais próximo do DMU 3 do que do DMU 4, o que se confirma pelos valores do respectivo $\lambda3$ e $\lambda4$. Por este raciocínio se poderia afirmar que o quociente $\lambda4/\lambda10$ deveria ser constante ao longo da semirecta que parte da origem para $Ci:8;11$ o que de facto acontece no caso dos DMUs 8 e 11 (ver figura 3 e tabela 4).

4 Optou-se por usar esta terminologia no sentido de explicar que estes pontos são obtidos por uma expansão radial do ponto até à fronteira e não como uma composição dos DMUs eficientes.

5 Repare-se que multiplicando por 3.2 as coordenadas acima referidas $X1 = 2.5$; $Y1 = 1.25$ e $Y2 = 22.5$ se obtém: $X1 = 8$; $Y1 = 4$ e $Y2 = 72...$ que são as coordenadas do DMU 10.

6 Neste caso em que existem folgas será mais correcto evitar a designação de ponto compósito pois os pontos assinalados como $Ci2$ e $Ci9$ não podem ser expressos como combinações lineares (com escalares λ s positivos) dos DMUs eficientes. É necessário entrar em linha de conta com as folgas.

Os cálculos anteriores basearam-se sobretudo nos vértices da fronteira de eficiência. De seguida aborda-se o problema sob o ponto de vista das normais às arestas. Os dois problemas estão relacionados, conduzindo ambos à mesma solução, já que um problema é o dual do outro.

Apresenta-se na tabela 5 as soluções referentes a este problema.

DMU	v_1	μ_1	μ_2	Eficiência	μ_1/μ_2
1	0.250	0.179	0.018	0.857	10
2	0.200	0.000	0.022	0.500	5E-05
3	0.167	0.152	0.008	1.000	20
4	0.100	0.091	0.005	1.000	20
5	0.091	0.083	0.004	0.647	20
6	0.125	0.114	0.006	0.750	20
7	0.111	0.111	0.000	0.778	111109
8	0.200	0.143	0.014	0.857	10
9	0.182	0.182	0.000	0.800	181816
10	0.125	0.089	0.009	1.000	10
11	0.100	0.071	0.007	0.286	10
12	0.125	0.114	0.006	0.136	20

Tabela 5: Problemas das arestas - multiplicadores e eficiência para o caso de dois *Outputs* e um *Input*

Como se pode constatar, as eficiências obtidas pelos dois métodos são iguais. Incluiu-se na última coluna o quociente entre os multiplicadores μ_1 e μ_2 , que nos fornece a taxa marginal de substituição entre os dois *Outputs*. Repare-se que, quer o DMU 1, quer o 8, são avaliados como igualmente eficientes⁷, embora este último seja menos produtivo no que se refere a y_1 . Poder-se-á então perguntar - quanto é admissível perder em y_1 para ganhar em y_2 ? A resposta é justamente o referido quociente, que torna a ilustrar a divisão dos DMUs por 4 classes.

Com a interpretação anteriormente dada, baseada numa certa ordem de importância dos *Outputs*, compreende-se que os multiplicadores que lhes estão associados sejam referidos por pesos.

Repare-se que temos taxas de substituição diferentes para os vários DMUs, sendo esta a característica fundamental da técnica de DEA - uma grande flexibilidade na avaliação do desempenho.

Este aspecto é frequentemente indesejável, pelo que é usual impor restrições aos pesos, além de estrita positividade, que os impede de serem nulos. Neste caso obrigou-se os pesos a serem maiores ou iguais a 10^{-6} .

⁷ De facto ambos os DMUs têm eficiência 0.857... já que o segmento de recta que os une está sobre uma contracção homotética de razão 0.857... da fronteira de eficiência que constitui uma curva de isoeficiência = 0.857...

Através de restrições aos pesos, é portanto possível incorporar informação adicional no modelo.

4.3 Dois Inputs e um Output

Vai considerar-se de seguida o modelo que incorpora x_1 , x_2 e y_2 ainda com economias de escala constante, o que normalizando os Inputs pelo Output y_2 , permitirá a sua representação gráfica a duas dimensões. A esta formulação é dada por vezes o nome de formulação recíproca.

DMU	x_1	x_2	y_2	x_1/y_2	x_2/y_2
1	4	140	28	0.14	5.00
2	5	90	22.5	0.22	4.00
3	6	36	12	0.50	3.00
4	10	300	60	0.17	5.00
5	11	66	16.5	0.67	4.00
6	8	36	12	0.67	3.00
7	9	12	6	1.50	2.00
8	5	210	30	0.17	7.00
9	5.5	33	5.5	1.00	6.00
10	8	288	72	0.11	4.00
11	10	80	20	0.50	4.00
12	8	8	4	2.00	2.00

Tabela 6: Inputs x_1 e x_2 normalizados pelo Output x_2

Desta vez vai-se optar pela via da maximização do Output. Neste caso, os pontos mais eficientes são os mais próximos da origem, sendo a medida de eficiência, por exemplo do DMU 11, dada pelo quociente entre as distâncias à origem do ponto **C11** (ponto Compósito do DMU 11) e do próprio DMU 11.

Constata-se que o DMU 4 deixa de ser eficiente, dando lugar ao DMU 7.

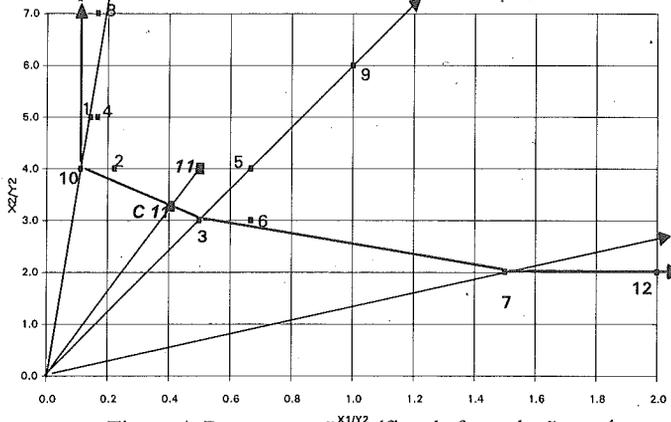


Figura 4: Representação gráfica da formulação recíproca

Os resultados obtidos para o problema da envolvente são apresentados na tabela 7, devendo contudo notar-se que os valores apresentados na última coluna são da "ineficiência" que, como o próprio nome indica, é o inverso da eficiência.

DMU	λ_3	λ_7	λ_{10}	$s1^-$	$s2^-$	z_j
1	0.0222	0	0.4833	0	0	1.252381
2	0.5000	0	0.2500	0	0	1.066667
3	1	0	0	0	0	1
4	0.3333	0	1	0	0	1.266667
5	1.8333	0	0	0	0	1.333333
6	0.9047	0.2857	0	0	0	1.047619
7	0	1	0	0	0	1
8	0	0	0.625	0	30	1.500030
9	0.9166	0	0	0	0	2.000000
10	0	0	1	0	0	1
11	1.5555	0	0.083	0	0	1.233333
12	0	0.6667	0	2	0	1.000002

Tabela 7: Resultados para o problema da envolvente em maximização de *Outputs*

É possível fazer considerações semelhantes às da análise realizada para a minimização de *Inputs*, nomeadamente no que respeita aos seguintes DMUs:

DMU 9 cujo ponto compósito é simplesmente o DMU 3 ($\lambda_3 = 0.9166$);

DMU 5 cujo ponto compósito é simplesmente o DMU 3 ($\lambda_3 = 1.8333$);

DMUs 1, 2, 4, 11 cujo grupo de pares é o DMU 3 e o DMU 10;

DMU 6 cujo grupo de pares é o DMU 3 e o DMU 7;

DMU 8 e 12 que apresentam folgas.

O DMU 12 encontra-se numa aresta paralela ao eixo $x1/y2$ pelo que deverá existir uma folga em $x1$ ($s1^- = 2$) o que significa que se poderia ter atingido a produção deste DMU poupando duas unidades do *Input* 2. Este facto é fácil de verificar graficamente; o DMU 12 consome mais 0.5 de $x1/y2$ do que o DMU 7, mas $y2 = 4$, confirma assim o resultado da tabela 7 que indica ser possível economizar 2 unidades de $x1$. Assim, o alvo a atingir pelo DMU 12 será $x1 = 6$, $x2 = 8$, $y2 = 4$ o que é justamente $2/3$ (λ_7) do ponto 7.

Repare-se que neste caso, como o ponto está na fronteira de eficiência, a folga é sempre a mesma quer se trate de minimização de *Inputs* quer se trate de maximização de *Outputs*.

DMU	v1	v2	μ_1	q_i
1	0.0214	0.0083	0.0357	1.252381
2	0.0267	0.0104	0.0444	1.066667
3	0.0500	0.0194	0.0833	1
4	0.0100	0.0039	0.0167	1.266667
5	0.0364	0.0141	0.0606	1.333333
6	0.0238	0.0238	0.0833	1.047619
7	0.0476	0.0476	0.1667	1
8	0.3000	1E-06	0.0333	1.500030
9	0.1091	0.0424	0.1818	2.000000
10	0.0083	0.0032	0.0139	1
11	0.0300	0.0117	0.0500	1.233333
12	1E-06	0.1250	0.2500	1.000002

Tabela 8: Resultados para o problema dos multiplicadores em maximização de *Outputs*

Sempre que existem folgas numa variável, o multiplicador que lhe corresponde, assume o mínimo valor que a formulação lhe permite, neste caso 10^{-6} , como fica bem claro por análise da tabela 8.

5. Economias de escala variável

Até agora considerou-se apenas a situação de economias de escala constante, em que, por exemplo, a uma duplicação dos factores de produção corresponderia a duplicação do produto. Sabe-se contudo que esta situação é pouco frequente, sendo um exemplo trivial o caso em que além de custos variáveis existam também custos fixos. O modelo BCC, cuja formulação matemática foi apresentada no ponto 2.3, permite lidar com economias de escala variável. Os exemplos apresentados seguidamente ilustram a sua aplicação.

5.1 Aplicação ao exemplo

No exemplo que se tem vindo a apresentar verifica-se que se todos os *Outputs* fossem subtraídos de 3 unidades (ordenada na origem da recta que contém a aresta $\overline{3-4}$) passaria a haver 2 DMUs eficientes: o 3 e o 4 (ver a figura 5).

O mesmo se passaria se se adicionassem 6 unidades ao *Input* (isto é subtrair-lhe a abcissa na origem que é -6).

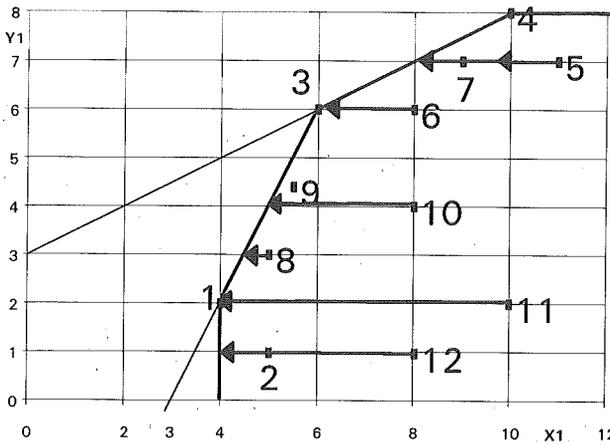


Figura 5: Modelo BCC minimização do Input

Estes factos podem ser confirmados na tabela 9 onde se verifica quais os DMUs eficientes na suposição destes serem avaliados após a correcção acima referida.

DMU	x1	y1	x1+6	y1-3	$(y1-3)/x1$	$y1/(x1+6)$	Normalizados pelo máximo da respectiva coluna (eficiências)	
							$(y1-3)/x1$	$y1/(x1+6)$
3	6.0	6.0	12.0	3.0	0.50	0.50	1.00	1.00
4	10.0	8.0	16.0	5.0	0.50	0.50	1.00	1.00
5	11.0	7.0	17.0	4.0	0.36	0.41	0.73	8
6	8.0	6.0	14.0	3.0	0.38	0.43	0.75	0.86
7	9.0	7.0	15.0	4.0	0.44	0.47	0.89	0.93

Tabela 9: Exemplo de cálculo de eficiência (modelo BCC)

Os valores apresentados na tabela 9 representam as eficiências dos respectivos DMUs. Na última coluna, em maximização de *Outputs*, e, na penúltima, em minimização de *Inputs*. Convém realçar que contrariamente ao que se verifica em economias de escala constante, onde as eficiências e os grupos de referência são os mesmos, quer analisados sob o prisma da maximização de *Outputs*, quer sob o da minimização de *Inputs*, aqui eles serão em geral diferentes. Efectivamente, a eficiência é maior em maximização de *Outputs*, por estarmos numa economia de escala decrescente.

No que respeita aos grupos de pares também há diferenças. O grupo de pares do DMU 5 em minimização de *Inputs* é formado pelos DMUs 3 e 4, enquanto que em maximização de *Outputs* o seu grupo de pares é apenas constituído pelo DMU 4, existindo uma folga na *Input* x_1 .

Para analisar os restantes DMUs, deve-se considerar uma fronteira de eficiência que não a recta que contém a aresta $\overline{3-4}$, mas sim a que contém a aresta $\overline{1-3}$ e que intercepta o eixo $\overline{0-x}$ em $x_1 = 3$ e o eixo $\overline{0-y}$ em $y = -6$.

8 A projecção deste DMU sobre a fronteira de eficiência não cai sobre a aresta em análise pelo que não faz sentido a sua inclusão nesta tabela.

Adoptando um procedimento idêntido ao anterior, obtém-se os resultados apresentados na tabela 10.

DMU	x1	y1	x1-3	y1+6	(y1+6)/x1	y1/(x1-3)	Normalizados pelo máximo da respectiva coluna (eficiências)	
							(y1+6)/x1	y1/(x1-3)
1	4.0	2.0	1.0	8.0	2.00	2.00	1	1
2	5.0	1.0	2.0	7.0	1.40	0.50	⁹	0.250
3	6.0	6.0	3.0	12.0	2.00	2.00	1	1
6	8.0	6.0	5.0	12.0	1.50	1.20	0.750	⁹
8	5.0	3.0	2.0	9.0	1.80	1.50	0.900	0.750
9	5.5	4.4	2.5	10.4	1.89	1.76	0.945	0.880
10	8.0	4.0	5.0	10.0	1.25	0.80	0.625	⁹
11	10.0	2.0	7.0	8.0	0.80	0.29	0.400	⁹
12	8.0	1.0	5.0	7.0	0.88	0.20	⁹	⁹

Tabela 10: Exemplo de cálculo de eficiência (modelo BCC)

Verifica-se que as eficiências em maximização de *Outputs* desta vez são menores que em minimização de *Inputs*, contrariamente ao que se passava no caso anterior (tabela 9), uma vez que nesta aresta se está em economias de escala crescente.

Conclui-se portanto que no caso de economias de escala variável a fronteira de eficiência já não é uma semirecta no 1º quadrante com origem em (0;0), mas sim a envolvente convexa de todas as observações.

Quanto aos troços da fronteira, paralelos aos eixos, a sua justificação e interpretação é apresentada seguidamente.

No caso do DMU 2 não há nada que permita admitir que ele possa manter o seu nível de produto, consumindo menos de 4 unidades de *x1*. De facto, neste caso, as 4 unidades de *x1* deverão ser encaradas como um limiar que só uma vez ultrapassado permite a produção de algo.

Já no caso do DMU 4 a interpretação é diferente, pois aqui trata-se sim, duma limitação do produto. Num método não paramétrico como este, baseado apenas nas observações, nada permite supor que se consiga produzir mais de 8 unidades de *y1*. Assim sendo, o DMU 5 em maximização de *Outputs* apenas pode aumentar o seu produto até às referidas 8 unidades e seguidamente reduzir o seu *Input* de 11 para 10 (folga de uma unidade no *Input* (*S⁻*)).

Apresenta-se seguidamente, na tabela 11, os resultados para o problema dos multiplicadores, em minimização de *Inputs*.

Nesta tabela apresenta-se a última coluna com 6 casas decimais apenas para ilustrar a existência da folga unitária nos DMUs 2 e 12.

⁹ A projecção deste DMU sobre a fronteira de eficiência não cai sobre a aresta em análise pelo que não faz sentido a sua inclusão nesta tabela.

O significado da constante na quarta coluna da tabela é semelhante ao significado da ordenada na origem. De facto, a constante é igual ao produto do simétrico da ordenada na origem, da recta que contém a aresta em causa, pelo multiplicador μ .

DMU	Variáveis		Constante	Multiplicadores		Eficiência
	x1	y1	v_0	v	μ	ω_0
1	4.0	2.0	1.0000	0.2500	1E-06	1.000000
2	5.0	1.0	0.8000	0.2000	1E-06	0.799999
3	6.0	6.0	0.5000	0.1667	0.0833	1.000000
4	10.0	8.0	-0.6000	0.1000	0.2000	1.000000
5	11.0	7.0	-0.5455	0.0909	0.1818	0.727273
6	8.0	6.0	-0.7500	0.1250	0.2500	0.750000
7	9.0	7.0	-0.6667	0.1111	0.2222	0.888889
8	5.0	3.0	0.6000	0.2000	0.1000	0.900000
9	5.5	4.4	0.5455	0.1818	0.0909	0.945455
10	8.0	4.0	0.3750	0.1250	0.0625	0.625000
11	10.0	2.0	0.3000	0.1000	0.0500	0.400000
12	8.0	1.0	0.5000	0.1250	1E-06	0.499999

Tabela 11: Resultados para o problema dos multiplicadores em minimização de *Inputs*

NOTA: Este artigo foi elaborado no âmbito de uma tese de doutoramento apoiada pelo programa Ciência

6. Bibliografia

- [1] Banker, R.D., Charnes, A., and Cooper, W.W., Some models for estimating technical and scale inefficiencies in Data Envelopment Analysis, *Management Science* 30 (1984) 1078-1092. (The "BCC" Model).
- [2] Boussofiene, A., Dyson, R.G., and Thanassoulis, E., Applied data envelopment analysis, *European Journal of Operational Research* 52 (1991) 1-15.
- [3] Charnes, A., Cooper, W.W., Programming with linear fractional functionals, *Naval Research Logistics Quarterly* 9 (1962) 181-185.
- [4] Charnes, A., Cooper W.W., and Rhodes, E., Measuring the efficiency of decision making units, *European Journal of Operational Research* 2 (1978) 429-444. (The "CCR" Model)
- [5] Charnes, A., Cooper, W.W., and Rhodes, E., Short communication: measuring the efficiency of decision making units, *European Journal of Operational Research* 3 (1979) 339.
- [6] Dyson, R.G., and Thanassoulis, E., Reducing weight flexibility in data envelopment analysis, *Journal of the Operational Research Society* 39 (1988) 563-576.
- [7] Farrell, M.J., The measurement of Productive Efficiency, *Journal of Royal Statistical Society A* 120 (1957) 253-281.
- [8] Santos, J.M.A., Ordenação de unidades eficientes por aplicação de técnicas de data envelopment analysis, *Tese de Mestrado*, Instituto Superior Técnico, Universidade Técnica de Lisboa, 1994.
- [9] Seiford, L.M., A bibliography of data envelopment analysis (1978-1990): version 5.0, Department of Industrial Engineering and Operations Research, The University of Massachusetts, Amherst MA 01003, USA, 1990.

Apêndice

Considere-se que se está a resolver um caso com n DMUs que consomem m *Inputs* e produzem s *Outputs*. Assim sendo resolvem-se n programas lineares (um para cada DMU_j) fazendo $(X_0, Y_0) = (X_j, Y_j)$ para $j = 1, \dots, n$.

As matrizes são representadas a **BOLD**.

Apresentam-se de seguida as formulações para os dois modelos bem como a respectiva nomenclatura.

Dados:

- X_0 *Inputs* do DMU_0 (DMU em análise).
- Y_0 *Outputs* do DMU_0 (DMU em análise).
- X Matriz dos *Inputs* de todos os DMUs.
- Y Matriz dos *Outputs* de todos os DMUs.

Unidades auxiliares:

- 0 Matriz nula de dimensão conformável.
- 1 Matriz de uns de dimensão conformável.
- ε Infinitamente pequeno, positivo (geralmente 10^{-6})
- θ Variável auxiliar
- ϕ Variável auxiliar

Variáveis:

- S^+ Matriz coluna das folgas nos *Outputs*.
- S^- Matriz coluna das folgas nos *Inputs*.
- λ Matriz coluna das variáveis duais.
- z_0 Eficiência (problema da envolvente em minimização de *Inputs*).
- w_0 Eficiência (problema dos multiplicadores em minimização de *Inputs*).
- μ Matriz linha dos multiplicadores (pesos) dos *Outputs*.
- v Matriz linha dos multiplicadores (pesos) dos *Inputs*.
- u_0 Constante indicadora de economias de escala crescente ou decrescente.
- v_0 Constante indicadora de economias de escala crescente ou decrescente.
- t_0 Ineficiência (problema da envolvente em maximização de *Outputs*).
- q_0 Ineficiência (problema dos multiplicadores em maximização de *Outputs*).

Modelo CCR

Minimização de *Inputs*

Problema da envolvente

$$\min z_0 = \theta - \varepsilon 1S^+ - \varepsilon 1S^-$$

$$\theta, \lambda, S^+, S^-$$

s.a.:

$$Y\lambda - S^+ = Y_0$$

$$\theta X_0 - X\lambda - S^- = 0$$

$$\lambda, S^+, S^- \geq 0$$

Problema dos multiplicadores

$$\max w_0 = \mu Y_0$$

$$\mu, v$$

$$\text{s.a.:} \quad vX_0 = 1$$

$$\mu Y - vX \leq 0$$

$$-\mu \leq -\varepsilon 1$$

$$-v \leq -\varepsilon 1$$

Maximização de *Outputs*

Problema da envolvente

$$\max t_0 = \phi + \varepsilon 1S^+ + \varepsilon 1S^-$$

$$\phi, \lambda, S^+, S^-$$

s.a.:

$$\phi Y_0 - Y\lambda + S^+ = 0$$

$$X\lambda + S^- = X_0$$

$$\lambda, S^+, S^- \geq 0$$

Problema dos multiplicadores

$$\min q_0 = vX_0$$

$$\mu, v$$

$$\text{s.a.:} \quad \mu Y_0 = 1$$

$$-\mu Y + vX \leq 0$$

$$\mu \geq \varepsilon 1$$

$$v \geq \varepsilon 1$$

Destas formulações resulta que as eficiências nunca diminuirão, por inclusão de mais um *Input* ou *Output*, pois tal equivale a acrescentar uma restrição no problema das envolventes. Este facto já tinha sido anteriormente verificado quando se alargou a análise do exemplo de X1, Y1 a X1, Y1 e Y2.

Nota: Considerou-se estar definida a seguinte relação de ordem entre matrizes de dimensão $n \times m$: $A \geq B$ sse $a_{k,I} \geq b_{k,I} \forall k, I \in \{1, n\} \times \{1, m\}$ e $A \leq B$ sse $a_{k,I} \leq b_{k,I} \forall k, I \in \{1, n\} \times \{1, m\}$.

Modelo BCC

Minimização de *Inputs*

Problema da envolvente

$$\min z_0 = \theta - \varepsilon 1S^+ - \varepsilon 1S^-$$

$$\theta, \lambda, S^+, S^-$$

s.a.:

$$Y\lambda - S^+ = Y_0$$

$$\theta X_0 - X\lambda - S^- = 0$$

$$1\lambda = 1$$

$$\lambda, S^+, S^- \geq 0$$

Problema dos multiplicadores

$$\max w_0 = \mu Y_0 + u_0$$

$$\mu, v, u_0$$

s.a.:

$$vX_0 = 1$$

$$\mu Y - vX + u_0 1 \leq 0$$

$$-\mu \leq -\varepsilon 1$$

$$-v \leq -\varepsilon 1$$

$$u_0 \in \mathbf{R}$$

Maximização de *Outputs*

Problema da envolvente

$$\max t_0 = \phi + \varepsilon 1S^+ + \varepsilon 1S^-$$

$$\phi, \lambda, S^+, S^-$$

s.a.:

$$\phi Y_0 - Y\lambda + S^+ = 0$$

$$X\lambda + S^- = X_0$$

$$1\lambda = 1$$

$$\lambda, S^+, S^- \geq 0$$

Problema dos multiplicadores

$$\min q_0 = vX_0 + v_0$$

$$\mu, v, + u_0$$

s.a.:

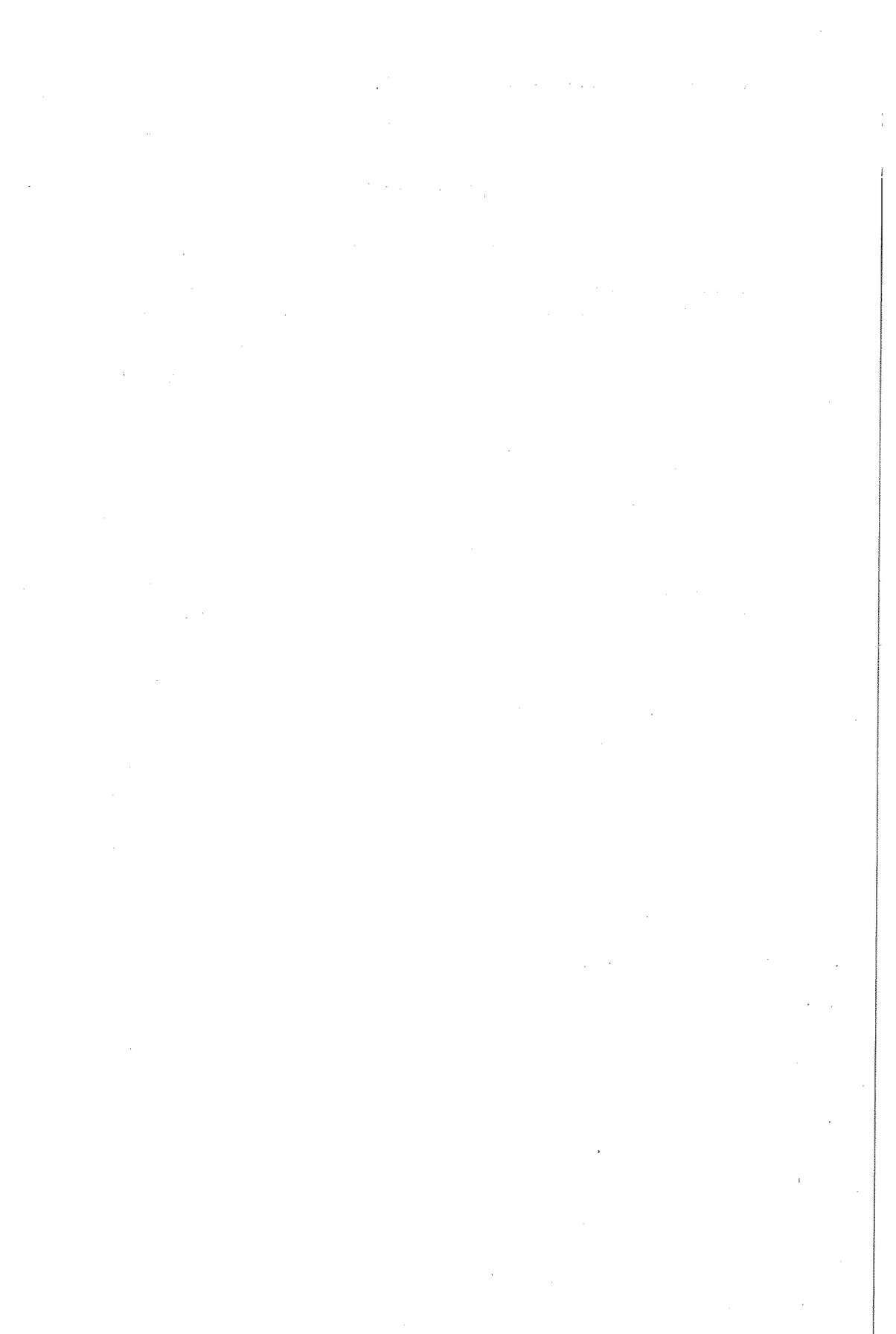
$$\mu Y_0 = 1$$

$$-\mu Y + vX + v_0 1 \leq 0$$

$$\mu \geq \varepsilon 1$$

$$v \geq \varepsilon 1$$

$$v_0 \in \mathbf{R}$$



PRÉMIO APDIO-INTERLOG 94

Os prémios APDIO-INTERLOG 94 foram instituídos com o objectivo de galardoar trabalhos originais de Investigação Operacional - contribuições teóricas, aplicações ou *software* - desenvolvidos por alunos de cursos de licenciatura ou de mestrado de universidades portuguesas.

Por deliberação do júri que avaliou os trabalhos de licenciatura, não foi atribuído o prémio nem menções honrosas. Assim, incluem-se neste número da Revista apenas os trabalhos de mestrado que foram premiados:

- PRÉMIO APDIO-INTERLOG PARA OS TRABALHOS DE MESTRADO

"Um Sistema de Apoio à Decisão de Planeamento de Produção", por Ana Luísa Respício (baseado numa dissertação do Curso de Mestrado em Investigação Operacional e Engenharia de Sistemas, Departamento de Engenharia Civil, Instituto Superior Técnico, Universidade Técnica de Lisboa).

- MENÇÃO HONROSA PARA OS TRABALHOS DE MESTRADO

"Uma Heurística Tabú para a Determinação de Rotas de Veículos", por César Augusto de Sousa Vale Rego (baseado numa dissertação do Curso de Mestrado em Investigação Operacional e Engenharia de Sistemas, Departamento de Engenharia Civil, Instituto Superior Técnico, Universidade Técnica de Lisboa).

- MENÇÃO HONROSA PARA OS TRABALHOS DE MESTRADO (Extra Concurso)

"Um Estudo sobre o Método de Newton para Optimização Sem Restrições"; por João Luís Cardoso Soares (baseado num trabalho de Síntese realizado no âmbito de Provas de Aptidão Pedagógica e Capacidade Científica, Departamento de Matemática, Universidade de Coimbra).

Regista-se, com grande apreço, a elevada qualidade destes trabalhos e formula-se, em relação aos seus autores, o voto de que prossigam a sua carreira técnico-científica com os elevados padrões com que souberam iniciá-la.

À empresa INTERLOG, INFORMÁTICA, S.A. é devida um palavra de profundo reconhecimento pelo seu valioso patrocínio, que viabilizou a realização deste concurso ao qual se atribui uma importância crucial no contexto das actividades da APDIO.

Rui Campos Guimarães
Presidente da APDIO

1. The first part of the document discusses the importance of maintaining accurate records of all transactions and activities. It emphasizes that this is crucial for ensuring transparency and accountability in the organization's operations.

2. The second part of the document outlines the various methods and tools used to collect and analyze data. It highlights the need for consistent and reliable data collection processes to support informed decision-making.

3. The third part of the document focuses on the role of technology in data management and analysis. It discusses how modern software solutions can streamline data collection, storage, and reporting, thereby improving efficiency and accuracy.

4. The fourth part of the document addresses the challenges associated with data management, such as data quality, security, and privacy. It provides strategies to mitigate these risks and ensure that data is used responsibly and ethically.

5. The fifth part of the document concludes by summarizing the key findings and recommendations. It stresses the importance of ongoing monitoring and evaluation to ensure that data management practices remain effective and aligned with the organization's goals.

6. The final part of the document provides a detailed overview of the data management framework, including the roles and responsibilities of various stakeholders. It also includes a list of key performance indicators (KPIs) used to measure the success of the data management process.

7. The document concludes with a call to action, encouraging all employees to take ownership of their data and contribute to the overall success of the organization's data management strategy.

UM SISTEMA DE APOIO À DECISÃO NO PLANEAMENTO DE PRODUÇÃO(*)

Ana Respício

Departamento de Informática
Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa
Campo Grande
1700 Lisboa

Abstract

We present a Decision Support System (DSS) for production planning of Kraftliner paper rolls on a make-to-order basis. Paper of several basic weights and qualities is produced in jumbo rolls which are cut according to the widths, diameters and special cutting and packaging requirements of the ordered rolls. We use a hierarchical approach and the designed hierarchy consists of the following levels: (i) aggregate production planning, (ii) scheduling and sequencing of basic weights and qualities, (iii) optimisation of cutting patterns, and (iv) scheduling and sequencing of cutting patterns. The criteria in the hierarchy are optimised lexicographically. We present optimisation models for levels (i) and (iii).

We provide an overview of the current version of the DSS, pointing out its architecture and its functionalities. An example illustrating the construction of a cutting plan is also presented.

Resumo

Neste trabalho descreve-se um Sistema de Apoio à Decisão (SAD) para o planeamento da produção de rolos de papel *kraftliner* segundo uma política de "produzir por encomenda". O papel é produzido com diferentes gramagens e qualidades e é cortado de modo a satisfazer as encomendas.

É desenhada uma abordagem hierárquica, em que o problema global de decisão é particionado em quatro níveis: (i) planeamento de produção agregado para as diferentes gramagens, (ii) sequenciamento e calendarização da produção de gramagens, (iii) optimização dos padrões de corte e (iv) sequenciamento e calendarização dos padrões de corte. Os sub-problemas na hierarquia são tratados lexicograficamente. Apresentam-se os modelos para os sub-problemas nos níveis (i) e (iii).

Apresenta-se o SAD que foi desenvolvido para o tratamento deste problema, na sua versão actual. Descreve-se sumariamente a arquitectura do SAD e as principais funções por ele disponibilizadas. É apresentado um exemplo de utilização do SAD na elaboração de um plano de corte.

Keywords

Decision Support Systems, Production Planning, Linear Programming.

1. Introdução

O presente trabalho descreve um Sistema de Apoio à Decisão (SAD) no planeamento da produção de rolos de papel *kraftliner*, desenvolvido para aplicação no Serviço de Planeamento e Controlo de Encomendas, da unidade fabril de Viana do Castelo, da Portucel. O desenvolvimento do sistema integrou-se num projecto conjunto entre a empresa Portucel e o ICAT - Instituto de Ciência Aplicada e Tecnologia da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa.

(*) Trabalho realizado no âmbito da dissertação de mestrado [10].

O processo de produção de rolos de papel engloba duas fases distintas: a fase de produção duma folha de papel e a fase do corte dessa folha com vista à obtenção de rolos com as características pretendidas. Em cada uma destas fases podem ser identificados problemas de diferentes contextos.

No processo de tomada de decisão no problema de planeamento da produção em estudo, consideram-se vários objectivos de carácter conflituoso e fortes restrições. Este processo engloba um grande número de decisões, a vários níveis, e que diferem em grau de complexidade, âmbito e efectividade ao longo dum horizonte temporal. Uma abordagem hierárquica do problema de planeamento da produção revela-se adequada. A decomposição em sub-problemas mostra-se vantajosa, na medida em que, possibilita uma maior concentração em cada um dos níveis de tomada de decisão assim como uma maior coordenação entre as diferentes decisões.

Justifica-se a necessidade do desenvolvimento e aplicação dum SAD, pois deve ser facultada ao agente de decisão a possibilidade de tirar partido da sua experiência e intuição para criar e avaliar soluções alternativas isoladamente ou com base nas geradas pelo sistema.

Na secção 2. caracteriza-se o problema de tomada de decisão e desenha-se a hierarquia que foi considerada. Na terceira secção são apresentados e discutidos os modelos desenvolvidos para os sub-problemas identificados em dois dos níveis na decomposição do problema global: o modelo de planeamento agregado e o modelo de optimização dos padrões de corte. Na quarta secção apresenta-se o SAD, descrevendo a sua arquitectura e as principais funções disponibilizadas. Na última secção tecem-se algumas apreciações finais sobre o trabalho desenvolvido, suas vantagens e limitações. Sugerem-se ainda algumas evoluções futuras, no âmbito da cooperação entre a empresa Portucel e o ICAT.

2. Caracterização do Problema

2.1 Contexto

O centro de produção da Portucel, em Viana do Castelo, integra duas unidades fabris cujo funcionamento se interrelaciona: a fábrica de pasta de papel e a fábrica de papel. A primeira destas unidades produz pasta de papel, que constitui a principal matéria-prima para a produção de rolos de papel Portoliner¹, na fábrica de papel. É sobre o planeamento da produção destes rolos que incide este trabalho.

Um rolo de papel Portoliner é caracterizado pelos seguintes atributos:

- Gramagem (existem nove gramagens);
- Largura (existem 380 larguras com valor compreendido entre 70 e 261 centímetros);
- Diâmetro (existem dois diâmetros: 125 e 140 centímetros);

¹ Portoliner é a marca do papel *kraftliner* produzido pela Portucel.

- Instruções Especiais de Qualidade e Fabrico (IEQF) - grupo de códigos, correspondendo a cada um desses códigos uma exigência especial de qualidade do papel e/ou fabrico do rolo (o número de possíveis IEQF é variável).

Observando todas as possíveis combinações destes atributos verifica-se que o número de produtos finais é muito elevado. Tal facto dificulta a estimação da procura, impossibilitando a satisfação das encomendas a partir das disponibilidades em stock. As grandes dimensões dos rolos finais e a possível degradação do papel por acção do tempo tornam inoportável o seu armazenamento por longos períodos. Todo o processo de produção é assim orientado segundo a política de "produzir por encomenda". Apesar da empresa possuir os seus próprios armazéns, o custo de armazenamento é extremamente elevado devido ao elevado valor do custo do capital empatado. Consequentemente, tem-se como objectivo a minimização dos níveis de stock.

A empresa tem como objectivo a satisfação plena dos desejos do cliente. Assim, todas as encomendas têm de ser satisfeitas na data de entrega estipulada. É permitido que uma encomenda seja cancelada em qualquer fase do processo. Alguns clientes têm acordos com a empresa que estabelecem o prazo máximo de entrega de uma encomenda.

O estado do sistema é modificado amiude por factores externos, não domináveis, nem previsíveis. Exemplos de eventos nestas condições são o cancelamento de encomendas, a alteração da data de entrega em função da disponibilidade dos meios de transporte (especialmente no caso do transporte se fazer por mar) ou a formulação de encomendas por parte de clientes com contratos especiais. Para minorar o impacto dessas alterações a tomada de decisão é adiada tanto quanto possível. Por outro lado, é imprescindível que exista uma grande flexibilidade de redefinição do plano de produção, de modo a minimizar o impacto de consecutivas alterações do mesmo.

Na indústria papeleira é comum o uso de tolerâncias percentuais nas quantidades a fornecer para satisfação das encomendas. Dado que, na maioria dos casos, os clientes formulam as quantidades encomendadas em termos de tonelagem, o número de rolos que corresponde a uma quantidade expressa em toneladas é quase sempre um número não inteiro. Considera-se que uma encomenda é satisfeita quando as quantidades dos vários produtos fornecidas estão dentro dos limites especificados pela tolerância em vigor. O valor desta tolerância é igual para todos os produtos e todos os clientes, variando apenas temporalmente em função da conjuntura do mercado.

2.2 O Processo de Produção

O funcionamento da fábrica é ininterrupto e a produção é do tipo contínuo (a sequência de operações no processo de produção é idêntica para todos os produtos).

A partir de uma mistura, cuja principal componente é pasta de papel, é produzida uma folha contínua de papel com determinadas características em termos de gramagem e qualidade. Esta folha é automaticamente enrolada num carretel, formando-se assim um rolo de grandes dimensões.

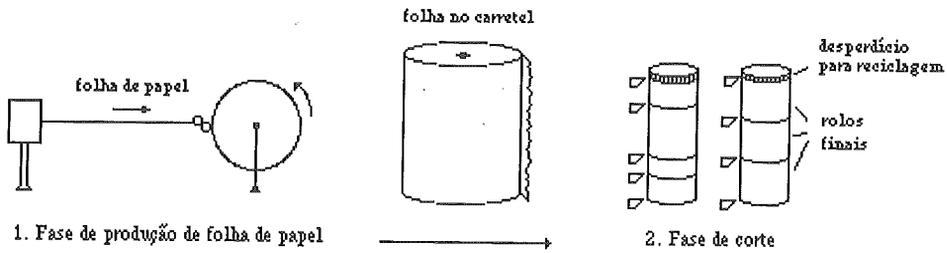


Figura 1: O processo de produção

Passa-se então à fase de corte, onde a folha no carretel é desenrolada e cortada, longitudinalmente, por uma fila de navalhas paralelas entre si. A configuração das navalhas corresponde à sequência de larguras dos rolos que se pretendem obter. As folhas resultantes deste corte são enroladas paralelamente em vários rolos, sendo a largura de cada um destes rolos definida pela distância entre o par de navalhas consecutivas que originou essa folha. Quando estes rolos atingem o diâmetro requerido a folha no carretel é cortada transversalmente. A obtenção de um conjunto de rolos nestas condições, por este processo, denomina-se por bobinagem. Enquanto for possível, as bobinagens repetem-se a partir da mesma folha no carretel.

Por fim, os rolos finais são embalados e catalogados de acordo com as exigências de fabrico e entregues em armazém a partir de onde serão expedidos pelos vários canais de distribuição.

2.3 O Processo de Planeamento Utilizado pela Empresa

A empresa utilizava implicitamente um sistema de planeamento hierárquico. No entanto, os meios informáticos disponíveis eram apenas utilizados para tratamento da informação.

A empresa tem a noção de que a utilização de uma ferramenta informática de apoio ao processo de planeamento da produção conduz a uma redução considerável dos custos. Esta ferramenta deve permitir a utilização de técnicas correctas e adequadas aos vários sub-problemas, a geração e comparação de cenários alternativos, o que é humanamente impossível de realizar em tempo real, assim como uma maior coordenação das diferentes tarefas, inter-actuantes, do planeamento.

Considera-se o mês particionado em três módulos de produção, cada um com dez dias. A afectação da produção dum lote a um determinado módulo de produção é feita com base na data de entrega da encomenda que inclui esse lote.

A sequência de gramagens a produzir mensalmente é fixa, isto é, a cada módulo de um mesmo mês está previamente afecta a sequência de gramagens a produzir, mantendo-se a mesma sequência em todos os meses. Nem todas as gramagens são produzidas em cada módulo, sendo produzidas em todos os módulos as gramagens consideradas de grande procura. Para cada módulo, atendendo às datas de entrega das encomendas pendentes e à

sequência de gramagens a observar, são estabelecidas as quantidades de cada gramagem a produzir.

Em cada módulo do mês definem-se os planos de corte para as diferentes gramagens. Este processo tem como objectivo minimizar o desperdício resultante do corte tendo em atenção as incompatibilidades geradas pelos requisitos de qualidade e fabrico. A resolução deste problema tinha apenas como suporte a experiência e intuição do responsável por essa função. O plano de corte era elaborado "por tentativas" com base em "papel e lápis" e utilizando a estratégia *o rolo x será cortado no padrão k*. Iterativamente trocavam-se rolos entre os padrões até se obter uma solução satisfatória em termos de desperdício e em que não existissem incompatibilidades de produção.

2.4 Abordagem Hierárquica

Uma abordagem hierárquica do problema de planeamento da produção consiste em definir uma hierarquia de sub-problemas no problema original, caracterizando as influências entre os vários níveis dessa hierarquia. Os sub-problemas no nível mais elevado têm associadas decisões em termos mais agregados ao longo do horizonte de planeamento. A desagregação é feita em termos temporais (considerando como horizonte sub-intervalos do horizonte inicial) e em termos das características dos produtos (considerando características ignoradas ao nível de maior agregação). Decisões num determinado nível podem influenciar as decisões num ou vários dos outros níveis, regra geral, por restrição do espaço de soluções que lhe está associado. No entanto, não existe um processo completo de retroacção² das decisões nos níveis inferiores relativamente às decisões tomadas ao mais elevado nível.

Uma abordagem hierárquica do problema de planeamento da produção tem vantagens, pois

- a agregação/desagregação da informação permite uma análise direccionada nas várias fases do processo de produção,
- a estratificação da informação simplifica o seu tratamento, e
- a tomada de decisão ao nível mais desagregado é adiada tanto quanto possível relativamente à sua implementação, reduzindo-se assim o nível de incerteza.

Por outro lado, o problema global de tomada de decisão dificilmente poderia ser modelizado através dum modelo analítico único, pois engloba decisões a vários níveis, interrelacionados e onde a intervenção do agente de decisão é vantajosa.

A hierarquia foi conceptualizada com base na estrutura do processo de produção e na organização da empresa em termos de tomada de decisão. Identificam-se os problemas nos níveis que se descrevem de seguida.

² Por processo completo de retroacção entende-se um processo baseado em princípios de decomposição matemática que garantam a optimalidade em todo o problema.

(i) Planeamento de produção agregado para as diferentes gramagens (agregação no tempo e nas características dos produtos)

O planeamento agregado tem como finalidade determinar níveis de produção para as diferentes gramagens, ao longo dum horizonte de planeamento, cuja duração é aproximadamente dois meses.

As decisões a este nível consistem em definir as quantidades a produzir de modo a satisfazer toda a procura no horizonte de planeamento, sem exceder a capacidade do sistema produtivo. De modo a tornar mínimo o impacto das flutuações da procura ao longo do horizonte temporal, considera-se possível armazenar parte da produção nos períodos em que a procura seja baixa, para fazer face a períodos em que a procura seja alta. O critério de optimização é a minimização dos custos de armazenamento.

As decisões a este nível são dadas como instruções para o nível seguinte da hierarquia.

(ii) Sequenciamento e calendarização da produção de gramagens (desagregação no tempo)

Dadas as quantidades a produzir das várias gramagens definidas no nível anterior é elaborada a sequência e calendarização da produção das diferentes gramagens. O horizonte de planeamento é o considerado no nível (i). Como critério de optimização tem-se a minimização dos custos associados à mudança de gramagem (custos de *set-up*). A desagregação é feita pela afectação da sequência de produção das diferentes gramagens aos módulos no horizonte de planeamento de modo a satisfazer a procura. Efectuam-se os ajustamentos necessários relativamente às decisões tomadas no nível (i).

As decisões a este nível são dadas como instruções para o nível seguinte da hierarquia.

(iii) Determinação dos padrões de corte (desagregação nas características dos produtos)

Para cada módulo no horizonte de planeamento, para cada gramagem e para cada diâmetro, determinam-se os padrões de corte a utilizar na fase de corte. Os rolos nesses padrões são afectos às encomendas, de acordo com as incompatibilidades de produção definidas pelo atributo IEQF.

O critério de optimização é a minimização do desperdício resultante do corte. Consideram-se as restrições impostas pelo equipamento (os números mínimo e máximo de rolos num padrão são três e seis, respectivamente) e as restrições relativas às larguras máxima e mínima dos rolos.

Reduções do valor do desperdício são obtidas pela antecipação da produção e/ou conversão para o outro diâmetro de rolos cuja largura e o atributo IEQF assim o permitam ou pela produção de rolos para stock. Efectuam-se os consequentes ajustamentos no plano agregado. Implementam-se as decisões relativas à produção de gramagens.

As decisões a este nível são dadas como instruções para o nível seguinte da hierarquia.

(iv) Sequenciamento e calendarização dos padrões de corte (desagregação no tempo)

Para cada módulo, sequenciam-se os padrões de corte determinados no nível (iii). O critério de optimização é a minimização do número de movimentos nas navalhas necessário para cortar esses padrões (custos de *set-up*).

Neste nível são implementadas todas as decisões.

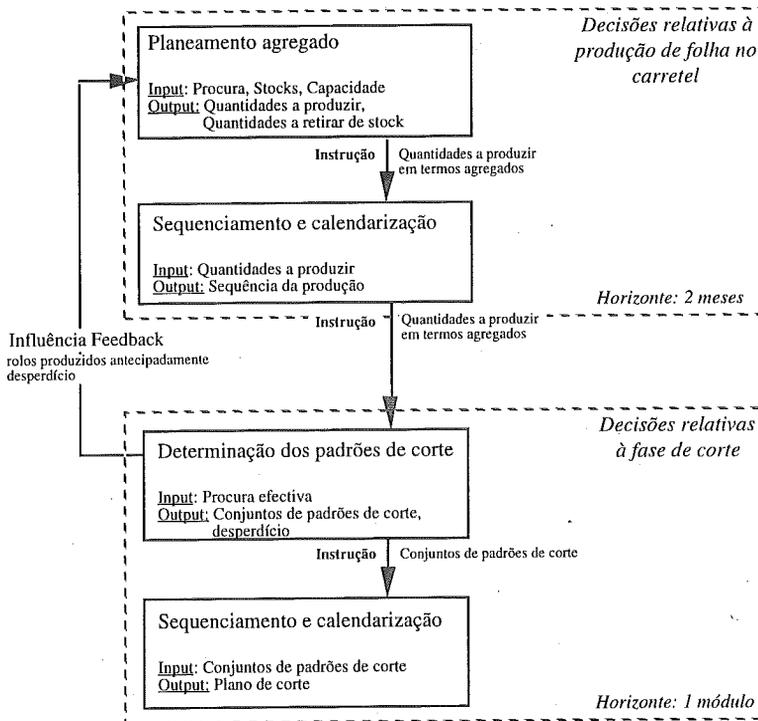


Figura 2: Os níveis na hierarquia e as influências das decisões

O replaneamento é feito essencialmente com base num esquema de horizonte rolante. Em cada módulo de produção é redefinido o plano de produção agregado para um horizonte, com duração aproximada a seis módulos de produção, com início no módulo seguinte. Os sub-problemas nos níveis da hierarquia são tratados lexicograficamente. Decisões num determinado nível estabelecem instruções para o nível seguinte. Alterações nos dados relativos às encomendas, ocorridas durante o horizonte de planeamento, e a antecipação da produção de determinados rolos (no nível (iii)) conduzem à actualização dos dados relevantes para o planeamento agregado. Assim, o replaneamento no nível (i) da hierarquia recebe uma influência de *feedback* definida pelo nível (iii).

Foram desenvolvidos e implementados modelos matemáticos para os sub-problemas nos níveis (i) e (iii), uma vez que esses foram considerados prioritários. Relativamente aos sub-problemas de sequenciamento e calendarização apenas se perspectivaram algumas regras.

Decisões a esse nível continuam a ser tomadas informalmente pelo responsável pelo planeamento.

3. Modelos e regras para a resolução dos sub-problemas

3.1 Planeamento de produção agregado

Pretende-se elaborar um plano das quantidades a produzir num horizonte de planeamento particionado em intervalos de tempo com igual amplitude entre si: os módulos de produção. A procura de cada produto em cada módulo de produção é conhecida e não constante ao longo do horizonte de planeamento.

Assumindo que os custos associados ao programa de produção são representados como uma função linear das variáveis do programa, o problema pode ser formulado como um modelo linear, considerando restrições também lineares.

Assume-se que não se produz para armazenamento e que a procura será totalmente satisfeita. No entanto, admite-se que a produção de um produto, num módulo, possa ser armazenada, em parte ou na totalidade, até à sua data de entrega, desde que essa data esteja num dos módulos do horizonte de planeamento. O custo unitário de armazenamento entre dois quaisquer módulos do horizonte de planeamento é estimado pelo custo de oportunidade do capital empatado numa tonelada de papel. Para cada produto é considerado o nível de stock inicial, a partir do qual pode ser satisfeita, em parte ou na globalidade, a procura desse produto nos vários módulos. Garante-se assim que a produção no horizonte de planeamento não provocará um acréscimo nos níveis de armazenamento.

É conhecida a capacidade de produção do sistema para cada um dos módulos de produção. Não são considerados custos de produção nem custos de alteração dos níveis de produção.

Assume-se a existência de uma tolerância que especifica as quantidades mínima e máxima que permitem satisfazer a procura dum produto, em qualquer módulo. O valor dessa tolerância é conhecido, igual para todos os produtos e constante ao longo do horizonte de planeamento.

De modo a apresentar uma formulação matemática, consideremos:

G : conjunto das gramagens;

D : conjunto dos diâmetros;

W : conjunto das larguras;

α : tolerância a observar na satisfação das encomendas;

T : número de módulos que constituem o horizonte de planeamento;

DEM_t^{gdw} : quantidade (toneladas) de rolos com diâmetro d e largura w , da gramagem g , a entregar no t -ésimo módulo do horizonte de planeamento, $g \in G$, $d \in D$, $w \in W$, $t = 1, \dots, T$;

INV^{gdw} : quantidade (toneladas) de rolos com diâmetro d e largura w , da gramagem g , em armazém no início do horizonte de planeamento, $g \in G$, $d \in D$, $w \in W$;

- CAP_t : capacidade (toneladas) de produção no t-ésimo módulo do horizonte de planeamento, $t=1, \dots, T$,
- h_{kt}^{gdw} : custo unitário (por tonelada) de armazenamento desde o k-ésimo até ao t-ésimo módulo do horizonte de planeamento, de um rolo com diâmetro d e largura w , da gramagem g , $g \in G$, $d \in D$, $w \in W$, $k=1, \dots, T$, $t=k, \dots, T$;
- h_{0t}^{gdw} : custo unitário (por tonelada) de armazenamento desde o início do horizonte de planeamento até ao t-ésimo módulo do mesmo, de um rolo com diâmetro d e largura w , da gramagem g , $g \in G$, $d \in D$, $w \in W$, $t=1, \dots, T$;
- c_t : penalidade sofrida (por tonelada) se a capacidade de produção no t-ésimo módulo é insuficiente para satisfazer a procura nesse módulo e nos módulos futuros, $t=1, \dots, T$;
- p_{kt}^{gdw} : lucro unitário (por tonelada) associado à utilização da capacidade de produção excedente no módulo k para produzir rolos com diâmetro d e largura w , da gramagem g , a entregar no módulo t , $g \in G$, $d \in D$, $w \in W$, $k=1, \dots, T$, $t=k, \dots, T$;
- x_{kt}^{gdw} : quantidade (toneladas) de rolos com diâmetro d e largura w , da gramagem g , a produzir no k-ésimo módulo para entrega no t-ésimo módulo do horizonte de planeamento, $g \in G$, $d \in D$, $w \in W$, $k=1, \dots, T$, $t=k, \dots, T$;
- x_{0t}^{gdw} : quantidade (toneladas) de rolos com diâmetro d e largura w , da gramagem g , em armazém no início do horizonte de planeamento e a entregar no t-ésimo módulo do mesmo, $g \in G$, $d \in D$, $w \in W$, $t=1, \dots, T$
- y_{kt}^{gdw} : quantidade (toneladas) adicional que pode ser entregue para satisfazer a procura de rolos com diâmetro d e largura w , da gramagem g , a produzir no módulo k para entregar no módulo t , $g \in G$, $d \in D$, $w \in W$, $k=1, \dots, T$, $t=k, \dots, T$.

Pretendemos encontrar valores em $\{x_{kt}^{gdw} : g \in G, d \in D, w \in W, k=0, \dots, T, t=1, \dots, T, k \leq t\}$ que minimizam o valor de

$$F = \sum_{g \in G, d \in D, w \in W} \left(\sum_{t=1}^T \left(\sum_{k=0}^t h_{kt}^{gdw} x_{kt}^{gdw} - \sum_{k=1}^t p_{kt}^{gdw} y_{kt}^{gdw} \right) + \sum_{k=1}^T c_k \max \left\{ 0, \sum_{t=k}^T x_{kt}^{gdw} - CAP_k \right\} \right) \quad (1)$$

sujeito a:

$$\sum_{1 \leq t \leq T} x_{0t}^{gdw} \leq INV^{gdw} \quad g \in G, d \in D, w \in W \quad (2)$$

$$x_{0t}^{gdw} + \sum_{1 \leq k \leq t} x_{kt}^{gdw} \geq (1-\alpha) DEM_t^{gdw} \quad g \in G, d \in D, w \in W, t=1, \dots, T \quad (3)$$

$$x_{0t}^{gdw} + \sum_{1 \leq k \leq t} x_{kt}^{gdw} \leq DEM_t^{gdw} + \sum_{1 \leq k \leq t} y_{kt}^{gdw} \quad g \in G, d \in D, w \in W, t = 1, \dots, T \quad (4)$$

$$\sum_{1 \leq k \leq t} y_{kt}^{gdw} \leq \alpha DEM_t^{gdw} \quad g \in G, d \in D, w \in W, t = 1, \dots, T \quad (5)$$

$$y_{kt}^{gdw} \geq 0, x_{kt}^{gdw} \geq 0 \quad g \in G, d \in D, w \in W, k = 1, \dots, T, t = k, \dots, T \quad (6)$$

$$x_{0t}^{gdw} \geq 0 \quad g \in G, d \in D, w \in W, t = 1, \dots, T \quad (7)$$

A função F em (1) é a soma dos custos totais de armazenamento, do simétrico do lucro associado à utilização da capacidade excedente e da penalidade sofrida por considerar capacidade adicional. As restrições (2) garantem, para cada produto, que a quantidade a retirar directamente dos níveis de stock iniciais, durante o horizonte de planeamento, não excede a quantidade inicial em armazém. Em (3), (4) e (5) garante-se que em cada um dos módulos do horizonte de planeamento a procura é satisfeita dentro da tolerância permitida. As restrições em (6) garantem a não negatividade dos níveis de produção em cada módulo do horizonte de planeamento, enquanto que as em (7) asseguram a inexistência de encomendas em atraso no início do horizonte de planeamento.

Integração da perda de produção agregada

Uma vez que a fase de corte tem associado um determinado nível de perda de produção, optou-se por integrar os modelos de planeamento agregado e de optimização dos padrões de corte segundo o algoritmo hierárquico que se apresenta em seguida. Esta integração tem como finalidade incorporar no plano agregado uma medida da capacidade de produção utilizada para produzir o papel que será desperdiçado no corte. Avalia-se assim, embora de uma forma sobre-dimensionada, se a capacidade do sistema é ou não suficiente para suportar essa perda.

Algoritmo hierárquico de planeamento agregado

Passo 1. Resolver o problema de PL (1)-(7).

Passo 2. Se é necessária capacidade adicional, *parar*.

Passo 3. Para cada módulo, para cada gramagem, considerando a solução obtida no *Passo 1* (quantidades a produzir agregadas em termos de IEQF), calcular o desperdício mínimo.

Passo 4. Se em algum módulo a capacidade excedente é inferior ao desperdício total para esse módulo, actualizam-se os valores da capacidade: para cada módulo, o valor da capacidade passa a ser o valor inicial menos o valor total do desperdício, nesse módulo, para a corrente iteração. Voltar ao *Passo 1*.

Em caso contrário *parar*.

Como não existe garantia de convergência do processo, é ainda utilizada uma condição de paragem no caso em que numa sequência de iterações não se verificam reduções significativas do valor médio do desperdício. Se a paragem se deve a essa condição ou à condição no *Passo 4*

então, como solução final escolhe-se a que apresentou o menor valor médio do desperdício. Se o processo é interrompido no *Passo 2*, então a solução final mostra que é necessária capacidade adicional para garantir a satisfação da procura ao longo de todo o horizonte de planeamento.

Para o sub-problema de optimização de padrões de corte em termos desagregados (nível (iii)), obtêm-se soluções com desperdício muito menor, porque a esse nível tira-se partido da antecipação da produção de determinados produtos de modo a aproveitar o desperdício. Ao nível agregado, os níveis mínimos de perda de produção associada ao corte são estabelecidos automaticamente (sem a intervenção do agente de decisão) e ignorando as incompatibilidades de produção geradas pelo atributo IEQF.

3.2 Optimização dos padrões de corte

Um problema de cortes consiste em determinar a melhor forma, em função de um dado objectivo, de cortar peças de grandes dimensões de modo a obter um certo número de peças com dimensões pré-estabelecidas. No nosso caso, o problema corresponde a, dado um conjunto de folhas em carretel, encontrar uma forma de cortar cada uma dessas folhas de modo a preencher o número de rolos em falta para cada uma das larguras encomendadas ainda não produzidas. Este é um problema de cortes a uma dimensão, pois o corte a estabelecer para cada folha no carretel corresponde apenas ao corte longitudinal.

O modelo consiste na minimização do número total de bobinagens a efectuar³ de modo a obter os rolos em falta. Neste modelo, a cada coluna da matriz das restrições está associado um padrão de corte admissível e para cada padrão de corte pretendemos determinar o número de vezes que deve ser aplicado. Assume-se que pretendemos obter d_1, \dots, d_m rolos cujas larguras sejam respectivamente w_1, \dots, w_m . A largura útil da folha a cortar é L , uma constante que depende da gramagem.

O problema pode ser formulado da seguinte forma

$$\min Z = \sum_{j=1}^n x_j \quad (8)$$

sujeito a:

$$d_i - \alpha d_i \leq \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq d_i + \alpha d_i, \quad i = 1, \dots, m \quad (9)$$

$$x_j \geq 0 \text{ e inteiro}, \quad j = 1, \dots, n \quad (10)$$

onde:

d_i = número de rolos em falta da largura w_i , $i = 1, \dots, m$;

x_j = número de vezes que o j -ésimo padrão de corte é aplicado, $j = 1, \dots, n$;

a_{ij} = número de rolos com largura w_i no j -ésimo padrão de corte, $i = 1, \dots, m$,
 $j = 1, \dots, n$;

α = tolerância percentual a observar na satisfação das encomendas.

³ Minimizar o número de bobinagens equivale a minimizar o desperdício resultante do corte.

O objectivo em (8) é a minimização do número total de bobinagens. As restrições (9) garantem a obtenção do número de rolos em falta, dentro dos limites impostos pela tolerância. As restrições (10) garantem a integralidade e a não negatividade das variáveis decisionais.

Uma resolução heurística

Relaxando as restrições de integralidade, o problema relaxado pode ser resolvido aplicando o método revisto do Simplex, considerando variáveis limitadas, em conjunto com a técnica da geração implícita de colunas, proposta por Gilmore e Gomory [3]. Devido à existência de tolerância na satisfação da procura, o arredondamento da solução final conduz a um plano de corte aproximado do óptimo.

A base é inicializada com m padrões de corte admissíveis onde, em cada um deles, se corta apenas uma largura, tantas vezes quantas as possíveis. Em cada iteração determina-se uma variável candidata à base, gerando uma "nova" coluna à qual corresponde um padrão de corte admissível. Esta geração consiste na resolução do seguinte sub-problema, de tipo Saco-Mochila com restrições adicionais:

$$\text{Max } V = \sum_{i=1}^m b_i a_i \quad (11)$$

sujeito a:

$$\sum_{i=1}^m a_i \leq N_{max} \quad \text{e} \quad L_{min} \leq \sum_{i=1}^m a_i w_i \leq L \quad (12)$$

ou

$$\sum_{i=1}^m a_i \leq N_{max} - 1 \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^m a_i w_i \leq L - L_{stock} \quad (13)$$

$$a_i \geq 0 \quad \text{e inteiro} \quad i = 1, \dots, m \quad (14)$$

onde:

L = largura útil da folha no carretel;

L_{min} = largura mínima da folha no carretel aproveitável num padrão;

L_{stock} = largura mínima de um rolo aceitável para stock;

N_{max} = número máximo de rolos num padrão;

b_i = variável dual associada à i -ésima restrição de tipo (9), na iteração corrente,
 $i = 1, \dots, m$,

a_i = número de vezes que a largura w_i é cortada no padrão, $i = 1, \dots, m$.

As restrições (12) a (14) garantem a admissibilidade do padrão de corte a obter. Em (12) garante-se que a largura total do padrão é superior à largura mínima aproveitável não excedendo a largura útil da folha e que o número de rolos obtidos não excede o limite. Se a largura total do padrão for inferior à largura mínima aproveitável, então em (13) garante-se que o desperdício resultante origina um rolo para stock sendo utilizada uma navalha no corte desse rolo. As restrições (14) garantem a integralidade e a não negatividade das variáveis decisionais.

Este problema é resolvido aplicando o método de *branch-and-bound* proposto por Chvátal [1], com os ajustamentos necessários apresentados por Vereecken [14].

De modo a aliviar o peso computacional associado à resolução deste sub-problema, desde que seja encontrada uma solução admissível para a qual o valor da função objectivo seja superior a 1, então a coluna correspondente ao padrão de corte por ela representado será candidata à base.

A optimalidade do problema de cortes é atingida quando, numa iteração, têm sinal adequado todos os custos reduzidos associados às variáveis no problema (nenhuma solução do problema Saco-Mochila apresenta um valor superior à unidade).

No caso da folha no carretel apresentar defeito utiliza-se uma adaptação do modelo original, apresentada em Vereecken [14]. Esta adaptação baseia-se no princípio de que a folha no carretel pode ser dividida em três folhas das quais a central corresponde a um rolo com defeito e que não pode ser considerado na satisfação de encomendas.

3.3 Sequenciamento da Produção

Tal como foi anteriormente referido, não se trataram os sub-problemas de sequenciamento da produção de gramagens e sequenciamento dos padrões de corte.

O tempo total mínimo associado às alterações da produção de gramagens corresponde a uma sequência dos valores de gramagem que é crescente até que seja atingida a gramagem de valor mais elevado, passando então a decrescente até que seja atingida a de valor mais reduzido. As decisões no nível (ii) da hierarquia continuam a ser tomadas com base na afectação das quantidades definidas no nível (i) à sequência fixada pela empresa.

O sequenciamento dos padrões de corte é elaborado tendo como objectivo a minimização do número de movimentos nas navalhas necessários numa sequência de padrões de corte. Este problema pode ser formulado como um problema de caixeiro viajante assimétrico.

4. O Sistema de Apoio à Decisão

4.1 Porquê um Sistema de Apoio à Decisão?

Uma abordagem do problema em ambiente de SAD justifica-se na medida em que (i) não está disponível uma estratégia que permita descrever como construir uma solução global aceitável, (ii) os objectivos e restrições presentes no processo de tomada de decisão são conflituosos e difíceis de avaliar (Woerlee [15]).

Assumiu-se desejável que o sistema a desenvolver considerasse os seguintes critérios: constituir um suporte para um processo interactivo, de fácil utilização, em que a estrutura do processo de planeamento fosse consistente com a do instituído na organização, com capacidade para avaliar e gerar alternativas e por fim que permitisse uma maior coordenação entre as diferentes fases do processo de planeamento da produção.

A utilização de métodos e técnicas de investigação operacional contribui fortemente para a resolução, de uma forma eficaz e eficiente, dos sub-problemas encontrados nas várias etapas do processo de planeamento da produção. Por outro lado, essa utilização num ambiente de SAD

desmistifica o conceito de que as soluções geradas têm uma natureza rígida e fixa. É permitido ao utilizador tirar partido do seu conhecimento de estratégias para resolver os problemas, gerar e comparar, de uma forma eficaz, soluções alternativas, sem se prender com a consideração de aspectos de difícil quantificação.

4.2 Equipamento e Arquitectura

O SAD funciona em microcomputadores IBM-compatíveis, em ambiente MSDOS. Todos os programas foram desenvolvidos em Pascal. Para a resolução do modelo de programação linear integrado no modelo de planeamento agregado recorre-se a um produto comercial.

O acesso à informação relevante para o planeamento da produção - dados referentes a encomendas e produtos em stock - processa-se através da rede local da empresa. Através desta rede é ainda possível transferir os ficheiros relativos às ordens de corte, produzidos pelo sistema, para a máquina controladora da produção.

O sistema tem uma estrutura modular, integrando os componentes clássicos de um SAD:

- Sistema de Gestão da Base de Modelos (SGBM);
- Sistema de Gestão da Base de Dados (SGBD);
- *interface* com o utilizador (Sistema de Gestão da Geração de Diálogo - SGGD).

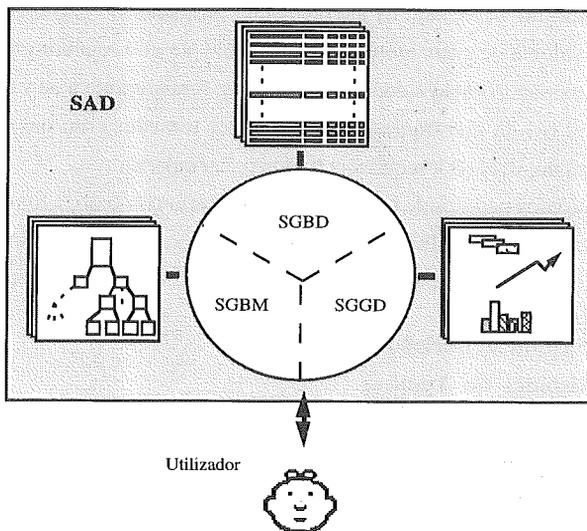


Figura 3: Componentes do SAD

A modularidade do sistema tem como finalidade facilitar a integração de novos módulos (que se perspectiva para futuras fases do projecto), flexibilizando assim a evolução do SAD. Por outro lado, essa característica estrutural permite a distribuição da tarefa de desenvolvimento dos diferentes módulos, por diferentes elementos da equipa.

O SGBM gere os algoritmos de resolução dos sub-problemas nos diferentes níveis do problema global. Foram desenvolvidos módulos relativos a:

- optimização do plano agregado (Respício [10]);
- optimização dos padrões de corte (Osório [9] e Vereecken [14]);
- afectação dos rolos produzidos às encomendas dos clientes (Silva e Silva [12]);
- optimização dos padrões de corte no caso em que a folha no carretel apresenta defeito (Rodrigues [11] e Vereecken [14]).

O SGBD gere os módulos destinados ao tratamento da informação. Foram implementados módulos de consulta da informação com diferentes níveis de agregação e diferentes critérios de ordenação, relativamente às encomendas, aos stocks existentes e a vários indicadores do estado do sistema produtivo.

A *interface* com o utilizador é extremamente importante no sucesso de um SAD. É através da estrutura de diálogos que se processa a comunicação entre o utilizador e o sistema, é feita a interligação dos restantes módulos no sistema e é gerida a apresentação dos resultados. No seu desenho consideraram-se os seguintes critérios:

- tornar atractiva a utilização do sistema,
- apresentar sugestões ao utilizador (soluções não normativas), e
- apresentar a informação de uma forma simples e perceptível.

A *interface* foi desenvolvida com base num sistema de janelas, integrando uma estrutura de *menus desenroláveis*, caixas de diálogo (caixas de informação, caixas de *input*, botões, botões de selecção) e permitindo o manuseamento e/ou a utilização de teclas de acesso directo (*short-cuts*) para activar determinados comandos e manipular as janelas.

4.3 Funções do Sistema de Apoio à Decisão

Um SAD no planeamento da produção de rolos de papel deve ajudar o responsável pelo planeamento a:

- entregar o rolo pretendido;
- ao cliente certo;
- na data acordada;
- com as características de qualidade desejadas;
- ao custo apropriado.

Apesar de, na sua versão actual, o SAD não permitir ainda responder completamente a todas estas questões, constitui uma ferramenta eficaz e flexível. Das funções disponibilizadas pelo SAD destacam-se as que de seguida se apresentam.

Definição de ordens de corte

O sistema incorpora dois módulos independentes, destinados a executar esta função face a diferentes condições de produção: corte de uma folha em boas condições de qualidade e corte de uma folha que apresenta defeito.

A análise das soluções geradas, permite ao agente de decisão:

- decidir relativamente à produção, ou não, de rolos para stock, a partir do desperdício,

- incluir rolos adicionais relativamente aos presentes na solução corrente (escolhendo larguras e número de rolos), e gerar soluções alternativas, onde esses rolos sejam considerados,
- fixar padrões de corte e gerar soluções alternativas.

Afectação de rolos produzidos a encomendas

Os rolos nos padrões de corte são afectos às encomendas dos clientes em função das incompatibilidades geradas pelo atributo IEQF. O módulo que executa esta função constrói para cada programa, os documentos relativos às ordens de corte, que posteriormente são transferidos para a máquina controladora da produção.

Elaboração do Plano de Produção Agregado

O plano de produção agregado é elaborado por aplicação do algoritmo descrito em 3.1. Dados relativos ao horizonte de planeamento, à capacidade do sistema e à estrutura de custos são fornecidos através da estrutura de diálogo com o utilizador.

Os resultados são apresentados em dois níveis de agregação. Expressam a afectação de produtos em stock a encomendas dos vários módulos no horizonte de planeamento e a afectação da produção em cada módulo à satisfação da procura nesse módulo e nos futuros.

Controlo de Encomendas

É disponibilizada a pesquisa e visualização da lista de encomendas segundo determinados critérios. Esta função apoia a tomada de decisão relativamente aos rolos que podem ser produzidos antecipadamente ou com outro diâmetro, de modo a melhorar as soluções obtidas para o sub-problema de optimização dos padrões de corte. Disponibilizam-se mecanismos para proceder às alterações escolhidas.

Controlo dos Níveis de Stock

Esta função apoia a tarefa de afectação de rolos em stock a encomendas e a tomada de decisão, na fase de optimização dos padrões de corte, relativamente à produção de rolos para armazenar a partir do desperdício ou afectação de rolos adicionais a encomendas.

4.4 Exemplo

Exemplifica-se em seguida a utilização do sistema na elaboração dum plano de corte. Foi previamente carregado o ficheiro de dados relativos a encomendas. Para o módulo de produção 91 3 11 (3º módulo de Novembro de 1991), pretende-se elaborar um plano de corte para rolos cuja gramagem é 300 e cujo diâmetro é 140. Embora a leitura dos dados no programa de elaboração de cortes também possa ser feita acedendo directamente ao ficheiro de encomendas, utilizaremos a opção de leitura de um ficheiro de larguras construído a partir da informação em memória de modo a ensaiar e a analisar diferentes alternativas. O sistema disponibiliza um comando que conduz à construção desse ficheiro, sendo apresentada numa janela a informação relativa às encomendas consideradas.

MOULO 91 0 J1
 200
 DIAMETRO 140
 CV140300.AUX

ENCOMENDAS CONSIDERADAS NO FICHEIRO DE LARGURAS DADOS.INF

Lote	Larg.	BOBINAS				Data	I.E.Q.F.
		Enc	Prd	Prg	Fal		
699	179.0	12	0	0	4	911126	
418	154.7	193	0	0	4	911126	0270400E2
418	154.7	193	0	0	4	911126	0270400E2
660	209.0	12	0	0	4	911126	
418	154.7	193	0	0	4	911126	0270400E2
418	154.7	193	0	0	4	911126	0270400E2
418	154.7	193	0	0	4	911126	0270400E2
418	154.7	193	0	0	4	911126	0270400E2
418	154.7	193	0	0	4	911126	0270400E2

A informação relativa às encomendas consideradas é apresentada numa tabela onde

- a 1ª coluna (Lote) é o identificador do cliente;
- a 2ª coluna (Larg.) é a largura dos rolos encomendados;
- a 3ª coluna (BOBINAS) está dividida em quatro sub-colunas relativas a, respectivamente, número de rolos encomendados (Enc), número de rolos já produzidos (Prd), número de rolos programados (Prg) e número de rolos por programar (Fal);
- a 4ª coluna (Data) é a data de entrega;
- a última coluna (I.E.Q.F.) é a lista de requisitos especiais de qualidade e fabrico.

O módulo de elaboração do plano de corte é executado, considerando os dados já preparados (larguras e número de rolos por programar para cada largura).

Valor de PL : 65.7500 Nº Total de Bobinagens : 86

PLANO DE CORTE

Bobin.	Disp.	Padrao de Corte			BOBINAS	
		Largura	Var.	Largura	Var.	
1	18.0	229.0	219.0	179.0	0	
1	18.0	229.0	219.0	154.7	0	
1	18.0	229.0	219.0	209.0	0	
1	18.0	229.0	219.0	218.0	0	
1	18.0	229.0	219.0	218.0	0	
58	185.0	245.0	245.0	245.0	0	

Nº Total de Bobinas = 196
 Perda de Produção = 18.6876 %
 Desperdício Médio = 120.5349
 Largura Média Aproveitada = 524.4651

A solução obtida é apresentada no ecrã. É indicado o valor do problema de programação linear associado e o número total de bobinagens (resultante dos arredondamentos). Para cada padrão de corte no plano, são indicados o número de bobinagens, o desperdício resultante e as larguras que o constituem. Para cada largura considerada é apresentada a variação, em número de rolos, relativamente ao pedido.

Esta solução tem associado um valor de Perda de Produção de 18.6876%. O desperdício resultante de alguns dos padrões de corte considerados tem largura suficientemente grande para produzir rolos adicionais. A perda de produção associada ao plano de corte pode ser reduzida se se aproveitar esse desperdício para produzir antecipadamente rolos cuja produção esteja

calendarizada para módulos futuros. O responsável pelo planeamento escolherá os rolos cuja produção deve ser antecipada com base na observação dos atributos largura e IEQF. Inicialmente tenta-se antecipar a produção de rolos com diâmetro igual ao considerado no plano em construção (140). É escolhida a opção de pesquisa de encomendas com gramagem 300, diâmetro 140, largura inferior ou igual a 207.0 (maior desperdício existente na solução) e calendarizadas para um módulo de produção posterior a 91 3 11 (*inclusive*). É aberta a seguinte janela apresentando a informação requerida.

GRAMAGEM 300
DIÂMETRO 140
LARGURA menor ou igual que 207.0
MÓDULO posterior a 91 3 11

LISTA DE ENCOMENDAS

Lote	Larg.	BOBINAS				Modulo	I.E.O.F.
		ENO	Prd	Pro	Fal		
410	154	199	0	0	0	91 3 11	027040052
269	77	123	0	0	0	91 3 11	004052
719	6	168	0	0	0	91 3 12	004052

A única encomenda calendarizada para um módulo posterior a 91 3 11 é a apresentada na linha 3 da lista de encomendas. O responsável pelo planeamento decide não antecipar a produção de rolos nessa encomenda pois o atributo IEQF revela que existe incompatibilidade de produção entre esses rolos e o plano em construção.

Alguns clientes aceitam qualquer dos diâmetros, apesar de preferirem o especificado, sendo essa opção indicada pela sequência "052" na lista IEQF. Em seguida, tentar-se-á antecipar a produção de rolos cujo diâmetro preferido é 125 mas que podem ser produzidos no diâmetro 140, desde que não existam incompatibilidades de produção com o plano em construção. É escolhida a opção de pesquisa de encomendas com gramagem 300, diâmetro 125, largura inferior ou igual a 207.0 e calendarizadas para um módulo de produção posterior a 91 3 11 (*inclusive*). Essa informação é apresentada numa nova janela.

GRAMAGEM 300
DIÂMETRO 125
LARGURA menor ou igual que 207.0
MÓDULO posterior a 91 3 11

LISTA DE ENCOMENDAS

Lote	Larg.	BOBINAS				Modulo	I.E.O.F.
		ENO	Prd	Pro	Fal		
497	85	201	0	0	0	91 3 12	024027040050
716	5	208	0	0	0	91 3 12	027040052
491	110	199	0	0	0	91 3 12	004052
491	110	199	0	0	0	91 3 12	004052
610	64	199	0	0	0	91 3 12	024027040052
610	44	175	0	0	0	91 3 12	024027040
610	24	146	0	0	0	91 3 12	024052
610	10	110	0	0	0	91 3 12	024052

da corrente solução, gerar alternativas de corte e considerar rolos para stock. Em qualquer momento pode-se guardar a solução corrente. Tendo-se encontrado uma solução satisfatória, guardam-se as alterações sobre as encomendas e passa-se então a afectar os rolos no plano de corte às encomendas dos clientes. Executa-se o módulo de afectação, onde as soluções geradas podem ser manipuladas de modo a determinar qual a mais favorável de acordo com prioridades de produção. Este módulo é responsável pela construção do ficheiro de ordens de corte que é exportado para a máquina de corte (através da rede local de computadores), pela actualização do ficheiro de encomendas e pela elaboração dos mapas de ordens de fabrico.

5. Conclusões

O sistema apresentado neste trabalho integra métodos e técnicas de investigação operacional num ambiente de SAD. Esta integração constitui um suporte para apoiar as tarefas do responsável pelo planeamento da produção, com ferramentas adequadas à resolução dos diferentes sub-problemas que surgem nas várias fases do processo de decisão. O ambiente interactivo e flexível do sistema permite-lhe tirar partido do seu conhecimento e intuição. As potencialidades das técnicas de investigação operacional e o uso do computador libertam-no do esforço que dispndia na resolução dos problemas. A rapidez e precisão com que pode analisar as diferentes alternativas, formuladas no decorrer do processo de planeamento, assim como as sugestões fornecidas pelo sistema, permitem um maior domínio sobre as potenciais decisões a considerar. A organização da informação possibilita uma maior capacidade de avaliar e coordenar as interacções das decisões tomadas em diferentes níveis, assim como uma maior racionalidade na tomada de decisão.

O desempenho do algoritmo utilizado na resolução do sub-problema de planeamento agregado não é tão bom quanto o desejável num ambiente de SAD. Dado que este sub-problema é tratado com uma frequência relativamente baixa, este inconveniente não causa perturbações e é compensado pela qualidade dos resultados.

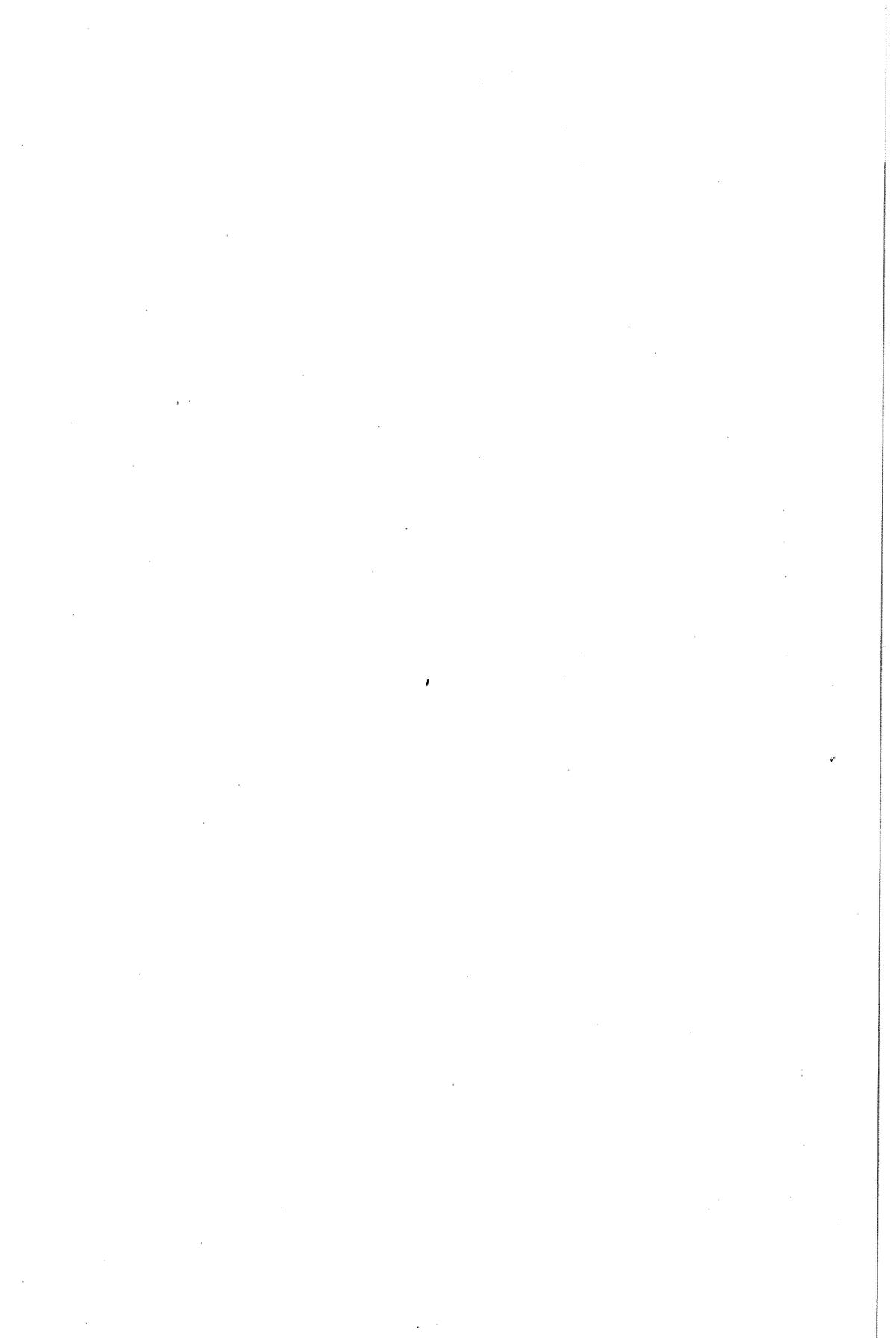
O SAD encontra-se instalado no computador do Serviço de Planeamento e Controle de Encomendas da fábrica da Portucel em Viana. Constitui uma ferramenta de trabalho na elaboração diária dos programas de produção e responde eficientemente às especificações estipuladas pela empresa. Apesar de não se dispor dos valores relativos à redução dos custos provocada pela utilização do sistema, os responsáveis pela fábrica consideram-na muito vantajosa.

O mercado da indústria papeleira sofreu grandes alterações desde o início do desenvolvimento deste trabalho (1990). Tendo-se mantido constante a capacidade do sistema produtivo, a quebra que se tem verificado na procura tem levado a um crescimento do excedente da capacidade de produção. Assim, as decisões relativas à produção de gramagens deixaram de estar no nível superior da hierarquia de problemas. Perspectiva-se pois uma reformulação da hierarquia apresentada. No entanto, essa reformulação depende essencialmente das transformações que se venham a efectuar, ou não, na organização.

Na sua versão actual, o sistema não responde ainda a todas as questões ao nível do planeamento da produção. No entanto, em futuras fases do projecto, prevê-se o desenvolvimento de modelos e implementação dos módulos relativos ao sequenciamento e calendarização da produção, assim como a afectação automática de rolos em stock a encomendas. Prevê-se ainda um alargamento das tarefas tratáveis pelo SAD, como por exemplo a de optimização do carregamento de camiões e navios.

Referências

- [1] CHVÁTAL, V., *Linear Programming*, W.H. Freeman and Company, New York, 1983.
- [2] FIELDHOUSE, M. and NUTTALL, G., (1990), *Production Planning with Computer Assistance*, Paper Technology, October, pp 22-24.
- [3] GILMORE, P. C. and GOMORY, R. E., (1961), *A Linear Programming Approach to the Cutting-Stock Problem*, Operations Research, vol 9, pp 849-859.
- [4] GÜNTHER, H. O., (1986), *The Design of an Hierarchical Model for Production Planning and Scheduling*, in "Multi-Stage Production Planning and Inventory Control", (Axsäter, S., Schneeweiss, Ch. and Silver, S., eds.), Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, vol 266, pp 225-260, Springer-Verlag.
- [5] HARPER, J. E., (1990), *Integrated Roll Quality/Roll Tracking Systems*, Tappi Journal, July, pp 81-84.
- [6] HENDRY, L. C. and KINGSMAN, B. G., (1989), *Production Planning Systems and their Applicability to Make-to-Order Companies*, European Journal of Operational Research, vol 40, pp 1-15.
- [7] JOHNSON, L. A. and MONTGOMERY, D. C., (1974), *Operations Research in Production Planning, Scheduling, and Inventory Control*, Wiley, New York.
- [8] KEEN, P. G. W. and MORTON, M. S. S., (1978), *Decision Support Systems: An Organizational Perspective*, Addison-Wesley Publishing Company, United States of America.
- [9] OSÓRIO, M. E., (1991), *Problema de Cortes*, Relatório de Estágio, DEIO, FCUL, Portugal.
- [10] RESPÍCIO, A. L., (1992), *Um Sistema de Apoio à Decisão no Planeamento de Produção*, Dissertação de Mestrado, Instituto Superior Técnico - UTL, Portugal.
- [11] RODRIGUES, A., (1991), *CUTPLAN - Planos de Corte em Rolos de Papel com Defeito*, Relatório de Projecto de Investigação Operacional, DEIO, FCUL, Portugal.
- [12] SILVA, C. e SILVA, M. J., (1991), *AFACTA - Afectação de Encomendas a Cortes*, Relatório de Projecto de Investigação Operacional, DEIO, FCUL, Portugal.
- [13] SILVER, E. A. and PETERSON, R., (1985), *Decision Systems for Inventory Management and Production Planning*, Second Edition, Wiley, New York.
- [14] VERECKEN, J., (1992), *The Cutting-Stock Problem - Applications of the delayed column generation*, M.Sc. Thesis, DEIO/FCUL and Erasmus Universiteit Rotterdam, Portugal and The Netherlands.
- [15] WOERLEE, A. P., (1991), *Decision Support Systems for Production Planning*, Doctor Thesis, Econometric Institute, Erasmus University Rotterdam, The Netherlands.



UMA HEURÍSTICA TABU PARA A DETERMINAÇÃO DE ROTAS DE VEÍCULOS

César Rego

Departamento de Informática
Universidade Portucalense - Porto

Abstract

The purpose of this paper is to describe a new tabu search heuristic for the vehicle routing problem with capacity and route length restrictions. The algorithm considers a sequence of adjacent solutions obtained by repeatedly removing a vertex from its current route, and reinserting it into another route. This is done by means of an ejection chain strategy which produces compound moves for passing from a current solution to another solution. During the course of the algorithm, various types of moves are used and crossing infeasible solutions are allowed. Numerical tests on a set of benchmark problems indicate that the proposed algorithm is highly competitive with existing heuristics.

Resumo

Neste artigo é descrito um novo algoritmo do tipo tabu para a resolução do problema de determinação de rotas óptimas de veículos com restrições de capacidade e duração de rota. O algoritmo considera soluções adjacentes obtidas por uma sequência de remoções e inserções de vértices em diferentes rotas. A passagem de uma solução a outra é conseguida a partir da geração de movimentos compostos obtidos por uma estratégia de cadeia de ejeção. No desenrolar do algoritmo são aplicados vários tipos de movimentos e a passagem por soluções irrealizáveis é permitida. Os resultados numéricos efectuados sobre um conjunto de problemas clássicos da literatura indicam que o algoritmo proposto é muito competitivo com vários outros métodos.

Keywords

tabu search, vehicle routing problem, ejection chain strategy.

1. Introdução

O problema de determinação de rotas óptimas de veículos tem várias variantes (ver Bodin et al. [3]). Este problema é genericamente conhecido na literatura científica sob o nome de Vehicle Routing Problem (VRP). O objectivo deste artigo é apresentar uma nova heurística para a seguinte versão do VRP. Seja $G = (V, A)$ um grafo onde $V = \{v_0, v_1, \dots, v_n\}$ representa o conjunto dos vértices e $A = \{(v_i, v_j) \mid v_i, v_j \in V; i \neq j\}$ o conjunto dos arcos. Uma matriz simétrica $C = (c_{ij})$ ($c_{ij} = c_{ji}$) cujos custos são não negativos e verificam a desigualdade triangular ($c_{ij} \geq c_{ik} + c_{kj}$) é associada a A . O vértice v_0 identifica o depósito e os restantes vértices de V representam cidades. Considera-se uma frota homogénea de m veículos domiciliados num mesmo depósito. O valor de m pertence ao intervalo $[\underline{m}, \bar{m}]$, onde $\underline{m} \geq 1$ e $\bar{m} \leq n$. Se $\underline{m} = \bar{m}$, então m é fixo; se $\underline{m} = 1$ e $\bar{m} = n$, então m é livre.

O VRP consiste então em construir um conjunto de rotas de custo mínimo tal que:

- a) todas as rotas têm de começar e terminar no depósito;
- b) todo o cliente $\forall \{v_i\}$ é visitado uma única vez;

c) a cada cliente v_i são associados os seguintes requisitos:

- c1) uma quantidade não negativa q_i de um determinado bem ($q_0 = 0$); a quantidade transportada por um veículo não pode ultrapassar a capacidade Q do mesmo;
- c2) um tempo de serviço δ_i ($\delta_0 = 0$); o comprimento total de uma qualquer rota (distância mais tempo de serviço) não pode ultrapassar um certo limite T pré-definido.

Na nossa versão do problema, o número de veículos é uma variável de decisão.

O VRP encontra-se no núcleo de qualquer sistema de distribuição e tem sido extensivamente estudado durante as últimas três décadas. Com efeito, aplicações práticas do problema incluem: distribuição de jornais, recolha de lixo, fornecimento de combustível, distribuição de produtos a hipermercados e armazéns, lavandarias, transporte escolar, distribuição de correio e gestão preventiva de inspecção de estradas.

Os modelos de rotas de veículos têm igualmente uma importância teórica fundamental.

O modelo de base é o famoso Traveling Salesman Problem (TSP). Este problema consiste em encontrar a rota óptima de um caixeiro viajante que deseja visitar um conjunto de cidades voltando em seguida ao ponto de partida. O TSP, pode ser interpretado como um problema de rotas com um só depósito e um único veículo de capacidade superior à totalidade da procura. Em teoria de grafos, o problema consiste a determinar o circuito hamiltoniano de custo mínimo. Este problema encontra-se no núcleo de um importante ramo das Matemáticas Discretas, a Optimização Combinatória, (Christofides et al. [8]).

O VRP pertence à família dos problemas combinatórios NP-difíceis (Lenstra e Rinnooy Kan [24]), pelo que não existe nenhum algoritmo polinomial em tempo para resolver o problema. Assim, só pequenas instâncias podem ser resolvidas à optimalidade (cerca de 25 clientes).

Devido ao sucesso limitado dos métodos exactos a maior parte dos trabalhos realizados sobre o VRP estão associados a métodos aproximados, muitas vezes chamados heurísticas. Estes métodos, têm como objectivo a obtenção de boas soluções, mas não garantem o sua optimalidade. Aqui, estamos particularmente interessados em algoritmos heurísticos.

Na secção seguinte, é apresentada uma formulação matemática do problema.

Uma breve descrição dos métodos heurísticos de resolução do VRP é dada na secção 3.

Na secção 4 é feita uma descrição sucinta do método de pesquisa Tabu (Tabu Search), proposto por Glover [16]. O método é directamente inspirado em procedimento de melhoramento iterativos donde em cada iteração, soluções "vizinhas" são examinadas sendo a melhor seleccionada. De um ponto de vista prático, a pesquisa de uma vizinhança traduz-se por um critério de selecção de um subconjunto de variáveis que podem mudar de valor. Em particular, no caso de problemas de programação inteira, a atribuição de valores 0 ou 1 pode representar uma variedade de operações tais como, mudar o valor de uma tarefa sobre uma máquina, retirar ou adicionar arcos a um grafo, executar um passo de pivot, etc. Por exemplo,

tal como no método simplex, $x_j = 0$ ou 1 pode representar o facto da variável associada ser *não-básica* ou *básica* num ponto extremo do espaço de soluções. Mais precisamente, no caso do VRP, uma variável $x_{ij}^k = 1$ ou 0 pode significar respectivamente que as cidades i e j são ou não são visitadas pelo veículo k . Genéricamente, a qualquer tipo operação que permita modificar uma solução do problema chamaremos simplesmente movimento.

Para que Tabu Search seja utilizado com sucesso é fundamental definir estruturas apropriadas para a pesquisa numa vizinhança. Vários algoritmos do tipo Tabu têm sido aplicados ao VRP, cada um utilizando diferentes tipos de movimentos para passar de uma solução a outra. Na secção 5 é descrito um novo algoritmo de pesquisa local do tipo Tabu para o VRP. A principal contribuição do algoritmo aqui introduzido, reside na utilização de estruturas de vizinhança compostas baseadas na ideia de cadeia de ejeção.

Vizinhanças compostas resultam da "compressão" de uma sequência de movimentos, ditos simples num único movimento composto, e estratégias de cadeia de ejeção fornecem procedimentos úteis para a construção deste tipo de estruturas. Cadeias de ejeção combinam e generalizam ideias baseadas em caminhos alternativos em teoria de grafos, construção de redes baseadas em trocas em optimização de matroides e a limitação de estruturas na resolução de problemas de programação inteira. Todos estes domínios têm uma componente de pesquisa de vizinhanças sugerindo uma grande variedade de novas aproximações para conduzir a pesquisa em problemas de Optimização Combinatória. Com efeito, de nosso conhecimento, não existe nenhuma implementação computacional deste tipo de estruturas. Os resultados numéricos apresentados na secção 6 serão comentados e discutidos. Eles provam a viabilidade deste tipo de abordagem na resolução de VRPs, o que sugere a sua utilização em outros problemas de Optimização Combinatória. Finalmente, as conclusões são apresentadas na secção 7.

2. Formulação matemática

Nesta secção será apresentada uma formulação para um genérico VRP. Seja $x_{ij}^k = 1$ se o veículo k visita a cidade j logo após a cidade i , $x_{ij}^k = 0$ em caso contrário.

O problema consiste então em encontrar variáveis x_{ij}^k de modo a

$$\text{minimizar } \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n c_{ij} \sum_{k=1}^m x_{ij}^k \quad (1)$$

sujeito a:

$$\sum_{i=0}^n \sum_{k=1}^m x_{ij}^k = 1 \quad j = 1, \dots, n \quad (2)$$

$$\sum_{i=0}^n x_{ip}^k - \sum_{j=0}^n x_{pj}^k = 0 \quad k = 1, \dots, m; \quad p = 0, \dots, n \quad (3)$$

$$\sum_{i=1}^n q_i \left(\sum_{j=0}^n x_{ij}^k \right) \leq Q \quad k = 1, \dots, m \quad (4)$$

$$\sum_{i=1}^n \delta_i \sum_{j=0}^n x_{ij}^k + \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n c_{ij} x_{ij}^k \leq T \quad k = 1, \dots, m \quad (5)$$

$$\sum_{j=1}^n x_{0j}^k = 1 \quad k = 1, \dots, m \quad (6)$$

$$y_i - y_j + n \sum_{k=1}^m x_{ij}^k \leq n - 1 \quad i \neq j = 1, \dots, n \quad (7)$$

$$x_{ij}^k \in \{0, 1\} \quad i, j = 1, \dots, n \quad (8)$$

$$y_i \quad \text{arbitrário.}$$

A função Objectivo (1) consiste em minimizar o custo total de transporte. As equações (2) asseguram que cada vértice seja visitado uma única vez. A continuidade da rota é representada pelas equações (3): se um veículo entra num vértice, terá que sair dele. As equações (4) e (5) são as limitações de capacidade e de comprimento ("custo") máximo da rota. As equações (6) indicam que cada veículo tem de ser usado uma só vez. Finalmente as restrições de eliminação de subcircuitos podem-se exprimir pelas equações (7), as quais também obrigam que cada rota passe pelo depósito. As equações (8) são as condições de integralidade.

Torna-se assim claro que a formulação acima definida é muito complexa para ser usada em VRPs de tamanho considerável.

3. Algoritmos heurísticos para o VRP

Os algoritmos heurísticos que têm sido desenvolvidos para o VRP são baseados em heurísticas inicialmente desenvolvidas para o TSP. Para um levantamento tanto em algoritmos heurísticos como óptimos o leitor é remetido para Rego [31]. Extendendo o esquema proposto por Christofides [6], estes algoritmos podem ser classificados em quatro tipos.

Algoritmos constructivos, constroem progressivamente rotas de veículos por inserção em cada etapa de uma cidade segundo vários critérios de medida de ganho. Um dos métodos mais conhecidos desta família é o algoritmo de Clarke & Wright [9] nas suas duas versões, sequencial e paralela. Na implementação paralela, as rotas são formadas simultaneamente. Inicialmente, cada cliente é servido por um veículo distinto. Satisfazendo as necessidades das cidades v_i e v_j por um mesmo veículo, o custo da solução é reduzido. Assim, o custo de visitar as cidades v_i e v_j independentemente por dois veículos é: $c_{0i} + c_{i0} + c_{0j} + c_{j0}$, enquanto que o custo de um veículo visitar a cidade v_i logo após a cidade v_i é: $c_{0i} + c_{ij} + c_{j0}$, donde, da ligação directa de v_i a v_j , resulta a economia (saving):

$$s_0(i,j) = c_{i0} + c_{0j} - c_{ij}$$

Estes savings são inicialmente ordenados por ordem decrescente. Em cada etapa, o algoritmo agrupa sobre uma mesma rota, cidades v_i e v_j correspondentes ao maior valor de $s_0(i,j)$ (e que não violem qualquer restrição do problema) até que mais nenhuma ligação seja possível. Este método, também conhecido pelo método dos savings, tem uma complexidade em tempo de $O(n^2 \log n)$ e uma complexidade de armazenamento de $O(n^2)$. Na sua versão sequencial, em vez de calcular toda a matriz dos savings, um qualquer vértice de $V \setminus \{v_0\}$ é escolhido para um agrupamento inicial. Em cada iteração do algoritmo, a ligação correspondente ao maior saving em relação ao último vértice inserido, é seleccionada. Uma vez que uma rota não pode ser alargada, uma nova rota é então formada até que todos os vértices tenham sido inseridos.

A complexidade espacial pode ser reduzida através da utilização de estruturas de dados apropriadas (ver por exemplo Nelson et al. [27] e Paessens [29]). Adicionalmente, vários autores têm proposto modificações para o algoritmo de base.

Gaskell [13] e Yello [36] introduziram independentemente o conceito de savings ponderados $s_0(i,j) - \theta c_{ij}$, onde θ é um parâmetro positivo. Fazendo variar θ , é possível atribuir mais ou menos importância à distância entre os pontos v_i e v_j em função das suas posições em relação ao depósito. Outros, tais como Mole e Jameson [26] utilizaram métodos constructivos por generalização do critério dos savings e introdução de dois parâmetros λ e μ . O algoritmo de Mole e Jameson difere do algoritmo de Clarke & Wright pelo facto que cada vértice não é sistematicamente inserido numa das extremidades da rota mas pode também ser inserido entre dois outros vértices já afectados a uma rota. Para isso, os dois critérios seguintes são utilizados:

$$\begin{aligned}\psi(i,l,j) &= c_{il} + c_{lj} - \mu c_{ij} \\ \sigma(i,l,j) &= \lambda c_{0l} - \psi(i,l,j)\end{aligned}$$

Assim, para cada vértice v_l ainda não afectado a uma rota, é primeiramente calculado o valor de inserção que minimiza o primeiro critério. Em seguida, o melhor vértice v_{l^*} a ser realmente inserido será aquele que minimiza o segundo critério. Então, a partir da definição de $\psi(i,l,j)$ e $\sigma(i,l,j)$ acima descrita, torna-se evidente que fazendo variar λ e μ , é possível obter diferentes critérios de escolha para o melhor vértice a inserir. Assim, aumentando λ a formação de rotas radiais são favorecidas. Da mesma forma, aumentando μ , ligações distantes são penalizadas.

Algoritmos de duas fases podem ser subdivididos em três principais classes. A primeira insere-se no grupo dos métodos "Cluster first-Route second" que numa primeira fase agrupam vértices sem especificar a ordem pela qual irão ser visitados. Numa segunda fase, as rotas para cada veículo são obtidas utilizando algoritmos conhecidos para o TSP.

Gillet e Miller [15] utilizam o algoritmo "sweep". Aqui, a localização das cidades é representada por um sistema de coordenadas polares com origem no depósito. Numa primeira fase, o algoritmo circunscreve o plano afectando cidades a veículos até que a respectiva capacidade não seja excedida. O processo é então repetido até que todas as cidades sejam afectadas. Assume-se que todos os vértices são representados pelas suas coordenadas polares

(θ_i, ρ_i) , onde θ_i é o ângulo e ρ_i é o comprimento do raio. Atribui-se o valor $\theta_i^* = 0$ a um vértice arbitrário v_{i^*} e calculam-se os ângulos por referência a (v_0, v_{i^*}) . Do ponto de vista de implementação o algoritmo considera que os vértices estão ordenados por ordem ascendente.

O algoritmo de duas fases de Christofides, Mingozzi e Toth [8] é mais sofisticado, pois considera agrupamentos de teste gerados por parâmetros de controle. Na primeira fase, o algoritmo constrói k rotas segundo um processo de inserção de custo mínimo. Uma vez que uma rota é escolhida, todas as inserções são feitas sobre a mesma rota até que mais nenhum vértice seja possível ser inserido. A fase seguinte, começa com k rotas e afecta cidades a cada rota considerando o custo de inserção em rotas alternativas. As duas fases são repetidas até que todas as cidades façam parte de uma rota. Numa segunda classe, encontram-se os métodos "Route first-Cluster second", inicialmente propostos por Beasley [2] e por Haimovich e Rinnoy Kan [21]. Tipicamente, estes algoritmos começam por construir uma "boa" rota para o TSP global, dividindo em seguida em rotas admissíveis para o VRP.

Finalmente, vários procedimentos iterativos foram propostos, entre os quais se encontra a heurística de afectação generalizada de Fisher e Jaikumar [12]. Ela é baseada na ideia duma formulação matemática sob a forma dum problema de afectação generalizada. A heurística consiste por um lado em determinar a afectação óptima das cidades aos veículos, e por outro lado determinar a rota de cada veículo.

Algoritmos de optimização incompleta consistem em obter uma "boa" solução através de pesquisas arborescentes incompletas. Tratam-se essencialmente de algoritmos do tipo "Branch & Bound" conduzidos por métodos heurísticos de modo a terminarem mais rapidamente. Para isso, qualquer algoritmo enumerativo pode ser utilizado (ver Laporte e Nobert [23]). Christofides, Mingozzi e Toth [8] desenvolveram um procedimento de pesquisa arborescente baseado no algoritmo inicial de Christofides.

Algoritmos de melhoramento foram inicialmente propostos por Croes [10] e Lin [25] para o TSP. Estes métodos são baseados no conceito k -trocas (k -opt). No contexto de rotas de veículos, Christofides e Eilon [7] e Russel [32] adaptaram esta aproximação ao clássico VRP.

Meta-heurísticas, tais como Simulated Annealing e Tabu Search podem ser vistas como métodos de melhoramento. Simulated Annealing é um método proveniente da Mecânica Estatística. A sua aplicação à Optimização Combinatória foi proposta por Kirkpatrick et al. [22]. Ambos os métodos, utilizam técnicas de pesquisa de vizinhança e têm como princípio de base permitir deteriorar a solução corrente de modo a evitar estagnar em óptimos locais. Para prevenir ciclos (i.e., repetição de soluções recentemente visitadas), cada método propõe uma solução. Fazendo a analogia com os processos usados em mecânica estatística, em Simulated Annealing uma solução pior é aceite de acordo com uma certa probabilidade. Esta probabilidade depende da importância da deterioração e do estado da pesquisa. Este método foi aplicado por Osman [28] ao VRP. Em Tabu Search, soluções recentemente examinadas são proibidas e colocadas numa lista tabu constantemente actualizada. Um grande número de algoritmos

baseados nesta técnica têm sido aplicados com grande sucesso a diversos problemas de Optimização Combinatória. No que diz respeito ao VRP, vários algoritmos deste tipo têm sido utilizados, os quais têm obtido os melhores resultados. Estes algoritmos diferem uns dos outros essencialmente pela estratégia utilizada na pesquisa de vizinhanças.

Pureza et França [30] utilizam trocas de vértices entre rotas e Osman [28] combina movimentos de trocas de arestas do tipo 2-opt (melhoramento de duas arestas em cada iteração). Este tipo de movimento consiste na substituição de duas arestas (v_i, v_{i+1}) e (v_j, v_{j+1}) por duas outras (v_i, v_j) e (v_{i+1}, v_{j+1}) , (cf. figura 1).

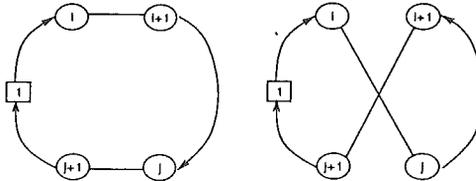


Figura 1: Um movimento 2-opt

É de notar que neste tipo de movimento, a orientação do caminho (v_{i+1}, \dots, v_j) torna-se inverso na nova rota.

A transformação da rota produz um melhoramento da solução se e só se:

$$c_{ij} + c_{i+1, j+1} < c_{i, i+1} + c_{j, j+1}.$$

Este procedimento pode ser generalizado, considerando modificações sobre k-arestas, com $k > 2$ (procedimento k-opt). Mas, se por um lado aumentam as possibilidades de aproximação do ótimo global, por outro lado isso tem um custo elevado: o número de transformações possíveis em cada etapa (que é também o número de configurações a experimentar para saber se se trata de um ótimo local) é de ordem n^k , o que é bastante significativo para uma heurística iterativa, quando k é superior a 2. Assim, não é viável em geral aplicar sistematicamente procedimentos k-opt sob pena de perder em tempo o ganho em qualidade. Por outro lado, pode ser interessante melhorar um procedimento 2-opt por aplicação temporária, por exemplo de procedimentos 3-opt para ajudar o método a não estagnar em ótimos locais. Duas possibilidades de realizar movimentos 3-opt são ilustrados na figura 2.

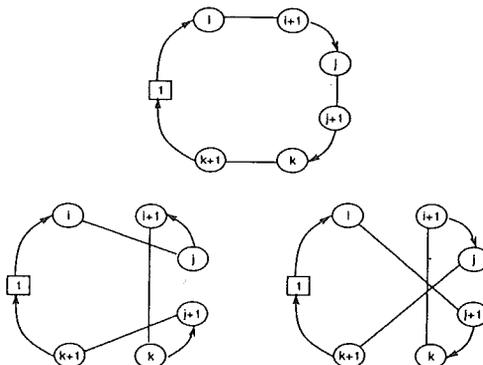


Figura 2: Duas possibilidades de realizar um movimento 3-opt

Um outro algoritmo foi desenvolvido por Semmet e Taillard [33] para a resolução de um problema real com várias restrições adicionais, diferentes das que são consideradas neste artigo. O movimento considerado consiste em retirar um vértice de uma rota e reinseri-lo noutra. Um procedimento de inserção foi também utilizado por Gendreau, Hertz e Laporte [14], onde logo após a transferência de um vértice de uma rota para outra é executada uma reoptimização local da rota corrente.

Nos movimentos de inserção, um vértice v_i é seleccionado para ser inserido entre dois vértices v_p e v_q de um arco (v_p, v_q) de uma rota. Então, o predecessor v_{i-1} e o sucessor v_{i+1} do vértice v_i são conectados de forma a que v_{i-1} se torne o novo predecessor de v_{i+1} e o vértice v_i seja o novo sucessor v_{p+1} de v_p e o novo predecessor v_{q-1} de v_q .

A inserção de um vértice é então avaliada pela expressão:

$$c_{i-1,i+1} - c_{i-1,i} - c_{i,i+1} + c_{p,i} + c_{i,p+1} - c_{p,p+1}$$

que representa a diferença de custo antes e depois do movimento de inserção.

Finalmente, Taillard [35] utilizou métodos de partição do conjunto de vértices em diferentes agrupamentos (clusters). Os clusters são tratados independentemente pela transição de vértices entre rotas. Esta aproximação, introduzida por Karp, também conhecida por "dividir para conquistar" ("divide and conquer") consiste em dividir um problema grande em pequenos subproblemas possíveis de serem tratados individualmente, juntando no final as soluções parciais correspondentes a cada subproblema. Torna-se pois necessário encontrar um bom compromisso entre o tamanho dos subproblemas (para que eles sejam fáceis de tratar individualmente) e o seu número (para que a "reunião" das soluções não seja difícil de realizar). Este compromisso nem sempre é fácil de obter de forma a que o que se ganha em separar o problema não seja perdido (em tempo ou qualidade) quando se "recolhem" as soluções parciais de cada subproblema.

É de notar que estes algoritmos tentam aumentar a sua performance por combinação de movimentos de inserção e de trocas. Uma outra forma mais sofisticada de combinar vizinhanças é utilizada pelo nosso algoritmo e consiste na utilização de cadeias de ejeção na geração de movimentos compostos.

4. O método Tabu

Tabu é actualmente uma heurística que tem dado bons resultados para uma variedade de problemas de Optimização Combinatória. Inicialmente elaborado por Glover em 1986 e independentemente por Hansen durante o mesmo período, o método é directamente inspirado em procedimentos iterativos. Para uma explicação detalhada do método ver Glover [17, 18] e Rego [31].

Uma das características principais deste método reside no facto que os movimentos elementares efectuados para passar de uma solução à seguinte são autorizados a deteriorar o valor corrente da função custo. O procedimento não pára logo que é atingido um óptimo local, mas pode sair dele efectuando o menos mau movimento (i.e., o menos degradante). Este

procedimento pode conduzir a fenómenos de ciclagem (pesquisa repetitiva do mesmo conjunto de soluções). A segunda característica do método consiste na introdução de restrições tabu servindo a proibir movimentos precedentes durante um certo número de iterações. Estes movimentos são introduzidos numa lista circular constantemente actualizada: a lista Tabu. O principal objectivo das restrições Tabu é de permitir ao método sair de soluções à volta do óptimo local, conduzindo o processo noutras direcções.

A aplicação de Tabu à resolução de um dado problema necessita de definir e ajustar vários factores:

- escolha do critério de paragem : este, é geralmente função do número de iterações,
- estrutura da lista Tabu: pode-se mostrar mais ou menos restrictiva na escolha do estatuto Tabu,
- comprimento da lista Tabu: escolher um tamanho óptimo é essencial; uma lista muito pequena pode conduzir a ciclos, e uma lista grande demais pode impedir a realização de movimentos interessantes. Assim pode-se aceitar que esta lista varie ao longo do processo de pesquisa. Normalmente o tamanho óptimo aumenta proporcionalmente ao tamanho da vizinhança,
- tipo de movimento a utilizar: de modo a explorar eficientemente o espaço de pesquisa é fundamental bem caracterizar o tipo de movimento a utilizar. Isso depende forçosamente do problema a resolver,
- tamanho da vizinhança: em problemas onde a vizinhança a explorar é muito grande e (ou) os elementos são difíceis de avaliar, torna-se importante isolar um subconjunto de movimentos candidatos que tenham características desejáveis.

Várias sofisticacões foram entre outras, propostas por Glover [18] para melhorar a eficácia do método.

* O Critério de aspiração

A restrição de movimentos induzida pela lista Tabu pode por vezes tornar-se muito rígida, pois pode impedir a passagem para uma nova solução muito interessante. Os critérios de aspiração autorizam então a retirar o estatuto tabu do movimento correspondente.

Teoricamente, um movimento Tabu será apesar de tudo aceite se possui um nível de aspiração $a(s,m)$ situado abaixo de um valor limiar $A(s,m)$. Mais precisamente, atribui-se a $A(s,m)$ um conjunto de valores desejados para a função $a(s,m)$. Mas concretamente, a maior parte dos autores contentam-se com um critério de aspiração mais simples: um movimento será aceite se melhorar o valor da melhor solução s^* obtida até ao momento, ou seja $a(s,m) = f(s \oplus m)$ e $A(s,m) = f(s^*)$, onde $s \oplus m = s'$ e representa a passagem de uma solução s a uma solução s' a partir de um movimento m . A função A é chamada função de aspiração

* Intensificação da pesquisa (função de memória de médio termo)

A lista tabu representa uma função de memória de curto termo, pois só são memorizados os últimos movimentos efectuados. Pode ser interessante conservar outras informações ao longo

do processo de pesquisa. Assim a memorização de algumas boas soluções pode permitir por exemplo determinar algumas propriedades comuns a essas soluções e definir, de certo modo, a região de soluções que possuam essas propriedades. Uma maneira simples de construir uma lista de candidatos é gerar um conjunto de elementos no espaço da vizinhança e repetir o processo se o resultado não for satisfatório. Técnicas mais sofisticadas consistem a memorizar alguns atributos correspondentes a boas soluções e em cada iteração examinar primeiro os elementos que têm esses atributos. Um outro melhoramento consiste então em intensificar a pesquisa sobre essa região. Por exemplo, no caso do VRP, os arcos inseridos em diferentes "boas" rotas constituem uma pequena fracção do conjunto dos arcos possíveis. Então, para aprofundar a pesquisa em torno de uma boa solução, pode-se considerar o conjunto (muito limitado) das soluções anteriores. Esta operação pode ser realizada modificando a função Objectivo penalizando soluções exteriores ao domínio considerado, ou tornando tabu todo o movimento que faça sair dessa região.

* Diversificação da pesquisa (função de memória de longo termo)

O objectivo da diversificação é de evitar que certas regiões não sejam totalmente desprezadas. A forma mais simples consiste em relançar a pesquisa a partir de diferentes soluções. Mas, para suprimir a componente aleatória deste procedimento, é conveniente memorizar os movimentos efectuados durante a pesquisa anterior e penaliza-los de modo a construir uma solução inicial bastante original, isto é, que não pertença a nenhuma região já explorada.

Seja $N(s)$ a vizinhança de s (i.e., o conjunto de soluções possíveis de serem atingidas a partir de s por um movimento m), o algoritmo Tabu pode-se escrever genericamente da forma seguinte.

Inicializações:

$s \in X$ solução inicial
 $s^* := s$; melhor solução encontrada
 $T_i := \emptyset \forall i$; listas tabou
 $A_j := \infty \forall j$ níveis de aspiração

Enquanto o critério de paragem não é verificado **fazer**:

início

gerar $\bar{s} := s \oplus m \in V^* \subseteq N(s)$ tal que

$t_i(\bar{s}, m) \notin T_i$ ou $a_j(\bar{s}, m) < A_j(\bar{s}, m)$;

seleccionar $s' \in V^*$ tal que $f(s') := \min_{s \in V^*} f(\bar{s})$;

se $f(s') < f(s^*)$ **então**

$s^* := s'$;

fim se

Actualizar $T_i \forall i$ e $A_j \forall j$;

$s := s'$;

fim

Cada passo consiste então em gerar um conjunto V^* de soluções na vizinhança $N(s)$ da solução corrente s . Muitas vezes, encontrar a melhor solução em V^* não é uma tarefa simples. Pode ser necessário resolver um problema de optimização "local" $\min \{f(x) \mid s \in V^* \subset N(s)\}$. Segundo o tamanho da vizinhança escolhida, este problema pode ser resolvido duma forma exacta ou aproximada.

5. O algoritmo

Esta secção contém a descrição do algoritmo TVC (Tabu com Vizinhanças Compostas) seguida de vários comentários. A seguinte notação é utilizada. A solução S é definida por um conjunto de m rotas R_1, \dots, R_m com $m \in [1, \bar{m}]$; $R_r = \{v_1, v_{r1}, v_{r2}, \dots, v_1\}$ e cada vértice v_i ($i > 0$) é efectuado a uma única rota. Estas rotas podem ser admissíveis ou inadmissíveis em relação às restrições de capacidade e tempo. Por convenção, diz-se que $v_i \in R_r$ se v_i é uma componente de R_r , e $(v_i, v_j) \in R_r$ se v_i e v_j são dois vértices consecutivos de R_r . A cada solução S , (admissível ou não) é associada a função Objectivo:

$$F(S) = \sum_r \sum_{(v_i, v_j) \in R_r} c_{ij}.$$

Em cada iteração do algoritmo $F(S^*)$ representa o valor da melhor solução obtida até à corrente iteração.

Começaremos então por caracterizar o procedimento de pesquisa usado por TVC. Este procedimento tenta melhorar uma dada solução S usando Tabu Search. Ele considera uma sequência de soluções adjacentes obtidas por repetidas remoções e inserções de vértices entre rotas. A passagem de uma solução a outra é obtida a partir da geração de movimentos compostos obtidos por uma estratégia de cadeia de ejeção. Interpretando a perspectiva dada por Glover [19], nós definimos em seguida a nossa cadeia de ejeção.

Uma cadeia de ejeção pode ser vista como uma série de níveis, cada um consistindo em três vértices consecutivos numa rota. Nós utilizamos a seguinte notação: denote-se por $P = \{(v_{i-1}, v_i, v_{i+1}), \dots, (v_{t-1}, v_t, v_{t+1})\}$ uma "pilha" vertical representando os níveis de uma cadeia de ejeção. Sejam $\Gamma = \{v_i, \dots, v_t\}$, o conjunto dos *vértices centrais*, v_i o *vértice inicial* e v_t o *vértice terminal* da cadeia. Aos conjuntos $\Gamma^{-1} = \{v_{i-1}, \dots, v_{t-1}\}$ de predecessores e $\Gamma^{+1} = \{v_{i+1}, \dots, v_{t+1}\}$ de sucessores de Γ , chamaremos respectivamente *vértices de entrada* e *vértices de saída*. Finalmente, denotemos $W = \Gamma^{-1} \cup \Gamma \cup \Gamma^{+1}$ o conjunto dos *vértices de suporte* da cadeia de ejeção.

No contexto do VRP, uma cadeia de ejeção representa a transição parcial de um conjunto de rotas para um novo conjunto de rotas determinada por uma sequência de movimentos de transição. Seja k um nível da cadeia de ejeção e v_h um vértice de Γ , numa cadeia de ejeção, cada vértice v_h^k "ejecta" o vértice v_h^{k+1} e a ejeção de v_t determina o fim da cadeia. Mais precisamente, a transição pode ser caracterizada pela eliminação consecutiva de arcos (v_{p-1}^k, v_p^k) , (v_p^k, v_{p+1}^k) e a criação de arcos (v_{q-1}^{k+1}, v_p^k) , (v_p^k, v_{q+1}^{k+1}) , onde k identifica o nível corrente da

cadeia de ejeção. O vértice inicial deixa a sua posição vaga e o vértice terminal fica desconectado, livre para ser recolocado. Um esquema representativo de uma cadeia de ejeção é dado na figura 3 onde a título de exemplo são considerados quatro níveis de ejeção.

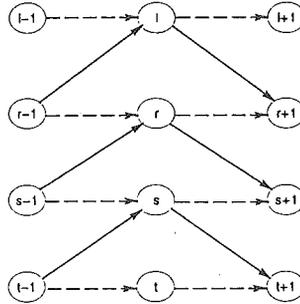


Figura 3: Uma cadeia de ejeção de quatro níveis

As ligações que são modificadas pelo movimento de transição são representadas pelos arcos diagonais, (a traço contínuo) que formarão os arcos das novas rotas. Os arcos horizontais, (a tracejado), são aqueles que foram retirados das antigas rotas.

De modo a avaliar eficientemente uma cadeia de ejeção, pretende-se que nenhum arco seja retirado ou adicionado mais do que uma vez por um movimento de transição. Isso fica garantido se a cadeia de ejeção tiver uma estrutura *legítima*, ou seja, cada vértice de Γ não pode aparecer mais do que uma vez em W . Se um vértice aparece como um vértice de Γ^{-1} (resp. um vértice de Γ^{+1}) ele pode reaparecer uma e uma só vez como um vértice de Γ^{+1} (resp. um vértice de Γ^{-1}) sem violar esta restrição. Uma exceção é possível para o vértice v_0 (depósito) o qual pode reaparecer várias vezes como um vértice de Γ^{-1} e (ou) um vértice de Γ^{+1} sob qualquer ordem, mas nunca como um vértice de Γ . Assim, uma cadeia de ejeção de $l(t)$ níveis pode ser avaliada pela expressão seguinte:

$$\mathcal{Z}(v_r, v_s) = \sum_{0 < k \leq l(t)} [c(v_{s-1}^k, v_r^{k-1}) + c(v_r^{k-1}, v_{s+1}^k)] - \left(\sum_{0 \leq k \leq l(t)} [c(v_{r-1}^k, v_r^k) + c(v_r^k, v_{r+1}^k)] \right).$$

Para completar a transição da rota corrente para uma nova rota são utilizados *movimentos de fecho*. Estes movimentos são de dois tipos.

Tipo I Colocar o vértice terminal v_t na posição deixada vaga pelo vértice inicial v_i , por criação de arcos (v_{i-1}, v_t) e (v_t, v_{i+1}) , resultando o custo:

$$\Psi(v_t, v_i) = c(v_{i-1}, v_t) + c(v_t, v_{i+1})$$

Tipo II Unir o predecessor com o sucessor de vértice inicial v_i adicionando o arco (v_{i-1}, v_{i+1}) , e inserir v_t entre dois vértices adjacentes v_p e $v_q = v_{p+1}$, do que resulta a eliminação do arco (v_p, v_q) e a sua substituição por (v_p, v_t) e (v_t, v_q) . Os custos associados com estas operações são dados por:

$$\Omega(v_i) = c(v_{i-1}, v_{i+1}),$$

$$\Phi(v_t, v_p) = c(v_p, v_t) + c(v_t, v_{p+1}) - c(v_p, v_{p+1}).$$

Uma ilustração destes movimentos são dados na figura 4.

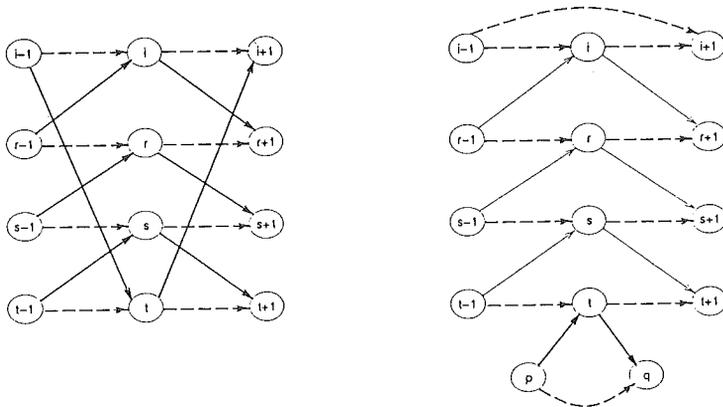


Figura 4: Movimentos de fecho do tipo I e Tipo II

Quando os movimentos do Tipo II são usados, para que a cadeia conserve uma estrutura legítima, v_p e v_q não podem corresponder a qualquer vértice de Γ . Por analogia, chamaremos Movimento Composto do Tipo I (MCT1) ou Tipo II (MCT2) aos movimentos obtidos por cadeias de ejeção completadas respectivamente por um movimento de fecho do Tipo I ou Tipo II. Note-se que cadeias que são completadas por um movimento de fecho do Tipo I mantêm sempre constante o número de vértices em cada rota. O mesmo acontece em movimentos de fecho do Tipo II se as operações Ω e Φ se fizerem sobre uma mesma rota. Nos restantes casos, a rota que contém o movimento de inserção ganha um vértice e a que contém o arco (v_{i-1}, v_{i+1}) perde um vértice. Assim, num sentido lato, podemos considerar que um MCT1 conduz a um procedimento de troca (de vértices entre rotas) enquanto que um MCT2 conduz a um procedimento de inserção.

A avaliação de MCT1 e MCT2 será dada respectivamente por as expressões seguintes:

$$\Delta F_I = \Psi(v_t, v_i) + \chi(v_r, v_s)$$

$$\Delta F_{II} = \Omega(v_i) + \chi(v_r, v_s) + \Phi(v_t, v_p)$$

onde ΔF_I e ΔF_{II} são as diferenças entre os valores da função Objectivo antes e depois de efectuar respectivamente MCT1 e MCT2.

Por definição, um movimento composto obtido pela construção de uma cadeia de ejeção resulta de sucessivas vizinhanças exploradas a cada nível da cadeia. Para todo o vértice $v \in \Gamma$, define-se h-vizinhança $N_h(v)$ como o conjunto de h vértices possíveis de serem ejectados por v.

O depósito é tratado como um vértice diferente em cada rota o qual nunca é ejectado. É de notar, que o conjunto de h vértices é restrito (i.e. não inclui todas as possibilidades de "nível k "), isto porque os requisitos de legitimidade influenciam o modo como a cadeia evolui. Então, se uma cadeia de ejeção satisfaz as condições de legitimidade, $h = 0$ determina o fim da cadeia. A cadeia é inicializada pela escolha do vértice v_i e do primeiro vértice v_l . A cadeia cresce por movimentos de extensão do vértice terminal, o qual selecciona um vértice v_j para se tornar o novo vértice v_t , desconectando v_j da sua posição corrente e recolocando v_l a ocupar essa posição.

O procedimento geral de pesquisa pode agora ser descrito. Este procedimento serve-se de um vector de parâmetros $L = (S, t_{\min}, t_{\max}, l_{\max}, n_{\max})$ definidos da seguinte forma:

S representa o conjunto de rotas R_1, \dots, R_m .

t_{\min}, t_{\max} são limites para o número de iterações que um movimento é tabu,

l_{\max} é o número máximo de níveis a explorar em cada cadeia de ejeção,

n_{\max} é o número de iterações sem nenhum melhoramento da função objectivo.

Passo 0 (Inicialização)

Considera S a solução corrente e inicializa h -vizinhança para todos os vértices.

Passo 1 (Determinação do primeiro nível da cadeia)

Faz $k = 1$.

Identifica o par $\{v_{i^*}, v_{l^*}\} \subset N(S)$ tal que:

Caso MCT1

$$\chi(v_{i^*}, v_{l^*}) = \min\{\chi(v_i, v_l)\}.$$

Se $(v_{i^*}, v_{l^*}) \in T$ então o movimento é ignorado a menos que satisfaça o critério de aspiração

$$F(S) + \Delta F_{I_k} < F(S^*).$$

Caso MCT2

$$\sigma(v_{i^*}, v_{l^*}) = \min\{\Omega(v_i) + \chi_k(v_i, v_l)\}. \text{ Calcula } \Phi(v_{l^*}, v_{p^*}) = \min\{\Phi(v_{l^*}, v_p)\}.$$

Se $(v_{i^*}, v_{l^*}) \in T$ então o movimento é ignorado a menos que satisfaça o critério de aspiração

$$F(S) + \Delta F_{II_k} < F(S^*).$$

Faz $\Gamma = \{v_{i^*}\}$.

Passo 2 (Aumento da cadeia)

Enquanto $h \neq 0$ ou $k < l_{\max}$ executa as seguintes operações.

a) Faz $k = k + 1$ e $\Gamma = \Gamma \cup \{v_{i^*}\}$.

b) Avalia o movimento de fecho de nível k e selecciona o novo vértice terminal.

Caso MCT1

Calcula ΔF_{I_k} para o nível k da cadeia.

Para todo o vértice $v_j \in V \setminus \{v_0\}$ determina o vértice $v_{j^*} \subset N_h(v_{l^*})$ tal que

$$\varepsilon(v_{l^*}, v_{j^*}) = \min\{\chi_k(v_{l^*}, v_j)\}$$

O movimento é aceite se $(v_{l^*}, v_{j^*}) \notin T$ ou $F(S) + \Delta F_{I_k} < F(S^*)$.

Caso MCT2

Calcula ΔF_{Π_k} para o nível k da cadeia.

Para todo o vértice $v_j \in V \setminus \{v_0\}$ determina o vértice $v_{j^*} \subset N_h(v_{t^*})$ tal que

$$\varepsilon(v_{t^*}, v_{j^*}) = \min \{ \Omega(v_i) + \chi_k(v_{t^*}, v_j) \}$$

Calcula $\Phi(v_{j^*}, v_{p^*}) = \min \{ \Phi(v_{j^*}, v_p) \}$.

O movimento é aceite se $(v_{t^*}, v_{j^*}) \notin T$ ou $F(S) + \Delta F_{\Pi_k} < F(S^*)$.

c) Identifica o melhor nível l^* tal que: $\delta(l^*) = \min_{0 < l \leq k} \{ \Delta F_l \}$.

d) Faz $v_{t^*} = v_{j^*}$.

Passo 3 (Nova solução)

Faz $F(S) = F(S) + \Delta F_{l^*}$.

Se $F(S) < F(S^*)$ então faz $S^* = S$ e reinicializa o número de iterações sem nenhum melhoramento da função *Objectivo*.

Passo 4 (Actualização)

Para $(k = 0, \dots, l^*)$ gera t uniformemente no intervalo $[t_{\min}, t_{\max}]$ e coloca tabu todo o par $\{v_i^{k+1}, v_j^k\}$, $v_i, v_j \in \Gamma$ durante t iterações.

Actualiza h -vizinhanças para todo o vértice $v \in W$

Identifica os conjuntos

$$S_1 = \bigcup_{k=2}^{l^*} \{ (v_{i-1}^k, k), (v_j^k, j+1) \}$$

Caso MCT1

$$S_2 = \{ (v_{i-1}^0, v_j^{l^*}), (v_j^{l^*}, v_{i+1}^0) \}; \quad S_3 = \bigcup_{k=1}^{l^*} \{ (v_{j-1}^k, k), (v_j^k, j+1) \}$$

Caso MCT2

$$S_2 = \{ (v_{i-1}^0, v_{i+1}^0), (v_p^{l^*}, v_j^{l^*}), (v_j^{l^*}, v_{p+1}^{l^*}) \};$$

$$S_3 = \bigcup_{k=1}^{l^*} \{ (v_{j-1}^k, v_j^k), (v_j^k, v_{j+1}^k) \} \cup \{ (v_j^{l^*}, v_{p+1}^{l^*}) \}$$

e determina a nova solução S tal que:

$$S = S \cup S_1 \cup S_2 \cup S_3$$

Se n_{\max} iterações ainda não foram atingidas, volta ao Passo 1. ♦

A complexidade deste procedimento é determinada da seguinte forma. No Passo 1 $O(n^2)$ escolhas de v_i e v_t são consideradas. Para os restantes níveis da cadeia, o novo vértice terminal é seleccionado em tempo $O(n)$. Seja m o número de rotas da solução corrente, uma cadeia de ejeção *legítima* é construída em $O(\frac{n+m}{2})$ níveis. Considerando primeiro o movimento de fecho do Tipo I, v_t é recolocado em tempo $O(1)$. Donde a complexidade global de um MCT1 é $O(n^2 + (n+1)\frac{n+m}{2})$. Se um movimento de fecho do Tipo II é considerado, a melhor inserção

tem de ser escolhida entre $O(n+m)$ vértices. Assim, a complexidade de um MCT2 é $O(n^2 + (2n+m) \frac{n+m}{2})$. Na prática, esta complexidade pode ainda ser notavelmente reduzida dado que normalmente o melhor nível l^* é encontrado nos primeiros níveis da cadeia, o que justifica a utilização do parâmetro l_{\max} . É de notar que a cada nível da cadeia de ejeção, tanto os requisitos de legitimidade como as restrições do problema têm de ser satisfeitas o que induz a várias dificuldades que não existiriam por exemplo numa aplicação ao TSP onde só a legitimidade da estrutura teria de ser testada.

O algoritmo principal pode agora ser descrito. Ele começa com uma fase de inicialização que consiste na geração de uma solução inicial S na qual todos os vértices $v_i \in V \setminus \{v_0\}$ são visitados por construção de \bar{m} rotas do tipo $\{v_0, v_i, v_0\}$. Numa primeira fase de pesquisa preliminar, MCT2 são usados para gerar rotas constructivamente através de simples inserções produzidas por cadeias de ejeção de um só nível. É evidente que se o número de rotas está a ser reduzido, a operação Ω não é considerada. Este processo comporta-se como um puro método de descida, pelo facto que é repetido enquanto uma melhor solução for encontrada. Logo que um melhoramento não seja possível o procedimento completo é activado para melhorar as rotas pré-existentes. Alternativamente, um algoritmo constructivo pode ser usado para fornecer uma solução inicial.

Para intensificar a pesquisa o algoritmo procede a uma pesquisa preliminar a partir da melhor solução obtida até ao momento. Se uma melhor solução é encontrada a fase de intensificação é reactivada. Quando a intensificação corrente não encontra uma melhor solução, então uma fase de diversificação é inicializada. Nós obtemos diferentes fases do algoritmo por simples modificações do Passo 2b.

Para diversificar a pesquisa é utilizada memória de longo termo baseada na frequência de cada movimento. Assim, um movimento m , realizado com uma frequência f_m , é penalizado adicionando à função *Objectivo* o valor $W.f_m$, onde W é um factor de penalidade que depende de cada VRP em particular. É normal que o número de movimentos possíveis aumente com o tamanho do problema, daí que a frequência de cada movimento diminua quando o tamanho do problema cresce. Isto explica o facto que na nossa aplicação W seja uniformemente escolhido entre $0.1\sqrt{n}$ e $0.5\sqrt{n}$.

Num contexto genérico, Glover [17, 18] sugere o uso de uma estratégia de oscilação, com o objectivo de desempenhar um papel intermédio entre a intensificação e a diversificação. Na nossa aplicação, a ideia é de induzir a exploração de novas regiões cruzando certos limites entre admissibilidade e inadmissibilidade. Esta ideia é usada por Gendreau, Hertz e Laporte [14], também no contexto do VRP.

Diremos que um movimento é não realizável ou inadmissível se este causa a violação da restrição de capacidade e (ou) de duração de rota. A estratégia de oscilação utilizada pelo nosso algoritmo, difere da que é proposta por estes autores pelo facto de que soluções inadmissíveis não serão aceites. Em vez disso, soluções admissíveis podem ser obtidas a partir de uma

combinação de movimentos admissíveis e não-admissíveis. Isto evita todo um processo de reconstrução necessário para tornar a solução novamente admissível. De modo a impedir a formação de cadeias onde todos os movimentos são inadmissíveis, só soluções admissíveis são aceites no Passo 1 (i.e., ambos os movimentos de transição e fecho são admissíveis). Assim julga-se dispensável qualquer tipo de penalização sobre movimentos não admissíveis. Este procedimento pressupõe que a passagem por movimentos totalmente ou parcialmente inadmissíveis podem induzir a movimentos completos admissíveis em níveis superiores da cadeia de ejeção. Neste contexto duas estratégias de pesquisa são utilizadas na construção de cadeias de ejeção com movimentos de fecho do Tipo I, correspondendo assim a duas fases do algoritmo: fase de semi-oscilação e fase de oscilação.

Na fase de semi-oscilação movimentos de transição admissíveis são aceites mesmo que conduzam a movimentos de fecho não admissíveis. Da mesma forma, na fase de oscilação são aceites ambos os movimentos, de transição e de fecho não admissíveis. As fases de diversificação, semi-oscilação e oscilação são realizadas durante um número fixo de iterações.

Finalmente, um procedimento de pós-optimização traduz-se pela resolução aproximada dos TSPs correspondentes a todas as rotas modificadas pelo movimento. Se em cada uma das fases acima descritas, uma melhor solução é produzida no intervalo $[F(S^*), \alpha.F(S^*)]$ ($\alpha > 1$), então o procedimento de pós-optimização é activado. O algoritmo termina por uma reoptimização de todas as rotas de S^* , e é reinicializado sempre que pelos menos um melhoramento tenha sido encontrado numa das fases.

Resta-nos agora comentar a escolha dos parâmetros utilizados pelas diferentes fases do algoritmo. Todos os parâmetros são determinados empiricamente. Tal como Taillard [34], Gendreau, Hertz e Laporte [14] e Skorin-Kapov [5,4] o número de iterações t que um movimento permanece na lista tabu não é um número constante, mas gerado uniformemente no intervalo $[t_{\min}, t_{\max}]$. Para cada fase do algoritmo, vários valores destes parâmetros foram testados no intervalo $[3, 20]$ e os melhores foram escolhidos. Assim, foram adoptados $t_{\min} = 5$ e $t_{\max} = 10$ nas fases (1) pesquisa preliminar e (2) intensificação; $t_{\min} = 8$ e $t_{\max} = 13$ nas fases (3) diversificação, (4) semi-oscilação e (5) oscilação e finalmente $t_{\min} = 3$ e $t_{\max} = 7$ na fase (6) de pós-optimização.

Uma boa escolha para α é também importante. Se α toma um valor muito pequeno, o procedimento de pós-optimização é raramente utilizado. Se é muito elevado (> 1.05), existe o risco de o procedimento de pós-optimização ser frequentemente chamado sem qualquer melhoramento da função *Objectivo*. Testes de pós-optimalidade indicam que $\alpha = 1.02$ é um bom compromisso.

Para n_{\max} foram considerados os valores de $10n$ para as fases (1) e (2) dado que são as mais importantes do algoritmo, $3n$ para as fases (3), (4) e (5) e $50n'$ para na fase (6), onde n' é o número de vértices da rota correspondente.

Finalmente, o valor de l_{\max} foi tomado igual a $\lfloor \sqrt{n} \rfloor$ nas fases (1), (2) e (6), e $\lfloor 2\sqrt{n} \rfloor$ nas fases (3), (4) e (5).

No que diz respeito ao tipo de movimento, nas fases (1) e (2) são utilizados MCT1, nas restantes fases utilizam-se MCT2.

6. Resultados computacionais

A performance do nosso algoritmo é avaliada para um conjunto de 14 problemas teste da literatura. Estes problemas são conhecidos como difíceis de resolver e têm sido frequentemente utilizados como um "benchmark" para comparar algoritmos de resolução do VRP. O tamanho destes problemas varia entre 50 e 199 cidades. Nos primeiros 10 problemas, as cidades são geradas uniformemente num plano Euclidiano, nos seguintes, as cidades aparecem agrupadas reflectindo mais os problemas reais. Todos os veículos têm a mesma capacidade e são domiciliados num mesmo depósito. Não é considerada qualquer restrição em relação ao número de veículos utilizados. Os dados para os três primeiros problemas são extraídos de Christofides e Eilon [7]. Os dados para o problema 4 são obtidos juntando as cidades dos problemas 1 e 3 com o depósito e as capacidades do problema 3. O problema 5 é obtido juntando as primeiras 49 cidades do problema 2 às cidades do problema 4, com o depósito e as capacidades dos veículos do problema 4. Nos cinco primeiros problemas só são consideradas restrições de capacidade. Os problemas de 6 a 10 são os mesmos que os de 1 a 5 com restrições de capacidade e de duração de rota. Entenda-se por duração (ou comprimento) de rota, o tempo de viagem (distância) mais o tempo de serviço (carga ou descarga) dispendido em cada vértice da rota. Os dados dos problemas 11 e 12 são extraídos de Christofides, Mingozzi e Toth [8]. Estes problemas só consideram restrições de capacidade. Os problemas 13 e 14 são os mesmos que os problemas 11 e 12, mas com restrições adicionais de comprimento de rota.

Comparações são feitas entre o nosso algoritmo e outros algoritmos heurísticos cujas soluções foram publicadas para estes problemas teste. Estes algoritmos são os seguintes:

CW, algoritmo dos "savings", Clark e Wright [9], **MJ**, algoritmo dos "savings" generalizado, Mole e Jameson [26], **AG**, algoritmo PSA-T, Altinkemer e Gavish [1], **DV**, algoritmo MBSA, Desrochers e Verhoog [11], **GM**, algoritmo SWEEP, Gillet e Miller [15], **CMT1**, algoritmo de duas fases, Christofides, Mingozzi e Toth [8], **FJ**, algoritmo de duas fases, Fisher e Jaikumar [12], **CMT2**, algoritmo de pesquisa arborescente incompleta, Christofides, Mingozzi e Toth [8], **OSA**, algoritmo Simulated Annealing, Osman [28], **PF**, algoritmo Tabu, Pureza e França [30], **OTS**, algoritmo Tabu, Osman [28], **T**, algoritmo Tabu, Taillard [35], **GHL** algoritmo Tabu, Gendreau, Hertz e Laporte [14].

Quanto à análise de resultados, várias observações são feitas em Gendreau, Hertz e Laporte [14]. Estes autores demonstram que as soluções inteiras provavelmente subestimam o valor real da solução, o que conduz a diversas dificuldades em termos de análise de resultados. Assim, por exemplo, no caso do problema 1, o algoritmo GHL chega aos resultados 524.61, 521 e 528 utilizando durante a sua execução respectivamente distâncias reais, arredondamentos por excesso ou por defeito. Com efeito, recentemente Hadjiconstantinou et Christofides [20] numa conferência no Canada, provaram que o valor 524.61 é a solução óptima para este problema. Uma outra dificuldade provém dos problemas que consideram restrições de comprimento de rota, pois algumas rotas podem não ser admissíveis se forem consideradas distâncias reais. Estes autores salientam ainda que melhores soluções podem ser obtidas violando estas restrições por um valor inferior a uma unidade. Isto explica o facto de a melhor solução conhecida não poder ser identificada em certos casos, e daí na Tabela 1 aparecerem alguns pontos de interrogação. De nosso conhecimento, só as linhas OSA, OTS, T, GHL e TVC correspondem a valores de soluções obtidas com distâncias c_{ij} reais. Os valores das melhores soluções obtidas por estes algoritmos são dados na Tabela 1. Eles são extraídos de Gendreau, Hertz e Laporte [14] e podem-se encontrar nas respectivas referências, excepto para CW, MJ e GM que são dados por Christofides, Mingozzi e Toth [8]. Os valores a "carregado" representam as melhores soluções obtidas com distâncias reais. Sobre a linha TVC são dados os valores das soluções do nosso algoritmo e sobre a linha Z*, as melhores soluções (reais) conhecidas.

De acordo com a Tabela 1, algumas observações podem ser feitas entre a qualidade das soluções e a estrutura do problema. Assim, para os problemas gerados uniformemente, o algoritmo GM mostra-se superior a CW, MJ e DV, e um pouco pior que CMT1 e CMT2. Para os problemas estruturados, o inverso se verifica, o algoritmo GM é pior que os algoritmos CW, MJ e DV, e muito pior que CMT1 e CMT2. O nosso algoritmo dá sempre melhores resultados que os algoritmos CW MJ e DV e CMT1 sobre 13 problemas. O algoritmo GM mostra-se competitivo com o nosso algoritmo para os problemas estruturados. Note-se que o algoritmo GM necessita de coordenadas para cada cliente, e por isso não pode ser aplicado a problemas onde só as matrizes de distâncias (tempos) estão disponíveis. Entre as heurísticas AG, CMT1, FJ e CMT2 nenhuma analogia é detectada, mas FJ revela-se superior. Os resultados mostram que todos os algoritmos "clássicos" (de CW a CMT2 na Tabela 1) são nitidamente dominados pelo nosso algoritmo. TVC mostra-se bastante competitivo com os algoritmos de Simulated Annealing e Tabu Search publicados recentemente. Por exemplo, em relação a OSA e PF, o algoritmo encontra melhores soluções respectivamente sobre cinco e oito problemas. Salienta-se ainda que sobre os problemas 5 e 10 não podem ser feitas comparações com PF pois as soluções produzidas por este algoritmo não são conhecidas. Na Tabela 2 são apresentadas as percentagens dos desvios em relação às melhores soluções conhecidas.

Probl.	1	2	3	4	5	6	7
n	50	75	100	150	199	50	75
CW	585	900	886	1204	1540	619	976
MJ	575	910	882	1259	1545	599	969
AG	556	855	860	1085	1351	577	939
DV	586	885	889	1133	1424	593	963
GM	532	874	851	1079	1389	560	933
CMT1	547	883	851	1093	1218	565	969
FJ	524	857	833	1014	1420	560	916
CMT2	534	871	851	1064	1386	560	924
OSA	528	838.62	829.18	1058	1378	555.43	909.68
PF	536	842	851	1081	... ?	560	929
OTS	524.61	844	835	1044.35	1334.55	555.43	911
T	524.61	835.32	828.98	1029.64	1300.89	555.43	909.68
GHL	524.61	835.77	829.45	1036.16	1322.65	555.43	913.23
TVC	524.61	850.92	842.58	1072.19	1377.46	561.24	938
Z*	524.61	835.32	826.14	1029.64	1300.89	555.43	909.68

Probl.	8	9	10	11	12	13	14
n	100	150	199	120	100	120	100
CW	973	1426	1800	1079	831	1634	877
MJ	999	1289	1770	1100	879	1590	883
AG	913	1210	1464	1047	834	1551	874
DV	914	1292	1559	1058	828	1562	882
GM	888	1230	1518	1266	937	1770	949
CMT1	915	1245	1508	1066	827	1612	876
FJ	885	1230	1518	... ?	824	... ?	848
CMT2	885	1217	1509	1092	816?	1608	878
OSA	866.75	1164.12	1417.85	1176	826	1545.98	890
PF	887	1227	... ?	1049	826	1631	866?
OTS	866:75	1184	1417.85	1042.11	819.59	1547	866.37?
T	865.94	1164.24	1403.21	1073.05	819.56?	1550.15	866.37?
GHL	865.94	1177.76	1418.51	1043.47	819.56?	1573.81	866.37?
TVC	883	1204	1464	1039	823	1576	872
Z*	865.94	1162.89	1403.21	1039	819.56	1545.93	866.37

Tabela 1: Comparação entre TVC e outras heurísticas

Podemos então constatar que geralmente, TVC apresenta soluções bastante próximas das melhores conhecidas. Sobre nove destes problemas, estas soluções ficam a menos de 2% da melhor conhecida Z^* , havendo casos em que essa percentagem é inferior a 0.5% (problemas 1, 11 e 12). Em particular, o nosso algoritmo encontra a solução **ótima** para o problema 1. Mais ainda, ele permite dar a conhecer uma melhor solução para o problema 11, o que se revela extremamente importante dado aos numerosos algoritmos que têm sido desenvolvidos para a resolução destes problemas. Adicionalmente, este problema é bastante realista não só pelo facto das cidades não serem uniformemente distribuídas mas também porque o depósito não é centrado. Infelizmente, sobre alguns problemas (4, 5 e 10), as soluções são menos boas, o que forçosamente faz baixar a qualidade média das soluções.

Probl.	1	2	3	4	5	6	7
n	50	75	100	150	199	50	75
CW	10.3	7.2	6.8	14.5	15.5	10.3	6.8
MJ	8.8	8.2	6.3	18.2	15.8	7.3	6.1
AG	5.6	2.3	3.9	5.1	3.7	3.7	3.1
DV	10.5	5.6	7.1	22.8	8.6	6.3	5.5
GM	1.4	4.4	2.9	4.6	6.3	0.8	2.5
CMT1	4.1	5.4	2.9	5.8	0	1.7	6.1
FJ	0	2.5	0.8	0	8.4	0.8	0.7
CMT2	1.8	4.1	2.9	3.2	6.1	0.8	1.5
OSA	0.6	0.4	0.4	2.7	5.6	0	0
PF	2.1	0.8	2.9	4.8	... ?	0.8	2.1
OTS	0	1	1.1	1.4	2.5	0	0.1
T	0	0	0.3	0	0	0	0
GHL	0	0.1	0.4	0.6	1.6	0	0.4
TVC	0	1.8	2	4	5.6	1	3

Probl.	8	9	10	11	12	13	14
n	100	150	199	120	100	120	100
CW	11	18.5	22	3.4	1.4	5.4	1.2
MJ	13.3	9.8	20.7	5.3	6.8	2.8	1.9
AG	5.2	3.9	4.2	0.5	1.7	0.3	0.9
DV	5.3	10	10	1.5	1	1	1.8
GM	2.5	5.5	7.6	17.7	12.5	12.7	8.7
CMT1	5.4	6.6	6.9	2.2	0.9	4.1	1.1
FJ	2.2	5.5	7.6	... ?	0.5	... ?	0
CMT2	2.2	4.4	7	4.6	0?	3.9	1.3
OSA	0.1	0.1	1	11.4	0.8	0	2.7
PF	2.4	5.2	... ?	0.7	0.8	5.2	0?
OTS	0.1	1.8	1	0	0	0.1	0?
T	0	0.1	0	2.9	0?	0.3	0?
GHL	0	1.3	1.1	0.1	0?	1.8	0?
TVC	1.9	3.4	4.2	0	0.4	1.9	0.7

Tabela 2: % do desvio em relação às melhores soluções conhecidas Z^*

Uma avaliação da qualidade média das soluções é apresentada na Tabela 3. Note-se que valores de soluções para as heurísticas FJ e PF só são conhecidas para doze problemas.

As méta-heurísticas como Simulated Annealing e Tabu Search não aparecem como técnicas apropriadas para obter boas soluções rapidamente e a sua performance está directamente relacionada com o tempo de execução do algoritmo. Assim, algoritmos baseados nestes métodos necessiam de muito mais tempo de execução que as heurísticas "clássicas". Mas, como foi mostrado este esforço suplementar é justificado pelo melhoramento da qualidade das soluções obtidas. A comparação directa de tempos de execução entre algoritmos induz várias dificuldades, particularmente quando o mesmo algoritmo é executado sucessivamente com diferentes parâmetros durante um número não especificado de iterações, ou quando a regra para determinar esses parâmetros é indefinida. Da mesma forma, para comparar tempos entre algoritmos que utilizam "sementes", seria necessário executá-los várias vezes com os mesmos parâmetros e diferentes sementes. Em adição, os tempos deveriam ser registados para os mesmos valores de soluções e sobre uma mesma máquina.

método	média das soluções	% acima de Z^*		
		min	max	média
CW	1095	1.21	22.04	9.59
MJ	1089.21	1.88	20.72	9.37
AG	1054.29	0.33	5.65	3.15
DV	1054.86	1.02	22.76	6.93
GM	1055.43	0.82	17.68	6.43
CMT1	1012.50	0	6.95	3.81
FJ	952.42	0	8.39	2.41
CMT2	1013.93	0	7.01	3.13
OSA	998.83	0	11.39	1.84
PF	940.42	0	5.22	2.31
OTS	985.19	0	2.52	0.65
T	980.51	0	2.88	0.26
GHL	984.48	0	1.77	0.53
TVC	1002	0	5.56	2.13

Tabela 3: Avaliação da qualidade média das soluções

Na Tabela 4, são mostrados os tempos de cálculo (em minutos) necessários para os algoritmos GHL e TVC encontrarem as suas melhores soluções. Os tempos referentes a GHL foram medidos sobre uma estação de trabalho Silicon Graphics 4D a 35MHz, enquanto que para TVC foi utilizada uma Sun Sparc IPC, 25MHz, 8M de RAM.

Problema	n	GHL	TVC
1	50	2.0	28.1
2	75	41.8	129.7
3	100	9.9	42.2
4	150	61.9	91.5
5	199	99.7	98.1
6	50	8.9	13.1
7	75	35.0	31.6
8	100	9.8	65.5
9	150	33.2	38.5
10	199	65.5	76.4
11	120	14.9	80.3
12	100	5.2	32.0
13	120	45.1	42.5
14	100	37.9	24.5

Tabela 4: Tempos de CPU (em minutos) para as melhores soluções de GHL e TVC

Evidentemente, que por razões acima descritas estes resultados não são directamente comparáveis. Verifica-se contudo que as relações entre os tempos de execução e o tamanho do problema não são monótonas.

7. Conclusão

Nós descrevemos um novo algoritmo Tabu para a resolução do VRP. Este algoritmo é original e difere de outras aplicações da literatura em vários aspectos fundamentais. Ele permite em particular mostrar a consideração de cadeias de ejeção na construção de estruturas de vizinhanças compostas. Desenvolvimentos teóricos baseados neste tipo de estruturas foram recentemente feitos por Glover [19] para o TSP. Contudo, nenhuns resultados computacionais foram ainda publicados sobre qualquer aplicação destes conceitos. O nosso algoritmo inclui um procedimento de pós-otimização o qual resolve separadamente múltiplos TSPs. Aqui ficam demonstrados os conceitos fornecidos por este autor na resolução deste problema em particular.

Apesar do TSP se tratar de um problema combinatório NP-difícil nenhuma restrição é por ele imposta durante a construção de uma cadeia de ejeção. Por esse facto, nenhuma conclusão poderia ser tirada em relação à aplicabilidade destas técnicas na resolução de outros problemas combinatórios de mais difícil resolução. Nós desenvolvemos a teoria necessária à resolução do VRP. Aqui, múltiplas rotas de TSP são criadas e restrições adicionais de capacidade e duração de rota são consideradas a cada nível numa cadeia de ejeção.

Tabu, pode ser implementado a vários níveis, estabelecendo diferentes relações entre simplicidade de programação e sofisticação da pesquisa. Nós mostramos como conceitos avançados do método podem ser aplicados tirando partido deste tipo de estruturas. Com efeito, diferentes tipos de estratégias de oscilação são consideradas permitindo cruzar regiões de não-admissibilidade. Assim, um movimento composto admissível pode ser obtido a partir de uma sequência de movimentos não-admissíveis. A aplicação deste tipo de estratégia mostrou-se muito eficaz essencialmente quando nenhum melhoramento é obtido nas fases de intensificação e diversificação, donde se conclui que se trata de uma estratégia poderosa para ajudar o método a sair de óptimos locais.

Uma outra vantagem do nosso algoritmo é a sua flexibilidade. Os procedimentos de pesquisa do algoritmo proposto podem ser usados em conjugação com outros métodos e facilmente adaptados a vários contextos, por exemplo restrições como, número de veículos fixo ou limitado, veículos com diferentes características, afectação de clientes a veículos específicos, etc.

Finalmente, a performance empírica de TVC foi testada para 14 problemas teste extraídos da literatura para os quais é muito difícil determinar boas soluções admissíveis. A experiência computacional confirma a relativa eficiência do algoritmo proposto o que incentiva a continuação do estudo e desenvolvimento deste tipo de estruturas e sugere a sua aplicação a outros problemas de Optimização Combinatória.

Agradecimentos

O autor deseja agradecer aqui a todos os Professores e Colegas do Mestrado em Investigação Operacional e Engenharia de Sistemas do Instituto Superior Técnico (IST) por todo o apoio concedido e pelo excelente ambiente que aí foi encontrado durante todo o ano lectivo de 91/92.

Este trabalho foi parcialmente suportado pela Junta Nacional de Investigação Científica e Tecnológica (JNICT) no âmbito do programa Ciência.

Referências

- [1] Altinkemer, K. and Gavish, B., Parallel savings based heuristic for the delivery problem, *Operations Research* 39, 1991, 456-469.
- [2] Beasley, J.E., Route first-cluster second methods for vehicle routing, *Omega* 1, 1983, 403-408.
- [3] Bodin, L. and Golden, B., Classification in vehicle routing and scheduling, *Networks* 11, 1981, 97-10.
- [4] Chakrapani, J. and Korin-Kapov, J., Connection Machine Implementation of a Tabu Search Algorithm for the Traveling Salesman Problem, Technical Report HAR-92-10, SUNY at Stony Brook, NY 11794, Harriman School for Management and Policy, 1991.
- [5] Chakrapani, J. and Skorin-Kapov, J., Massively parallel tabu search for the quadratic assignment problem, Technical Report HAR-91-06, SUNY at Stony Brook, NY 11794, Harriman School for Management and Policy, 1991.
- [6] Christofides, N., The Traveling Salesman Problem, A Guide Tour of Combinatorial Optimisation, chap.12, 431-448, E.L.Lawler, J.K.Lenstra, A.H.G.Rinnooy Kan and D.B.Shmoys, Eds, Wiley, Chichester, 1984.
- [7] Christofides, N. and Eilon, S., An algorithm for the vehicle-dispatching problem, *Operations Research Quarterly* 20, 1969, 309-318.
- [8] Christofides, N., Mingozzi, A. and Toth, P., The Vehicle Routing Problem, *Combinatorial Optimisation*, chap.11, 315-338, N.Christofides, A.Mingozzi, P.Toth and C.Sandi, Eds, Wiley, Chichester, 1979.
- [9] Clark, G. and Wright, J.W., Scheduling of vehicles from a central depot to a number of delivery points, *Operations Research* 12, 1964, 568-581.
- [10] Croes, A., A method for solving traveling salesman problems, *Operations Research* 5, 1985, 591-812.
- [11] Desrochers, M. and Verhoog, T., A Matching Based Algorithm for the Vehicle Routing Problem, *Cahier du Gerad G-89-04*, Ecole de Hautes Etudes Commerciales de Montréal, 1989.
- [12] Fisher, M.L. and Jaikumar, R., A generalized assignment heuristic for the vehicle routing, *Networks* 11, 1981, 109-124.
- [13] Gaskell, T., Bases for the vehicle fleet scheduling, *Operations Research Quarterly* 18, 1967, 281-295.
- [14] Gendreau, M., Hertz, A. and Laporte, G., Tabu Search Heuristics for the Vehicle Routing Problem, Technical Report CRT-777, Centre de Recherche sur les Transports, Université de Montréal, 1992.
- [15] Giller, B., and Miller, L.R., A heuristic algorithm for the vehicle dispatch problem, *Operations Research* 22, 1974, 340-349.
- [16] Glover, F., Future paths for integer programming and links to artificial intelligence, *Computers and Operations Research* 5, 1986, 533-549.
- [17] Glover, F., Tabu search - Part 1, *ORSA Journal on Computing* 1, 1989, 190-206.
- [18] Glover F, Tabu Search - Part 2, *ORSA Journal on Computing* 2, 1990, 4-32.
- [19] Glover, F., Multilevel Tabu Search and Embedded Search Neighborhoods for the Traveling Salesman Problem, Technical Report, University of Colorado at Boulder, Graduate School of Business and Administration, 1991.
- [20] Hadjiconstantinou, E. and Christofides, N., An optimal procedure for solving basic vehicle routing problems, presented at 35th Annual Conference of the Canadian Operational Research Society, Halifax, Canada, 1993.
- [21] Haimovich, M. and Kan, A.H.G.R., Bounds and heuristics for capacitated routing problems, *Mathematics of Operations Research* 10, 1985, 527-542.
- [22] Kirpatrick, S., Gelatt, C.D.J. and Vecchi, M.P., Optimisation by simulated annealing, *Science*, 1993, 671-680.
- [23] Laporte, G. and Nobert, Y., Exact algorithms for the vehicle routing problem, *Annals of Discrete Mathematics* 31, 1987, 147-184.

- [24] Lenstra, J.K. and Kan, A.H.G.R., A complexity of vehicle routing and scheduling problems, *Networks* 11, 1981, 221-227.
- [25] Lin, S., Computer solutions of the tsp, *Bell Systems Technical Journal* 14, 1965, 2245.
- [26] Mole, R.H. and Jameson, S.R., A sequential route-building algorithm employing a generalised savings criterion, *Operational Research Quarterly* 27, 1976, 503-511.
- [27] Nelson, M.D., Nygard, K.E., Griffin, J.H. and Shreve, W.E., Implementation techniques for the vehicle routing problem, *Computers and Operations Research* 12, 1985, 273-283.
- [28] Osman, I.H., Metastrategy simulated annealing and tabu search algorithms for the vehicle routing problem, *Annals of Operations Research*, Forthcoming, 1993.
- [29] Paessens, H., The savings algorithm for the vehicle routing problem, *European Journal and Operations Research* 34, 1988, 336-344.
- [30] Pureza, V.M. and França, P.M., Vehicle Routing Problems via Tabu Search Metaheuristic, Technical Report CRT-747, Centre de Recherche sur les Transports, Université de Montréal, 1991.
- [31] Rego, C., Une Heuristique Tabou avec Structures de Voisinage Composé pour les Tournées de Véhicules, Tese de Mestrado, Departamento de Engenharia Civil, Instituto Superior Técnico, Lisboa, 1993.
- [32] Russell, R.A., An effective heuristic for the m-tour traveling salesman problem with some side constraints, *Operations Research* 25, 1977, 517-524.
- [33] Semmet, F. and Taillard, E., Solving real-life vehicle routing problems efficiently using taboo search, *Annals of Operations Research*, Forthcoming, 1992.
- [34] Taillard, E., Robust tabu search for the quadratic assignment problem, *Parallel Computing* 17, 1991, 443-455.
- [35] Taillard, E., Parallel Iterative Search Methods for the Vehicle Routing Problems, Technical Report ORWP92/03, Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, Switzerland, 1992.
- [36] Yellow, P., A computational modification to the savings method of vehicle scheduling, *Operational Research Quarterly* 21, 1970, 281-283.

UM ESTUDO SOBRE O MÉTODO DE NEWTON PARA OPTIMIZAÇÃO SEM RESTRIÇÕES

João Luís Cardoso Soares
Departamento de Matemática
Universidade de Coimbra

Abstract

In this paper we discuss the use of the Newton's method in unconstrained optimization. Special emphasis is given to large and sparse problems. We only consider the case in which the search direction is found by a direct linear equations solver. Monotone and nonmonotone line-searches are discussed. Some numerical results are included and lead us to recommend nonmonotone line-search techniques to globalize Newton's algorithm.

Resumo

Neste artigo é discutida a utilização do método de Newton para Optimização Sem Restrições, especialmente para problemas de grande dimensão e esparsos. O trabalho foca essencialmente a resolução de cada sistema linear por um método directo e a utilização de pesquisas unidimensionais como estratégia de globalização do método de Newton. Resultados numéricos conclusivos quanto à melhor maneira de tornar o método globalmente convergente são apresentados.

Keywords

Unconstrained Optimization; Large-scale problems; Line search methods.

1. Introdução

No problema de Optimização Sem Restrições procura-se obter um vector $x^* \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$f(x^*) = \min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \quad (1)$$

onde $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função duas vezes continuamente diferenciável em \mathbb{R}^n . Poderíamos considerar um subconjunto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ não vazio, aberto e convexo em vez de \mathbb{R}^n , pois a análise seria semelhante. Normalmente é apenas considerado o caso de $\Omega = \mathbb{R}^n$ porque é imediata a extensão para um subconjunto de \mathbb{R}^n nessas condições.

A possibilidade de se resolver eficientemente o problema (1) está normalmente associada à convexidade da função objectivo f . Essa propriedade é importante porque garante que qualquer mínimo local (isto é, mínimo relativamente a um determinado subconjunto de Ω) é um mínimo global (isto é, a solução problema). A determinação de um mínimo global para uma função não convexa f é, em geral, muito difícil de efectuar. Por isso, limitamo-nos a estudar o problema da determinação de um mínimo local.

O cálculo de um mínimo local pressupõe a determinação de um ponto estacionário, isto é, um ponto $\bar{x} \in \Omega$ tal que

$$\nabla f(\bar{x}) = 0, \quad (2)$$

onde ∇f designa o vector gradiente de f . Os algoritmos para Optimização Sem Restrições procuram obter apenas um ponto estacionário de f . Contudo, são desenvolvidos de modo a que um tal ponto não seja, pelo menos, um máximo local de f . Por isso, ao longo deste trabalho assumimos que um ponto \bar{x} que satisfaça a condição necessária (2) satisfaz o nosso objectivo.

O Método de Newton é seguramente o algoritmo mais mencionado para a resolução do problema de Optimização Sem Restrições. Quando convenientemente implementado é um processo robusto e proporciona uma taxa de convergência elevada se o ponto inicial está suficientemente próximo de um mínimo local onde a matriz das segundas derivadas seja não singular.

Como se trata de um método iterativo apenas localmente convergente, é necessário combiná-lo com uma estratégia global. O algoritmo resultante deve assegurar convergência a partir de um ponto inicial arbitrário. As pesquisas unidimensionais e as regiões de confiança são as estratégias mais conhecidas para esse efeito. Neste trabalho focamos apenas a utilização de pesquisas unidimensionais. Contudo, a preferência de uma estratégia sobre a outra não é uma questão assente, como é discutido em [17, Capítulo 2].

A estrutura deste trabalho é a seguinte. Na secção 2 introduzimos o método de Newton para a resolução do problema (1), recordando os seus resultados locais de convergência. Na secção 3 discutimos várias modificações desse processo que originam algoritmos globalmente convergentes. O critério de paragem para qualquer método de Optimização Sem Restrições é discutido na secção 4. Na secção 5 apresentamos algumas estratégias para obtenção da matriz Hessiana (ou das segundas derivadas) exacta ou aproximada, particularmente para problemas de grande dimensão. Alguns resultados numéricos obtidos para uma implementação eficiente do método de Newton são apresentados na secção 6. Finalmente, na última secção esboçamos algumas conclusões e apresentamos algumas pistas de investigação futura.

2. O método de Newton

Este processo consiste em resolver uma sucessão de programas quadráticos estritamente convexos que sucessivamente permitem caracterizar a direcção de deslocamento em cada aproximação. O conhecido teorema da média para funções de várias variáveis motiva a definição do método. Considere-se, num passo genérico- k , o seguinte modelo quadrático

$$\min_{d \in \mathbb{R}^n} m_k(x^k + d) = f(x^k) + \nabla f(x^k)^T d + \frac{1}{2} d^T \nabla^2 f(x^k) d, \quad (3)$$

onde x^k é a aproximação corrente de uma solução \bar{x} e $\nabla^2 f$ designa a matriz Hessiana de f . Se a matriz $\nabla^2 f(x^k)$ for Positiva Definida¹ então a determinação de uma solução óptima deste subprograma é equivalente à resolução do seguinte sistema linear

$$\nabla^2 f(x^k) d = -\nabla f(x^k). \quad (4)$$

¹ Uma matriz A diz-se Positiva Definida quando $x^T A x > 0$ para todo o $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

O passo de Newton corresponde a efectuar

$$x^{k+1} = x^k + d^k, \tag{5}$$

com d^k a solução do sistema linear (4). Portanto, o método de Newton é um processo iterativo que, a partir de um ponto inicial x^0 , gera uma sucessão $\{x^k\}$ definida por (5), onde d^k é a solução do sistema linear (4). A convergência local do método de Newton é apresentada no seguinte teorema.

Teorema 1. [7, p.90] Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e $x^* \in \mathbb{R}^n$ um ponto tal que $\nabla f(x^*) = 0$ e a matriz $\nabla^2 f(x^*)$ é invertível com $\|\nabla^2 f(x^*)^{-1}\| \leq \beta$. Suponhamos ainda que existe $r > 0$ tal que f é duas vezes continuamente diferenciável em $B(x^*, r)^2$ e $\nabla^2 f \in \text{Lip}_\gamma(B(x^*, r))^3$.

Então existe $\epsilon > 0$ tal que para qualquer $x^0 \in B(x^*, \epsilon)$, a sucessão $\{x^k\}$ gerada por

$$x^{k+1} = x^k - \nabla^2 f(x^k)^{-1} \nabla f(x^k), \quad k = 0, 1, \dots$$

está bem definida e converge para x^* . Além disso, verifica-se

$$\|x^{k+1} - x^*\| \leq \gamma \beta \|x^k - x^*\|^2. \tag{6}$$

A maioria das funções duas vezes continuamente diferenciáveis satisfazem a condição de Lipchitz referida no teorema anterior. A fórmula (6) mostra que a taxa de convergência da sucessão gerada pelo método é quadrática. A convergência é local porque o ponto inicial x^0 deve pertencer a uma bola aberta $B(x^*, \epsilon)$ que o teorema garante existir. Além disso a sucessão gerada pode convergir para um máximo local, ou um ponto-sela. Portanto, se x^0 não for convenientemente escolhido o método de Newton pode não convergir para um ponto desejado. Por outro lado, a matriz $\nabla^2 f(x^k)$ pode não ser invertível em alguma iteração, o que provocará uma interrupção do processo iterativo.

O conhecimento da matriz Hessiana em cada ponto x^k pode envolver um acentuado esforço quer humano, na obtenção da expressão analítica das segundas derivadas, quer computacional, na sua avaliação automática. Por isso, pode ser aconselhável utilizar um processo semelhante ao método de Newton, no qual uma matriz A^k desempenha o papel de $\nabla^2 f(x^k)$. A convergência local desse método pode ainda estabelecer-se desde que as matrizes A^k se aproximem assintoticamente das matrizes $\nabla^2 f(x^k)$ e se verifiquem as hipóteses do Teorema 1. A taxa de convergência do processo resultante é, no máximo, superlinear [17, 7]. Na secção 5 explicamos como estas matrizes A^k podem ser obtidas.

3. A versão global do método de Newton

Um algoritmo diz-se globalmente convergente se todo o ponto de acumulação da sucessão $\{x^k\}$, gerada a partir de um ponto inicial x^0 arbitrário, for uma solução do problema em causa. Em particular, diz-se que possui convergência finita quando se pode garantir a existência de um elemento dessa sucessão que seja solução do problema. Isso só é possível de estabelecer para casos particulares das funções envolvidas. No caso geral, só é possível de estabelecer a

² $B(x^*, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x^* - x\| < r\}$

³ Isto é, $\nabla^2 f$ é localmente Lipchitz-contínua em $B(x^*, r)$, sendo γ a constante de Lipchitz.

convergência assintótica de um algoritmo e é sobre este tipo de convergência que nos referiremos ao longo desta secção.

Os algoritmos globalmente convergentes para a resolução do problema (1) possuem uma estrutura comum. Se x^k é o ponto referente à iteração k , então essa iteração consiste dos seguintes passos:

- (i) Determinação de uma direcção d^k ao longo da qual se garanta um decréscimo efectivo de f ;
- (ii) Determinação de um escalar positivo α_k tal que $x^{k+1} = x^k + \alpha_k d^k$ é o ponto na próxima iteração.

Um algoritmo que, em cada iteração, consista dos dois passos anteriores é designado por *método descendente*. Quando um método descendente procura determinar a direcção d^k antes do passo α_k diz-se que se baseia em *pesquisas unidimensionais*. Pelo contrário, um método de *regiões de confiança* efectua a determinação do passo α_k antes da determinação da direcção d^k . Ao longo deste trabalho faremos apenas referência à utilização de pesquisas unidimensionais.

A pesquisa unidimensional é o procedimento que caracteriza a determinação do passo α_k . A pesquisa diz-se *exacta* se o procedimento consiste em efectuar uma minimização unidimensional ao longo da semi-recta positiva da restrição da função f ao longo da direcção d^k . A pesquisa pode também ser *inexacta* se constitui um procedimento para determinação de um passo α_k que satisfaça uma condição associada a um decréscimo da função objectivo.

Quando a direcção d^k é obtida com base em informação de segunda ordem, exacta ou aproximada, e o escalar α_k é determinado de acordo com uma pesquisa unidimensional, o correspondente método é designado por método de Newton modificado. As designações específicas de *Newton Discreto* ou *Quasi-Newton* são usadas conforme a matriz Hessiana é estimada em cada ponto da sucessão $\{x^k\}$ por diferenças finitas, ou mediante uma actualização algébrica, respectivamente. O método de Newton modificado é um processo globalmente convergente que tem uma taxa de convergência elevada na proximidade de uma solução.

Na secção 3.1 apresentamos duas pesquisas unidimensionais inexactas. Uma pela sua simplicidade e por ter sido a primeira pesquisa inexacta sugerida na literatura e a outra porque estudos recentes revelam tratar-se de uma pesquisa bastante eficiente. Na secção 3.2 mostramos como é possível obter uma direcção de descida com base na resolução do sistema linear (4). Finalmente na secção 3.3 efectuamos a análise de convergência de um método descendente.

3.1 Pesquisa unidimensional

Várias técnicas têm sido propostas para a determinação do passo α_k que vise proporcionar a um método descendente robustez e uma taxa de convergência local elevada. Se a função f não é quadrática, a pesquisa unidimensional exacta requer, em geral, um esforço computacional elevado. Experiência computacional tem comprovado que este tipo de pesquisa não é competitivo com as pesquisas inexactas [17], mesmo quando o critério de paragem do processo não é demasiadamente restritivo (por exemplo, a condição de Armijo-Wolfe [7,2]).

Recentemente foi desenvolvida uma implementação mais cuidada de uma pesquisa exacta [14], mas os resultados numéricos não são, por enquanto, conclusivos.

Devido à simplicidade da sua implementação, o Critério de Armijo [2] continua a ser uma das pesquisas unidimensionais inexactas mais utilizadas. Seguidamente, descrevemos esta pesquisa unidimensional como parte de um método descendente. O cálculo da direcção d^k será objecto de estudo na próxima subsecção.

Critério de Armijo

Dados: Escolha $x^0 \in \mathbb{R}^n$, $\sigma(0,1/2)$, $s \in \mathbb{R}^+$ e $\epsilon \in (0,1)$.

Inicialização: Faça $k = 0$ e avalie $f(x^0)$.

Iteração k:

Passo 1: Calcule d^k . Se $d^k = 0$, Pare.

Passo 2: Determine o menor inteiro não negativo $i = 0, 1, \dots$, tal que

$$f(x^k + s\epsilon^i d^k) \leq f(x^k) + \sigma s \epsilon^i \nabla f(x^k)^T d^k \tag{7}$$

Faça $\alpha_k = s\epsilon^i$.

Passo 3: Faça $x^{k+1} = x^k + \alpha_k d^k$ e $k = k + 1$.

Este critério engloba não só a condição de Armijo (7) mas também o procedimento da determinação do passo. Assim, em cada iteração k são testados sucessivos escalares α , de valores decrescentes de s até 0 a uma taxa constante ϵ . É possível mostrar que existe um intervalo fechado da forma $(0, \bar{\alpha}]$ tal que qualquer $\alpha \in (0, \bar{\alpha}]$ verifica a condição de Armijo (7), embora o conjunto dos números reais α que verificam (7) poder não ser sequer um intervalo.

A estratégia não monótona de estabilização (do inglês, *NonMonotone Stabilization Strategy*, NMS) de Grippo, Lampariello e Lucidi [12] surge particularmente vocacionada para funcionar em combinação com o método de Newton. Esta pesquisa unidimensional inexacta baseia-se numa extensão do critério de Armijo [11] e, quando combinada com o método de Newton na sua forma original, permite utilizar o passo de Newton um maior número de vezes. A próxima proposição, permite compreender a motivação e o funcionamento da estratégia NMS.

Proposição 1. [12] Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função duas vezes continuamente diferenciável em \mathbb{R}^n . Suponhamos que a matriz Hessiana $\nabla^2 f$ é não singular num conjunto não vazio $D \subseteq \mathbb{R}^n$ e considere-se a sucessão $\{x^k\}$ definida pelo método de Newton, isto é, $x^{k+1} = x^k + d^k$ com direcção d^k definida por

$$d^k = -\nabla^2 f(x^k)^{-1} \nabla f(x^k), \quad k = 0, 1, \dots \tag{8}$$

Suponhamos ainda que a sucessão $\{x^k\}$ verifica as seguintes condições

1. existe um conjunto compacto $S \subseteq D$ tal que $x^k \in S$ para qualquer k ;
2. $\lim_k \|d^k\| = 0$;
3. existe uma subsucessão estritamente monótona da sucessão $\{f(x^k)\}$

Então a sucessão $\{x^k\}$ converge superlinearmente para um ponto estacionário $\bar{x} \in S$, que não é máximo local de f . Além disso, a taxa de convergência é quadrática se $\nabla^2 f$ for Lipschitz contínua em \bar{x} .

Assim, contrariamente à generalidade das pesquisas unidimensionais, a estratégia NMS inclui diversas formas de forçar a convergência global de um método descendente sem requerer monotonia nos valores da função mérito f . Note-se que se $\{\|d^k\|\}$ converge para zero e $f(x^k)$ decrescer pelo menos ao fim de um número fixo de iterações, então a Proposição 1 permite estabelecer a convergência para um ponto estacionário de uma sucessão $\{x^k\}$ obtida pelo método de Newton. Por isso, o decréscimo da sucessão $\|d^k\|$ pode funcionar como um critério de aceitação do passo α_k unitário. Uma das ideias subjacentes à estratégia NMS é a de aceitar o passo unitário quando $\|d^k\|$ é inferior a um valor de referência Δ que é forçado a convergir para zero ao longo do método. Quando $\|d^k\|$ é inferior a esse valor de referência então faz-se $x^{k+1} = x^k + d^k$ sem sequer avaliar $f(x^{k+1})$.

Quando numa iteração k a norma de d^k é superior a Δ , então deve-se utilizar um critério do tipo Armijo para determinação do passo α_k que garanta um decréscimo estrito, pelo menos periodicamente, da sucessão $\{f(x^k)\}$. Outra característica importante da estratégia NMS consiste na introdução de um valor de referência \mathcal{R} que substitui $f(x^k)$ no critério de Armijo. Este valor é mantido pelo menos ao longo de \mathcal{N} iterações, com \mathcal{N} um inteiro não negativo constante ao longo do método. Se numa dessas iterações o valor da função objectivo tiver que ser avaliado e esse valor for inferior a \mathcal{R} então \mathcal{R} é actualizado. Deste modo o passo α_k unitário é usado um maior número de vezes. Portanto, a forma simples do método de Newton pode ser usada ainda longe da solução e o processo resultante ter uma convergência bastante rápida. Seguidamente descrevemos esta pesquisa unidimensional como parte de um método descendente.

A estratégia Não Monótona de Estabilização (NMS)

Dados: Escolha $x^0 \in \mathbb{R}^n$, $\Delta^0 > 0$, $\beta \in (0,1)$, $\sigma \in (0,1/2)$, e \mathcal{N}, \mathcal{M} inteiros não negativos.

Inicialização: Faça $k = 0, j = 0$ e $\Delta = \Delta_0$.

Avalie $f(x^0)$ e faça $\mathcal{R}^0 = f(x^0)$, $\ell(0) = 0, m(0) = 0$ e $y^0 = x^0$.

Iteração k :

Passo 1: Calcule d^k . Se $d^k = 0$ Páre.

Passo 2: Se $k = \ell(j) + \mathcal{N}$ avalie $f(x^k)$ se for necessário, e:

(a) Se $f(x^k) \geq \mathcal{R}^j$ substitua x^k por y^j ,

faça $k = \ell(j)$ e vá para o Passo 4;

(b) Se $f(x^k) < \mathcal{R}^j$ faça $j = j+1, y^j = x^k, \ell(j) = k$ e calcule \mathcal{R}^j ;

Passo 3: Se $\|d^k\| \leq \Delta$ faça $\alpha_k = 1, \Delta = \beta\Delta$ e vá para o Passo 5;

Se $\|d^k\| > \Delta$ avalie $f(x^k)$ se for necessário, e

(a) Se $f(x^k) \geq \mathcal{R}^j$ substitua x^k por y^j ,

faça $k = \ell(j)$ e vá para o Passo 4;

(b) Se $f(x^k) < \mathcal{R}^j$ faça $j = j+1, y^j = x^k, \ell(j) = k$ e calcule \mathcal{R}^j ;

Passo 4: Determine o menor inteiro não negativo $i = 0, 1, \dots$ tal que

$$f(x^k + 2^{-i} d^k) \leq \mathcal{R}^j + \sigma 2^{-i} \nabla f(x^k)^T d^k.$$

Faça $\alpha_k = 2^{-i}$, $j = j+1$, $y^j = x^k + \alpha_k d^k$, $\ell(j) = k+1$ e calcule \mathcal{R}^j ;

Passo 5: Faça $x^{k+1} = x^k + \alpha_k d^k$ e $k = k+1$.

Para completar a descrição do algoritmo falta apenas explicar como deve o valor de referência \mathcal{R}^j ser calculado. A sucessão $\{y^j\}$ ($\equiv \{x^{\ell(j)}\}$) é a sucessão dos pontos onde a função mérito f foi avaliada. O valor de referência \mathcal{R}^j é calculado tendo em consideração um número $m(j)$ de pontos onde f foi previamente avaliada, de acordo com o seguinte esquema.

Cálculo de \mathcal{R}^j :

Seja $m(j)$ um número inteiro tal que $0 \leq m(j) \leq \min(m(j) - 1) + 1, \mathcal{M}$.

Então escolha \mathcal{R}^j de modo a satisfazer

$$f(y^j) \leq \mathcal{R}^j \leq \max_{0 \leq i \leq m(j)} f(y^{j-i}). \tag{9}$$

A estratégia NMS pode ser vista como uma extensão de outras pesquisas unidimensionais. Note-se que, por exemplo, se $\mathcal{N} = \mathcal{M} = 0$ a estratégia tem um comportamento idêntico ao do Critério de Armijo com $\epsilon = 1/2$ e $s = 1$. Por outro lado refira-se que embora esta estratégia esteja particularmente vocacionada para funcionar em combinação com o método de Newton, ela pode também ser usada com qualquer método descendente sob condições que serão apresentadas na subsecção 3.3.

3.2 Direções de movimento

Como referimos anteriormente, a direção de Newton d^k é o mínimo global do modelo quadrático (3) quando esse modelo é estritamente convexo, isto é, quando a matriz Hessiana $\nabla^2 f(x^k)$ é Positiva Definida. Nesse caso, a solução d^k do sistema linear (4) é uma direção de descida, pois $\nabla f(x^k)^T d^k = -(d^k)^T \nabla^2 f(x^k) < 0$. Caso contrário, a propriedade de descida não pode, em geral, ser garantida.

Quando surge este tipo de dificuldade é necessário perturbar o modelo, de forma a conseguir um modelo estritamente convexo. Assim, sempre que $\nabla^2 f(x^k)$ não é uma matriz Positiva Definida, deve ser substituída por uma matriz H^k com essa propriedade. Com esta estratégia o método de Newton modificado pode, eventualmente, adoptar a sua forma original nos últimos passos quando ocorre convergência da sucessão $\{x^k\}$ para um mínimo local.

Quando o menor valor próprio λ_{\min} de $\nabla^2 f(x^k)$ é conhecido, então a matriz $H^k = \nabla^2 f(x^k) + \mu I$ é Positiva Definida se e só se $\mu > \lambda_{\min}$ [17]. A determinação de λ_{\min} envolve no entanto um acentuado esforço computacional. Por isso, na prática procura-se obter uma factorização de Cholesky modificada de $\nabla^2 f(x^k)$, cuja diagonal vai sendo modificada à medida que a factorização vai decorrendo, de modo que no final se tenham os factores de uma matriz Positiva Definida $\nabla^2 f(x^k) + E$ com E uma matriz diagonal de componentes não negativas. É de notar que $E = 0$ quando a matriz $\nabla^2 f(x^k)$ é Positiva Definida e razoavelmente bem condicionada.

A factorização de Cholesky consiste em decompor uma matriz simétrica na forma LDL^T , com D uma matriz diagonal e L uma matriz triangular inferior com elementos diagonais unitários. Toda a matriz simétrica e não singular admite uma factorização LDL^T definida de forma única. Além disso, a matriz factorizada é Positiva Definida se e só se a matriz D possuir todos os elementos diagonais positivos.

O processo de factorização de Cholesky de uma matriz A simétrica consiste em $n-1$ passos do tipo:

$$A^{(j)} = \begin{bmatrix} a_{jj} & a_j^T \\ a_j & A_{jj}^{(j)} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} d_{jj} & l_j^T \\ l_j & A^{(j+1)} \end{bmatrix}$$

onde $A^{(j)}$ é uma matriz $(n - (j-1)) \times (n - (j-1))$, para $j \geq 1$ ($A^{(1)} = A$), a_{jj} é o elemento da primeira linha e coluna de $A^{(j)}$, a_j a restante coluna, e $A_{jj}^{(j)}$ é a submatriz que resulta de $A^{(j)}$ excluindo a primeira linha e coluna. As operações a efectuar neste passo genérico- j consistem em:

$$d_{jj} = a_{jj} \quad l_j = \frac{1}{d_{jj}} a_j \quad A^{(j+1)} = A_{jj}^{(j)} - l_j a_j^T.$$

Portanto, a matriz $A^{(j+1)}$ difere de $A_{jj}^{(j)}$ em uma matriz de característica um. Neste passo são determinados o j -ésimo elemento diagonal d_{jj} de D e a j -ésima coluna l_j de L .

A factorização modificada de Cholesky consiste em considerar no passo j

$$d_{jj} = a_{jj} + e_j$$

como e_j um escalar qualquer não negativo que assegure que d_{jj} seja um valor positivo. Esse número deve ser escolhido suficientemente elevado de forma a que os valores próprios de $A^{(j+1)}$ não sejam muito mais negativos do que os de $A^{(j)}$, pois isso irá provocar perturbações em passos posteriores do processo. Por outro lado, e_j não deve ser demasiado elevado para que a matriz resultante não difira muito da matriz Hessiana $\nabla^2 f(x^k)$.

Gill e Murray [9] propõem uma factorização de Cholesky modificada na qual os elementos de L são mantidos uniformemente limitados por um escalar positivo β . Desta forma o bom condicionamento da matriz factorizada é tido em consideração implicitamente. Assim, e_j é escolhido como sendo o menor escalar não negativo que satisfaz:

$$0 \leq \frac{\|a_j\|_\infty^2}{a_{jj} + e_j} \leq \beta^2 \quad e \quad d_{jj} = a_{jj} + e_j \geq \delta$$

com $\delta > 0$, um escalar pequeno. Os autores sugerem que β seja tal que

$$\beta^2 = \max \left\{ \frac{\xi}{\sqrt{n-1}}, \gamma \right\}$$

onde γ e ξ são os maiores valores, em módulo, das componentes não diagonais e diagonais da matriz original, respectivamente.

Schnabel e Erskow [16] propõem uma escolha diferente para e_j , da forma

$$e_j = \max(\tau\gamma, \|a_j\|_1 - a_{jj}) \quad (10)$$

onde $\tau > 0$ é um escalar pequeno, e γ foi definido atrás. Esta escolha assegura que $d_{jj} \geq \tau\gamma$. Embora esta estratégia não provoque a modificação da factorização de matrizes diagonalmente

dominantes, pode obrigar à factorização de uma matriz Positiva Definida. Para obstar a isso, os autores propõem que se efectue a factorização de Cholesky sem modificação, desde o passo 1, sendo este processo abandonado no passo j quando algum elemento diagonal de $A^{(j+1)}$ não é suficientemente positivo. Deve então reiniciar-se esse passo com e_j a ser definido por (10). É de notar que este processo não necessita de usar β como no processo de Gill-Murray, o que conduz em princípio a um menor esforço computacional. Contudo a experiência computacional apresentada em [17] mostra que a técnica de Gill e Murray é mais indicada para problemas de Optimização de grandes dimensões.

3.3 Análise de convergência

Nesta subsecção efectuamos uma análise da convergência de um método descendente global com pesquisas unidimensionais para Optimização Sem Restrições. A análise efectuada, embora vocacionada para um método no qual a direcção é a solução exacta de um sistema linear, pode ser aplicada para o caso de a direcção ser apenas uma solução aproximada. Também métodos descendentes para Optimização Com Restrições que gerem apenas aproximações admissíveis numa região admissível convexa podem ser analisados, do ponto de vista da convergência global, com um tratamento análogo ao que aqui se descreve.

Importa destacar algumas limitações nesta análise. Primeiro a de se admitir como solução do problema um ponto estacionário da função f que não seja máximo local. Como referimos, na ausência de convexidade da função objectivo, não é possível caracterizar as soluções globais, tornando impossível a análise de convergência de um algoritmo.

Consideremos então um método descendente destinado a obter uma solução do problema

(1). Suponhamos que o método gera uma sucessão de pontos $\{x^k\}$ de acordo com

$$x^{k+1} = x^k + \alpha_k d^k,$$

no qual o escalar α_k é determinado por uma pesquisa unidimensional. Suponhamos ainda, sem perda de generalidade que f é continuamente diferenciável num conjunto não vazio $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, aberto e convexo.

Seguidamente introduzimos duas hipóteses que, quando verificadas, permitem estabelecer a convergência global de um método com as características referidas.

Hipótese 1. O conjunto de nível $\mathcal{N}^0 = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \leq f(x^0)\}$ é compacto.

Hipótese 2. Existem escalares positivos γ e p (com $p \geq 1$) tal que para qualquer k , a direcção d^k satisfaz as seguintes condições:

1. $\nabla f(x^k)^T d^k \leq -\gamma \|d^k\|^p$;
2. $d^k = 0$ se e só se x^k for um ponto estacionário;
3. Se $\lim_k x^k = \bar{x}$ e $\lim_k d^k = 0$ então \bar{x} é um ponto estacionário.

A hipótese 1 é uma hipótese clássica. Não tem a ver com o algoritmo, mas sim com o problema específico a otimizar. A sua verificação garante não só a existência de solução, como também a de pelo menos um ponto de acumulação para uma sucessão $\{x^k\}$ gerada por um método descendente.

Pelo contrário, a hipótese 2 está relacionada com a dinâmica do método descendente. Uma observação importante é a de que esta hipótese não impõe qualquer tipo de condição ao passo α_k , pois apenas as direcções d^k estão condicionadas. Como veremos mais adiante uma escolha do passo α_k adequada, conjuntamente com a verificação das hipóteses 1 e 2, é suficiente para garantir a convergência global de um método descendente.

A hipótese 2.2 significa que o método só deve ser incapaz de gerar uma direcção de descida quando, e só quando, x^k é um ponto estacionário. Relativamente à hipótese 2.3, ela reflecte a continuidade da direcção $d(x^k) = d^k$, como função de x , num ponto de acumulação \bar{x} . De facto, tendo em conta que 2.2 é verificada, então essa hipótese é equivalente a afirmar que

$$\lim_k d(x^k) = 0 = d(\bar{x}).$$

Realçamos também o benefício duplo que advém da verificação da hipótese 2.1. Se por um lado garante que d^k seja uma direcção descendente, também implica que $\{x^k\}$ converge para um ponto estacionário quando a sucessão $\{\nabla f(x^k)^T d^k\}$ converge para zero. Isso é importante pois a dinâmica e o objectivo da pesquisa unidimensional é normalmente a de obrigar a convergência de $\{\nabla f(x^k)^T d^k\}$ para zero.

No âmbito deste trabalho d^k é a solução exacta do sistema

$$H^k d = -\nabla f(x^k) \quad (11)$$

onde H^k é uma matriz Positiva Definida. Se todas as matrizes $\{H^k\}$ possuírem valores próprios uniformemente limitados num intervalo de valores positivos, isto é,

$$m \leq m_k \leq M_k \leq M$$

para todo o k onde m_k e M_k são o menor e o maior valor próprio de H^k , e m e M são escalares positivos, então a hipótese 2 é verificada [17]. Em particular o método da Descida Máxima, que corresponde a $H^k = I$, satisfaz trivialmente esta condição suficiente. Por outro lado se H^k é obtido efectuando uma factorização de Cholesky modificada sobre a matriz Hessiana $\nabla^2 f(x^k)$ então, tal como é discutido em [17], esse processo permite obter matrizes H^k com valores próprios uniformemente limitados num intervalo de valores positivos.

Seguidamente formalizamos os resultados de convergência global, começando por considerar a mais simples das pesquisas unidimensionais. O Teorema 2 é uma extensão de um resultado analogo em [2, p.24] e estabelece a convergência global de um método descendente no qual a escolha do passo é feita de acordo com o Critério de Armijo.

Teorema 2. [17] Se as hipóteses 1 e 2 se verificam e o passo α_k é determinado de acordo com o Critério de Armijo então a sucessão $\{x^k\}$ possui pelo menos um ponto de acumulação, e todo o ponto de acumulação dessa sucessão é um ponto estacionário do problema (1).

A convergência global da estratégia não monótona de estabilização é apresentada no Teorema 3, cuja demonstração aparece em [18].

Teorema 3. Se as hipóteses 1 and 2 são verificadas então a sucessão $\{x^k\}$ obtida pela estratégia não monótona de estabilização possui pelo menos um ponto de acumulação. Além

disso, todo o ponto de acumulação da sucessão $\{x^k\}$ é um ponto estacionário do problema (1), e nenhum ponto de acumulação da sucessão $\{x^k\}$ é máximo local.

Como o Critério de Armijo é um caso particular da estratégia NMS, o Teorema 3 contém o resultado do Teorema 2 como corolário. Deste modo podemos concluir que o Critério de Armijo impede a convergência para um máximo local.

Para completar a análise de um método descendente regressamos ao Método de Newton. O método de Newton modificado assume a sua forma original quando os termos da sucessão $\{x^k\}$ estão suficientemente próximos de um mínimo local \bar{x} do problema (1). Com efeito, se \bar{x} é mínimo local onde a matriz Hessiana seja invertível e se

$$\lim_k \frac{\|[(H^k)^{-1} - \nabla^2 f(x^*)^{-1}] \nabla f(x^k)\|}{\|\nabla f(x^k)\|} = 0 \quad (12)$$

então, para todo o k suficientemente grande, o passo α_k unitário satisfaz a condição de Armijo [6]. O mesmo acontece com a estratégia NMS porque a sua pesquisa unidimensional é menos restritiva do que a do Critério de Armijo.

Assim, parece vantajoso a utilização de um método de Newton modificado, isto é, $H^k = \nabla^2 f(x^k)$ sempre que a matriz Hessiana em x^k for Positiva Definida, o que naturalmente acontece numa vizinhança de um mínimo local \bar{x} nas condições referidas. Desta forma a condição (12) é trivialmente verificada, e o método eventualmente assume a forma original do método de Newton com a vantagem de manter as taxas de convergência local superlinear, ou quadrática, enunciadas anteriormente.

4. Critério de Paragem

Para a grande maioria dos problemas de Otimização Não Linear e, em particular, em Otimização Sem Restrições, não é possível detectar exactamente um mínimo local \bar{x} ao fim de um número finito de iterações. Ainda que f possua um conjunto de nível limitado, pode acontecer ser impossível encontrar um ponto que verifique a condição necessária de optimalidade. Com efeito, a convergência global de um algoritmo só é garantida assintoticamente, e aplica-se quase sempre a uma implementação em precisão infinita. Além disso, quando a implementação é feita no computador, erros de arredondamento inerentes à avaliação de funções não lineares (objectivo, gradiente e/ou hessiana), e às operações aritméticas (Sistemas Lineares, Produto de Matrizes, etc.), fazem com que a sucessão $\{x^k\}$ não coincida com a sucessão dos valores que possui convergência global. Por isso, há que estabelecer critérios de paragem que terminem o processo quando x^k verificar simultaneamente testes relativamente à proximidade da solução \bar{x} e à estacionariedade dessa aproximação.

Em relação ao primeiro teste, aceita-se x^k como uma boa aproximação de \bar{x} se

$$\frac{\|x^k - x^{k-1}\|}{\|x^k\|} \leq \text{septol} \quad (13)$$

com $\|\cdot\|$ a designar qualquer norma vectorial de \mathbb{R}^n e septol um escalar positivo. Na implementação deste teste deve-se substituir o denominador por uma quantidade que nunca se anule. Assim, tem-se

$$\max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \frac{|x_i^k - x_i^{k-1}|}{\max(|x_i^k|, 1)} \right\} \leq \text{septol}.$$

A escolha de septol deve reflectir a precisão pretendida. Assim, se se pretende t casas decimais correctas, septol deve ser inferior a $0.5 \cdot 10^{-t}$. Assume-se que $\|x^k - x^{k-1}\|$ é uma razoável aproximação de $\|x^k - \bar{x}\|$. A necessidade do segundo teste mencionado atrás surge como consequência do facto de isso poder não acontecer. Esse teste toma normalmente a forma

$$\|\mathcal{J}^k\| \leq \text{gradtol}, \quad (14)$$

com \mathcal{J}^k um vector e gradtol um escalar positivo a serem discutidos seguidamente. Uma primeira escolha para esse vector é $\mathcal{J}^k = \nabla f(x^k)$. Contudo esse tipo de escolha pode levar a parar o processo indevidamente, como mostram os seguintes exemplos. Considere-se a seguinte função, adaptada de [13]:

$$f(x_1, x_2) = (x_1 - \pi)^2 + (x_2 - 2\pi)^2 + (x_1 x_2 - 2\pi^2)^2 + 1, \quad x^0 = (1, 1), \quad \bar{x} = (\pi, 2\pi)$$

com x_0 o ponto inicial da sucessão $\{x^k\}$, e \bar{x} o mínimo global de f , que é aliás o seu único mínimo local. Consideram-se agora as funções que resultam de f alterando-lhe o escalonamento em f e x .

$$g(x_1, x_2) = f(10^{-6}x_1, 10^{-6}x_2) \quad \left. \vphantom{g(x_1, x_2)} \right\}, \quad x^0 = (10^{-6}, 10^{-6}), \quad \bar{x} = \pi \cdot 10^{-6}, 2\pi \cdot 10^{-6}$$

$$h(x_1, x_2) = 10^{12}f(x_1, x_2) \quad \left. \vphantom{h(x_1, x_2)} \right\}, \quad x^0 = (1, 1), \quad \bar{x} = (\pi, 2\pi)$$

Cada uma destas funções identifica f a menos de uma alteração nas unidades de medida de f ou x_1, x_2 . Por exemplo, se x_1 e x_2 estivessem expressos em quilómetros na definição de f , então as variáveis x_1 e x_2 , na definição de g , estariam expressas em milímetros e milhões de quilómetros, respectivamente. Esta observação é relevante na interpretação dos resultados que se irão apresentar. Suponha-se que se pretende uma solução com precisão ao milímetro, isto é, que $\text{septol} = 0.5 \cdot 10^{-6}$.

A Tabela 1 (onde a coluna k identifica as iterações) apresenta os resultados obtidos na determinação de um mínimo local para as cinco funções, com o critério de paragem (13)-(14), $\mathcal{J}^k = \nabla f(x^k)$ e $\text{gradtol} = 10^{-8}$. O algoritmo utilizado foi a estratégia não monótona de estabilização, no qual a direcção é determinada com base numa factorização modificada da

Hessiana exacta em cada ponto. Todos os cálculos numéricos foram efectuados em dupla precisão.

Os resultados apresentados nessa tabela permitem constatar que o critério de paragem é adequado apenas para a função f. Com efeito em relação à função g, a detecção da proximidade da solução não ocorre (nem ao fim de 1000 iterações) porque o erro na avaliação de ∇f é elevado. A paragem poderia ter ocorrido na iteração 10 se gradtol fosse inferior. Note-se que as componentes x_1 e x_2 são tratadas de forma desigual. De facto, como x_1 está expresso em milímetros, o erro nesta componente pode ser apenas da ordem das unidades, enquanto que x_2 , por estar expresso em milhões de quilómetros, deverá ter uma precisão da ordem de 10^{12} . O mesmo gradtol para ambas as componentes de $\nabla f(x_1, x_2)$ significa exigir a mesma medida de estacionariedade para (x_1^k, x_2^k) ao longo dos respectivos vectores da base canónica de \mathbb{R}^2 , o que não é coerente. Na função j acontece a situação contrária em que o valor de gradtol determina um critério de paragem demasiado restritivo. Por outro lado, para a função h, x^{11} é uma boa aproximação da solução, mas o gradiente nesse ponto é ainda muito elevado. Finalmente os resultados para a função i são de certa maneira opostos ao caso anterior.

Função	k	$\ x^k - \bar{x}\ _\infty$	$ f(x^k) - f(\bar{x}) $	$\ \nabla f(x^k)\ _\infty$	$\ \text{grad rel } x^k\ _\infty$
f	9	$3 \cdot 10^{-3}$	$6 \cdot 10^{-4}$	$3 \cdot 10^{-1}$	1.00
	10	$6 \cdot 10^{-5}$	$4 \cdot 10^{-9}$	$2 \cdot 10^{-4}$	$1 \cdot 10^{-3}$
	11	$6 \cdot 10^{-10}$	$3 \cdot 10^{-18}$	$2 \cdot 10^{-8}$	$7 \cdot 10^{-8}$
	12	0	0	0	0
g	7	3275.06	$9 \cdot 10^{-5}$	42165	0.265
	8	18.68	$1 \cdot 10^{-9}$	29.307	$2 \cdot 10^{-4}$
	9	$2 \cdot 10^{-4}$	0	$3 \cdot 10^{-3}$	$2 \cdot 10^{-8}$
	10	$4 \cdot 10^{-10}$	0	$2 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-13}$
j	8	18.68	$1 \cdot 10^{-3}$	$2 \cdot 10^7$	$2 \cdot 10^{-4}$
	9	$3 \cdot 10^{-4}$	0	3262.78	$2 \cdot 10^{-8}$
	10	$4 \cdot 10^{-10}$	0	$2 \cdot 10^{-2}$	$1 \cdot 10^{-13}$
h	9	$3 \cdot 10^{-3}$	$6 \cdot 10^9$	$3 \cdot 10^{13}$	$1 \cdot 10^6$
	10	$6 \cdot 10^{-5}$	4895	$2 \cdot 10^9$	1239.29
	11	$6 \cdot 10^{-10}$	$3 \cdot 10^{-6}$	21624	$7 \cdot 10^{-2}$
	12	0	0	0	0
i	8	0.218	$6 \cdot 10^{-14}$	$4 \cdot 10^{-13}$	$2 \cdot 10^{-6}$
	9	$3 \cdot 10^{-3}$	$6 \cdot 10^{-16}$	$3 \cdot 10^{-13}$	$1 \cdot 10^{-6}$
	10	$6 \cdot 10^{-5}$	$4 \cdot 10^{-21}$	$2 \cdot 10^{-16}$	$1 \cdot 10^{-9}$
	11	$6 \cdot 10^{-10}$	0	$2 \cdot 10^{-20}$	$7 \cdot 10^{-14}$
	12	0	0	0	0

Tabela 1: Exemplos ilustrativos de dificuldades no critério de paragem

Com base nestas observações concluímos a necessidade de um critério de paragem que seja independente do escalonamento diagonal em x e f . Conforme é sugerido em [7, p.159], tal é assegurado se se escolher o vector \mathcal{J}^k a partir de

$$(\mathcal{J}^k)_i = \frac{\nabla_i f(x) x_i}{f(x)} \quad i = 1, \dots, n \quad (15)$$

Esse vector \mathcal{J}^k é denominado gradiente relativo de f em x^k . O critério de paragem (13)-(14), com \mathcal{J}^k definido por (15) é invariante em relação uma alteração das unidades de f e x [7]. A implementação adequada deste critério resulta na definição de \mathcal{J}^k por

$$(\mathcal{J}^k)_i = \frac{\nabla_i f(x^k) \text{mid}(10^{-6}, |x_i^k|, 10^6)}{\text{mid}(1, |f(x^k)|, 10^6)}, \quad i = 1, \dots, n \quad (16)$$

onde $\text{mid}(a, x, b)$ representa a projecção de x no intervalo $[a, b]$. Os resultados obtidos para os problemas anteriores com o critério de paragem (13)-(14), em que \mathcal{J}^k definido por (15) são também apresentados na tabela-1. Observamos agora não haver qualquer tipo de problema em qualquer das cinco funções mencionadas anteriormente e daí o havermos adoptado na nossa implementação do método de Newton global para Optimização Sem Restrições.

A verificação do critério de paragem em x^k não significa que o analista deva ficar satisfeito com a aproximação obtida. Na maior parte dos problemas, a aproximação final pode ser melhorada, efectuando apenas mais algumas iterações. Para isso, gradtol deve ser reduzido, salvaguardado por um limite máximo de iterações. Resultados numéricos obtidos com esta estratégia podem observar-se em [17].

5. A matriz Hessiana

O conhecimento explícito da matriz Hessiana $\nabla^2 f$ em cada ponto é fundamental para a utilização de um método de Newton modificado no qual o sistema (11) seja resolvido por um método directo. Muitos problemas podem requerer um esforço humano considerável na determinação da expressão simbólica das segundas derivadas, ou mesmo que isso não envolva dificuldade, a sua avaliação automática em cada ponto pode exigir um esforço computacional elevado. Por isso a estimação da matriz Hessiana por diferenças finitas é atractiva nesses casos.

Os problemas que envolvem um grande número de variáveis colocam a dificuldade do espaço de armazenagem para a matriz Hessiana, sendo necessário o uso de estruturas de dados que não armazenem os elementos de $\nabla^2 f(x)$ que sejam nulos independentemente de x (aqui designados por zeros estruturais) e permitam efectuar de um modo eficiente operações com essa matriz.

A estrutura esparsa da matriz Hessiana é a caracterização da posição na matriz dos elementos que não são zeros estruturais. Esta estrutura é uma caracterização do problema e, quando não é facilmente deduzível, pode ser obtida utilizando software para diferenciação automática (veja-se por exemplo [1]). Uma estratégia simples de determinar a estrutura esparsa

dessa matriz consiste em avaliar (ou estimar com grande precisão) sequencialmente as colunas da matriz Hessiana $\nabla^2 f(\bar{x})$ num ponto \bar{x} escolhido de forma a que os elementos nulos sejam apenas os zeros estruturais. Assim, a estrutura esparsa da matriz Hessiana vai sendo construída à medida que se vão inspeccionando os elementos de $\nabla^2 f(\bar{x})$.

Quando a estrutura esparsa da matriz Hessiana é conhecida podem conceber-se processos eficientes de avaliar, ou estimar a matriz Hessiana $\nabla^2 f(x)$ em cada ponto x de acordo com os processos descritos em [15,5,4] e que descrevemos sumariamente nesta secção. Nesta abordagem focámos o nosso interesse num método de Newton Discreto vocacionado particularmente para problemas de grande dimensão, com uma matriz Hessiana razoavelmente esparsa. Por se tratar de um assunto difícil de sintetizar no âmbito deste trabalho, remetemos o leitor mais interessado para a leitura de [17] e outras referências aí mencionadas. Assumimos que a expressão simbólica do gradiente ∇f é conhecida e sugerimos a leitura de [7, p.103] para quando isso não acontece. Além disso, também assumimos que a avaliação de $\nabla f(x)$ envolve um esforço computacional menor se for avaliado de uma só vez. Para uma melhor ilustração da importância deste facto considere-se a função

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \exp(x_1 + x_2 + \dots + x_n)$$

cujos vector gradiente ∇f possui todas as componentes iguais à função objectivo. O esforço computacional para a avaliação do gradiente componente a componente é n vezes superior do que o necessário para a avaliação de um só vez.

Seja $A = [a_{ij}]$ uma matriz $n \times n$ com a mesma estrutura esparsa da matriz Hessiana. O problema da estimação da matriz Hessiana $\nabla^2 f(x)$ em cada ponto x pode traduzir-se na escolha de vectores d^1, d^2, \dots, d^p , de normas suficientemente pequenas, de modo que os elementos de A que não sejam zeros estruturais possam ser calculados de modo único, a partir de

$$Ad^i = \nabla f(x + d^i) - \nabla f(x), \quad i = 1, \dots, p \quad (17)$$

Os vectores d^i podem ser escolhidos de forma a que os elementos a_{ij} sejam a solução de um sistema linear diagonal. Uma escolha óbvia resulta em considerar $d^i = h_i e^i$, $i = 1, \dots, n$, com h_i um escalar pequeno em módulo e e^i o i -ésimo vector da base canónica de \mathbb{R}^n . Com esta escolha a determinação de A é equivalente à estimação usual por diferenças finitas. É evidente que quanto menor for o número p de vectores d^i menor será o esforço computacional envolvido na obtenção da matriz A .

Na sequência dos trabalhos iniciados por Powell e Toint [15], Coleman e Moré [5] relacionaram o problema da determinação do menor p com um problema de coloração do grafo de adjacência da matriz Hessiana. Como se trata de um problema NP-completo os autores propuseram diversas heurísticas para o resolver. O melhor desses processos é uma adaptação da heurística inicialmente proposta por Powell e Toint. A análise da sua complexidade permite concluir que o número de operações envolvidas é da mesma ordem de grandeza do número de operações envolvidas na estimação usual por diferenças finitas da matriz Hessiana $\nabla^2 f(x)$ [4].

Uma vez conhecidos os vectores d^1, \dots, d^p , que só necessitam ser calculados uma vez antes do processo iterativo de optimização, podemos agora obter a matriz A , aproximação de $\nabla^2 f(x)$ num ponto x qualquer. O esforço computacional envolvido é sensivelmente p/n vezes o esforço computacional requerido pelo processo usual de diferenças finitas. Portanto esta abordagem é atractiva quando p é pequeno e n é grande.

O processo descrito em [15] e melhorado em [5] foi por nós implementado. A tabela 2 ilustra os valores de p obtidos para alguns exemplos de média e grande dimensão. As funções teste utilizadas fazem parte da biblioteca de problemas teste de optimização CUTE [3]. Nessa tabela, a coluna nz/n^2 traduz a esparsidade da matriz Hessiana. Como se pode observar, nos exemplos apresentados o número de avaliações adicionais de ∇f para estimar a matriz Hessiana (p) por diferenças é consideravelmente inferior ao valor usual (n).

Problema	n	nz/n^2	p
POWELLSG	1000	0.003	3
FLETGBV2	100	0.030	3
MOREBV	1000	0.005	5
TOINTPSP	50	0.110	8
DQRTIC	500	0.002	1
ARWHEAD	1000	0.003	2
INDEF	1000	0.005	3
BDQRTIC	1000	0.009	9
NONDQUAR	1000	0.005	4

Tabela 2: Número de avaliações adicionais ∇f para estimar a matriz Hessiana

Quando, além da estrutura esparsa, são também conhecidas as posições de elementos da matriz Hessiana $\nabla^2 f(x)$ que são constantes não nulas, isto é independente de x , Soares [17] adaptou o processo de Powell e Toint para evitar a estimação daqueles elementos. Nessa abordagem o valor de p nunca é maior do que o mesmo valor obtido pelo processo de Powell e Toint, conseguindo-se em alguns casos ganhos significativos. A ordem de complexidade do novo processo é sensivelmente igual à do processo anterior.

A tabela 3 ilustra o valor de p obtido segundo a extensão proposta em [17] para alguns exemplos de média e grande dimensão da colecção CUTE. O valor que se obteria estimando também os elementos constantes está apresentado entre parêntesis. Os resultados são mais expressivos para problemas que sejam quase quadráticos, isto é, quando a matriz Hessiana $\nabla^2 f(x)$ possui poucos elementos cujo valor depende de x .

Problema	n	nz/n ²	p
POWELLSG	1000	0.003	2(3)
FLETGBV2	100	0.030	1(2)
MOREBV	1000	0.005	3(5)
FMINSURF	121	1.000	10(121)
PALMER2E	8	1.000	3(8)
WOODS	1000	0.003	2(3)
DENSCHNA	2	1.000	1(2)

Tabela 3: Número de avaliações adicionais ∇f para estimar a matriz Hessiana não estimando os elementos constantes

A definição dos valores a colocar nas componentes dos vectores d^i , $i = 1, \dots, p$ é feita com base na definição dos valores que se considerariam se a estimação usual por diferenças finitas fosse utilizada. Assim, $d^i = h_i e^i$, $i = 1, \dots, n$, com h_i um escalar pequeno, em módulo, e e^i o i -ésimo vector da base canónica. Tal como é proposto por Dennis e Schnabel [7, p.96] uma boa escolha para h_i é dada por

$$h_i = \text{sgn}(x_i) \sqrt{\epsilon_M \max(|x_i|, 1)}, \quad i = 1, \dots, n$$

onde $\text{sgn}(x_i)$ designa o sinal de x_i e ϵ_M a precisão da máquina.

Finalmente, referimo-nos à obtenção da matriz Hessiana exacta. Suponhamos que a avaliação automática do produto matriz-vector $\nabla^2 f(x)d$ num dado ponto x é possível de efectuar. A matriz A coincide com a matriz Hessiana $\nabla^2 f(x)$ se na relação (17) se substituir $\nabla f(x + d^i) - \nabla f(x)$ por $\nabla^2 f(x)d^i$. Neste caso a escolha de $h_i = 1$, $i = 1, \dots, n$ permite evitar erros de arredondamento inerentes às divisões.

6. Experiência Computacional

Para conhecer o comportamento numérico do método de Newton modificado e concluir sobre a implementação mais adequada para problemas de grande dimensão, implementámos este método com diferentes pesquisas unidimensionais.

Os problemas teste utilizados foram seleccionados de [13], de [12] e da colecção CUTE [3]. É de notar que os problemas de [12] são considerados difíceis porque a matriz Hessiana é normalmente mal condicionada na solução, ou a sua estimação é muito imprecisa em alguns pontos. Muitos desses problemas resultam de formulações usando funções penalidade de problemas de optimização com restrições não lineares de igualdade. As expressões simbólicas das funções teste utilizadas são actualmente bastante conhecidas e podem ser consultadas nos artigos mencionados anteriormente. Os pontos iniciais são os sugeridos nesses mesmos trabalhos. A implementação do código foi feita na linguagem FORTRAN 77 e os resultados numéricos foram obtidos numa workstation SUN SPARC 10 (48 Mhz, 64 Mb RAM). Todos

os cálculos numéricos foram efectuados em dupla precisão (a precisão da máquina ϵ_M é aproximadamente 10^{-16}).

A experiência computacional está dividida em duas partes. Assim, começamos por apresentar uma comparação entre as duas estratégias de escolha do passo α_k introduzidas anteriormente, para problemas de pequena dimensão seleccionados das colecções [13] e [12]. Finalmente na segunda parte apresentamos os resultados numéricos obtidos com base numa selecção de problemas de grande dimensão da colecção CUTE. A escolha do passo foi determinada pela experiência computacional anterior.

6.1 A pesquisa unidimensional

Nesta subsecção apresentamos resultados numéricos obtidos para as duas pesquisas unidimensionais introduzidas, sendo em ambos os casos a direcção obtida com base na factorização de Cholesky modificada de Gill e Murray. Os resultados foram obtidos para uma selecção de problemas de [13] e de [12] e são apresentados nas tabelas 4 a 9. Em algumas dessas tabelas os resultados dizem respeito à utilização da matriz Hessiana aproximada por diferenças finitas. Conforme é sugerido em [7, p.98] e [10] o vector h necessário nesse tipo de aproximação é escolhido a parir de

$$h_i = \text{mid} \left(\frac{\sqrt{\epsilon_M}}{100}, \sqrt{\epsilon_M} \max \{ |x_i^k|, 1 \}, 100\sqrt{\epsilon_M} \right), \quad i = 1, \dots, n$$

Em todas as tabelas, k designa o número de iterações necessárias para que se verifique o critério de paragem. A coluna $\|\nabla f(x^k)\|_\infty$ contém os expoentes em notação de vírgula flutuante da norma do gradiente nas três últimas aproximações ('-' significa grosso modo $-\infty$, isto é a norma do gradiente é zero). Deste modo é fornecida uma indicação dos problemas em que a convergência do algoritmo é sensível ao critério de paragem. As colunas #f e # ∇f indicam o número de vezes que f e ∇f foram avaliados durante o processo iterativo. Finalmente a coluna T refere o tempo total (segundos CPU) dispendido com a resolução do correspondente problema.

No critério de paragem são verificadas as condições (13)-(14), onde γ^k é definido por (15), $\text{gradtol} = 10^{-6}$ e $\text{septol} = 5 \cdot 10^{-7}$. Em alguns casos esses valores foram alterados de modo a que o algoritmo pudesse terminar. Assim, a resolução do problema Brown 3, quando segundas derivadas aproximadas são utilizadas, foi interrompida com $\text{gradtol} = 10^{-5}$ e $\text{septol} = 5 \cdot 10^{-5}$. Da mesma forma, na resolução do problema Miele-Cantrell o algoritmo terminou quando se verificou o critério de paragem com $\text{gradtol} = 10^{-5}$ e $\text{septol} = 5 \cdot 10^{-4}$.

O símbolo '*' significa que houve convergência para um mínimo local diferente do mínimo local padrão referido na bibliografia especializada. Além disso, usámos o termo 'Divergência' quando foi tomado um passo gigante ($\alpha_k \|d^k\| \geq 10^8$) por três vezes consecutivas. Finalmente assinalamos também quando o algoritmo não converge ao fim de 8000 iterações.

As tabelas 4-5 ilustram os resultados para o método de Newton modificado sem pesquisa unidimensional, isto é, quando o passo $\alpha_k = 1$ é assumido sempre. Como era de esperar, o

método gera sucessões divergentes para alguns problemas. Comparando, os resultados com e sem segundas derivadas exactas observamos que a divergência ocorre com mais facilidade se derivadas aproximadas forem utilizadas. Nos casos em que houve simultaneamente convergência, o número de iterações é menor quando derivadas exactas são utilizadas, com a excepção do problema Helical-Valley. Além disso, as diferenças nos tempos totais (T) não são significativas.

Outra observação relevante, que aliás é mais notória nos resultados das tabelas restantes, é o facto do número de iterações ser normalmente pequeno quando ocorre convergência. Em certos problemas, como por exemplo Sc Rosen, Brown 3 e Powell singular, a convergência parece desenrolar-se lentamente, ilustrando a existência de uma matriz Hessiana quase singular na solução, ou mesmo singular no último caso. Para estes problemas o método de Newton nunca assume a sua forma original porque a matriz das segundas derivadas continua a ser perturbada mesmo nas últimas iterações.

com Hessiana aproximada									
Função	n	k	$f(x^k)$	$\ \nabla f(x^k)\ _\infty$			#f	# ∇f	T
Powell badly scaled	2	Divergência							
Brown badly scaled	2	29	0	6	-1	-	30	88	0.40
Powell singular	4	36	$7 \cdot 10^{-24}$	-15	-15	-16	37	145	0.62
Wood	4	Divergência							
Biggs (m=13)	6	Divergência							
Helical Valley	3	25	$3 \cdot 10^{-42}$	-3	-6	-20	26	101	0.48
Sc Rosen ($c = 10^8$)	3	162	$4 \cdot 10^{-14}$	-5	-5	-6	163	487	1.90
Maratos ($\tau = 10^8$)	2	134	-1.00	-4	-1	-7	135	403	1.40
Miele e Cantrell	4	Divergência							
Sc Wood	10	Divergência							
Brown 2 ($\tau = 10^5$)	10	Divergência							
Brown 3 ($\tau = 10^4$)	3	Não convergiu em pelo menos 8000 iterações							

com Hessiana exacta									
Função	n	k	$f(x^k)$	$\ \nabla f(x^k)\ _\infty$			#f	# ∇f	T
Powell badly scaled	2	Divergência							
Brown badly scaled	2	13	$2 \cdot 10^{-27}$	8	3	-7	14	14	0.24
Powell singular	4	36	$7 \cdot 10^{-24}$	-15	-15	-16	37	37	0.54
Wood	4	Divergência							
Biggs (m=13)	6	Divergência							
Helical Valley	3	36	$3 \cdot 10^{-43}$	-4	-8	-20	27	27	0.50
Sc Rosen ($c = 10^8$)	3	5	0	-6	-4	-	6	6	0.05
Maratos ($\tau = 10^8$)	2	68	-1.00	0	-5	-6	69	69	0.71
Miele e Cantrell	4	*137	$1 \cdot 10^{-18}$	-15	-16	-16	138	138	2.79
Sc Wood	10	Divergência							
Brown 2 ($\tau = 10^5$)	10	Divergência							
Brown 3 ($\tau = 10^4$)	3	*95	$5 \cdot 10^{-23}$	-11	-11	-12	96	96	1.37

Tabelas 4-5: Sem pesquisa dimensional

Os resultados apresentados nas tabelas 6-7 reportam-se à utilização da pesquisa unidimensional do Critério de Armijo. Os parâmetros envolvidos foram definidos com base nos valores sugeridos em [2], ou seja, $\sigma = 10^{-3}$, $s = 1$ e $\epsilon = 0.5$.

com Hessiana aproximada									
Função	n	k	$f(x^k)$	$\ \nabla f(x^k)\ _\infty$			#f	# ∇f	T
Powell badly scaled	2	88	$1 \cdot 10^{-23}$	-4	-4	-8	113	265	1.16
Brown badly scaled	2	8	$5 \cdot 10^{-8}$	8	2	-7	11	25	0.13
Powell singular	4	36	$7 \cdot 10^{-24}$	-15	-15	-16	37	145	0.62
Wood	4	40	0	-5	-10	-	52	161	0.62
Biggs (m=13)	6	117	$2 \cdot 10^{-27}$	-7	-10	-15	208	820	3.76
Helical Valley	3	12	$2 \cdot 10^{-54}$	-5	-10	-25	15	49	0.19
Sc Rosen ($c = 10^8$)	3	1644	$2 \cdot 10^{-13}$	-5	-5	-6	2327	4933	20.45
Maratos ($\tau = 10^8$)	2	3091	-1.00	-2	-3	-7	4437	9274	38.15
Miele e Cantrell	4	*139	$1 \cdot 10^{-18}$	-13	-12	-13	184	557	2.14
Sc Wood	10	*197	4.00	-2	-6	-9	308	1183	4.32
Brown 2 ($\tau = 10^5$)	10	18	$1 \cdot 10^{-37}$	-2	-7	-17	21	73	0.38
Brown 3 ($\tau = 10^4$)	3	Não convergiu em pelo menos 8000 iterações							

com Hessiana exacta									
Função	n	k	$f(x^k)$	$\ \nabla f(x^k)\ _\infty$			#f	# ∇f	T
Powell badly scaled	2	88	$5 \cdot 10^{-25}$	-3	-3	-8	116	89	1.21
Brown badly scaled	2	8	0	6	-1	-	11	9	0.15
Powell singular	4	36	$7 \cdot 10^{-24}$	-15	-15	-16	37	37	0.54
Wood	4	39	$5 \cdot 10^{-28}$	-2	-5	-12	53	40	0.79
Biggs (m=13)	6	141	$6 \cdot 10^{-31}$	-7	-10	-14	232	142	3.55
Helical Valley	3	12	$2 \cdot 10^{-51}$	-5	-11	-24	15	13	0.18
Sc Rosen ($c = 10^8$)	3	1596	$1 \cdot 10^{-31}$	-2	-5	-15	2304	1597	20.53
Maratos ($\tau = 10^8$)	2	3092	-1.00	-3	-4	-7	4501	3093	37.96
Miele e Cantrell	4	*139	$3 \cdot 10^{-21}$	-15	-16	-16	146	140	3.09
Sc Wood	10	*196	4.00	-1	-4	-8	301	197	4.57
Brown 2 ($\tau = 10^5$)	10	18	$9 \cdot 10^{-38}$	-2	-7	-17	21	19	0.53
Brown 3 ($\tau = 10^4$)	3	*2412	$1 \cdot 10^{-17}$	-7	-7	-8	3204	2413	35.63

Tabelas 6-7: Critério de Armijo

À excepção do problema Brown 3 o algoritmo convergiu sempre, independentemente da matriz Hessiana ser exacta, ou aproximada. Comparando o método com e sem segundas derivadas aproximadas nos problemas em que em ambos houve convergência, o número de iterações é sensivelmente o mesmo em sete casos, sendo o valor com derivadas exactas inferior em duas outras ocasiões. As observações são semelhantes se compararmos o número de avaliações de f. Portanto, à excepção de Brown 3, não há diferenças significativas entre segundas derivadas exactas e aproximadas. Isto mostra que a aproximação por diferenças finitas é precisa nesses casos.

Nos exemplos Wood, Biggs, Sc Rosen e Maratos o número de avaliações de f por iteração é relativamente elevado, com valores médios entre 1.5 e 2. O número de avaliações de f é sempre superior ao número de iterações. Se compararmos o número de iterações das tabelas 6-7 com o das tabelas 4-5, facilmente observamos que nos casos em que houve simultaneamente convergência, com a excepção do problema Helical Valley, o algoritmo sem pesquisa unidimensional requer sempre um menor número de iterações.

Os resultados apresentados nas tabelas 8-9 correspondem à utilização da estratégia NMS. Os parâmetros que usámos são alguns dos propostos em [12], isto é, $\Delta_0 = \|\nabla f(x^0)\|$, $\beta = 0.5$, $N = 20$, e $M = 20$.

À excepção do problema Brown 3, todos os problemas-teste foram resolvidos com um reduzido número de iterações. Se compararmos a implementação com e sem segundas derivadas exactas, observamos que em sete casos o número de iterações é sensivelmente igual,

e em cinco a utilização de segundas derivadas exactas envolve um menor número de iterações. Esta observação confirma as nossas suspeitas de que a estratégia funciona muito melhor com segundas derivadas exactas. É interessante observar que nesses cinco casos esta diferença no número de iterações é partilhada pela não utilização de qualquer pesquisa, como se pode confirmar pelas tabelas 4-5 (apenas Biggs não se pode incluir neste grupo).

O número de avaliações de f por iteração é, em média, muito inferior à pesquisa unidimensional anterior, sendo mesmo inferior ao número de iterações nos exemplos de Brown 2, Helical Valley e Brown badly scaled. Realçamos que há uma notável vantagem em utilizar a estratégia NMS, particularmente com os problemas mal condicionados Maratos, Sc Rosen, Brown 3 e Sc Wood. Além disso a estratégia NMS requer um menor esforço computacional por iteração.

A função Brown 3 é um bom exemplo de como nem sempre a pesquisa NMS funciona bem. O elevado número de iterações para resolver este problema com a estratégia NMS deve-se ao facto de que a partir de determinada iteração a norma da direcção de Newton se torna demasiado pequena, ainda que longe da solução. Apesar disso, os outros resultados levam-nos a recomendar a utilização da estratégia NMS como forma de assegurar convergência global do método de Newton para Optimização Sem Restrições, particularmente quando se utilizam segundas derivadas exactas.

com Hessiana aproximada									
Função	n	k	$f(x^k)$	$\ \nabla f(x^k)\ _\infty$			#f	# ∇f	T
Powell badly scaled	2	114	$3 \cdot 10^{-26}$	-2	-6	-10	605	343	2.26
Brown badly scaled	2	8	$5 \cdot 10^{-29}$	8	2	-7	6	25	0.14
Powell singular	4	36	$7 \cdot 10^{-24}$	-15	-15	-16	29	145	0.58
Wood	4	29	$8 \cdot 10^{-30}$	-3	-7	-13	46	117	0.49
Biggs (m=13)	6	446	$2 \cdot 10^{-25}$	-7	-6	-12	1095	3123	17.70
Helical Valley	3	14	$3 \cdot 10^{-45}$	-3	-8	-22	10	57	0.24
Sc Rosen ($c = 10^8$)	3	130	$2 \cdot 10^{-13}$	-5	-5	-6	133	391	1.92
Maratos ($\tau = 10^8$)	2	197	-1.00	-5	-1	-6	248	592	2.88
Miele e Cantrell	4	*177	$8 \cdot 10^{-18}$	-12	-13	-13	196	709	4.53
Sc Wood	10	*48	4.00	-1	-6	-9	50	289	1.09
Brown 2 ($\tau = 10^5$)	10	18	$1 \cdot 10^{-37}$	-2	-7	-17	14	73	0.57
Brown 3 ($\tau = 10^4$)	3	*4222	$9 \cdot 10^{-17}$	-7	-7	-7	4485	16889	79.56

com Hessiana exacta									
Função	n	k	$f(x^k)$	$\ \nabla f(x^k)\ _\infty$			#f	# ∇f	T
Powell badly scaled	2	107	0	-5	-5	-	583	108	2.22
Brown badly scaled	2	8	0	6	-1	-	6	9	0.10
Powell singular	4	36	$7 \cdot 10^{-24}$	-15	-15	-16	29	37	0.46
Wood	4	29	0	-4	-9	-	46	30	0.51
Biggs (m=13)	6	194	$1 \cdot 10^{-27}$	-4	-10	-12	393	195	5.51
Helical Valley	3	14	$1 \cdot 10^{-38}$	-3	-8	-18	10	15	0.22
Sc Rosen ($c = 10^8$)	3	10	0	9	-7	-	16	11	0.15
Maratos ($\tau = 10^8$)	2	94	-1.00	-7	-7	-7	93	95	1.82
Miele e Cantrell	4	*139	$3 \cdot 10^{-21}$	-15	-16	-16	142	140	2.36
Sc Wood	10	*49	4.00	-4	-5	-10	50	50	1.14
Brown 2 ($\tau = 10^5$)	10	18	$1 \cdot 10^{-38}$	-2	-7	-17	14	19	0.40
Brown 3 ($\tau = 10^4$)	3	*1936	$1 \cdot 10^{-17}$	-7	-7	-8	2348	1937	32.84

Tabelas 8-9: Estratégia NMS

6.2 Alguns problemas de maior dimensão

A Tabela 10 ilustra os resultados da aplicação do método de Newton com a estratégia NMS a problemas de dimensão elevada da biblioteca de problemas-teste CUTE [3] com Hessiana esparsa e não constante. Os resultados foram obtidos com segundas derivadas sempre exactas. Nessa tabela, p identifica o número de produtos Hessiana por vector que devem ser efectuados por forma a obter a matriz Hessiana em cada ponto, de acordo com o que foi exposto na secção 5. As colunas T1, T2 e T3 referem o tempo (segundos CPU) dispendido na determinação da estrutura esparsa da Hessiana (T1), na fase de análise necessária para a resolução do sistema linear esparsa por um método directo e determinação de p(T2) e no processo iterativo (T3), respectivamente.

A estrutura esparsa da matriz Hessiana de cada problema foi deduzida após avaliar todos os elementos dessa matriz num ponto escolhido de acordo com a estratégia descrita anteriormente. Para determinar p efectuámos uma implementação do algoritmo de Powell e Toint referido na secção 5.

Na nossa implementação da factorização de Cholesky modificada de Gill e Murray usámos basicamente a rotina MA27 do laboratório HARWELL [8] para resolver sistemas lineares. Esta rotina efectua uma factorização de Cholesky de uma matriz simétrica positiva definida, utilizando estruturas de dados para matrizes esparsas. A factorização de Cholesky requer três fases: ordenação, factorização simbólica e factorização numérica. Na fase de ordenação uma ordenação na pivotação é determinada de forma a minimizar os 'enchimentos' nos factores de

Cholesky (L) a serem calculados nas fases seguintes. Na fase da factorização simbólica as posições dos elementos não nulos dos factores de Cholesky são determinados definindo uma estrutura de dados adequada. Finalmente, na fase de factorização numérica os valores dos elementos dos factores de Cholesky são calculados.

O critério de paragem para estes problemas é definido por

$$\|\nabla f(x^k)\|_\infty \leq 10^{-6},$$

o que é um critério razoavelmente restritivo para problemas de grande dimensão. Contudo também interrompemos o processo iterativo quando $\|d^k\|_\infty \leq 10^{-10}$. Este segundo critério de paragem é motivado pela verificação da hipótese 2 da estratégia NMS.

Função	n	k	$f(x^k)$	$\ \nabla f(x^k)\ _\infty$	p	#f	# ∇f	T1	T2	T3
ARWHEAD	500	6	0.	0 -4 -12	2	7	7	3.65	0.15	1.59
	1000	6	0.	0 -4 -11	2	7	7	12.35	0.53	4.81
BROYDN7D	500	19	149.859	-1 -3 -8	8	11	20	8.17	0.21	10.32
	1000	51	295.922	-2 -5 -10	8	46	52	33.39	0.75	98.50
GRAGGLVY	500	48	167.449	-5 -5 -5	3	13	49	6.76	0.10	8.37
	1000	48	336.423	-5 -5 -5	3	13	49	25.91	0.35	22.21
EDENSCH	2000	12	12003.3	-1 -4 -9	3	10	13	80.13	1.32	17.01
FLETGBV2	500	1	-.502852	0 -5 -7	3	8	2	4.53	0.1	0.39
	1000	1	-.501429	0 -5 -8	3	8	2	18.04	0.35	0.89
GENROSE	500	114	1.00	-1 -5 -12	3	218	115	3.69	0.09	20.18
	1000	211	1.00	0 -2 -8	3	359	212	12.94	0.34	99.63
POWELLSG	500	17	.21·10 ⁻⁷	-5 -5 -6	3	8	18	1.50	0.90	3.18
	1000	17	.42·10 ⁻⁷	-5 -5 -6	3	8	18	6.34	0.38	9.71
SCHMVETT	500	3	-1494.00	0 -3 -12	6	13	4	7.95	0.13	1.47
	1000	3	-2994.00	0 -3 -12	5	13	4	32.07	0.48	4.66
SROSENBR	500	5	.12·10 ⁻²⁶	-3 -4 -13	2	10	6	1.65	0.08	0.70
	1000	5	.24·10 ⁻²⁶	-3 -4 -13	2	10	6	6.48	0.28	1.88

Tabela 10: Método de Newton modificado com a técnica de estabilização não monótona NMS (com hessianas exactas)

Relativamente aos resultados apresentados na Tabela 10, duas observações são imediatas. Se por um lado p é um valor bastante pequeno para todos os problemas, por outro lado o tempo requerido na determinação da estrutura esparsa da matriz Hessiana é razoavelmente elevado em todos os problemas. Na maioria dos casos o tempo dispendido a determinar a estrutura esparsa é maior do que a duração do processo iterativo. Note-se que se a estrutura esparsa fosse conhecida antecipadamente, então T1 seria um valor desprezável. A fase de análise e determinação de p não demoram, em geral, um tempo significativo.

Em relação ao processo iterativo propriamente dito, o número de iterações é relativamente baixo em todos os problemas. Em alguns casos, como por exemplo EDENSCH, GRAGGLVY e BROYDN7D o número de avaliações de f é inferior ao número de iterações. Realçamos que o tempo não é de modo algum elevado em relação às dimensões dos problemas envolvidos.

Em alguns problemas o número de iterações aumenta com a sua dimensão, como é o caso de GENROSE. Esse aumento poderá estar relacionado com o efeito acumulativo de erros numéricos envolvidos no processo iterativo. Por exemplo, quando a matriz Hessiana é frequentemente mal condicionada, como no caso do problema GENROSE, a resolução do sistema linear (11) vem envolvida de maior estabilidade à medida que a dimensão do problema aumenta. Esta observação leva-nos a recomendar alguma cautela na utilização de diferenças finitas em problemas de grande dimensão.

7. Conclusões

Com este trabalho pretendemos alcançar dois objectivos fundamentais. Por um lado explicar como o método de Newton para Otimização Sem Restrições pode ser modificado para que se torne num método descendente e globalmente convergente. Embora as modificações propostas ao método só pontualmente sejam inovadoras, toda a análise da convergência global de um método descendente é inovadora e está apresentada com uma preocupação didáctica. A teoria desenvolvida pode ser facilmente adaptada para lidar com restrições que determinem um conjunto convexo. Aliás isso foi já realizado para o caso de problemas com apenas limites nas variáveis [17,18]. O nosso segundo objectivo consistiu em implementar diversas modificações ao método de Newton e concluir quanto à importância prática dessas modificações.

Não queremos terminar este artigo sem deixar de apresentar uma área de investigação futura. As nossas experiências mostraram que as dificuldades ocorrem quando o algoritmo tem de lidar com matrizes Hessianas quase singulares ou indefinidas. É interessante notar que a rotina MA27 é capaz de resolver sistemas indefinidos, e por isso pode ser possível nalguns casos obter direcções de curvatura negativa. A utilização de uma tal direcção pode ser nalguns casos bastante benéfica para o algoritmo. Tal pode, nomeadamente, acontecer na implementação do método de Newton truncado em que o sistema linear $\nabla^2 f(x^k)d = -\nabla f(x^k)$ é resolvido de forma aproximada.

Referências

- [1] Averick, B., Moré, J., Bischof, C., Carle, A. e Griewank, A., Computing large sparse jacobian matrices using automatic differentiation, Technical Report, Argonne Laboratory, USA, 1993.
- [2] Bertsekas, D., Constrained Optimization and Lagrange Multiplier Methods, Academic Press, 1982.
- [3] Bongartz, A., Conn, A., Gould, N. e Toint, Ph., CUTE: Constrained and Unconstrained Testing Environment, Technical Report, 1993.
- [4] Coleman, T., Garbow, B. e Moré, J., Software for estimating sparse hessian matrices, ACM Transactions on Mathematical Software 11 (1985) 363-377.
- [5] Coleman, T. e Moré, J., Estimation of sparse hessian matrices and graph coloring problems, Mathematical Programming 28 (1984) 243-270.
- [6] Dennis, J. e Moré, J., A characterization of superlinear convergence and its applications to Quasi-Newton methods, Mathematics of Computation 28 (1974) 549-560.

- [7] Dennis, J. e Schnabel, R., Numerical Methods for Unconstrained Optimization and Nonlinear Equations, Prentice Hall, 1983.
- [8] Duff, I.S. e Reid, J.K., The multifrontal solution of indefinite sparse symmetric linear equations, ACM Transactions on Mathematical Software 9 (1984) 302-325.
- [9] Gill, Ph. e Murray, W. - Newton-type methods for unconstrained and linearly constrained optimization, Mathematical Programming 28 (1974) 311-350.
- [10] Gill, Ph., Murray, W. e Wright, M., Practical Optimization, Academic Press, 1981.
- [11] Grippo, L., Lampariello, F. e Lucidi, S., A nonmonotone linear search technique for Newton's method, SIAM Journal on Numerical Analysis 23 (1986) 707-716.
- [12] Grippo, L., Lampariello, F. e Lucidi, S., A class of nonmonotone stabilization methods in unconstrained optimization, Numerische Mathematik 59 (1991) 779-805.
- [13] Moré, J., Garbow, B. e Hillstom, K., Testing unconstrained optimization software, ACM Transactions on Mathematical Software 7 (1981) 17-41.
- [14] Moré, J. e Thunete, D., Line search algorithms with guaranteed sufficient decrease, Technical Report, Mathematics and Computer Science Division, Argonne National Laboratory, 1992.
- [15] Powell, M. e Toint, Ph, On the estimation of sparse hessian matrices, SIAM Journal on Numerical Analysis 16 (1979) 1060-1074.
- [16] Schnabel, R. e Eskow, E., A new modified Cholesky factorization, SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing 11 (1990) 1136-1158.
- [17] Soares, J., Métodos de Newton para otimização com restrições simples, Trabalho de Síntese para Provas de Aptidão Pedagógica e Capacidade Científica, Departamento de Matemática, Universidade de Coimbra, 1993.
- [18] Soares, J., Facchinei, F. e Júdice, J., An active set Newton's algorithm for large-scale nonlinear programs with box constraints, 1993, a aparecer em SIAM Journal on Optimization.

INSTRUÇÕES AOS AUTORES

Os autores que desejem submeter um artigo à Investigação Operacional devem enviar três cópias desse trabalho para:

Prof. Joaquim J. Júdice
Departamento de Matemática
Universidade de Coimbra
3000 Coimbra, Portugal

Os artigos devem ser escritos em Português ou Inglês. A primeira página deve conter a seguinte informação:

- Título do artigo
- Autor(es) e instituição(ões) a que pertence(em)
- Abstract (em inglês)
- Resumo
- Keywords (em inglês)
- Título abreviado

As figuras devem aparecer em separado de modo a poderem ser reduzidas e fotocopiadas. As referências devem ser numeradas consecutivamente e aparecer por ordem alfabética de acordo com os seguintes formatos:

Artigos: autor(es), título, título e número da revista (livro com indicação dos editores), ano, páginas.

Livros: autor(es), título, editorial, local de edição, ano.

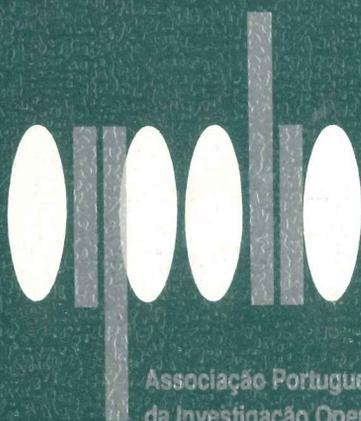
**Fotografia, Montagem
Impressão e Acabamentos**
Tip. Nocamil
COIMBRA

ÍNDICE

<i>C. A. Bana e Costa e F. Nunes da Silva</i> , Concepção de uma “boa” alternativa de ligação ferroviária ao porto de Lisboa: uma aplicação da metodologia multi-critério de apoio à decisão e à negociação.....	115
<i>A. M. Faustino and J. J. Judice</i> , Principal pivoting algorithms for a concave generalized linear complementarity problem	133
<i>L. M. Proença, J. V. Ranito and V. Miranda</i> , Genetic algorithms in optimal electric and gas distribution network planning.....	147
<i>J. M. Santos e I. Themido</i> , Introdução à DEA - Data Envelopment Analysis.....	159

PRÉMIOS APDIO - INTERLOG 94

Nota Introdutória	183
<i>A. Respício</i> , Um sistema de apoio à decisão no planeamento de produção	185
<i>C. Rego</i> , Uma heurística tabu para a determinação de rotas de veículos	207
<i>J. L. C. Soares</i> , Um estudo sobre o método de Newton para optimização sem restrições.....	233



Associação Portuguesa para o Desenvolvimento
da Investigação Operacional

CÉSUR - Instituto Superior Técnico - Avenida Rovisco Pais
1000 Lisboa - Telef. 80 74 55