

# INVESTIGAÇÃO OPERACIONAL

Junho 1993

Número 1

Volume 13

Publicação Científica da



Associação Portuguesa para o Desenvolvimento  
da Investigação Operacional

# INVESTIGAÇÃO OPERACIONAL

Propriedade:

APDIO — Associação Portuguesa para o Desenvolvimento  
da Investigação Operacional

## ESTATUTO EDITORIAL

*«Investigação Operacional», órgão oficial da APDIO cobre uma larga gama de assuntos reflectindo assim a grande diversidade de profissões e interesses dos sócios da Associação, bem como as muitas áreas de aplicação da I. O. O seu objectivo primordial é promover a aplicação do método e técnicas da I. O. aos problemas da Sociedade Portuguesa.*

*A publicação acolhe contribuições nos campos da metodologia, técnicas, e áreas de aplicação e software de I. O. sendo no entanto dada prioridade a bons casos de estudo de carácter eminentemente prático.*

---

**Distribuição gratuita aos sócios da APDIO**

# INVESTIGAÇÃO OPERACIONAL

Volume 13 - nº 1 - Junho 1993

Publicação semestral

Editor Principal: Joaquim J. Júdice  
Universidade de Coimbra

## Comissão Editorial

M. Teresa Almeida  
Inst. Sup. Economia e Gestão

Jaime Barceló  
Univ. de Barcelona

Paulo Barcia  
Univ. Nova de Lisboa

Isabel Branco  
Univ. de Lisboa

António Câmara  
Univ. Nova de Lisboa

C. Bana e Costa  
Inst. Superior Técnico

M. Eugénia Captivo  
Univ. de Lisboa

Jorge O. Cerdeira  
Inst. Sup. de Agronomia

João Clímaco  
Univ. de Coimbra

J. Dias Coelho  
Univ. Nova de Lisboa

J. Rodrigues Dias  
Univ. de Évora

Laureano Escudero  
IBM, Espanha

J. Soeiro Ferreira  
Univ. do Porto

J. Fernando Gonçalves  
Univ. do Porto

Clóvis Gonzaga  
Univ. Fed., Rio Janeiro

Luís Gouveia  
Univ. de Lisboa

Rui C. Guimarães  
Univ. do Porto

J. Assis Lopes  
Inst. Superior Técnico

N. Maculan  
Univ. Fed., Rio Janeiro

Ernesto Q. Martins  
Univ. de Coimbra

Vladimiro Miranda  
Univ. do Porto

J. Pinto Paixão  
Univ. de Lisboa

M. Vaz Pato  
Inst. Sup. Economia e Gestão

Celso Ribeiro  
Univ. Católica, Rio Janeiro

A. Guimarães Rodrigues  
Univ. do Minho

Mário S. Rosa  
Univ. de Coimbra

J. Pinho de Sousa  
Univ. do Porto

L. Valadares Tavares  
Inst. Superior Técnico

Isabel H. Themido  
Inst. Superior Técnico

B. Calafate Vasconcelos  
Univ. do Porto

José M. Viegas  
Inst. Superior Técnico

A Revista "INVESTIGAÇÃO OPERACIONAL" está registada na Secretaria de Estado da Comunicação Social sob o nº 108335.  
Esta Revista é distribuída gratuitamente aos sócios da APDIO. As informações sobre inscrições na Associação, assim como a correspondência para a Revista devem ser enviadas para a sede da APDIO - Associação Portuguesa para o Desenvolvimento da Investigação Operacional - CESUR, Instituto Superior Técnico, Av. Rovisco Pais, 1000 Lisboa.

Este Volume foi subsidiado por :

**Instituto Nacional de Investigação Científica (INIC)**  
**Junta Nacional de Investigação Científica e Tecnológica (JNICT)**  
**Fundação Calouste Gulbenkian**

Para efeitos de dactilografia e composição, foram utilizados equipamentos gentilmente postos à disposição pelo CEAUL (DEIO - Faculdade de Ciências de Lisboa).

Assinatura: 5.000\$00

# INTERIOR-POINT APPROACHES TO THE TRANSPORTATION AND ASSIGNMENT PROBLEMS ON MICROCOMPUTERS

**Fernando J.P. de Bastos**  
Departamento de Matemática  
Faculdade de Ciências e Tecnologia  
Universidade Nova de Lisboa

**J. Paixão**  
Departamento de Estatística e Investigação Operacional  
Faculdade de Ciências - Universidade de Lisboa

## Abstract

This paper presents specialized versions of interior-point algorithms for the transportation and assignment problems. We use the special structure of the constraint matrix for those problems to reduce the order of the systems of equations that one has to solve and to simplify other computations. We apply those specializations to random generated problems and report the results obtained on a microcomputer.

## Resumo

Neste trabalho são apresentadas versões de métodos de ponto interior especializadas para os problemas de transporte e afectação. É usada a estrutura especial da matriz das restrições desses problemas de forma a reduzir-se a ordem dos sistemas de equações a resolver e a simplificarem-se outros cálculos. Essas especializações foram aplicadas a problemas gerados aleatoriamente e os resultados obtidos num microcomputador são relatados.

## Keywords

Interior point methods, transportation problems, assignment problems.

## 1. Introduction

In 1984, Karmarkar [5] presented a new method for linear programming problems based on the generation of a sequence of "interior" points (elements in the relative interior of the feasible region), that converges to an optimal solution. This methodology is substantially different from that of the classical simplex algorithm, where a sequence of extreme points converging to the optimal solution is used instead. Karmarkar's algorithm has been proved to require  $O(nL)$  iterations and  $O(n^{3.5}L)$  time overall, where  $L$  is the size [11] of the problems and  $n$  is the number of variables of the problem. Since 1984, a significant number of papers (e.g., [3,4,9,11]) has been published on the development and applications of interior-point methods for large-scale problems. Practical experience reported in most of those works revealed that such approach is more efficient than the simplex method for large-scale problems.

In this paper, we consider the specialization of some of those methods for the particular cases of the transportation and assignment problems (TP and AP for short). Hence, in section 2, we refer some basic aspects related to those classical LP problems. In the following section, we briefly describe the interior point methods used in the present work. In section 4, we show how to take advantage from the particular structure of the TP and AP on these algorithms. Finally, computational experience is reported in the last section of this paper.

Now, let us mention that, throughout this paper, we use  $\mathbb{R}^{m \times n}$  and  $\mathbb{R}^m$  to denote the set of the  $m \times n$  real matrices and the set of the  $m$ -dimensional real vectors, respectively.

## 2. The transportation and assignment problems

### 2.1 The transportation problem

Let us recall that the transportation problem [13] is the following mathematical programming problem:

$$\begin{aligned}
 \min \quad & \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m c_{ij} x_{ij} \\
 \text{st.} \quad & \sum_{j=1}^m x_{ij} = a_i, \quad i = 1, \dots, n \\
 & \sum_{i=1}^n x_{ij} = b_j, \quad j = 1, \dots, m \\
 & x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m.
 \end{aligned} \tag{1}$$

where  $x_{ij}$  represents the quantity transported from origin  $i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) to the destination  $j$  ( $j = 1, \dots, m$ );  $c_{ij}$  is the cost of transportation of one unity from origin  $i$  to the destination  $j$ ;  $a_i$  represents the quantity available to origin  $i$  (supply) and  $b_j$  represents the quantity needed at destination  $j$  (need). With no loss of generality, we assume  $\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{j=1}^m b_j$ .

Let

$$e = [1 \ 1 \ 1 \ \dots \ 1]^T$$

and

$$o = [0 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0]^T$$

be vectors of  $\mathbb{R}^n$ . Furthermore let  $x = [x_{ij}] \in \mathbb{R}^{mn}$ ,  $c = [c_{ij}] \in \mathbb{R}^{mn}$ ,  $a = [a_i] \in \mathbb{R}^n$ ,  $b = [b_j] \in \mathbb{R}^m$  and  $I_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$  the identity matrix. Then the transportation problem (1) may be expressed in the following matricial form:

$$\begin{aligned}
 \min \quad & c^T x \\
 \text{st.} \quad & \bar{A}x = \bar{d} \\
 & x \geq 0
 \end{aligned} \tag{2}$$

where  $\bar{A} \in \mathbb{R}^{(mn) \times (m+n)}$  is defined by

$$\begin{bmatrix}
 e^T & o^T & o^T & \dots & o^T & o^T \\
 o^T & e^T & o^T & \dots & o^T & o^T \\
 o^T & o^T & e^T & \dots & o^T & o^T \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 o^T & o^T & o^T & \dots & e^T & o^T \\
 o^T & o^T & o^T & \dots & o^T & e^T \\
 I_n & I_n & I_n & \dots & I_n & I_n
 \end{bmatrix}$$

and  $\bar{d} \in \mathbb{R}^{m+n}$ ,  $\bar{d} = [a^T \ b^T]^T$ .

It is clear that, in each column of  $\bar{A}$ , two and only two elements are different from zero and these elements are equal to 1. Furthermore it is known that we can express any row of  $\bar{A}$  as linear combination of the other  $n+m-1$  rows and that any  $n+m-1$  rows of  $\bar{A}$  are linear independent. This means that the rank of  $\bar{A}$ ,  $r(\bar{A})$ , is  $n+m-1$  and  $\bar{A}x = \bar{d}$  is equivalent to the system  $Ax = d$ , where  $A$  and  $d$  are obtained from  $\bar{A}$  and  $\bar{d}$  by omitting the last row of  $\bar{A}$  and the last element of  $\bar{d}$  respectively. It is also known that if the  $a_{ij}$ 's and  $b_j$ 's are integers then all the coordinates of any extreme point of the feasible region for the TP are also integers.

### 2.2 The assignment problem

The assignment problem [13] can be stated as

$$\begin{aligned}
 \min \quad & \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij}x_{ij} \\
 \text{st.} \quad & \sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, \quad i = 1, \dots, n \\
 & \sum_{i=1}^n x_{ij} = 1, \quad j = 1, \dots, n \\
 & x_{ij} \in B, \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, n.
 \end{aligned} \tag{3}$$

where  $B = \{0, 1\}$ . It is obvious that AP is a particular case of TP.

We consider in this paper the relaxation of AP in which the constraints  $x_{ij} \in B$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $j = 1, \dots, n$  are replaced by  $x_{ij} \geq 0$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $j = 1, \dots, n$ . It is known that any extreme point of the feasible region of the relaxed problem belongs to  $B$ , whence any basic optimal solution of the relaxed problem is an optimal solution of AP.

### 3. Interior-point algorithms

In this section, we briefly describe the interior-point algorithms used for the present work.

#### 3.1 The primal affine algorithm

Let us consider the Linear Programming Problem in the so called primal format:

$$\begin{aligned}
 \min \quad & c^T x \\
 \text{st.} \quad & Ax = b \\
 & x \geq 0
 \end{aligned} \tag{4}$$

where  $c \in \mathbb{R}^n$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $r(A) = \min\{n, m\}$  and  $b \in \mathbb{R}^m$ . For a given vector  $x^k \in \{x : Ax = b, x > 0\}$  let us define the following notation:

- $X_k = \text{diag}(x_1^k, \dots, x_n^k)$ , that is, the diagonal matrix whose diagonal elements are the elements of  $x^k$ .
- $A_k = AX_k$
- $c^k = X_k c$
- $P = I - A_k^T (A_k A_k^T)^{-1} A_k$ , that is, the projection matrix on the kernel of  $A_k$
- $c^p = P c^k$ , that is, the projection of  $c^k$  on the kernel of  $A_k$ .

The primal affine algorithm was first presented by Dikin in 1967 [4] and may be described as follows:

**Algorithm PA**

Given  $x^0 \in \{x : Ax = b, x > 0\}$ ,  $\delta \in ]0, 1[$  and  $\varepsilon > 0$ ,  
 set  $k = 0$  and error = 1;  
**While** error  $> \varepsilon$  **do**  
   **begin**  
     Compute  $c^k, A_k, P$  and  $c^P$ .  
     Set  $h = -c^P$ .  
     Compute  $\bar{\lambda} = \min_{i=1, \dots, n} \{-1/h_i : h_i < 0\}$ .  
     Compute  $\bar{y} = e + \delta \bar{\lambda} h$ .  
     Compute  $x_{k+1} = X_k \bar{y}$ .  
     Compute error =  $| (c^T x^{k+1} - c^T x^k) / \max\{1, |c^T x^k|\} |$ .  
     Set  $k = k + 1$ .  
**end.**

The algorithm PA is a typical projected gradient algorithm, where the parameter  $\delta$  is used in order to force that  $x^{k+1} \in \{x : Ax = b, x > 0\}$ . As suggested in [4],  $\delta = 0.95$  usually works well in practice.

### 3.2 The dual affine algorithm

Now, let us consider the dual of the program [4] with the introduction of slack variables:

$$\begin{aligned} \max \quad & b^T y \\ \text{st.} \quad & A^T y + v = c \\ & v \geq 0 \end{aligned} \tag{5}$$

We consider the same representations and hypothesis used in the previous section. Similarly, we assume that an element of the set  $\{y : A^T y < c\}$  is known.

The dual affine algorithm was first presented in [1, 2]. The computational results presented in [1] clearly showed, for the first time, that interior-point methods may be superior to the simplex method for large-scale problems.

The parameter  $\delta$ , that appears in the algorithm, is used to guarantee that, at each iteration,  $y^k$  is in the relative interior set of the dual feasible region. Again, we used  $\delta = 0.95$ , as suggested in several papers [1, 2, 7, 10].

**Algorithm DA**

Given  $y^0 \in \{y : A^T y < c\}$ ,  $\delta \in ]0, 1[$  and  $\epsilon > 0$ ,  
 set  $k = 0$  and error = 1;  
**While** error >  $\epsilon$  **do**  
   **begin**  
     Compute  $v^k c - A^T y^k$ .  
     Set  $V_k = \text{diag}(v_1^k, \dots, v_m^k)$ .  
     Compute  $d_y = (A V_k^{-2} A^T)^{-1} b$ .  
     Compute  $d_v = -A^T d_y$ .  
     Compute  $\bar{\lambda} = \min_{i=1, \dots, m} \{-v_i^k / (d_v)_i : (d_v)_i < 0\}$ .  
     Compute  $y^{k+1} = y^k + \delta \bar{\lambda} d_y$ .  
     Compute  $x^{k+1} = -V_k^{-2} d_v$ .  
     Compute error =  $|(b^T y^{k+1} - b^T y^k) / \max\{1, |b^T y^k|\}|$ .  
     Set  $k = k + 1$ .  
**end.**

**3.3 The primal-dual algorithm**

Let us consider the pair of dual problems, (4) and (5).

We consider the same representations and hypothesis used in the previous section and we assume that an element of the set  $\{x : Ax = b, x > 0\}$  is known as well as an element of the set  $\{(y, v) : A^T y + v = c, v > 0\}$ .

The primal-dual algorithm was first presented in [11, 12] and is based on earlier algorithms introduced by Gonzaga and Karmarkar.

**Algorithm PD**

Given  $x^0 \in \{x : Ax = b, x > 0\}$ ,  $(y^0, v^0) \in \{(y, v) : A^T y + v = c, v > 0\}$ ,  
 $\delta \in ]0, 1[$  and  $\epsilon > 0$ , set  $k = 0$ ;  
**While**  $|(c^T x^k - b^T y^k) / \max\{1, |c^T x^k|\}| > \epsilon$  **do**  
   **begin**  
     Compute  $\mu = (c^T x^k - b^T y^k) / n^2$ .  
     Set  $X_k = \text{diag}(x_1^k, \dots, x_n^k)$ ,  $V_k = \text{diag}(v_1^k, \dots, v_m^k)$ .  
     Compute  $\Delta y = -(A V_k^{-1} X_k A^T)^{-1} A V_k^{-1} (X_k V_k e - \mu e)$ .  
     Compute  $\Delta v = -A^T \Delta y$  and  $\Delta x = V_k^{-1} (X_k V_k e - \mu e) - V_k^{-1} X_k \Delta v$ .  
     Compute  $(\hat{\alpha}_p, \hat{\alpha}_d) = \min_{\alpha_i > 0} (x_i - \alpha_i \Delta x_i \geq 0, v_i - \alpha_i \Delta v_i \geq 0)$ .  
     Compute  $x^{k+1} = x^k - \delta \hat{\alpha}_p \Delta x$ ,  $y^{k+1} = y^k - \delta \hat{\alpha}_d \Delta y$  and  $v^{k+1} = v^k - \delta \hat{\alpha}_d \Delta v$ .  
     Set  $k = k + 1$ .  
**end.**

The parameter  $\delta$  is used in order to force that  $x^{k+1} \in \{x : Ax = b, x > 0\}$  and  $(y^{k+1}, v^{k+1}) \in \{(y, v) : A^T y + v = c, v > 0\}$ . We use  $\delta = 0.995$ , although the value suggested in [3, 9] was 0.9995. We explain our choice in the last section of this paper.

**3.4 Mehrotra's predictor-corrector variant of the primal-dual algorithm**

A variant of the preceding algorithm was developed by Mehrotra [8]. In this procedure,  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  and  $\Delta v$  are computed as in the algorithm PD with  $\mu = 0$  to obtain the predictor direction that is used to compute  $\mu$  and correct the direction. We follow the implementation of Lustig et al. [6].

The parameter  $\delta$ , that appears in the following algorithm, is used in order to force that  $x^{k+1} \in \{x : Ax = b, x > 0\}$  and  $(y^{k+1}, v^{k+1}) \in \{(y, v) : A^T y + v = c, v > 0\}$ . As suggested by Lustig et al. [6], we use  $d = 0.99995$ .

The Mehrotra's predictor-corrector variant of the primal-dual algorithm may be described as follows:

**Algorithm PD/C1**

```

Given  $x^0 \in \{x : Ax = b, x > 0\}$ ,  $(y^0, v^0) \in \{(y, v) : A^T y^0 + v^0 = c, v^0 > 0\}$ ,
 $\delta \in ]0, 1[$  and  $\epsilon > 0$ , set  $k = 0$ ;
While  $|c^T x^k - b^T y^k| / \max\{1, |c^T x^k|\} > \epsilon$  do
begin
  Set  $X_k = \text{diag}(x_1^k, \dots, x_n^k)$ ,  $V_k = \text{diag}(v_1^k, \dots, v_n^k)$ .
  Compute  $\Delta y = -(AV_k^{-1} X_k A^T)^{-1} b$ .
  Compute  $\Delta v = -A^T \Delta y$  and  $\Delta x = X_k e - V_k^{-1} X_k \Delta v$ .
  Compute  $(\hat{\alpha}_p, \hat{\alpha}_d) = (\min_{\alpha_i > 0} (x_i - \alpha_i \Delta x_i \geq 0), \min_{\alpha_i > 0} (v_i - \alpha_i \Delta v_i \geq 0))$ .
  Compute  $(\alpha_p, \alpha_d) = (\min(1, \delta \hat{\alpha}_p), \min(1, \delta \hat{\alpha}_d))$ .
  Compute  $\hat{g} = (x - \alpha_p \Delta x)^T (v - \alpha_d \Delta v)$ .
  if  $x^T v \geq 1$  then compute  $\mu = \left(\frac{\hat{g}}{x^T v}\right)^2 \frac{\hat{g}}{n}$  else compute  $\mu = \frac{x^T v}{n^2}$ .
  Compute  $\Delta y^c = -(AV_k^{-1} X_k A^T)^{-1} A V_k^{-1} (X_k V_k e - \mu e + \Delta X \Delta v)$ .
  Compute  $\Delta v^c = -A^T \Delta y^c$  and  $\Delta x^c = V_k^{-1} (X_k V_k e - \mu e + \Delta X \Delta v) - V_k^{-1} X_k \Delta v^c$ .
  Compute  $(\hat{\alpha}_p, \hat{\alpha}_d) = (\min_{\alpha_i > 0} (x_i - \alpha_i \Delta x_i^c \geq 0), \min_{\alpha_i > 0} (v_i - \alpha_i \Delta v_i^c \geq 0))$ .
  Compute  $(\alpha_p, \alpha_d) = (\min(1, \delta \hat{\alpha}_p), \min(1, \delta \hat{\alpha}_d))$ .
  Compute  $x^{k+1} = x^k - \alpha_p \Delta x^c$ ,  $y^{k+1} = y^k - \alpha_d \Delta y^c$  and  $v^{k+1} = v^k - \alpha_d \Delta v^c$ .
  Set  $k = k + 1$ .
end.
```

**3.5 Another predictor-corrector variant of the primal-dual algorithm**

Now, we consider another predictor-corrector variant of the algorithm PD where  $m$  is computed in the same way as in that algorithm. Then, such value for  $\mu$ , is taken to estimate  $\Delta x$ ,

$\Delta y$  and  $\Delta v$ . Finally, those values for  $\mu$ ,  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  and  $\Delta v$  are used to compute the corrected direction  $\Delta = (\Delta x^c, \Delta y^c, \Delta v^c)$ .

As in the algorithm PD/C1, a parameter  $\delta$  is used in order to force that  $x^{k+1} \in \{x : Ax = b, x > 0\}$  and  $(y^{k+1}, v^{k+1}) \in \{(y, v) : A^T y + v = c, v > 0\}$ . We use  $\delta = 0.9995$  in this algorithm.

Next, we present this predictor-corrector variant of the primal-dual algorithm.

**Algorithm PD/C2**

```

Given  $x^0 \in \{x : Ax = b, x > 0\}$ ,  $(y^0, v^0) \in \{(y, v) : A^T y^0 + v^0 = c, v^0 > 0\}$ ,
 $\delta \in ]0, 1[$  and  $\epsilon > 0$ , set  $k = 0$ ;
While  $|(c^T x^k - b^T y^k) / \max\{1, |c^T x^k|\}| > \epsilon$  do
  begin
    Compute  $\mu = (c^T x^k - b^T y^k) / n^2$ .
    Set  $X_k = \text{diag}(x_1^k, \dots, x_n^k)$ ,  $V_k = \text{diag}(v_1^k, \dots, v_n^k)$ .
    Compute  $\Delta y = -(AV_k^{-1} X_k A^T)^{-1} AV_k^{-1} (X_k V_k e - \mu e)$ .
    Compute  $\Delta v = -A^T \Delta y$  and  $\Delta x = V_k^{-1} (X_k V_k e - \mu e) - V_k^{-1} X_k \Delta v$ .
    Compute  $\Delta y^c = -(AV_k^{-1} X_k A^T)^{-1} AV_k^{-1} (X_k V_k e - \mu e + \Delta X \Delta v)$ .
    Compute  $\Delta v^c = -A^T \Delta y^c$  and  $\Delta x^c = V_k^{-1} (X_k V_k e - \mu e + \Delta X \Delta v) - V_k^{-1} X_k \Delta v^c$ .
    Compute  $(\hat{\alpha}_p, \hat{\alpha}_d) = (\min_{\alpha_i > 0} (x_i - \alpha_i \Delta x_i^c \geq 0), \min_{\alpha_i > 0} (v_i - \alpha_i \Delta v_i^c \geq 0))$ .
    Compute  $x^{k+1} = x^k - \delta \hat{\alpha}_p \Delta x^c$ ,  $y^{k+1} = y^k - \delta \hat{\alpha}_d \Delta y^c$  and  $v^{k+1} = v^k - \delta \hat{\alpha}_d \Delta v^c$ .
    Set  $k = k + 1$ .
  end.

```

It is worthwhile mentioning that the main difference, in computational terms, between the algorithms PD/C1 and PD/C2 is related to the effort on computing  $\mu$ . In fact, in PD/C2, a ratio test has to be done to obtain  $x^{k+1}$ ,  $y^{k+1}$  and  $v^{k+1}$ . However, in PD/C1, two ratio tests are required, namely one for computing  $\mu$  and another to obtain  $x^{k+1}$ ,  $y^{k+1}$  and  $v^{k+1}$ .

**4. The interior-point algorithms and the transportation and the assignment problems**

In this section we show how to use the particular structure of the constraint matrix of the problems mentioned in the application of the interior-point methods described in the previous section. Let us return to the representation and conventions of Section 2.

It is easy to see that the main work of all the algorithms relies on the solution of systems of equations of the form

$$(AGA^T)s = r \tag{6}$$

where  $G$  is a diagonal matrix of order  $nm$  and  $r \in \mathbb{R}^{n+m-1}$  defined by:

- $G = X_k^2$  and  $r = AX_k^2 c$ , in the algorithm PA.
- $G = V_k^{-2}$  and  $r = d$ , in the algorithm DA.
- $G = V_k^{-1} X_k$  and  $r = AV_k^{-1} (X_k V_k e - \mu e)$  in the algorithms PD and PD/C2.
- $G = V_k^{-1} X_k$  and  $r = d$ , in the algorithm PD/C1.

- $G = V_k^{-1} X_k$  and  $r = AV_k^{-1} (X_k V_k e - \mu e - \Delta X \Delta v)$  in the algorithms PD/C1 and PD/C2.

In the case of the AP and TP, the special structure of matrix  $A$  allows us to compute  $s$  in a simpler way. That is done by solving a system of equations with a small number of equations and variables, which does not require the storage of the matrix  $A$ .

#### 4.1 The structure of $AGA^T$

If  $A$  is the constraint matrix of AP and TP presented in section 2.1 and  $G = \text{diag}(g_1, g_2, \dots, g_{nm})$ , it is easy to see that

$$AGA^T = \begin{bmatrix} E & F \\ F^T & E' \end{bmatrix} \quad (7)$$

where  $E = [e_{ij}]$  is a diagonal matrix of order  $n$ , with  $e_{ii} = \sum_{j=1}^m g_{(i-1)m+j}$ ,  $E' = [e'_{ij}]$  is a diagonal matrix of order  $m-1$ , with  $e'_{ii} = \sum_{j=1}^n g_{(j-1)m+i}$ , and  $F = [f_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times (m-1)}$  is a dense matrix, with  $f_{ij} = g_{(i-1)m+j}$ . We see that knowledge of the matrix  $G$  is sufficient to define the matrix  $AGA^T$ . Therefore, it is not required to store the matrix  $A$ .

#### 4.2 Solving the system $(AGA^T)s = r$

If  $s = \begin{bmatrix} s^1 \\ s^2 \end{bmatrix}$  and  $r = \begin{bmatrix} r^1 \\ r^2 \end{bmatrix}$ , with  $r^1, s^1 \in \mathbb{R}^n$  and  $r^2, s^2 \in \mathbb{R}^{m-1}$ , the system  $AGA^T s = r$

may be written as:

$$\begin{bmatrix} E & F \\ F^T & E' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s^1 \\ s^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r^1 \\ r^2 \end{bmatrix} \quad (8)$$

or in the equivalent form

$$\begin{cases} Es^1 + Fs^2 = r^1 \\ F^T s^1 + E's^2 = r^2 \end{cases} \quad (9)$$

We can solve (9) in two different ways:

(i)

$$s^2 = (E' - F^T E^{-1} F)^{-1} (r^2 - F^T E^{-1} r^1) \quad (10)$$

$$s^1 = E^{-1} (r^1 - Fs^2) \quad (11)$$

or

(ii)

$$s^1 = (E - FE^{-1} F^T)^{-1} (r^1 - FE^{-1} r^2) \quad (12)$$

$$s^2 = E^{-1} (r^2 - F^T s^1) \quad (13)$$

Hence case (i) requires to solve the system

$$(E' - F^T E^{-1} F) s^2 = r^2 - F^T E^{-1} r^1 \quad (14)$$

with  $m-1$  equations and  $m-1$  unknowns.

On the other hand in case (ii) the following system has to be solved:

$$(E - FE^{-1} F^T) s^1 = (r^1 - FE^{-1} r^2) \quad (15)$$

which contains  $n$  equations and  $n$  unknowns.

Therefore we should use (10)-(11) when  $m < n$  and (12)-(13) otherwise. Furthermore the gaussian elimination method is employed for solving the systems (14) or (15).

**4.3 Computing Au and A<sup>T</sup>z**

It is an easy task to compute Au or A<sup>T</sup>z. To compute  $h = Au$ , we have

$$h_i = \begin{cases} \sum_{j=1}^m u_{(i-1)m+j} & \text{if } i \leq n \\ \sum_{j=1}^n u_{(j-1)m+i-n} & \text{if } i > n \end{cases}$$

On the other hand,  $l = A^Tz$  is calculated by

$$l_i = \begin{cases} z_{p+1} + z_{n+q} & \text{if } i \text{ is not a multiple of } m \\ z_{p+1} & \text{if } i \text{ is a multiple of } m \end{cases}$$

where  $p = \lfloor (i - 1)/m \rfloor$ , that is, p is the largest integer smaller than or equal to  $(i - 1)/m$ , and  $q = i - \lfloor i/m \rfloor m$ .

**5. Computational experience**

**5.1 Test problems**

For the purpose of carrying out computational experiments, we have generated 60 instances for the TP, all of them with 50 origins and 50 destinations. Twelve different classes of test problems have been considered accordingly to different ranges for the  $c_{ij}$ ,  $a_i$  and  $b_j$ . For each class, 5 different instances were randomly generated.

Using those instances, we have obtained the corresponding versions for the AP, by setting  $a_i = 1, i = 1, \dots, 50$  and  $b_j = 1, j = 1, \dots, 50$ . This has yielded 4 different classes of test problems, each one of them with 15 instances.

In Table 1 those classes are defined in terms of the already mentioned ranges for the coefficients  $c_{ij}$ ,  $a_i$  and  $b_j$ .

Table 1: Definition of the classes in AP and TP

$a_i, b_j$	TP			AP
	1-9	1-99	1-999	
0-9	T1	T2	T3	A1
0-99	T4	T5	T6	A2
0-999	T7	T8	T9	A3
0-9999	T10	T11	T12	A4

**5.2 Initial Solution**

In all the algorithms presented in section 3, we assume that a primal feasible interior solution and/or a dual feasible interior solution, are available. For the TP and AP, this is easily achieved by considering

$$x_{ij} = \frac{a_i b_j}{\sum_{i=1}^n a_i}, \quad i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m$$

and

$$y_i = \frac{\nu}{2} - \alpha, \quad i = 1, \dots, n + m - 1$$

where  $\nu = \min(c_{ij}, i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m)$  and  $\alpha > 0$ . We use  $\alpha = 1$ . This can be easily verified by using (1), the relaxed problem of (3) and the corresponding duals.

### 5.3 The value of $\delta$

We have made some experiences about the value of  $\delta$ , a parameter that is required by all the algorithms described in section 3. For the algorithms PA, DA and PD/C1 the experience has shown that the best values agree with the ones proposed in the literature,  $\delta = 0.95$  for PA and DA and  $\delta = 0.9995$  for PD/C1. For the algorithm PD, we made a different choice using  $\delta = 0.995$  that proved to be better, in terms of the convergence of the algorithm, than the value  $\delta = 0.0005$  proposed in [3, 9].

### 5.4 Computational results

We ran the 60 TP and the 60 AP instances on a Macintosh IICx, using the algorithms PA, DA, PD, PD/C1 and PD/C2, presented in section 3 and introducing the specializations defined in section 4.

#### 5.4.1 Transportation problems

Table 2 and Table 3 contain the mean number of iterations and computing time obtained for each class of test problems using the five algorithms previously described.

Table 2: Mean number of iterations for the TP

	PA	DA	PD	PD/C1	PD/C2
T1	28.0	20.4	14.6	7.6	8.6
T2	30.6	20.0	13.6	9.2	8.6
T3	31.6	21.0	16.2	10.8	9.6
T4	32.4	18.8	20.6	9.6	10.4
T5	35.0	20.2	23.4	10.4	11.2
T6	36.4	19.8	23.4	10.4	11.6
T7	32.6	26.6	27.0	10.6	12.2
T8	37.4	24.2	26.6	12.2	13.4
T9	39.2	27.0	29.0	12.2	13.2
T10	34.6	29.0	25.4	11.0	12.0
T11	37.8	28.4	35.6	13.4	14.0
T12	38.0	33.2	30.2	12.6	13.0

The analysis of these results leads to the following conclusions:

- The algorithms PD/C1 and PD/C2 require less number of iterations and computing time than the remaining ones.

- The algorithm PD/C1 usually takes fewer iterations than the algorithm PD/C2. However, the method PD/C1 usually requires less computing time than the algorithm PD/C2 but the gap is not so big as for the iteration count.
- The algorithms PD and DA are usually more efficient than the algorithm PA.
- The mean of iterations does not indicate a definite conclusion about the superiority of one of the algorithms PD and DA over the other. However, the algorithm DA is usually better than the method PD in terms of computing times.

Table 3: Mean time (sec.) consumed for the TP

	PA	DA	PD	PD/C1	PD/C2
T1	71.04	42.29	38.82	27.88	30.00
T2	77.63	41.47	36.16	33.74	29.99
T3	80.17	43.53	43.07	39.60	33.48
T4	82.21	38.97	54.77	35.20	36.28
T5	88.81	41.88	62.22	38.12	39.07
T6	92.37	41.05	62.22	38.14	40.47
T7	82.72	55.12	71.79	38.87	42.57
T8	94.91	50.16	70.72	44.74	46.64
T9	99.46	55.96	77.39	44.75	46.05
T10	87.79	60.09	67.64	40.34	41.87
T11	95.91	58.85	94.72	49.14	48.84
T12	96.43	68.79	80.36	46.21	45.35

- The number of iterations usually grows with an increase of the sizes of  $c_{ij}$ ,  $a_i$  and  $b_j$ .

**5.4.2 Assignment problems**

As stated in section 2, we actually solve relaxations for the AP, so, if the linear program has alternate optimal solutions, the interior-point method may terminate with a solution that is not an extreme point. In this context we can say that all the instances have been successfully solved by all the algorithms.

In Table 4, we show the mean number of iterations obtained for each class with each algorithm.

Table 4: Mean number of iterations for the AP

	PA	DA	PD	PD/C1	PD/C2
A1	22.1	19.4	10.2	6.9	7.3
A2	21.8	16.1	11.4	8.4	8.7
A3	22.1	17.2	12.7	9.7	9.7
A4	22.1	17.3	12.7	9.5	9.7

In Table 5, we show the mean time, in seconds, that is consumed (only in iterative computations).

Table 5: Mean time (sec.) consumed for the AP

	PA	DA	PD	PD/C1	PD/C2
A1	56.16	40.27	27.12	25.19	25.84
A2	55.32	33.36	30.31	30.81	30.24
A3	56.17	35.71	33.69	35.45	33.64
A4	55.99	35.85	33.86	34.73	34.43

From the analysis of these results, we can conclude that:

- The algorithms PD/C1 and PD/C2 usually perform better than the algorithms PD and DA, in terms of the mean number of iterations and of the time consumed for the solving procedure;
- The algorithms PD/C1 and PD/C2 usually require a smaller number of iterations than the algorithm PD. However, no conclusions can be asserted about the computing time.
- The algorithm PD/C1 usually requires a smaller number of iterations than the algorithm PD/C2 but the computing time for the latter algorithm is usually smaller.
- The algorithm PD performs better than the algorithm DA which in turn is more efficient than the method PA.

The computational experience has shown that the algorithm PD/C1 and PD/C2 are the best algorithms among the different procedures testes. Next, we study the influence of the ranges of the  $c_{ij}$  and the  $a_i$  and  $b_j$  in the behaviour of the algorithms. To do this, we scaled the  $c_{ij}$  in all instances of TP, as well as in all instances of AP, to the range 0-9. In Tables 6 and 7, we shown the mean number of iterations obtained for each class of test problems with the algorithms PD/C1 and PD/C2.

Table 6: Mean number of iterations for the TP, after "scaling"

	T1	T2	T3	T4	T5	T6	T7	T8	T9	T10	T11	T12
PD/C1	7.6	9.2	10.4	8.8	10.8	11.2	9.2	11.4	11.6	9.4	13.0	11.0
PD/C2	8.6	8.6	9.6	10.4	10.6	11.4	10.6	12.0	12.2	10.6	12.6	11.4

The results show a global improvement of the algorithm PD/C1 in the mean number iterations of 5.2% for the TP and of 9.8% for the AP. For the algorithm PD/C2, we have obtained a global improvement in the mean number of iterations of 6.7% for the TP and of 9.6% for the AP.

Table 7: Mean number of iterations for the AP, after "scaling"

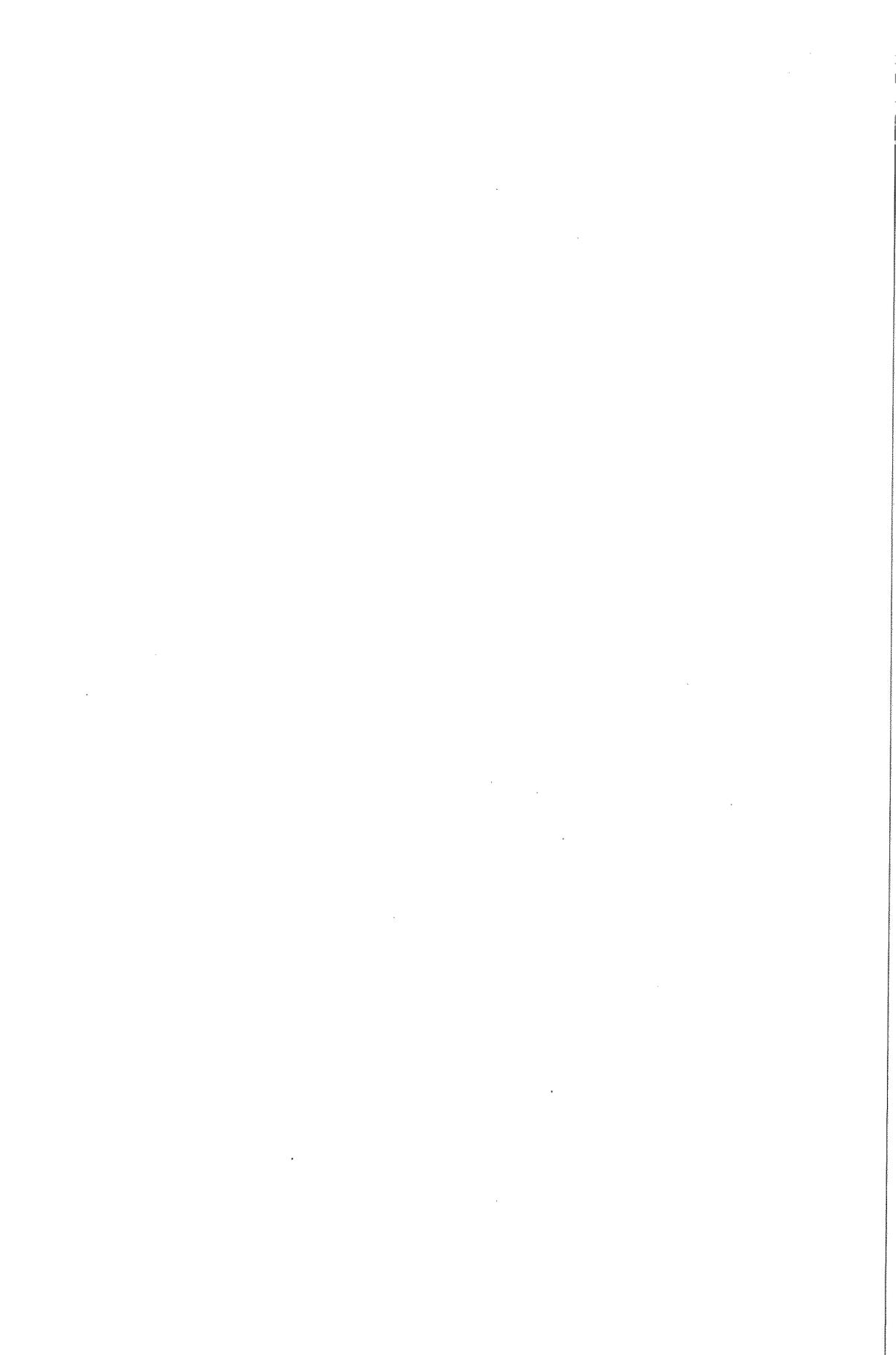
	A1	A2	A3	A4
PD/C1	6.9	7.9	8.2	8.1
PD/C2	7.3	8.1	8.5	8.1

### Acknowledgment

The authors are grateful to the Departamento de Matemática (Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade Nova de Lisboa), and, in particular, to the Head of Department, Professor Doutor António César de Freitas, for the conditions put at their disposal.

### References

- [1] Adler, I., Karmarkar, N., Resende, M.G.C., Veiga, G., *Data structures and programming techniques for the implementation of Karmarkar's algorithm*, ORSA Journal on Computing 1 (1989) 84-106.
- [2] Adler, I., Resende, M.G.C., Veiga, G., *An implementation of Karmarkar's algorithm for the linear programming*, Mathematical Programming 44 (1989) 297-335.
- [3] Choi, I.C., Monma, C.L., Shanno, D.F., *Further development of a primal-dual interior point method*, ORSA Journal on Computing 2 (1990) 304-311.
- [4] Gonzaga, C.C., *Algoritmos de Pontos Interiores para Programação Linear*, Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, Brasil (1989).
- [5] Karmarkar, N., *A new polynomial-time algorithm for linear programming*, Combinatorica 4 (1984) 373-395.
- [6] Lustig, I.J., Marsten, R.E., Shanno, D.F., *On implementing Mehrotra's predictor-corrector interior-point method for linear programming*, Technical Report SOR 90-03, Princeton University, Princeton, NJ, USA (1990).
- [7] Marsten, R.E., Saltzman, M.J., Shanno, D.F., Pierce, G.S., Ballintijn, J.F., *Implementation of a dual affine interior point algorithm for linear programming*, ORSA Journal on Computing 1 (1989) 287-297.
- [8] Mehrotra, S., *On the implementation of a (primal-dual) interior-point method*, Technical Report 90-03, Dept. of Ind. and Man. Sc., Northwestern University, Evanston, IL, USA (1990).
- [9] McShane, K.A., Monma, C.L., Shanno, D., *An implementation of a primal-dual interior-point method for linear programming*, ORSA Journal on Computing 1 (1989) 70-83.
- [10] Monma, C.L., Morton, A.J., *Computational experience with a dual affine variant of Karmarkar's method for linear programming*, Operations Research Letters 6 (1987) 177-182.
- [11] Monteiro, R.D.C., Adler, I., *Interior path following primal-dual algorithms. Part I: Linear Programming*, Mathematical Programming 44 (1989) 27-41.
- [12] Monteiro, R.D.C., Adler, I., Resende, M.G.C., *A polynomial-time primal-dual affine scaling algorithm for linear and convex quadratic programming and its power series extension*, Mathematics of Operations Research 15 (1990) 191-214.
- [13] Papadimitriou, C.H., Steiglitz, K., *Combinatorial Optimization: Algorithms and Complexity*, Prentice-Hall, Inc. (1982).



# UM MODELO DE SIMULAÇÃO DE ESTAÇÕES FERROVIÁRIAS

**José Carlos Branco**  
**Rui Carvalho Oliveira**  
CESUR - Instituto Superior Técnico  
Av. Rovisco Pais, 1000 LISBOA

## Abstract

In this paper a visual and interactive simulation model for railway stations is presented. This model is a powerful tool for testing and evaluating operational programmes for railway stations, allowing the diagnostics of conflicts affecting the movements of trains. The model can also support studies related to the lay-out design of railway stations or the analysis of critical situations caused by break-downs or maintenance and repair works.

## Resumo

Apresenta-se um modelo de simulação de estações ferroviárias. Trata-se de um modelo com características visuais, dinâmicas e interactivas.

As suas características tomam-no num potente meio de teste e avaliação de programas de exploração de estações ferroviárias permitindo ainda o diagnóstico de conflitos na circulação de composições.

O modelo possibilita também o estudo de um novo lay-out das estações e ainda de situações de impedimento parcial à circulação motivada por avarias ou obras de manutenção/reparação.

## Keywords

simulation, railway stations, visual and interactive models

## 1. Introdução

O estabelecimento de programas de exploração para sistemas ferroviários é um problema decisional de grande complexidade, quer pela sua dimensão, quer pela diversidade de factores de índole variada a ter em conta, frequentemente contraditórios ou dificilmente harmonizáveis e muitas vezes mal definidos [Oliveira, 1990]. É prática habitual decompor o problema e tratá-lo por estádios, dos quais se destacam:

- a) O estabelecimento de programas para a plena vida.
- b) O estabelecimento de programas para estações ferroviárias.
- c) A rotação do material circulante.
- d) As escalas do pessoal.

O primeiro estádio corresponde ao estabelecimento dos horários dos comboios, definindo a sua tipologia e as horas de partida, chegada ou passagem destes nas estações ferroviárias. É

este horário base que alimenta os estádios seguintes, num processo iterativo com interações e retroacções múltiplas.

No que respeita ao estabelecimento dos programas para as estações, importa definir os itinerários das composições e o plano de ocupação das linhas tendo em atenção nomeadamente restrições de capacidade das instalações e segurança da circulação, e objectivos comerciais (ligados ao relacionamento com utentes) e operacionais. Entre estes, citam-se as preocupações de estabilidade dos horários, procurando-se encontrar planos que evitem a propagação das perturbações (atrasos) na circulação dos comboios.

O recurso a modelos de implementação computacional para o estudo dos planos de exploração é atraente uma vez que se trata de tarefa complexa e morosa o que, embora contando com a experiência dos técnicos, restringe o número de alternativas que podem ser analisadas por processos convencionais e, conseqüentemente, limita a qualidade da solução adoptada.

Então hoje disponíveis sistemas interactivos (vêr, por exemplo, [Bourrachot, 1984]) que apoiam os horaristas na elaboração desses planos. Tipicamente, o horarista vai colocando comboios e afectando-os a linhas e itinerários, encarregando-se o sistema de detectar e assinalar conflitos com outras composições anteriormente colocadas, competindo ao horarista resolver esses conflitos através da redefinição das afectações e/ou horário. Usualmente, o sistema fornece ainda elementos relevantes para a avaliação das soluções, como sejam índices de utilização, margens entre comboios, etc.

Este tipo de sistemas, se bem adequados à elaboração de planos, têm algumas limitações no referente ao teste e avaliação de soluções, sobretudo no que respeita à estabilidade do horário, caracterizável através da flexibilidade e capacidade de absorção das perturbações (atrasos) que possam afectar a circulação dos comboios.

Para este último propósito, a simulação configura-se como uma abordagem particularmente atraente. Estão disponíveis vários modelos de simulação (por exemplo, [Broomhead, 1985], [Ducker et. al, 1973], [Jones e Walker, 1974], [Kant, 1984], [Stucki, 1980]), que, no entanto, estão primordialmente voltados para o tratamento da rede como um todo. Como tal, as estações aparecem tratadas apenas como um nó da rede ferroviária, isto é, com um nível de pormenorização manifestamente desadequado. Adicionalmente, nenhum destes modelos dispõe de facilidades visuais e interactivas, facilidades estas de grande relevância na avaliação do desempenho do sistema e no diagnóstico de situações de congestionamento.

Foi no sentido de cobrir as lacunas apontadas nos sistemas existentes e de tirar pleno partido das facilidades visuais e interactivas que se desenvolveu o modelo que é apresentado nesta comunicação.

## **2. Apresentação Geral do Modelo**

O modelo destina-se a simular um sistema que englobe uma estação ferroviária e que poderá conter ou não troços de plena via necessários ao acesso à estação. Trata-se de um modelo orientado para a simulação de uma qualquer estação, dado que é permitido ao utilizador quer a definição desta, modelada por arcos definidos pelos seus nós extremos, quer a definição da sinalização existente quer ainda dos horários a estudar.

O modelo está escrito em Pascal e encontra-se implementado em computadores pessoais do tipo IBM - compatível.

### **2.1. Dados Iniciais**

O modelo de simulação recebe como inputs dados registados em ficheiro, que definem:

- A estação a simular.
- O horário a simular.
- Regras de prioridade a seguir no processamento das movimentações dos comboios.
- Atrasos exógenos que afectam as horas de entrada no sistema dos comboios previstos no horário base.

#### **2.1.1. Definição da Estação**

A definição do sistema a simular, através da caracterização das instalações fixas (implantação das vias e sistemas de segurança), é feita previamente à execução do modelo, constituindo-se ficheiros de dados que são lidos por aquele. Conceptualmente, o sistema é modelado como uma rede, sendo associado a cada arco (troço de via) um conjunto de dados que definem a sua implantação (coordenadas). São também identificados os "nós fronteira" (isto é, os limites do sistema pelos quais as composições entram e saem do mesmo) e as linhas de paragem/estacionamento das composições na estação (através dos arcos que as constituem).

A sinalização da via é aplicada nos nós. Para cada arco explicitado anteriormente e limitado por dois nós deve ser definida a sinalização (colocada em cada um desses nós) que a composição tem que respeitar ao entrar no arco por esse ponto (fig.1). Permite-se apenas a definição de um sinal em cada extremo de um arco, pelo que poderá ser necessário recorrer-se a arcos de comprimento ínfimo para se caracterizar completamente a sinalização.

Arcos concorrentes num mesmo nó estão desta forma ligados e permitem a passagem de composições nos dois sentidos. São excepção os nós em que o número de arcos concorrentes é superior a dois. Aqui, para o nó em causa deverá ser descrito um aparelho de mudança de via (AMV). Esta descrição consiste em identificar o tipo de aparelho em causa e quais as ligações por este permitidas entre os troços concorrentes.

No ponto 3 é feita uma descrição mais pormenorizada da modelação adoptada para as instalações de segurança.

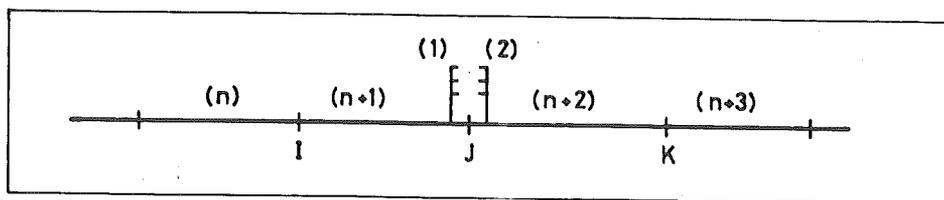


Fig. 1 – Sinalização vertical

- (1) – sinalização a respeitar por qualquer composição que cruze o nó  $j$  no seu trajecto do troço  $(n+2)$  para o troço  $(n+1)$ .
- (2) – sinalização a respeitar por qualquer composição que cruze o nó  $j$  no seu trajecto do troço  $(n+1)$  para o troço  $(n+2)$ .

### 2.1.2. Definição do Horário

Os horários são constituídos pela descrição da vida de todas as composições dentro do sistema. Cada composição que circule no sistema deverá ser caracterizada por um número, pelo seu tipo e comprimento. As características de tracção e frenagem e o seu peso deverão também ser conhecidos para se proceder ao cálculo das suas marchas. O percurso de cada composição deverá também ser descrito, definindo-se

- O local de "nascimento" da composição (entrada no sistema).
- O local de "morte" da composição (saída do sistema).
- O itinerário da composição.
- A linha de paragem da composição.
- As horas de chegada ao sistema, chegada e partida da linha de estacionamento e tempo mínimo de paragem.

### 2.2. Descrição Geral

O modelo processa as movimentações das composições, respeitando escrupulosamente as afectações e, tanto quanto possível, o horário dos comboios definido no ficheiro respectivo. No entanto, sempre que surjam conflitos entre composições (detectadas através da modelação das instalações de segurança), o modelo resolve-os de acordo com as regras de prioridades definidas, retendo e atrasando alguma(s) das composições em conflito (nos sinais principais ou nas linhas de estacionamento).

Por razões de eficiência computacional foi adoptado na construção do modelo o método dos acontecimentos, descrevendo-se com mais detalhe no ponto 4 a modelação das movimentações das composições.

Para testar a robustez do horário face à aleatoriedade existente nas horas reais de circulação das composições está o modelo provido da capacidade de "gerar" atrasos exógenos, os quais serão somados à hora de aparecimento das composições no sistema e pretendem traduzir o

efeito de toda a rede exterior ao sistema em estudo sobre o avanço das composições. Estas perturbações aleatórias do horário são geradas de acordo com distribuições estatísticas e parâmetros que são especificados nos dados iniciais (em função da origem, destino e tipo de composição).

O modelo incorpora facilidades visuais e interactivas (descritas nos pontos 5 e 6) que trazem vantagens comparativas relativamente à simulação convencional, das quais são de destacar:

- Promovem a transparência do modelo e conseqüentemente a compreensão (ainda que superficial) do mesmo, o que permite quebrar barreiras de entendimento e compreensão por parte dos utilizadores finais.
- Permitem colocar o controle da simulação do lado do utilizador (que pode alterar o estado do sistema ou as suas regras de funcionamento), o que, para além de aumentar a confiança deste modelo, cria condições ideais para o ensaio de soluções alternativas.
- Permitem, face à observação, uma avaliação qualitativa do desempenho do sistema e o diagnóstico de situações, contribuindo também deste modo para a introdução de melhoramentos nas soluções ensaiadas.

No final da simulação o modelo fornece uma vasta gama de resultados impressos, nomeadamente:

- Estatísticas de comprimento e tempos de permanência das composições em filas de espera. Estas filas de espera correspondem aos nós fronteira do sistema em estudo e conceptualmente constituem os locais em que as composições aguardam por condições para evoluírem (entrarem) no sistema.
- Estatísticas sobre a passagem das composições pelo sistema (individuais ou agregados por origem, destino e tipo de composição), voltadas primordialmente para a caracterização dos atrasos introduzidos pela estação (atrasos endógenos).
- Estatísticas de ocupação dos elementos do sistema, nomeadamente dos troços com taxas de ocupação mais elevadas.

Estes resultados visam facilitar a identificação dos estrangulamentos do sistema, as suas causas e quais as composições envolvidas, o que, conjugado sempre que possível com a observação da evolução do sistema, fornece pistas valiosas sobre as intervenções correctivas cuja adequação pode ser subseqüentemente ensaiada e avaliada.

Apesar de primordialmente voltado para o ensaio de programas de exploração de estações ferroviárias, o modelo encerra potencialidades para desempenhar papel relevante noutros contextos, como sejam o treino de pessoal ou o estudo de configurações alternativas das instalações (lay-out de linhas ou dos sistemas de segurança).

### 3. Modelação das Instalações de Segurança

#### 3.1. Introdução

A circulação das composições ferroviárias está sujeita a um apertado controle de segurança, diferente para a plena via e para as estações. São esses esquemas de segurança que se passam seguidamente a expôr.

##### 3.1.1. Plena Via

A protecção à circulação de composições na plena via está associada à divisão desta em cantões. Um cantão consiste num troço de via protegido por um sinal principal e pelo sinal avançado associado (cantonamento automático). Cada cantão deverá conter no máximo uma composição.

O objectivo é manter pelo menos um cantão de intervalo entre cada composição em marcha, podendo todavia existir composições em cantões contíguos. Neste caso, a composição que circula atrás fá-lo com velocidade reduzida, imposta pela côr amarela do sinal principal de protecção ao cantão em que se encontra. O sinal avançado tem, neste contexto, a função de antecipar o aspecto do sinal principal correspondente, de modo a permitir ao maquinista a tomada das precauções requeridas pela situação.

##### 3.1.2. Estação Ferroviária

As instalações de segurança dentro de uma estação ferroviária são bastante mais complexas do que as de plena via, sendo a necessidade de efectuar cruzamentos a grande responsável pela referida complexidade.

Uma composição que se aproxima da entrada de uma estação, materializada pelo sinal principal de entrada e pelo sinal avançado respectivo, deverá, antes da sua entrada, reservar o itinerário até à linha de estacionamento que lhe está destinada bloqueando todos os itinerários incompatíveis com o seu. Este bloqueio dá-se

- Com o auxílio dos aparelhos de via, através de um posicionamento apropriado das suas agulhas.
- Com o aspecto da sinalização existente.

Embora muitos sistemas de segurança actualmente instalados apenas permitam a destruição do itinerário, com a conseqüente libertação dos itinerários incompatíveis, após a paragem da composição (caso das instalações antigas em que a libertação é processada manualmente), nas instalações mais recentes e automáticas a libertação do itinerário dá-se por fases. Sempre que a composição transponha completamente uma agulha, esta coloca-se em posição tal que impede a passagem de outra composição para o circuito de via ocupado pela primeira.

### 3.2. Modelação das Instalações de Segurança

Um dos pontos fulcrais na simulação de estações ferroviárias é certamente a modelação das instalações de segurança. Estas são compostas pela sinalização vertical e ainda por um cuidado encadear de "agulhas", parte integrante dos aparelhos de mudança de via, que permite isolar os itinerários ocupados.

A sinalização vertical fica, no modelo, reproduzida conforme se descreveu atrás (ver ponto 2.1.1.). Cabe agora detalhar a forma como conceptualmente se reproduziram no modelo os aparelhos de mudança de via.

A modelação seguida consiste em afectar, por um processo automático, semáforos fictícios aos nós dos aparelhos, por forma a, através do aspecto destes, se impedirem certas movimentações de composições dentro do sistema (fig. 2). Estes semáforos pretendem representar a posição da agulha do aparelho do AMV; assim, um sinal vermelho indica que a agulha está numa posição que não permite o acesso ao troço protegido a partir do nó do aparelho. Impedem-se deste modo os acessos a troços actualmente ocupados com a circulação de outras composições.

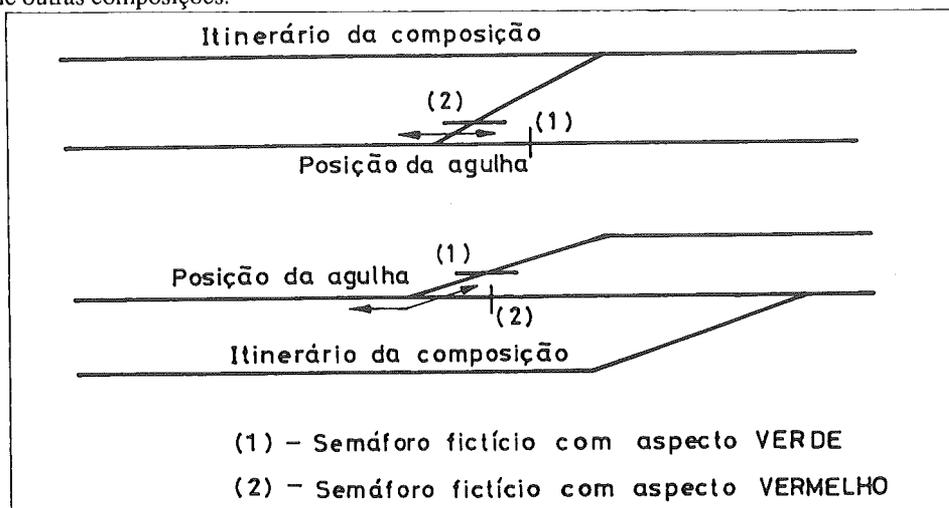


Fig. 2 – Exemplo de colocação de semáforos fictícios num AMV

### 4. Modelação das Movimentações

O avanço das composições no sistema processa-se do modo a seguir descrito:

- Chegada da composição ao sistema, num nó fronteira ou numa plataforma, de acordo com o horário previsto e com a consideração ou não de atrasos exógenos.
- Existindo condições de avanço (via livre) é reservado o itinerário com a consequente inibição da utilização simultânea de itinerários (ou troços de itinerários) que sejam incompatíveis com o primeiro. Esta inibição é realizada através da "ocupação" de troços de via, em função do sistema de segurança existente na

estação e do tipo de movimento da composição. Por exemplo, ao movimento de entrada na estação está associada a ocupação do itinerário até à linha de estacionamento (com "ocupação" de todos os itinerários incompatíveis). Na plena via, aquela ocupação estende-se até ao ponto em que seja possível travar (em condições de segurança) qualquer composição que eventualmente pretenda circular em sentido contrário.

- Reservado o itinerário, o avanço começa, sendo a libertação do itinerário já percorrido feita de uma forma faseada: quando a protecção à composição em marcha puder ser feita logo na rectaguarda desta, libertam-se os troços já percorridos permitindo-se assim a sua reserva para a circulação de outra composição.
- Após a saída do sistema todos os troços ocupados pela composição são libertados.

A movimentação das composições dentro do sistema dá-se quando estão materializadas todas as condições para tal. Ocorrem, porém, situações de simultaneidade de movimentos incompatíveis entre si. Nesta altura é necessário atribuir prioridade às composições.

O modelo considera prioridades em função do tipo de composição e da origem do movimento que esta vai efectuar. Nesta última situação a ordenação é conseguida em função das prioridades atribuídas aos nós fronteira (entrada no sistema) e às linhas de estacionamento (saída do sistema). Quando não forem expressamente definidas prioridades, o modelo considera as especificadas por defeito.

Neste modelo de simulação os acontecimentos concebidos prendem-se fundamentalmente com o avanço das composições no sistema (ver descrição dos acontecimentos no anexo 1).

## **5. Representação Visual**

Uma das características do modelo de simulação apresentado é a representação visual dinâmica do sistema. Pretende-se com esta representação facilitar o acompanhamento das transformações sofridas pelo sistema, permitindo ao utilizador o controle total da situação e, ao mesmo tempo, uma primeira avaliação (qualitativa) do programa de exploração ensaiado. A representação dinâmica tem por pano de fundo o traçado em planta do sistema a simular. É sobre este quadro que se irão sobrepôr esquematicamente todas as transformações verificadas ao longo da simulação.

A representação visual do sistema mantém permanentemente actualizada informação sobre (fig.3):

- Número de composições aguardando entrada no sistema, através dos nós fronteira. Antes da sua entrada no sistema a composição é colocada numa fila de espera, ordenada de acordo com critérios pré-estabelecidos, só daqui saindo desde que estejam verificadas as condições de segurança para a sua evolução no sistema. Para cada nó fronteira o modelo mantém constantemente actualizado o número de composições que nele aguardam a sua vez de avançar.

- Ocupação de troços. Com o evoluir das composições, cada troço elementar definido no ficheiro de dados do sistema vai passando por uma sucessão de estados de ocupação e disponibilidade. Estes estados são automaticamente reflectido no écran gráfico, facilitando uma melhor percepção do comportamento do sistema em face da solicitação que lhe é imposta.
- Ocupação das linhas de estacionamento. Cada linha de estacionamento apresenta em cada instante um de três aspectos: livre ou ocupado (com duas representações). As representações de ocupado têm por objectivo reflectir a razão pela qual a composição ocupante se mantém nesta situação; ou por ainda não ter atingido a sua hora de partida ou por o itinerário de saída não se encontrar livre.
- Hora de simulação. O avanço do tempo (hora de simulação) faz parte integrante da representação do sistema.

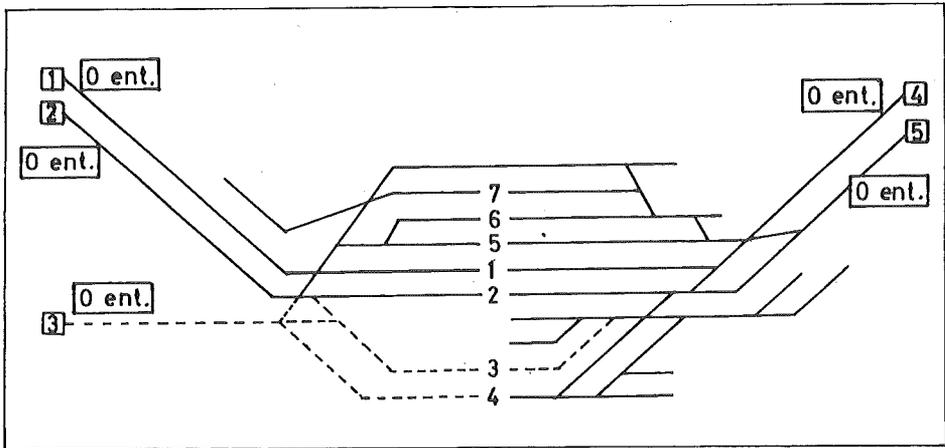


Fig. 3 – Informação disponível através da representação visual do sistema

Independentemente da informação referida, é permitido ao utilizador jogar com a imagem do sistema, ampliando-a, reduzindo-a ou deslocando-a no écran, e optar ou não pela representação dos números das linhas de estacionamento. Estas facilidades estão disponíveis através de interações do modelo e permitem a representação da parte do sistema que mais convier.

## 6. Interações

Paralelamente ao decorrer da simulação (avanço no tempo e processamento sequencial dos acontecimentos) estão disponíveis, a qualquer instante, comandos que permitem ao utilizador encetar com o modelo um diálogo construtivo.

Este diálogo constitui a interactividade, extremamente útil na busca de melhores performances e no diagnóstico de situações. Aqui, o utilizador faz uso de todo o seu potencial de análise, auxiliado pela informação disponível, redefinindo opções e estabelecendo novas orientações, recorrendo a comandos que lhe permitem actuar sobre o sistema.

São três os grupos de interacções disponíveis. O primeiro engloba informação de carácter geral, definida no início da simulação. O segundo permite ao utilizador descer ao pormenor na "leitura" do sistema, oferecendo-lhe informação detalhada sobre o seu estado. No último grupo, permite-se ao utilizador tomar parte activa no desenrolar da simulação, mediante as alterações que este julgue conveniente efectuar.

Alterações sobre as instalações fixas do sistema não são aqui permitidas por obrigarem a uma redefinição de itinerários. Devido ao grande volume de informação a manipular estas alterações deverão ser efectuadas sobre o ficheiro de dados respectivos, e em todos aqueles que com este estejam relacionados (ex: ficheiro de horários - definição de itinerários). Neste âmbito foram previstas as interacções descritas no anexo 2.

## **7. Experiência de Utilização**

É ainda limitada a experiência de utilização do modelo descrito que se circunscreve até ao momento presente ao ambiente académico, ainda que com o apoio da CP - Caminhos de Ferro Portugueses que disponibilizou o "know-How" ferroviário dos seus técnicos, os dados sobre estações e horários e ainda os algoritmos de cálculo de marchas. Para que o sistema possa ter plena utilização noutros ambientes há ainda que melhorar alguns aspectos, sobretudo a biblioteca de programas que, a montante do modelo de simulação, recebe e regista os dados de base sobre estações (lay-out e sistema de sinalização) e horários dos comboios.

Nas experiências realizadas simulou-se, entre outras de menor relevância, a estação de Coimbra durante períodos de tráfego intenso. Os tempos de simulação rondaram os 26 segundos por cada composição e dia simulado, usando um microcomputador PC com processador 80486SX a 25 MHz. Estes tempos seriam consideravelmente reduzidos (se houvesse essa preocupação) case se prescindisse da representação visual ou se usasse equipamento mais potente. De qualquer modo, os tempos de simulação são fortemente influenciados pelo nível de interactividade desenvolvido durante a sessão de trabalho.

No que respeita à complexidade dos sistema que o modelo permite simular, as limitações poderão surgir do lado da capacidade de memória do computador utilizado, não se perspectivando qualquer restrição limitativa pelo menos para as estações (e tráfego respectivo) da rede rodoviária nacional.

## **8. Conclusões**

O modelo apresentado revela-se um potente instrumento de apoio à elaboração de programas de exploração de estações ferroviárias, particularmente no que respeita ao ensaio da robustez das soluções e estabilidade dos horários face a perturbações aleatórias que sempre afectam o funcionamento deste tipo de sistemas.

Aliando as facilidades visuais e interactivas do modelo à experiência, intuição e capacidade de análise do utilizador criam-se condições ideais para tirar pleno partido das sinergias da interacção homem-computador no diagnóstico das fontes de instabilidade e na resolução dos

conflitos e estrangulamentos detectados. Para além de contribuírem para a obtenção de soluções mais adequadas e robustas, as características do modelo permitem ainda ultrapassar muitas das barreiras de incompreensão, desconfiança e desmotivação por parte dos utilizadores finais que frequentemente afectam os modelos de implementação computacional e inibem a plena exploração das suas potencialidades no apoio à tomada de decisões.

Além de servir de instrumento de teste e avaliação de programas de exploração de estações ferroviárias, o modelo desenvolvido encerra potencialidades para desempenhar papéis relevantes noutros contextos, nomeadamente no estudo de configurações da estação (lay-out de linhas ou instalações de segurança) ou no treino de pessoal.

### Referências

- [1] Bourachot, J., *Conception Assisté par Ordinateur de L'Exploitation et de L'Amenagement des Gares Ferroviaires Voyageurs: modèle interactif Graphique AFAIG*, Tese de Doutoramento, Ecole Polytechnique Federale de Lausanne (These n° 515), 1984.
- [2] Broomhead, M.A., *A Computer Simulation Model of a Private Railway System*, ORION 2 (1985) 52-71.
- [3] Drucker, R.W., Jewel, B.L. e Barden, R.P., *A Mini-Network Computer Simulation Model for Railroad Planning*, Rail International 4 (1973) 1069-1071.
- [4] Jones, J.M.C. e Walker, A.E., *Simulation à L'Aide de Modèles Mathematiques por L'Evaluation Comparative sur les Lignes de Chemins de Fer à Voie Unique*, Rail International 5 (1974) 145-162.
- [5] Kant, K., *Conception et Simulation d'un Système Dynamique et Automatique de Commande du Trafic Ferroviaire*, Rail International 15 (1984) 8-13.
- [6] Oliveira, R.C., *Elaboração de Programas de Exploração de Sistemas Ferroviários - Contributos da Investigação Operacional*, CESUR, 1990.
- [7] Stucki, G., *RAILNET - Calcul de la Dynamique des Circulation des Convois*, ITEP, EPFL, Lansanne, 1980.

## ANEXO I

**Acontecimentos**

Faz-se seguidamente referência aos acontecimentos existentes no modelo de simulação:

1. **Liberta\_Troço** - Acontecimento processado de cada vez que uma composição, no decorrer da sua marcha, liberta mais um troço elementar definido no ficheiro de caracterização do sistema.
2. **Liberta\_Gare** - Acontecimento processado sempre que uma composição deixa a linha de estacionamento onde esteve parada. Os troços elementares constituintes da linha de estacionamento em causa são tornados "desocupados", fazendo-se o eco desta alteração de estado para o écran gráfico.
3. **Saída\_Composição\_Sistema** - O processamento deste acontecimento ocorre sempre que uma composição atinge o nó fronteira (limite do sistema em estudo) após ter percorrido completamente o itinerário de saída, ou quando esta termina o seu "percurso" numa plataforma. São libertados os últimos troços ocupados pela entidade em causa com as correspondentes alterações gráficas.
4. **Ocupa\_Troço** - Sempre que uma composição, durante a sua marcha, entra num novo troço elementar, é processado este acontecimento. Testa-se a existência de um sinal avançado no troço recentemente ocupado e em caso de sucesso é tentada a ocupação do cantão seguinte. Se esta não fôr conseguida, por ocupação de outra composição, é de considerar a paragem ao próximo sinal principal.
5. **Paragem\_Troço** - Executado sempre que por impossibilidade de ocupar o cantão seguinte, uma composição é obrigada a parar a um sinal principal.
6. **Paragem\_Gare** - Sempre que uma composição chega à linha de estacionamento que lhe está destinada, efectua-se a sua paragem e são libertados todos os troços elementares ainda ocupados, exceptuando, logicamente, os troços que constituem a linha de estacionamento em questão e seus ramais de acesso.
7. **Chegada\_Composição\_Sistema** - A chegada de uma composição ao sistema verifica-se à hora prevista no calendário de acontecimentos pendentes e coincide com o "nascimento" de mais uma entidade. Esta é colocada na fila de espera correspondente ao nó fronteira de entrada aí permanecendo até que estejam reunidas as condições para se proceder ao seu avanço. Sempre que o "nascimento" da composição se dê numa plataforma é efectuada a sua ocupação. Em qualquer das situações é actualizada a representação gráfica do sistema.
8. **Partida\_Troço** - Após estarem novamente reunidas as condições necessárias a composição reinicia a sua marcha a partir do sinal principal em que se encontrava retida.

9. **Partida\_Gare** - Acontecimento destinado a permitir a saída de uma composição estacionada numa plataforma. São criadas as condições para que a partida possa ser realizada com o processamento do acontecimento "Efectua\_Partida".
10. **Entrada\_Sistema** - Acontecimento destinado a permitir a entrada de uma composição, actualmente aguardando (num nó fronteira) a entrada no sistema. São criadas as condições para que a entrada no sistema (partida do nó fronteira) possa ser realizada com o processamento do acontecimento "Efectua\_Partida".
11. **Efectua\_Partida** - O processamento efectivo de qualquer partida é da responsabilidade deste acontecimento.
  - Partida de um troço: é tentada a ocupação dos troços constituintes do cantão seguinte e, em caso de sucesso retratada graficamente esta situação.
  - Partida de uma gare: tenta-se a ocupação do itinerário de saída e, em caso de sucesso é alterada a representação visual do sistema.
  - Entrada no sistema: é tentada a ocupação do primeiro cantão incluído no itinerário de entrada da composição, retirando-se a entidade da fila de espera do nó fronteira em caso de sucesso. Alteração na representação do estado do sistema.
12. **Aumenta\_Velocidade** - Executado sempre que uma composição, no seu avanço, encontra uma sinalização menos restritiva em termos de velocidade.
13. **Reduz\_Velocidade** - Processado sempre que, ao entrar num novo troço, se depare à composição um sinal limitador de velocidade.

**ANEXO II****Interacções**

Apresentam-se neste ponto as interacções permitidas pelo modelo:

- 1. Atrasos** - Mostra as distribuições de atrasos definidas para cada composição em função da sua origem, destino e tipo (esta informação é fornecida ao modelo no início da simulação).
- 2. Prioridades** - Mostra as prioridades estabelecidas pelo utilizador, para as partidas das composições dentro do sistema.
- 3. Apita** - Activa/desactiva os sinais sonoros indicadores do tipo de movimento das composições.
- 4. Mexe\_Ecran** - Oferece ao utilizador a possibilidade de jogar com a imagem do sistema, deslocando-a, reduzindo-a ou ampliando-a.
- 5. Rep\_Gare** - Activa/desactiva a representação gráfica do número das plataformas do sistema.
- 6. Tempo** - Permite a selecção do modo de avanço do relógio: avanço unitário ou avanço para a hora do próximo acontecimento marcado.
- 7. Gravar** - Permite a gravação do estado actual do sistema.
- 8. Retomar** - Interação complementar da anterior, permitindo a leitura de uma situação previamente gravada.
- 9. Acontecimento** - Possibilita a opção entre uma simulação com paragem e devolução do comando ao utilizador antes do processamento de qualquer acontecimento, e uma simulação contínua, que apenas pode ser interrompida pressionando-se uma tecla.
- 10. Sistema** - Faculta ao utilizador informação detalhada sobre o sistema (definição completa de todo o sistema de acordo com os dados iniciais e após a modelação automática dos sistemas de segurança associados aos AMV's), e seu estado actual (ocupação dos troços constituintes da rede).
- 11. Composição** - Informação detalhada sobre as composições no sistema: seu posicionamento e "percurso" passado e futuro. Permite-se ainda a alteração dos horários e percursos das composições.
- 12. Calendário** - Acesso ao mapa de acontecimentos marcados. Opção de alteração da hora de ocorrência de acontecimentos do tipo "chegada ao sistema", "entrada no sistema" e "Partida de uma gare".
- 13. Ordena\_Partida** - Afixa a ordenação das partidas agendadas para o instante actual, com opção para a sua reordenação.
- 14. Fim** - Alteração da hora de fim de simulação.

# ABORDAGEM AO PROBLEMA DA LOCALIZAÇÃO DE UM CENTRO DE TRATAMENTO DE CORREIO E SUA REDE DE TRANSPORTE

**Albano Augusto Rosa**  
Direcção Geral dos Correios  
Correios e Telecomunicações de Portugal (CTT)

**Acácio Manuel de Oliveira Porta Nova**  
Departamento de Matemática  
Instituto Superior Técnico (IST)

## **Abstract**

Locating a Postal Treatment Center is a complex mixed location and distribution problem. This paper introduces a solution approach based on the sequential resolution of the two problems and on multicriteria analysis to reduce the number of solutions to be considered. A real case illustrates this approach.

## **Resumo**

A localização dum Centro de Tratamento de Correio e a definição da sua rede de transporte é um complexo problema misto de localização e distribuição. Neste artigo, apresenta-se uma abordagem baseada na resolução sequencial dos dois problemas e na análise multicritério para delimitar o número de soluções a considerar. A abordagem é ilustrada com um caso real.

## **Keywords**

Mixed location and distribution problems, Postal Treatment Center location, multicriteria analysis.

## **1. Introdução ao Sistema Postal**

O serviço de comunicação postal é prestado pela empresa pública Correios de Portugal (CTT). Este serviço consiste, basicamente, na recolha das comunicações escritas (as cartas) junto dos clientes remetentes e na sua distribuição posterior pelos clientes destinatários, sendo suportado por uma rede de estabelecimentos postais ligados, entre si, por veículos de transporte.

Do ponto de vista da actividade postal, o país está dividido em grandes áreas geográficas, as chamadas Regiões de Encaminhamento (RE), cada uma delas organizada em torno dum estabelecimento postal principal, o Centro de Tratamento de Correio (CTC). Os CTC são ligados, entre si, por uma Rede de Transportes Primária, de âmbito nacional (ver Figura 1), que, sendo historicamente ferroviária, foi reconvertida para rodoviária nos últimos anos, por razões relacionadas com a rentabilidade e flexibilidade do sistema.

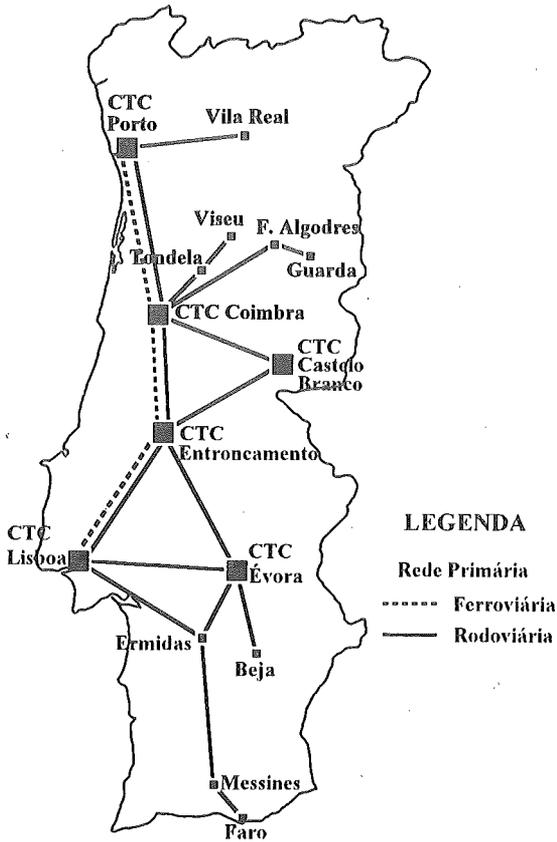


Figura 1 - Rede de Transportes Primária

Cada um dos CTC tem a função de apoiar a malha, necessariamente mais densa, de estabelecimentos postais mais pequenos, os Centros de Distribuição Postal (CDP) da sua RE, passando esse apoio pelo funcionamento duma Rede de Transportes Secundária (as chamadas carreiras), de cariz regional, que interliga os vários CDP e o CTC da RE. Esta rede é essencialmente rodoviária e de tipo radial, existindo casos em que há transbordos de viatura para uma sub-rede, formando assim uma estrutura em árvore.

Por sua vez, cada um dos CDP apoia um conjunto ainda mais denso de estabelecimentos postais de menor dimensão, as estações de correio (CTF), através duma outra rede de transportes rodoviária, a Rede de Transportes Terciária. Esta rede, de cariz local, serve apenas a área geográfica de influência de cada CDP, transportando objectos entre CTF, apoiando, por um lado, a aceitação e recolha dos objectos e, por outro, a realização de Giros de Distribuição, para distribuição dos objectos pelos destinatários; nalguns casos, a rede terciária funciona ainda como uma subrede, em prolongamento da *secundária*.

O percurso de uma carta, no interior do sistema postal, pode, em termos gerais, resumir-se às seguintes etapas: (i) aceitação dos objectos (na área de influência dum dado CDP de origem); (ii) triagem (ou separação) dos objectos para expedição; (iii) transporte dos objectos para o CDP de destino; (iv) distribuição dos objectos no CDP de destino.

Analizando o processo postal segundo a óptica do fluxo dos objectos, constatamos que ele se desenvolve, diariamente, em torno de dois fluxos, que circulam em tempos e sentidos diferentes: (i) a concentração, dos CDP para o CTC; e (ii) a dispersão, em sentido inverso. O funcionamento da rede secundária, que executa a tarefa da recolha do correio e distribuição ao conjunto dos CDP da RE, desenrola-se assim num ciclo diário em duas fases distintas.

No fenómeno da concentração, o fluxo de tráfego circula dos CDP para o CTC: ao fim da tarde, aproximadamente entre as 19 e as 20 horas, os objectos são transportados, pelas carreiras da rede secundária, para o CTC da respectiva Região de Encaminhamento. O horário de funcionamento da rede de transportes secundária, ao executar o fenómeno da concentração, está limitado pelo horário de fecho dos CTF ao público e pela necessidade de chegar o mais cedo possível ao CTC, de forma a esbater, ao máximo, os picos de tráfego nesse estabelecimento. À partida, os veículos das carreiras podem estar excepcionalmente no depósito (CTC), embora, na esmagadora maioria dos casos, estejam nos CDP finais das rotas realizadas na fase da dispersão; no fim da operação da concentração, os veículos devem ficar no depósito, para início dum novo ciclo no dia seguinte.

No fenómeno da dispersão, o fluxo de tráfego circula do CTC para os CDP: de madrugada, aproximadamente entre as 5 e as 8 horas, os objectos são transportados, pelas carreiras, para os CDP da Região de Encaminhamento do CTC, de modo a aí ser organizada e efectuada a distribuição aos utentes destinatários. A rede de transportes, que efectua a dispersão, coincide com a que realiza a concentração; cada CDP é servido por um, e só um, CTC. Cada carreira vai até ao último CDP do percurso, aí se mantendo até ao fim da tarde, para então efectuar o

percurso contrário na concentração; nalguns casos excepcionais, o veículo retorna ao CTC. O horário de funcionamento da rede de transportes secundária, ao realizar a dispersão, está limitado, por um lado, pela necessidade de sair o mais tarde possível do CTC, de forma a esbater ao máximo os picos do tráfego nesse estabelecimento, e, por outro lado, pelo intervalo de tempo que tem de existir, nos CDP, para que as operações de arruamento, ou seja, de ordenamento das cartas pelo percursos dos giros de distribuição, se façam de modo a que os carteiros possam sair para a rua às 9 horas.

A qualidade do serviço postal é uma das duas características fundamentais que condicionam a definição de todo o sistema postal: nós, rede e processo. A outra característica é, logicamente, a rentabilidade da exploração do mesmo. A qualidade do serviço mede-se, no nosso caso, pela capacidade de resposta a um conjunto de 3 factores: (i) segurança (inviolabilidade e não desaparecimento); (ii) não deterioração; (iii) entrega ao utente destinatário, a tempo. O terceiro factor é considerado usualmente como o mais importante, sendo vulgar confundi-lo com a própria noção de qualidade de serviço; nesta base, designa-se por grau de qualidade de serviço a percentagem de objectos entregues, ao utente destinatário, a tempo.

## **2. Formulação e Abordagem do Problema**

Este trabalho foi desenvolvido tendo, como motivo próximo, a análise da substituição de um Centro de Tratamento de Correio, no caso, o CTC do Entroncamento (CTC ENT), bem como as consequentes alterações na respectiva rede de transportes secundária. As razões, para a substituição do referido CTC ENT, derivaram, por um lado, das crescentes dificuldades de operação nas instalações em causa, nomeadamente devido à exiguidade e precaridade das mesmas, e, por outro lado, da alteração na rede primária de transportes postais, que passou a operar utilizando a rodovia, em lugar da tradicional ferrovia. A RE ENT, como pode ver-se na Figura 2, era formada, na altura, por 28 CDP e era servida por uma rede secundária com 4 carreiras principais, além duma sub-rede.

Resumidamente, podia-se justificar, então, a existência do CTC do Entroncamento como forma de responder a três necessidades: a) funcionamento, como nó da rede primária, para as trocas entre as outras RE do país, realizando, neste caso, tarefas de transbordo e entrepositagem de objectos entre transportes; b) funcionamento, como nó irradiador das carreiras da rede secundária na fase de dispersão, para as trocas entre os 28 CDP desta RE e as outras RE do país; c) funcionamento, como nó agregador de objectos de correspondência e encomendas, na fase da concentração do tráfego (actividade principal de qualquer CTC).

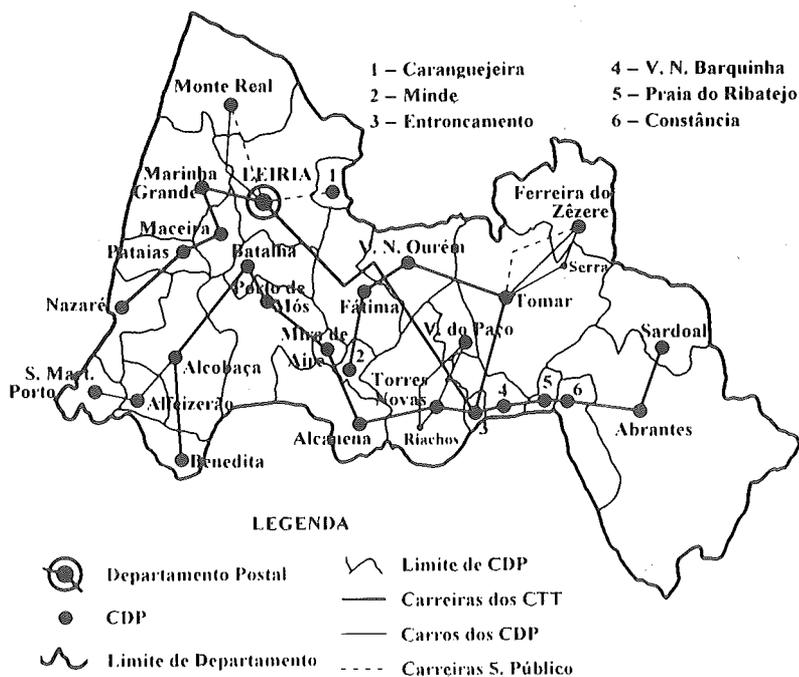


Figura 2 - Região de Encaminhamento do Entroncamento (RE ENT)

Como se referiu atrás, o problema, que estávamos a tentar abordar, consistia, basicamente, na substituição dum estabelecimento postal. Ora, a mudança do CTC ENT podia realizar-se segundo uma de duas hipóteses alternativas: (i) eliminação do estabelecimento, passando, nesse caso, as suas funções a ser realizadas por algum ou alguns dos CTC limítrofes (Lisboa, Coimbra, Castelo Branco e Évora); (ii) manutenção dum estabelecimento na zona centro, fosse na localidade do Entroncamento, fosse noutra localidade qualquer. À partida, a hipótese da eliminação do estabelecimento era atraente, quer pela poupança em despesas com a criação e manutenção de infraestruturas de grande porte (terreno e edifício), quer pela concentração de mão-de-obra, que tal decisão permitiria. Colocaram-se dúvidas, todavia, face a esta hipótese, relacionadas com as distâncias envolvidas, que poderiam inviabilizá-la.

Representando a rede em análise (os 28 CDP da RE ENT) apenas uma parte da rede nacional, colocava-se, no início, a questão de definir qual o âmbito geográfico da análise a efectuar ao problema, já que um caso deste tipo poderia mesmo chegar a ser abordado, na sua forma mais abrangente, no âmbito do universo de todo o território. Não considerámos o problema à escala nacional, o que, a ser feito, para além de não acrescentar nada em termos conceptuais, iria assumir uma dimensão desproporcionada em relação ao âmbito deste trabalho. Não pusemos em causa a localização dos restantes CTC, nem naturalmente a existência e constituição das respectivas RE; admitimos, contudo, como possível, a alteração de algumas das 4 RE em jogo (Entroncamento, Lisboa, Coimbra e Castelo Branco), podendo alguma, ou algumas, das 3 RE vizinhas da do Entroncamento vir a crescer à custa dos CDP da RE ENT.

Como resultado principal deste trabalho, desenvolveu-se uma metodologia baseada na aplicação de métodos seleccionados do âmbito da Investigação Operacional. Não se pretenderam realizar estudos económicos exaustivos das diferentes alternativas contempladas, embora se tenham considerado alguns custos variáveis. Não foram tomados em consideração quaisquer custos relativos a terrenos e a construção de infraestruturas, bem como à exploração do CTC. Assim, no que respeita à função objectivo, pretendeu-se minimizar não só os custos decorrentes da deslocação entre localidades, mas também o número e o tipo de veículos a afectar; o objectivo teve de estar sujeito à restrição da capacidade máxima das viaturas utilizadas em cada uma das rotas, embora essa capacidade máxima pudesse variar de viatura para viatura; a restrição da qualidade de serviço prestado (tempos disponíveis para serventia dos CDP) traduziu-se em limitações na duração ou distância do percurso a realizar por cada um dos veículos. Ao procurar localizar o CTC de forma a minimizar o custo dos veículos e o custo de realização, englobando, quer a rede primária, quer a rede secundária, estivemos a tentar resolver, simultaneamente, problemas mistos de localização e de distribuição.

Na abordagem seguida, não se analisaram, em simultâneo, ambos os problemas. Optou-se por uma abordagem sequencial ao problema misto: estudava-se, em primeiro lugar, o problema da localização, que fornecia um número limitado de possíveis soluções; em seguida, a resolução do problema da distribuição (envolvendo os custos das redes) permitiria optar definitivamente por uma das soluções consideradas. Nas duas próximas secções, descrevem-se o trabalho desenvolvido e os resultados obtidos com a aplicação de vários métodos de resolução dos problemas de localização e distribuição; isto porque temos a noção de que, ao aplicar essencialmente heurísticas e realizando simplificações no problema real, que o pudessem tornar abordável, nenhum seria, em princípio, claramente melhor do que os outros, antes interessando comparar, criticamente, os resultados obtidos por meio de cada um deles.

Tabela 1 - CDP da Região de Encaminhamento do Entroncamento

1 - Monte Real	11 - Benedita	20 - Entroncamento
2 - Marinha Grande	12 - Porto de Mós	21 - V. Nova da Barquinha
3 - Leiria	13 - Mira de Aire	22 - Praia do Ribatejo
4 - Caranguejeira	14 - Minde	23 - Constância
5 - Pataias	15 - Alcanena	24 - Abrantes
6 - Maceira do Lis	16 - V.Nova de Ourém	25 - Sardoal
7 - Batalha	17 - Tomar	26 - São Martinho do Porto
8 - Fátima	18 - Vila do Paço	27 - Alfeizerão
9 - Nazaré	19 - Torres Novas	28 - Ferreira do Zêzere
10 - Alcobaça		

### 3. O Problema da Localização

Em primeiro lugar, analisámos vários métodos de resolução do problema da localização de um depósito em espaço contínuo (ver Eilon et al. [4]); uma vez que foram considerados diversos métodos e situações, tivemos igualmente de resolver o problema de seleccionar, dentre eles, aquele(s) que permitisse(m) retirar as conclusões mais válidas. No método que utiliza a distância em linha recta, os pontos encontrados foram "puxados" para os CDP mais próximos, porque, por um lado, só por acaso o ponto seleccionado "cairia" sobre alguma localidade importante, e, por outro lado, porque não faria sentido, na óptica dos CTT, não fazer coincidir a localização do CTC com a localização dum CDP, pelas vantagens que essa solução encerra, por exemplo, no que respeita à rede secundária que, assim, fica com um cliente a menos para servir.

Em seguida, abordámos o problema da localização de um depósito numa rede; nesta análise, apenas demos realce a um método, o da mediana do grafo, tendo contudo a consciência de que o fenómeno real não é modelado perfeitamente pela mediana.

Finalmente, concluímos esta secção com uma discussão acerca da selecção da melhor localização para o CTC, com base na aplicação dum método de escolha multicritério, utilizando um conjunto de 6 critérios, em que dois deles foram baseados nas localizações determinadas anteriormente; a principal razão, para utilizarmos este método, foi o facto de nenhum dos métodos de localização usados ser o "ideal", quer os que são aplicáveis em espaço contínuo, quer especialmente o critério da mediana.

Os algoritmos foram aplicados à rede completa em análise, RE ENT, com os 28 nós CDP indicados na Tabela 1, bem como a diversas sub-redes da rede completa (justificadas pelas carreiras então existentes), nomeadamente: (i) rede com 27 nós, sem o CDP de Ferreira do Zêzere; (ii) rede com 26 nós, sem os CDP de Sardoal e Abrantes; (iii) rede de 25 nós, sem os CDP de Alfeizerão, São Martinho do Porto e Benedita; (iv) rede de 22 nós, sem os CDP de Ferreira do Zêzere, Alfeizerão, São Martinho do Porto, Benedita, Sardoal e Abrantes.

A matriz das aplicações realizadas, quer nos métodos em espaço contínuo, quer nos métodos em rede, levou em consideração, para além das diversas hipóteses de dimensão da rede, outros factores que influem no tipo de "distância" a usar no cálculo da matriz de custos (ver Cooper [3]): (a) em relação ao sentido do fluxo, podia-se considerar a carga global nos dois sentidos, a carga apenas no sentido da dispersão ou a carga apenas no sentido da concentração; (b) em relação à carga de tráfego, podiam-se considerar valores de carga de tráfego actuais ou com crescimento de 50 ou 100% nos CDP a oeste do traçado previsto da Auto-Estrada Lisboa-Porto (conceito de polarização, do desenvolvimento futuro, na região do litoral) ou com crescimento de 50 ou 100%, nos CDP das localidades mais importantes (conceito de polarização, do desenvolvimento futuro, nos centros populacionais actualmente mais importantes).

### Localização do Espaço Contínuo

O depósito a localizar (CTC), com coordenadas cartesianas  $(x_0, y_0)$ , vai servir  $n$  clientes (CDP), localizados nos pontos com coordenadas cartesianas  $(x_j, y_j)$ , com  $j = 1, \dots, n$ . Se o custo do transporte entre o depósito e o cliente  $j$  for indicado por  $C_j$ , então o custo total de transporte é  $H = \sum_{j=1}^n C_j$ ; quando o custo do transporte depende linearmente da carga transportada e da distância percorrida, temos que  $C_j = \alpha_{0j} \omega_j d_j$ , sendo  $\alpha_{0j}$  o custo por unidade transportada e por unidade de distância percorrida entre o depósito e o cliente  $j$ ,  $\omega_j$  a quantidade transportada entre o depósito e o cliente  $j$  e  $d_j$  a distância total a percorrer entre o depósito e o cliente  $j$ . Considerando, ainda, que o custo unitário não depende, nem do cliente, nem da localização do depósito, virá  $H = \sum_{j=1}^n \omega_j d_j$ .

Portanto, a formulação do problema de localização que, tipicamente, estamos interessados em resolver é: determinar as coordenadas do centro  $(x_0, y_0)$ , por forma a minimizar  $H = \sum_{j=1}^n \omega_j d_j$ , sem restrições a satisfazer em relação aos valores a assumir pelas variáveis de decisão  $x_0$  e  $y_0$ .

É possível considerar diversas formas de definir a distância  $d_j$ , sendo, as mais usuais, as seguintes: (i) distância em linha recta, radial ou euclideana,  $d_j = \sqrt{(x_0 - x_j)^2 + (y_0 - y_j)^2}$ ; (ii) distância quadrado da distância radial,  $d_j = (x_0 - x_j)^2 + (y_0 - y_j)^2$ ; (iii) distância em movimento retilinear ou metropolitana,  $d_j = |x_0 - x_j| + |y_0 - y_j|$ .

No que respeita à distância radial, aplicámos o chamado método numérico-analítico, com solução obtida através dum algoritmo iterativo; os respectivos resultados, relativos à rede de 22 nós, são apresentados na Tabela 2. Para se obterem as aproximações iniciais necessárias para este algoritmo, foram experimentados diversos métodos, tendo-se verificado que a escolha do ponto inicial afectava a velocidade de convergência, embora não tivesse influência na distância ao ponto final. Também se observou que o método numérico-analítico conduzia a uma única solução mínima. Finalmente, constatou-se que todas as situações consideradas conduziam a soluções localizadas junto de 3 CDP: Fátima, Batalha e Leiria.

Tabela 2 - Localização: Método Numérico-Analítico (Rede de 22 Nós)

(x,y)/Custo CDP mais próximo	Fluxo		
	Nos 2 sentidos	Na dispersão	Na concentração
Tráfego Actual	(6.06,4.18)/374 Fátima	(6.00,4.11)/238 Fátima	(6.13,4.30)/136 Fátima
Crescimento 50% (A-E)	(5.27,4.72)/476 Batalha	(5.18,4.62)/300 Batalha	(5.36,4.89)/175 Batalha
Crescimento 100% (A-E)	(5.02,4.98)/569 Batalha	(4.93,4.80)/357 Batalha	(5.06,4.34)/211 Batalha
Crescimento 50% (Local.Import.)	(5.62,4.61)/493 Batalha	(5.65,4.44)/313 Batalha	(4.70,6.10)/165 Leiria
Crescimento 100% (Local.Import.)	(5.38,4.88)/609 Batalha	(5.44,4.63)/387 Batalha	(5.16,5.39)/220 Leiria

A utilização da distância metropolitana é particularmente interessante em situações em que o movimento se tenha de fazer segundo segmentos reticulados, como seja o caso de quarteirões de cidades, com as ruas perpendiculares ou paralelas entre si. Para cada um dos casos considerados, calculou-se igualmente a tabela das distâncias do depósito aos CDP; o objectivo deste cálculo era igualmente o de seleccionar a melhor situação, para utilização posterior no método de escolha multicritério. Para todas as redes consideradas, correram-se as situações que já tinham sido analisadas no método numérico-analítico; apresentamos, na Tabela 3, um resumo dos resultados obtidos para o caso da rede de 22 nós. Constatou-se que todas as situações consideradas conduziram a soluções localizadas junto de 4 CDP: Fátima, Porto de Mós, Batalha e Leiria.

Tabela 3 - Localização: Método Coordenadas Metropolitanas (Rede de 22 Nós)

(x,y)/Custo CDP mais próximo	Fluxo		
	Nos 2 sentidos	Na dispersão	Na concentração
Tráfego Actual	(6.20,3.90)/478 Fátima	(4.70,3.80)/302 Porto de Mós	(6.60,4.50)/174 Fátima
Crescimento 50% (A-E)	(4.70,3.90)/601 Porto de Mós	(4.70,3.90)/375 Porto de Mós	(4.70,4.50)/223 Batalha
Crescimento 100% (A-E)	(4.70,4.50)/718 Batalha	(4.70,3.90)/447 Porto de Mós	(4.70,4.70)/268 Batalha
Crescimento 50% (Local.Import.)	(4.70,3.90)/624 Porto de Mós	(4.70,3.90)/392 Porto de Mós	(4.70,6.10)/219 Leiria
Crescimento 100% (Local.Import.)	(4.70,3.90)/766 Porto de Mós	(4.70,3.90)/481 Porto de Mós	(4.70,4.70)/281 Batalha

### Localização em Rede

Determinámos a localização do CTC, depósito dos CDP, numa rede formada por estes (desempenhando a função de nós do grafo) e pelos troços de estrada úteis que os ligam (desempenhando a função de arcos do grafo), admitindo, para possível localização, apenas o conjunto dos CDP e considerando a procura determinística. A localização foi calculada segundo dois métodos (centro e mediana), embora apenas se tenha utilizado um deles, a mediana, como critério do método de escolha multicritério. Nenhum dos métodos utilizados modela perfeitamente o fenómeno em causa, embora sejam métodos mais 'realistas' no que toca às possíveis localizações, já que, sendo métodos discretos, apenas entram em linha de conta com o conjunto dos CDP, considerando apenas a rede útil de estradas que realmente existe. Foram analisadas muitas situações, variando a definição do tipo de distância entre os nós da rede (distância por estrada, tempo de percurso, distância radial), o peso do tráfego e os tempos de carga e de descarga nos nós.

No caso da mediana, pretende-se minimizar a soma das distâncias de um nó a todos os outros; é um método particularmente interessante para utilizar na localização de serviços, em situações em que os clientes se deslocam ao equipamento instalado (estações de correio, bancos). Está aqui implícita a noção de que há tantas viagens, entre os clientes e o depósito, quantos os clientes; no nosso fenómeno concreto, em estudo, só por aproximação poderíamos levar os seus resultados em linha de conta, já que se sabia, à partida, que a solução consistia em servir os clientes mediante certos grupos, formando rotas. A título de exemplo, apresentam-se, na Tabela 4(a), os resultados da aplicação do método da mediana ao caso da rede de 28 nós, com a distância definida em função do tempo de percurso. Pudemos constatar uma certa tendência para Porto de Mós, que se detectou nas redes mais pequenas e que desapareceu, para dar lugar a uma presença quase constante de Minde, na rede de 28 nós e para quase todas as situações analisadas; com menor frequência, também Fátima e Leiria surgiam nalguns casos.

Com a determinação do centro, pretende-se minimizar a máxima distância de um nó a todos os outros; este é um método minimax, particularmente interessante quando aplicado à localização de instalações de emergência (bombeiros, polícia). Fizemos os cálculos exactamente para todas as situações que havíamos efectuado para a mediana. Tal como antes, apresentam-se, na Tabela 4(b), os resultados obtidos para a rede de 28 nós, sendo as distâncias consideradas do mesmo tipo das utilizadas na mediana.

Tabela 4 - Localização em Rede (Rede de 28 Nós, Tempos de Percurso)

(a) Método da Mediana				(b) Método do Centro			
Nó	Custo	Nó	Custo	Nó	Custo	Nó	Custo
1	2283	15	1749	1	147	15	103
2	1876	16	1676	2	135	16	107
3	1639	17	1893	3	117	17	138
4	1794	18	1639	4	108	18	119
5	1894	19	1704	5	150	19	112
6	1773	20	1910	6	134	20	128
7	1636	21	2018	7	131	21	134
8	1574(*)	22	2249	8	100(*)	22	149
9	2160	23	2260	9	164	23	156
10	1957	24	2692	10	159	24	174
11	2488	25	2878	11	175	25	184
12	1628	26	2492	12	131	26	184
13	1596	27	2421	13	110	27	179
14	1574(*)	28	2881	14	100(*)	28	176

(\*) Mínimo

### Escolha Multicritério

Poderíamos tomar a decisão, sobre a localização definitiva, a partir da análise exaustiva das melhores redes de transporte, desenhadas a partir de cada um dos CDP (estávamos assim no âmbito dum problema de distribuição puro). Mesmo numa rede com apenas 28 nós, a aplicação de métodos exactos poderia contudo levar muito tempo, ou vir a revelar-se mesmo impossível; por outro lado, dizia-nos, a prática, que o custo da rede de transportes secundária aumenta à medida que deslocamos o depósito para a periferia do conjunto de nós. Havia assim conveniência em desenhar a rede de transporte para o menor número de casos possível, isto, claro, se pudéssemos limitar com segurança as hipóteses mais viáveis. Contudo, a escolha provisória desse conjunto limitado não poderia partir, pelo que se disse atrás, de um critério exacto e único (o qual só poderia ser o custo das redes, que ainda não estava definido nesta fase e em que também não aplicámos métodos que busquem o óptimo, mas apenas métodos heurísticos que melhoram o actual sistema).

Poderíamos tomar a decisão, da escolha provisória, de diversas maneiras: aleatoriamente; por consenso entre os agentes envolvidos na decisão; ou através duma heurística simples para a rede de transportes secundária, aplicada a cada um dos CDP. Resolvemos tomar essa decisão a partir da utilização dum método da teoria multicritério, fazendo uso de seis critérios distintos (de localização e outros) e em que, duma forma indirecta, se procuraram fazer figurar outras parcelas da função custo global, para além do custo das redes de transporte e ainda hipóteses de

variações futuras no volume de tráfego: (i) o custo da rede secundária, com base na distância ao centro geográfico dos CDP da região; (ii) o custo da rede secundária, com base na mediana do grafo formado pelos CDP e pelos troços de estrada da região; (iii) o custo da rede primária, com base na distância dos CDP aos CTC de Lisboa, Coimbra e Castelo Branco, ponderada pelo volume de tráfego; (iv) o volume de tráfego dos CDP; (v) a distância dos CDP à autoestrada; (vi) a distância dos CDP ao CTC ENT.

O número de acções potenciais (28 CDP, na situação máxima) indicava que estávamos perante um problema multicritério discreto, que se define pela chamada matriz das notas ou das performances, que se exemplifica, na Tabela 5, com o caso da situação da rede de 22 nós.

Tabela 5 - Matriz Multicritério das Notas (Rede de 22 Nós)

NOTAS		CRITÉRIOS						
		c1	c2	c3	c4	c5	c6	
A	a1	Monte Real	5.20	1607.	4.8	1801.7	1.9	78.
	a2	M.Grande	4.65	1305.	5.7	1792.0	2.8	75.
	a3	Leiria	3.26	1096.	32.0	1749.0	1.1	62.
	a4	Caranguejeira	2.38	1203.	0.5	1730.8	0.2	55.
	a5	Pataias	5.06	1335.	1.4	1789.0	4.0	71.
	a6	Maceira do Lis	3.51	1214.	0.5	1754.4	2.6	68.
C	a7	Batalha	2.57	1099.	4.4	1725.2	1.5	58.
	a8	Fátima	0.0	1037.	7.5	1709.0	0.5	39.
Ç	a9	Nazaré	5.92	1590.	3.3	1798.8	5.2	79.
Õ	a10	Alcobaça	4.81	1427.	7.3	1749.6	4.1	68.
	a11	Porto de Mós	2.43	1108.	2.7	1717.9	1.5	50.
E	a12	Mira de Aire	1.66	1076.	3.4	1700.9	0.6	36.
	a13	Minde	1.96	1054.	14.2	1697.0	0.3	31.
S	a14	Alcanena	2.91	1193.	1.9	1700.5	0.3	28.
	a15	V.N.Ourém	1.20	1133.	8.1	1719.2	2.0	38.
	a16	Tomar	3.3	1365.	12.7	1768.5	3.6	18.
	a17	Vila do Paço	2.46	1111.	0.6	1735.7	2.1	26.
	a18	Torres Novas	3.02	1166.	9.0	1728.4	1.3	13.
	a19	Entroncamento	3.82	1365.	4.3	1759.2	2.4	0.
	a20	V.N.Barquinha	4.19	1461.	0.6	1769.0	2.9	3.
	a21	Pr.Ribatejo	4.52	1680.	0.9	1791.0	3.8	13.
	a22	Constância	5.05	1691.	0.8	1814.3	4.2	17.

Estabelecemos o princípio de escolher as 3 acções (CDP) melhores, estando assim perante uma problemática de ordenação e, assim sendo, era conveniente utilizar um método que ordenasse as acções; por isso, utilizámos, no nosso trabalho, o método ELECTRE II

(Elimination Et Choix Traduisant la REalité), referido em Roy et al. [6]. Na Tabela 6, reproduzimos a classificação multicritério obtida para a rede de 22 nós.

Tabela 6 - Classificação Multicritério (Rede de 22 Nós)

Pos.	Ação	Pos.	Ação	Pos.	Ação
1	Minde	9	Batalha	17	Maceira do Lis
2	Fátima	10	Tomar	18	V.N.Barquinha
3	Mira de Aire	11	Caranguejeira	19	Pataias
4	V.N.Ourém	12	Entroncamento	20	Monte Real
5	Leiria	13	Vila do Paço		Nazaré
6	Torres Novas	14	Alcobaça	22	Constância
7	Alcanena	15	Marinha Grande		
8	Porto de Mós	16	Pr.Ribatejo		

Na Tabela 7, resumem-se os resultados das ordenações para as redes de 25, 26, 27 e 28 nós. Os resultados não apresentam CDP classificados ex-aequo, que poderiam complicar o objectivo inicial: classificar os 3 primeiros de cada caso.

Tabela 7 - Classificação Multicritério (Redes de 25, 26, 27 e 28 Nós)

Rede de 25 nós		Rede de 26 nós		Rede de 27 nós		Rede de 28 nós	
Pos.	Ação	Pos.	Ação	Pos.	Ação	Pos.	Ação
1	Minde	1	Minde	1	Minde	1	Minde
2	Fátima	2	Mira Aire	2	Mira Aire	2	Mira aire
3	Leiria		Leiria	3	Leiria	3	Leiria
4	V.N.Ourém	4	Porto Mós	4	Fátima	4	Fátima
5	T. Novas	5	Fátima		Porto Mós		Porto Mós
6	Mira Aire	6	Batalha	6	Batalha	6	Batalha
7	Alcanena	7	T.Novas	7	T.Novas	7	T.Novas
8	Tomar	8	Alcanena	8	Alcanena	8	Alcanena
9	Vila Paço	9	V.N.Ourém	9	V.N.Ourém	9	V.N.Ourém
	Batalha	10	Alcobaça	10	Caranguej.	10	Tomar
11	Caranguej.	11	Maceira Lis		Alcobaça	11	Alcobaça
12	Entronc.		Caranguej.	12	Tomar		Caranguej.
13	Alcobaça	13	Tomar		Maceira Lis	13	Maceira Lis
14	M.Grande	14	Entronc.	14	Entronc.	14	Entronc.
	Porto Mós	15	Benedita	15	Benedita	15	Benedita
16	Maceira Lis	16	Vila Paço	16	Vila Paço	16	Vila Paço
	Pr.Ribatejo	17	M.Grande	17	M.Grande	17	M.Grande
18	Pataias	18	Pataias	18	Pataias	18	Pataias
	Abrantes	19	Nazaré	19	Nazaré	19	Pr.Ribatejo

20	Monte Real	20	Monte Real	Abrantes	20	Abrantes	
21	V.N.Barquinha	21	Pr.Ribatejo	21	Pr.Ribatejo	21	Nazaré
22	Nazaré	22	Alfeizerão		Monte Real	22	Monte Real
23	Constância	23	V.N.Barq.	23	V.N.Barq.	23	V.N.Barq.
24	F.Zêzere	24	Constância		Alfeizerão	24	Alfeizerão
25	Sardoal	25	S.M.Porto	25	Constância	25	Constância
		26	F.Zêzere	26	S.M.Porto	26	F.Zêzere
				27	Sardoal		S.M.Porto
						28	Sardoal

É notável o facto do CDP de Minde aparecer à frente em todas as classificações; no cômputo geral, os CDP classificados nos três primeiros lugares, no conjunto de todas as situações, são: Minde, Fátima, Mira de Aire e Leiria. Assim sendo, estes serão os locais a ensaiar como depósito para resolução do problema da distribuição, que será abordado na secção seguinte; foram igualmente testados, como possíveis locais para o depósito, o (então) CTC do Entroncamento e os CTC de Lisboa, Coimbra e Castelo Branco.

#### 4. O Problema da Distribuição

O problema que pretendíamos abordar consistia em, dado um certo conjunto de nós, os CDP, construir uma rede secundária de transportes, que servisse esse conjunto a partir de um desses nós, o novo CTC, ou, em alternativa, a partir de um ou mais nós CTC adjacentes, de maneira a minimizar o custo total dessa rede secundária, juntamente com a rede primária de transporte entre CTC; ao construir essa rede, pretendia-se utilizar viaturas de capacidade variável de rota para rota, respeitar a restrição da capacidade dessas viaturas e respeitar igualmente a restrição do tempo máximo permitido para a realização dessas rotas.

Estávamos perante um problema em que queríamos calcular, tornando mínima, a soma dos custos das redes secundária e primária: minimizar  $Z = C_s + C_p$ , sujeito a (i) restrições decorrentes da capacidade dos veículos; (ii) restrições decorrentes do tempo disponível para execução de tarefas. Note-se que nada nos garantia que o mínimo de  $C_s$  coincidissem com o mínimo de  $C_p$ , no mesmo ponto escolhido para depósito.

#### Rede Secundária

Devido à natureza do trabalho, procurámos pesquisar algoritmos que permitissem ajudar na determinação de rotas óptimas (ver Cerdeira et al. [1]). Foi assim possível dispor, à partida, de alguns algoritmos computacionais já implementados, que ajudam a resolver o chamado Vehicle Routing Problem (VRP).

De entre todas as heurísticas, desenvolvidas para resolver o VRP, talvez mais divulgada seja o chamado método dos savings (ver Clarke et al. [2]). De todos os algoritmos que tínhamos disponíveis, aqueles que estavam melhor adaptados à natureza do nosso problema,

eram heurísticas SWEEP e 3-Optimal, isto face ao interesse em incluir as restrições da capacidade das viaturas e do tempo. Por outro lado, o interesse em aplicar o algoritmo exacto de programação dinâmica baseava-se fundamentalmente, como é aliás habitual em casos semelhantes, no objectivo de procurar validar os resultados obtidos com as heurísticas. Assim, utilizámos basicamente a heurística SWEEP (ver Gillet et al. [5]) e, esporadicamente, o algoritmo de programação dinâmica, já que, neste caso, a quantidade de memória e o tempo de CPU, de que o algoritmo necessitava, dificultavam a sua utilização no nosso caso concreto, quando o número de nós da rede subia acima de cerca de 14.

Em resumo, o esquema utilizado, para resolver o problema, para cada uma das situações possíveis, consistia em, sequencialmente, aplicar o algoritmo de criação de rotas, otimizar cada uma das rotas obtidas e, finalmente, calcular o custo da solução. Como exemplo de aplicação do algoritmo SWEEP, veja-se a situação em que se analisou, para a rede de 22 nós, um conjunto de viaturas com as seguintes capacidades disponíveis: 45, 32, 32 e 18 m<sup>3</sup>. Foram determinadas as rotas a seguir indicadas.

Rota 1 (distância total de 70 km e tempo de 175 min): Minde → M.Aire → P.Mós → Batalha → Leiria → M.Grande → M.Lis → Pataias.

Rota 2 (distância total de 76 km e tempo de 144 min): Minde → (P.Mós) → Alcobaça → Nazaré → (Alcobaça) → Benedita.

Rota 3 (distância total de 72 km e tempo de 138 min): Minde → Fátima → (V.Paço) → Tomar → V.N.Ourém.

Rota 4 (distância total de 80 km e tempo de 156 min): Minde → Alcanena → T.Novas → Entronc. → V.N.Barq. → P.Rib. → Constância → Abrantes → Sardoal.

O custo desta rede é resumido na Tabela 8.

Tabela 8 - Distribuição: Heurística SWEEP (Rede de 22 Nós)

	Cap.da Viatura (m <sup>3</sup> )	Dist. (Km)	Tempo (min)	C.Dep. +C.Op. (Contos)	C.Mot. (Contos)	C.Total (Contos)
Rota 1	45	70	175	4606.0	1572.1	—
Rota 2	18	76	144	2633.4	1293.6	—
Rota 3	32	72	138	3618.0	1239.7	—
Rota 4	32	80	156	3524.0	1401.4	—
Sub-Rede	—	—	—	2308.6	1741.7	—
Sub-Total	—	—	—	16690.0	7248.5	23938.5

No que respeita ao algoritmo de programação dinâmica e como já se referiu atrás, o número máximo praticável de nós, para ensaiar este método, era de cerca de 14/15 nós, por isso, limitámos a sua aplicação ao caso da rede de 14 nós, indicada na Figura 3, sendo um deles, o nó 1 de depósito, localizado em Coimbra.

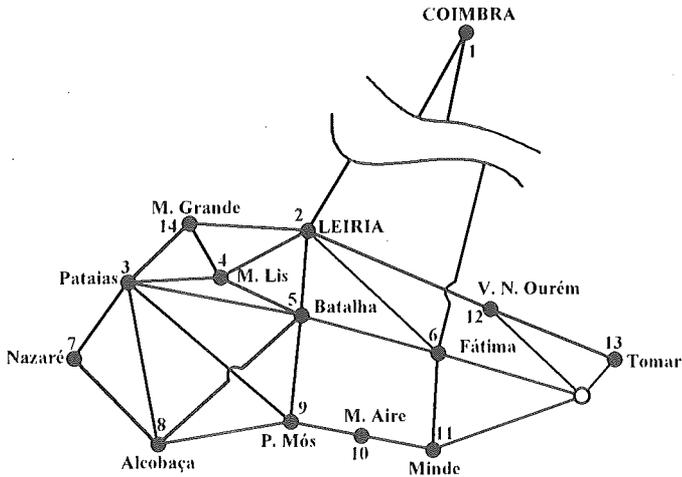


Figura 3 - Rede de 14 Nós (para o Algoritmo de Programação Dinâmica)

Por exemplo, para um conjunto de 3 viaturas, cada uma das quais com  $32\text{m}^3$  de capacidade, encontraram-se as rotas a seguir referidas.

Rota 1 (distância total de 166 km e tempo de 244 min): Coimbra → Batalha → P.Mós → M.Aire → Minde → Tomar → V.N.Ourém (considerou-se que a diferença de 4 minutos, para o limite da restrição, era um valor irrelevante).

Rota 2 (distância total de 73 km e tempo de 85 min): Coimbra → Leiria.

Rota 3 (distância total de 165 km e tempo de 240 min): Coimbra → M.Lis → M.Grande → Pataias → Nazaré → Alcobaça → Fátima.

O custo anual desta solução é apresentada na Tabela 9.

Tabela 9 - Distribuição: Programação Dinâmica (Rede de 14 Nós)

	Cap.da Viatura ( $\text{m}^3$ )	Dist. (Km)	Tempo (min)	C.Dep. + C.Op. (Contos)	C.Mot. (Contos)	C.Total (Contos)
Rota 1	32	166	244	5685.5	2191.9	—
Rota 2	32	73	85	3668.3	763.6	—
Rota 3	32	165	240	5651.3	2156.0	—
Res.Red	—	—	—	9753.1	4192.9	—
Sub-Total	—	—	—	24758.2	9304.4	34062.6

### Rede Primária

Os fluxos de tráfego, que foram considerados, para a rede de transporte primária, entre a RE ENT e o resto do país, são indicados na Tabela 10. O custo da rede primária foi calculado, ao contrário do efectuado na rede secundária, utilizando a expressão  $C_p = x \times d \times v$ , sendo  $c$  o custo/ $\text{km} \times \text{m}^3$ ,  $d$  a distância, em km, e  $v$  o volume de tráfego, em  $\text{m}^3$ . O custo  $c$  era conhecido e tinha o valor de 2\$00. Assim, tivemos, para os 4 casos de depósito possível analisados, os custos anuais (estimados, em contos) apresentados na Tabela 11.

Tabela 10 - Tráfego entre a RE ENT e o Resto do País

Volume de Tráfego (m <sup>3</sup> )	RE ENT expede	RE ENT recebe	TOTAL
Com o Norte (por Coimbra)	14.6	37.6	52.2
Com o Sul (por Lisboa)	24.4	37.1	61.5
Com a Beira Baixa (por C.Branco)	2.8	2.4	5.2

Tabela 11 - Custos Anuais para um Novo CTC (Rede Primária)

Distância (km)	Lisboa	Coimbra	C.Branco	Cp (Contos)
Entroncamento	116	116	125	6919.6
Minde	112	108	156	6668.4
Leiria	145	65	182	6628.5
Coimbra	210	0	154	6857.9

### Custos Globais

Estávamos finalmente em condições de calcular o custo global de todas as alternativas analisadas. Para isso, começámos por calcular o custo da solução então existente (ver a Tabela 12). Quanto aos custos das soluções alternativas, são apresentados, em resumo, na Tabela 13.

Tabela 12 - Custo Global Anual da Solução então Existente

(a) Rede Secundária	Cap.da Viatura (m <sup>3</sup> )	Dist. (Km)	Tempo (h mn)	C.Dep. + C.Op. (Contos)	C.Mot. (Contos)	C.Total (Contos)
Entr.-Sardoal	18	82	2 45	2542.0	1482.3	—
Entr.-Minde	32	70	2 47	3517.5	1500.3	—
Entr.-Bened	32	102	3 35	4100.4	1931.5	—
Entr.-Nazaré	45	105	3 27	5428.5	1859.6	22362.1
Tomar-F.Zêz	4	45	1 02	555.8	399.9	—
TNov-VPaço	4	39	0 55	530.4	354.8	—
Alc-Ald-SMP	4	38	1 03	516.8	406.4	—
Leiria-M.Real	4	32	1 05	435.2	419.3	—
Leiria-Carang	4	13	0 25	270.4	161.3	4050.3
Sub-Total	—	—	—	17897.0	8515.4	26412.4

(b) Rede Primária	Distância (Km)	Quantidade (m <sup>3</sup> )	Custos (Contos)
Entroc.-C.Branco	125	5.2	325.0
Entroc.-Lisboa	116	61.5	3567.0
Entronc.-Coimbra	116	52.2	3027.6
Custo Total (Contos)	—	—	6919.6

Custo global anual da solução então existentes: 33.332 contos.

Tabela 13 - Custos Globais para um CTC Alternativo

Custo (Contos)	Rede Sec.	Rede.Pr.	TOTAL
Rede 22 Nós, Origem Entroncamento, Caso 1	25019.6	6919.6	31939.2
Rede 22 Nós, Origem Entroncamento, Caso 2	26936.7	6919.6	33856.3
Rede 22 Nós, Origem Minde, Caso 1	22541.5	6668.4	29209.9
Rede 22 Nós, Origem Minde, Caso 2	23938.5	6668.4	30606.9
Rede 22 Nós, Origem Leiria	21706.8	6628.5	28335.3
Rede 23 Nós, Origem Coimbra	32805.6	6857.9	39663.5
Rede 14 Nós, Coimbra, SWEEP, Caso 1	33650.6	6857.9	40508.5
Rede 14 Nós, Coimbra, SWEEP, Caso 2	35087.4	6857.9	41945.3
Rede 14 Nós, Coimbra, Pr.Din., Caso 1	34062.6	6857.9	40920.5
Rede 14 Nós, Coimbra, Pr.Din., Caso 2	35562.0	6857.9	42419.9

## 5. Conclusões

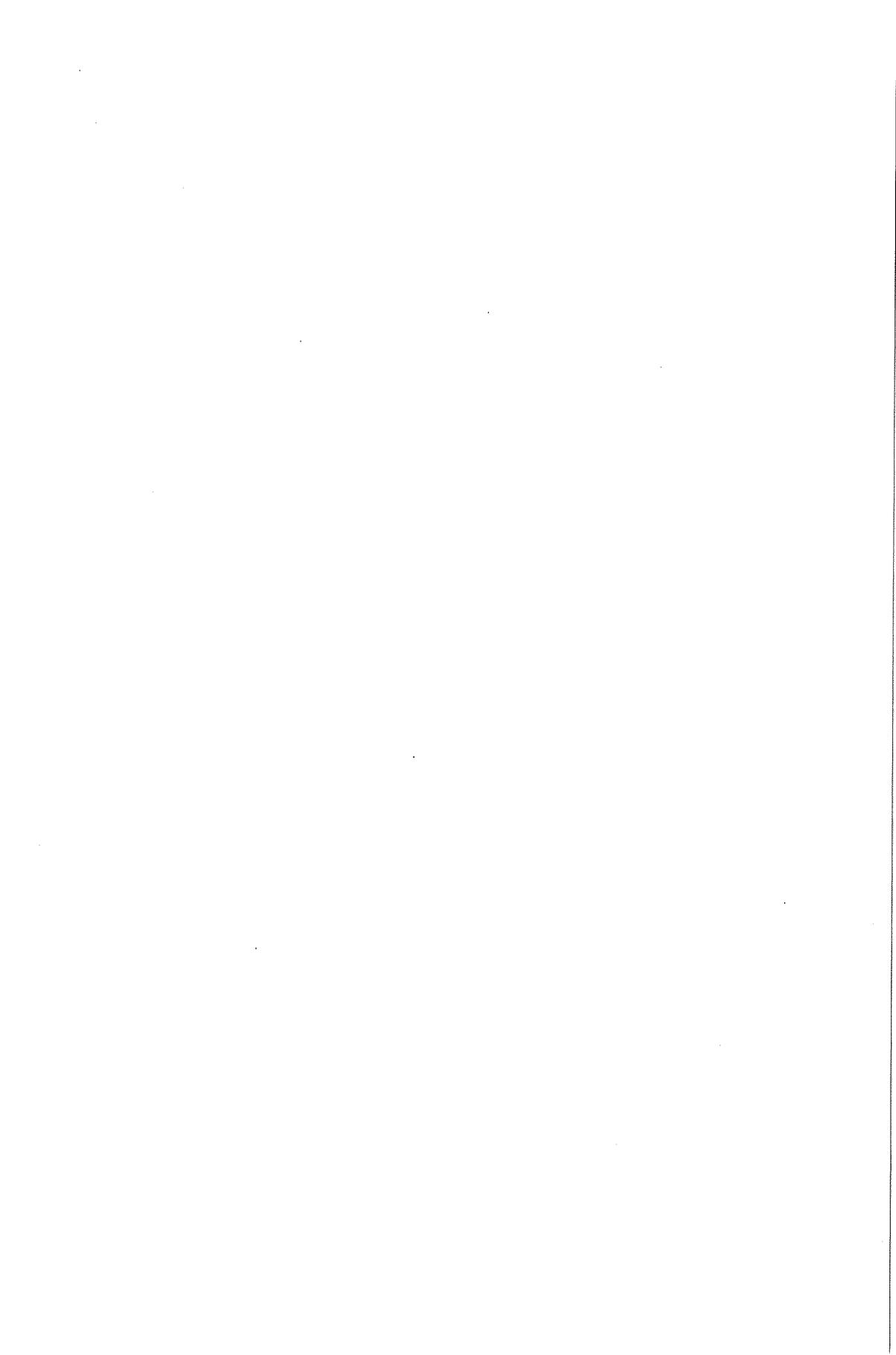
A análise dos resultados, apresentados nas duas últimas secções, permite-nos tirar várias ilações, entre as quais a de que o custo da rede primária tinha pouca influência na tomada de decisão sobre a localização do CTC. Apesar de todas as limitações apontadas, a solução então utilizada, na rede secundária, parecia ser uma opção bastante razoável. Por outro lado, colocar o CTC em Minde, ou, especialmente, em Leiria, pareciam ser as melhores alternativas possíveis; fazer desaparecer a RE ENT não parecia ser uma boa decisão, tendo em conta as hipóteses assumidas (nomeadamente, a da garantia da qualidade de serviço).

Os valores dos custos, então calculados, deveriam ser fundamentalmente encarados como termo de comparação, a fim de poder avaliar o potencial das diversas soluções, entre si; o custo real teria obviamente que ser calculado numa forma mais completa (atendendo a outros custos relevantes para o problema, mas que aqui não foram contemplados, como sejam, por exemplo, os custos de infraestruturas, dos motoristas, etc.).

Quando este trabalho foi realizado, concluía-se que, a menos de razões económicas relacionadas com os custos de implantação de novas infraestruturas, em princípio, era útil manter a existência de um CTC de apoio à região geográfica em análise, a localizar, de preferência, em Leiria. A decisão, entretanto tomada, no seio dos ÇTT, consistiu em passar 27 CDP para o CTC de Coimbra e 1 CDP para o CTC de Lisboa, não criando, assim, nenhum CTC na área, em substituição do Entroncamento. Tal decisão ter-se-á ficado a dever, por um lado, à criação do Correio Azul, o que permitiu que o grosso das cartas passasse a dispor de mais tempo para as diversas etapas do percurso no interior do sistema postal, e, por outro lado, a estratégias de investimento em Centros de Tratamento de Correio, face a perspectivas futuras de passagem das cartas, da sua forma tradicional, para a forma de correio electrónico.

**Referências**

- [1] Cerdeira, J.O. e Coelho, J.D., *Optimização de Processos de Distribuição*, Revista Economia, Parte I: volume XI, nº 2 (1987) 171-214; Parte II: volume XII, nº 1 (1988) 69-96.
- [2] Clarke, G. e Wright, J., *Scheduling of Vehicles from a Central Depot to a Number of Delivery Points*, Oper.Res. 12 (1964) 568-581.
- [3] Cooper, J.C., *The Use of Straight Line Distances in Solutions to the Vehicle Scheduling Problem*, J.Op.Res.Soc. 34 (1983) 419-424.
- [4] Eilon, S., Watson-Gandy, C.D.T. e Christofides, N., *Distribution Management: Mathematical Modelling and Practical Analysis*, Griffin, London, 1971.
- [5] Gillet, B.E. e Miller, L.R., *A Heuristic Algorithm for the Vehicle-Dispatch Problem*, Oper.Res. 22 (1974) 340-349.
- [6] Roy, B. e Bertier, P., *La Méthode ELECTRE II: Une Application n Media-Planning*, M.Ross (ed.), OR 72, North-Holland, Amsterdam, 1973, 291-302.



# PREVISÃO DA PROCURA DE UM NOVO SERVIÇO DE TELEFONE MÓVEL: METODOLOGIA E MODELIZAÇÃO

Gaspar de Sousa Coutinho  
José Vasconcelos Ferreira  
Rui Campos Guimarães

GEIN, Departamento de Engenharia Mecânica e Gestão Industrial  
Faculdade de Engenharia – Universidade do Porto

INEGI – Instituto de Engenharia Mecânica e Gestão Industrial

## Abstract

The work described in this paper was developed for EUROFONE, one of the consortia which competed for a license to operate a GSM mobile telephone service in Portugal. The work was centred on forecasting the demand for the service, on the basis of which the consortium defined its Marketing Strategy and the Business Plan.

The forecast modelling procedure is described after presenting a brief discussion of the overall methodology adopted in the study.

The analysis of data concerning several European countries revealed that the service penetration curves were related to a measure of the relative price of the service (i.e. the average expenditure of a client during the first year of service usage, expressed as a percentage of the respective GDP per capita). This led to the development of a regression model in which service penetration is explained by the time elapsed from the launching of the service and the measure of relative price.

This model was extended to reflect the effects on the overall demand of each of the following price components: handset price plus connection charge, monthly charge and airtime rate. This extension was derived by applying the conjoint analysis technique to data collected from a sample representative of the main segments of the Portuguese market.

The effect on penetration of initial conditions prevailing at the launching of the service and of price changes occurring over time were also included in the forecasting model.

Finally the traffic generated by the service clients was spatially distributed using a gravity model in which the income and the consumption of petrol were adopted as explanatory variables.

## Resumo

O trabalho descrito neste artigo foi desenvolvido no âmbito da candidatura do consórcio EUROFONE a uma licença de operador nacional do serviço de telefone móvel digital (sistema GSM). O seu objectivo centrou-se na previsão da procura do serviço. Esta previsão constituiu um input crucial para a fundamentação da Estratégia de Marketing e do Plano de Acção propostos pelo consórcio.

Após uma descrição da metodologia adoptada face às condicionantes próprias do serviço a oferecer, apresenta-se o processo de modelização da procura.

Com base nas curvas de penetração do serviço de telefone móvel em diferentes países europeus, desenvolveu-se um modelo de previsão no qual a procura global em função do tempo é explicada por uma medida do preço relativo do serviço (preço global do serviço/PIB per capita).

Este modelo foi complementado com os resultados provenientes de uma pesquisa de mercado efectuada sobre duas amostras representativas dos segmentos mais importantes do mercado potencial.

Recorrendo à técnica de "conjoint analysis", caracterizou-se a relação de dependência entre a procura global do serviço e as componentes básicas do preço (aquisição do terminal e ligação à rede, mensalidade e tarifa).

Foi ainda modelizado o efeito nas curvas de penetração das condições de arranque do serviço e de alterações introduzidas ao longo do tempo nas componentes do preço.

Finalmente, foi caracterizada a distribuição geográfica do tráfego gerado, recorrendo a um modelo gravitacional no qual as variáveis explicativas foram o rendimento e o consumo de gasolina.

## Key words

conjoint analysis, demand, forecasting, gravity model, mobile telephone, regression.

## 1. Introdução

As comunicações móveis existem já de longa data em vários países. Evoluindo a partir de sistemas privados para sistemas públicos de maior dimensão, o esforço de desenvolvimento tecnológico foi conduzido no sentido de encontrar um sistema celular, mais eficiente do ponto de vista da utilização do espectro radioelétrico. De todos os serviços móveis (por exemplo: serviço PMR, "paging", CT1, telefone móvel, CT2 e "telepoint") apenas o telefone móvel utiliza a tecnologia celular.

Operadores de muitos países estão ainda a explorar redes de telefone móvel com base em equipamentos que lhes são específicos. Os inconvenientes associados à diversidade dos sistemas existentes, grande parte deles incompatíveis entre si, aliados à necessidade de aumentar o acesso ao sistema por um número de clientes cada vez maior, sem alargar a banda do espectro de frequências, conduziram ao estabelecimento do sistema GSM, que constituiu um "standard" europeu para sistemas de telefone móvel digital celular.

Ao sistema GSM associam-se características de melhor qualidade do sinal de voz, maior fiabilidade das comunicações, maior segurança e maior facilidade para integrar serviços de valor acrescentado. O sistema GSM permitirá ao operador efectuar a gestão da mobilidade dos seus clientes, identificar os clientes através de cartões de acesso e oferecer um serviço de facturação mais adaptado às solicitações dos clientes. Importa também referir que o sistema GSM possibilitará aos clientes efectuar o "roaming". Finalmente é de salientar que, como resultado da tecnologia digital e do grau de normalização atingido pelo sistema GSM, será possível obter reduções significativas na dimensão, no peso e no custo dos terminais relativamente aos que têm por base a tecnologia analógica.

Actualmente, em Portugal, o sistema de telefone móvel ainda é baseado em tecnologia analógica. O baixo número de assinantes, que em Abril de 1991 rondava os 8000, deriva fundamentalmente do reduzido período de difusão do serviço no nosso País (desde o início de 1989), da insuficiente cobertura geográfica e do seu elevado preço. Entretanto, o Governo e os operadores públicos subscreveram o acordo que estabeleceu o GSM como um "standard" europeu a partir de 1991.

De acordo com a legislação vigente o serviço de telefone móvel será operado em regime de duopólio envolvendo, por um lado, os operadores públicos CTT e TLP (que já operam o serviço analógico) e, por outro, um operador privado com licença para criação e exploração de uma rede GSM. Dado que aos operadores públicos foi automaticamente concedida licença para operarem também uma rede GSM, configura-se um mercado no qual passarão a estar disponíveis três serviços móveis, um analógico e dois digitais. O Governo estabeleceu que a selecção do operador privado seria feita através de concurso público.

O trabalho que a seguir se descreve foi desenvolvido no âmbito da candidatura do consórcio EUROFONE (Guimarães, Coutinho e Ferreira (1990) e EUROFONE (1991)). O seu objectivo

centrou-se na previsão da procura do serviço, que constituiu um input crucial para a fundamentação da Estratégia de Marketing e do Plano de Acção propostos pelo consórcio.

## **2. Metodologia**

A metodologia adoptada na caracterização da procura foi condicionada pelo facto de:

- (i) o horizonte temporal sobre o qual o projecto era avaliado era muito dilatado (15 anos),
- (ii) a penetração actual do telefone móvel em Portugal é diminuta, pelo que o serviço não é conhecido pela grande maioria dos seus clientes potenciais, e
- (iii) para os poucos que o conhecem, o serviço tem uma imagem de "luxo", que está em clara oposição àquela que deve ser associada a um serviço que, de facto, procura ser útil e rentável.

Nestas condições, seria inadequado, ou mesmo impossível, basear o estudo da procura em informação recolhida exclusivamente a partir de entrevistas e inquéritos dirigidos a potenciais clientes do serviço proposto.

Assim, começou-se por se representar a procura por um modelo de regressão desenvolvido a partir das curvas de penetração do telefone móvel em diferentes países europeus.

Neste modelo, a penetração foi medida através do número de assinantes por mil habitantes (a expressão "assinante" designa um número de telefone atribuído a um cliente).

No modelo de regressão, as diferenças entre as curvas de penetração foram explicadas por uma medida de preço relativo de serviço: preço global do serviço/PIB per capita (PG/PIBpc). O preço global do serviço inclui o preço de aquisição do terminal mais barato, o preço de ligação à rede, 12 mensalidades e o preço de utilização anual, sendo este calculado na base de 5 chamadas por dia útil de 2 minutos cada, nas horas de ponta.

Os resultados provenientes de uma extensa pesquisa de mercado foram seguidamente utilizados para complementar o modelo. A pesquisa foi efectuada sobre duas amostras representativas de dois sectores importantes do mercado do telefone móvel (empresas e profissões liberais). Com base na informação recolhida, foi possível:

- (i) extrapolar os resultados do modelo de regressão, definindo curvas de penetração para valores da variável PG/PIBpc não contemplados naquele modelo, e
- (ii) caracterizar a relação de dependência entre a procura global e as componentes básicas do preço do serviço (preço de aquisição do terminal e da ligação à rede, mensalidade e tarifa).

No modelo desenvolvido, foi incorporada a possibilidade de contemplar os seguintes efeitos:

- (i) a influência que, à data do arranque do novo sistema, o número de assinantes do sistema actual exerceria sobre a dinâmica de crescimento dos novos assinantes, e
- (ii) o efeito que alterações introduzidas ao longo do tempo sobre qualquer das componentes do preço exerceria na evolução do número total de assinantes.

Para a determinação da procura global do novo serviço considerou-se que, a partir do arranque do sistema GSM, toda a nova procura se concentraria exclusivamente neste sistema. Esta hipótese assentou no pressuposto de que o actual operador não recorreria a uma prática de "dumping" relativamente ao serviço prestado através do sistema analógico.

Com base nas elasticidades detectadas nas amostras que foram objecto da pesquisa de mercado, distribuiu-se esta procura por dois grandes grupos: utilizadores institucionais (empresas e administração pública) e utilizadores individuais (profissionais e não profissionais).

Admitiu-se ainda que à nova procura se juntariam progressivamente os assinantes que fossem abandonando o actual sistema, tendo-se admitido que a transferência destes estaria completa ao fim de 5 anos.

Uma vez definida a procura global, a distribuição dos assinantes por área geográfica foi efectuada numa base concelhia, tendo em conta a distribuição do rendimento pela área coberta pelo novo serviço.

Finalmente foi modelizado o tráfego e a sua repartição. A partir dos números de assinantes do tipo institucional e individual e das estimativas dos seus padrões médios de utilização do serviço obteve-se o tráfego total.

Este tráfego foi seguidamente repartido nas seguintes componentes: da rede móvel GSM para a rede fixa (simplesmente designada por componente "móvel-fixa"), da rede fixa para a rede móvel (componente "fixa-móvel") e dentro da rede móvel (componente "móvel-móvel").

Para cada uma destas componentes de tráfego, a sua distribuição geográfica foi estimada recorrendo a um modelo gravitacional. Neste modelo, as variáveis de repartição adoptadas foram o consumo anual de gasolina super e sem chumbo (para repartição do tráfego na rede móvel) e o rendimento (para repartição do tráfego na rede fixa). A unidade geográfica adoptada neste modelo foi o distrito, uma vez que o consumo anual de gasolina não se encontra disponível na base do concelho. O tráfego associado a cada distrito foi posteriormente repartido pelos concelhos correspondentes na proporção dos respectivos rendimentos.

### **3. Modelização do Número Global de Assinantes**

#### **3.1 Modelização das curvas de penetração em função do preço global/PIB per capita**

Na Figura 1 mostra-se como evoluiu a penetração do serviço de telefone móvel em diferentes países europeus. A parte da informação contida nesta figura que se apresenta na Tabela 1 serviu de base para a modelização da relação entre a variável PG/PIBpc e a penetração do serviço.

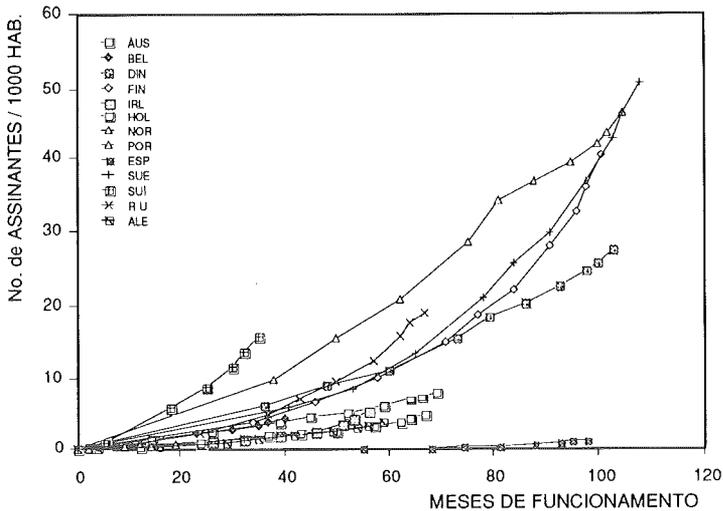


Figura 1 – Evolução do número de assinantes do serviço de telefone móvel por mil habitantes (fonte: Financial Times Business Information)

Em relação aos dados contidos na Tabela 1 interessa observar o seguinte:

- (i) A variável PG/PIBpc cobre a gama situada entre 10.9% e 32.0%.
- (ii) Os valores da variável penetração referem-se a tempos após a introdução do serviço que variam entre 1 ano e 8 anos.
- (iii) Os dados relativos a Portugal e Espanha-foram excluídos da análise por motivos diferentes. No caso de Portugal, por só se encontrar disponível uma observação relativa à penetração e pelo facto de o valor da variável PG/PIBpc (98%) estar completamente fora da gama dos valores relativos aos restantes países. Em relação à Espanha, para além de o valor do PG/PIBpc (49%) se situar ainda muito acima dos que correspondem aos restantes países europeus, constatou-se que a sua curva de penetração era claramente atípica, provavelmente como resultado de uma cobertura geográfica incipiente do serviço.

TEMPO (Anos)	PAISES										
	ALE	AUS	BEL	DIN	FIN	HOL	IRL	NOR	R.U.	SUE	SUI
1	0.26	1.09	0.74			0.32			0.77		3.46
2	0.67	2.10	2.06			0.83			2.10		8.43
3	1.36	3.23	3.38	5.95	4.08	1.65	1.49		4.49		
4	2.16	4.61		8.96	7.08	2.21	2.81	14.45	8.84	7.41	
5		6.23		11.20	10.77	3.45		19.83	14.43	11.38	
6				15.21	15.59			26.76		17.40	
7				19.61	21.94			35.25		25.53	
8				23.75	32.56			39.87		34.65	
Preço global/PIBpc	30.0	22.0	24.6	15.7	16.7	24.0	32.0	13.6	13.6	12.2	10.9

Tabela 1 – Penetração do serviço do telefone móvel (nº de assinantes/1000 habitantes) e Preço global do serviço/PIB per capita (%) para diferentes países europeus (fonte: Financial Times Business Information, 1990)

O primeiro passo da análise efectuada consistiu em regredir sucessivamente, para 1, 2, ..., 8 anos após a introdução do serviço, a variável penetração contra o PG/PIBpc. Obtiveram-se assim oito modelos de regressão linear, nos quais a variável penetração foi objecto de uma transformação logarítmica. Na Figura 2 definem-se as relações ajustadas, representando-se graficamente, a título de exemplo, aquela que corresponde ao quarto ano de penetração.

Recorrendo aos modelos de regressão definidos na Figura 2, calcularam-se as penetrações ajustadas para cinco valores particulares do PG/PIBpc (10%, 15%, 20%, 25% e 30%). As penetrações ajustadas encontram-se tabeladas na Figura 3, estando duas das curvas ajustadas de penetração (correspondentes a PG/PIBpc = 10% e 30%) aí representadas graficamente.

Com base nos modelos de regressão linear definidos na Figura 2, foram calculadas curvas de penetração para valores de PG/PIBpc superiores a 30%. No entanto, nas curvas assim obtidas, a ligeira irregularidade que já se verificava na curva de penetração correspondente a PG/PIBpc = 30% (ver Figura 3 (ii)) acentuou-se marcadamente. Desta forma se revelou a incapacidade daqueles modelos de regressão para extrapolar as penetrações muito afastadas da gama de valores observados do PG/PIBpc (10.9 a 32.0%).

Às penetrações tabeladas na Figura 3 foi ajustado um modelo do tipo

$$\text{PEN}(t) = \text{ALFA}(\text{PG}/\text{PIBpc}) * t + \text{BETA}(\text{PG}/\text{PIBpc}) * t^2 + \text{GAMA}(\text{PG}/\text{PIBpc}) * t^3$$

no qual os coeficientes ALFA, BETA e GAMA foram definidos como polinómios do terceiro grau em PG/PIBpc. O modelo encontra-se definido na Figura 4, onde se representam as curvas de penetração correspondentes a PG/PIBpc = 10, 15, 20, 25 e 30%.

- (i) Penetração ao fim de t anos (expressa em nº de assinantes/1000 hab) em função de PG/PIBpc (expresso em percentagem)

$\text{PEN}_1 = e^{(1.907 - 0.1052 * \text{PG}/\text{PIBpc})}$	$\text{PEN}_5 = e^{(4.243 - 0.1167 * \text{PG}/\text{PIBpc})}$
$\text{PEN}_2 = e^{(2.808 - 0.1047 * \text{PG}/\text{PIBpc})}$	$\text{PEN}_6 = e^{(3.844 - 0.0647 * \text{PG}/\text{PIBpc})}$
$\text{PEN}_3 = e^{(2.708 - 0.0749 * \text{PG}/\text{PIBpc})}$	$\text{PEN}_7 = e^{(4.317 - 0.0756 * \text{PG}/\text{PIBpc})}$
$\text{PEN}_4 = e^{(3.325 - 0.0823 * \text{PG}/\text{PIBpc})}$	$\text{PEN}_8 = e^{(4.296 - 0.0567 * \text{PG}/\text{PIBpc})}$

- (ii) Relação ajustada para t = 4 anos

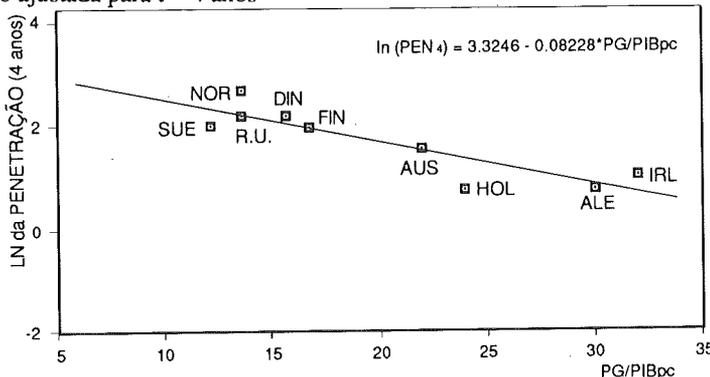


Figura 2 – Relações  $\text{PEN}_t = f(\text{PG}/\text{PIBpc})$  ajustadas para t = 1, 2, ..., 8 anos

Globalmente, o grau de ajuste deste modelo aos dados originais (que constam da Tabela 1) é excelente: o coeficiente de determinação obtido foi de  $R^2 = 0.978$ . Na Figura 5 comparam-se as curvas de penetração observadas na Alemanha, no Reino Unido, Na Suécia e na Noruega com as curvas de penetração ajustadas.

Para a Alemanha e o Reino Unido, o modelo ajusta-se quase perfeitamente. Embora tal não se verifique em relação à Suécia e à Noruega, deve registar-se que, tratando-se de dois países com idênticos valores da variável PG/PIBpc, no primeiro caso o modelo sobrestima a penetração real e no segundo subestima-a.

(i) Penetrações calculadas com base nos modelos definidos na Figura 2

PG/PIBpc (%)	TEMPO (Anos)							
	1	2	3	4	5	6	7	8
10	2.35	5.82	7.09	12.20	21.66	24.46	35.19	41.62
15	1.39	3.45	4.88	8.09	12.08	17.71	24.11	31.34
20	0.82	2.04	3.35	5.36	6.74	12.82	16.52	23.61
25	0.49	1.21	2.31	3.55	3.76	9.28	11.32	17.78
30	0.29	0.72	1.59	2.35	2.10	6.71	7.75	13.39

(ii) Curvas de penetração ajustadas, correspondentes a PG/PIBpc = 10% e 30%

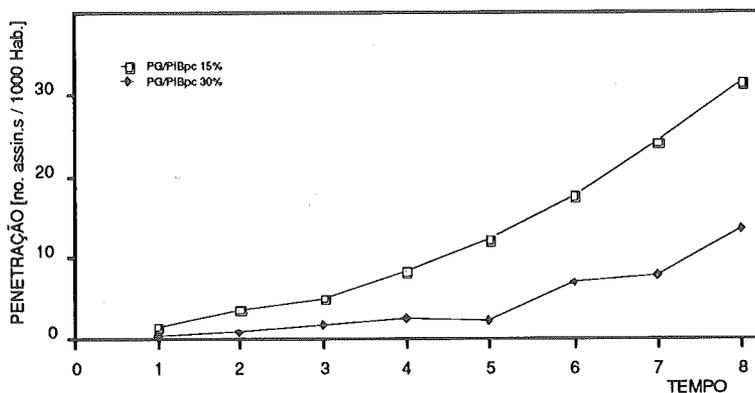


Figura 3 – Curvas de Penetração ajustadas para diferentes valores do PG/PIBpc

O processo de modelização das curvas de penetração merece um comentário relacionado com a variável PG/PIBpc. Os dados referentes a esta variável – que são os que figuram na Tabela 1 – referem-se apenas ao ano de 1990. Infelizmente, por falta de informação, não foi possível incluir no modelo valores de PG/PIBpc referentes a anos anteriores. Sabe-se, no entanto, que tais valores foram superiores aos correspondentes a 1990. Deste modo, as curvas ajustadas correspondem a penetrações que se realizaram com preços superiores àqueles que são contemplados no modelo global adoptado. Por este facto, as curvas ajustadas devem ser interpretadas, para cada valor de PG/PIBpc, como estimativas pessimistas, no sentido de subestimarem as penetrações.

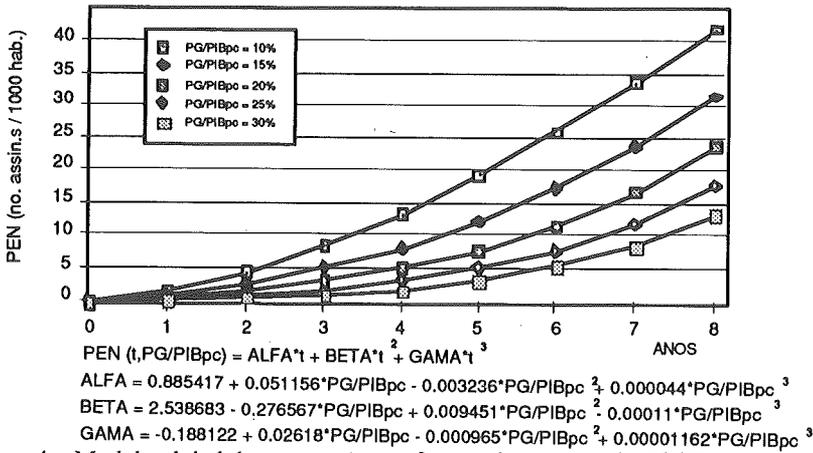


Figura 4 – Modelo global da penetração em função do tempo e do PG/PIBpc

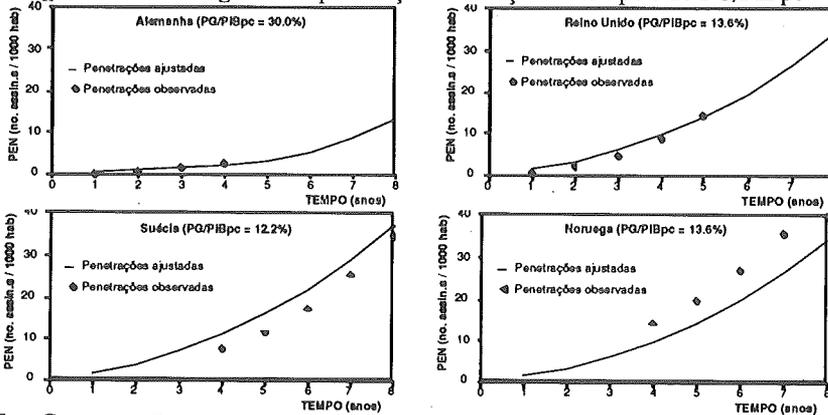


Figura 5 – Comparação entre curvas de penetração ajustadas e valores observados da penetração para diferentes países europeus

### 3.2 Extensão do modelo para tempos de penetração entre 8 e 15 anos

Não se dispo de curvas de penetração correspondentes a períodos superiores a 8 anos e dada a necessidade de prever a evolução do número de assinantes do serviço de telefone móvel ao longo de um horizonte temporal de 15 anos, houve que estender o modelo por forma a cobrir este horizonte.

Dado que o modelo ajustado para penetração até 8 anos é do tipo polinomial, seria absolutamente inapropriado utilizá-lo directamente (sem alterações) para efectuar extrapolações das curvas de penetração até ao limite de 15 anos.

O procedimento adoptado para efectuar tais extrapolações foi o seguinte:

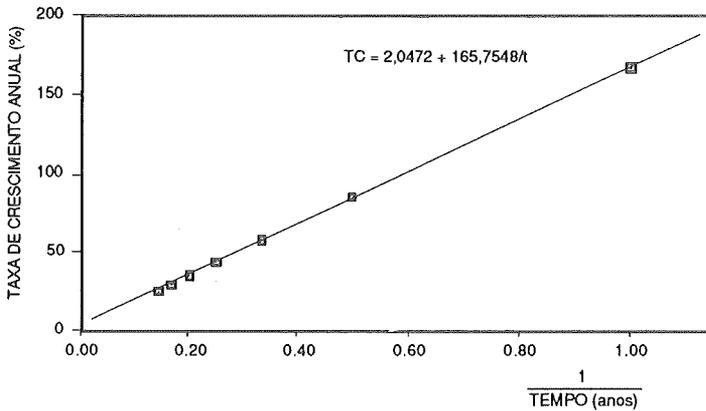
- (i) Para a curva de penetração ajustada correspondente a  $PG/PIBpc = 10\%$ , calcularam-se as taxas de crescimento anual da penetração (ver Figura 6 (i)).
- (ii) Seguidamente analisou-se a relação existente entre a taxa de crescimento e o tempo de penetração. Verificou-se que existia uma relação linear quase perfeita entre a primeira variável e a inversa da segunda (ver Figura 6 (ii)).

(iii) Para valores do tempo superiores a 8 anos, a curva de penetração correspondente a  $PG/PIB_{pc} = 10\%$  foi extrapolada com base em taxas de crescimento definidas de acordo com a relação referida em (ii) (ver Figura 6 (iii)).

(i) Evolução da taxa de crescimento

Tempo de penetração (anos)	1	2	3	4	5	6	7	8
Taxa de crescimento anual	—	167.1	86.2	58.2	43.8	35.0	29.0	24.7

(ii) Relação entre a taxa de crescimento e o inverso do tempo



(iii) Extrapolação da penetração para tempos superiores a 8 anos

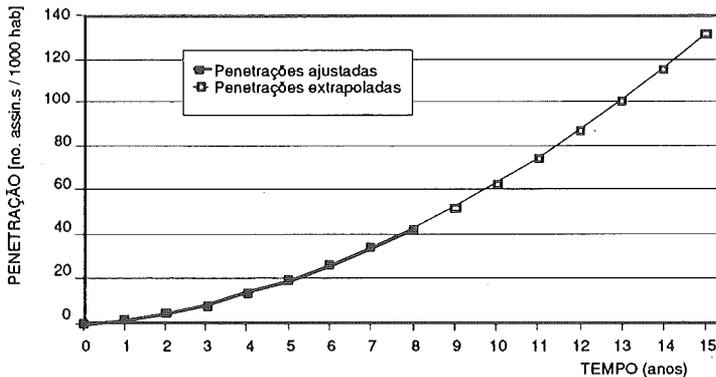


Figura 6 – Extrapolação da curva de penetração correspondente a  $PG/PIB_{pc} = 10\%$

(iv) Para valores de  $PG/PIB_{pc}$  diferentes de 10%, a extrapolação das curvas de penetração foi efectuada com base na relação seguinte:

$$\begin{aligned}
 PEN(t, PG/PIB_{pc} = x\%) &= \\
 &= PEN(t, PG/PIB_{pc} = 10\%) * \frac{PEN(8, PG/PIB_{pc} = x\%)}{PEN(8, PG/PIB_{pc} = 10\%)}
 \end{aligned}$$

A adopção desta relação (ver Figura 7) corresponde a admitir que, para qualquer ano posterior ao oitavo, as diferentes curvas mantêm entre si a proporção que se

registra ao fim do oitavo ano. Esta conjectura parece ser perfeitamente razoável para a primeira parte do período compreendido entre os 9 e 15 anos. À medida que o termo do horizonte temporal se aproxima, ela torna-se questionável (embora não mais do que qualquer outra conjectura, dada a inexistência de dados históricos). Deve, no entanto, ter-se em conta que, na avaliação da rentabilidade do investimento no serviço do telefone móvel, desvios da penetração real em relação à penetração prevista nos últimos anos do horizonte temporal têm um peso relativamente reduzido, como resultado da actualização dos fluxos monetários que lhes estão associados.

- (v) Tal como se pode observar na Figura 7, a adopção do procedimento de extrapolação referido no ponto (iv) conduz a uma ligeira irregularidade na evolução da penetração, que é tanto maior quanto maior é o valor de  $PG/PIBpc$ . Como adiante se verá, a curva inferior (correspondente a  $PG/PIBpc = 30\%$ ) foi utilizada como base para modelizar a relação entre as curvas de penetração e as componentes do preço do serviço de telefone móvel. Por este motivo, decidiu-se suavizar esta curva, ajustando-lhe um novo modelo (ver Figura 8).

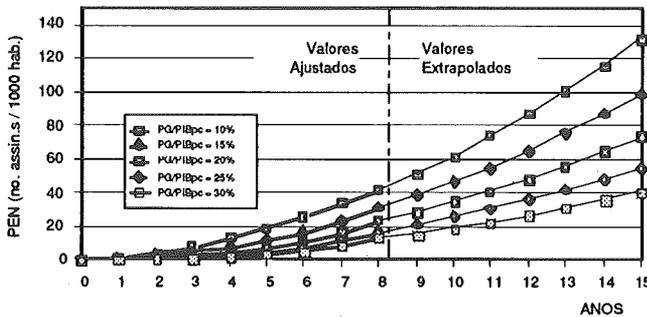


Figura 7 – Extrapolação das curvas de penetração para valores de  $PG/PIBpc$  diferentes de 10%

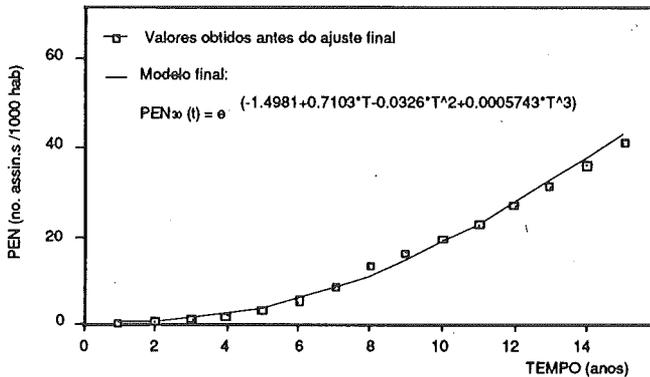


Figura 8 – Ajuste final da curva de penetração correspondente a  $PG/PIBpc = 30\%$

### 3.3 Definição das curvas de penetração em função das componentes do preço

Para ser aplicado na definição das curvas de penetração do serviço, o modelo que acabou de ser descrito carece de uma adaptação, pelas duas razões seguintes:

- (i) Tal como se referiu anteriormente, o modelo não pode ser extrapolado directamente para valores do PG/PIBpc significativamente superiores a 30%.
- (ii) A variável explicativa PG/PIBpc é uma medida global do preço do serviço, que não permite tomar em conta os efeitos particulares de cada uma das seguintes componentes daquele preço:

$C_1$ : preço de aquisição do terminal e de ligação à rede do telefone móvel  
[contos]

$C_2$ : mensalidade [contos]

$C_3$ : preço unitário de chamada [Esc/minuto, nas horas de ponta]

Assim, foi necessário complementar o modelo de regressão com os resultados provenientes de uma pesquisa de mercado encomendada para o efeito pela EUROFONE. Tal pesquisa foi efectuada sobre duas amostras representativas dos segmentos mais importantes do serviço:

- (i) 550 empresas localizadas em Portugal Continental pertencendo ao grupo das 3500 maiores empresas (Dun & Bradstreet). A amostra foi estratificada por forma a ser representativa das diferentes regiões do País e dos diferentes sectores de actividade.
- (ii) 200 profissionais liberais residentes nos principais centros urbanos de Portugal Continental. A amostra foi estratificada por forma a ser representativa dos diferentes tipos de profissões.

No que diz respeito à relação entre a procura do serviço (número de assinantes) e as três componentes do preço ( $C_1$ ,  $C_2$  e  $C_3$ ), o seu estudo foi conduzido para cada uma das amostras, com base na técnica "conjoint analysis" (Johnson (1974) e Green, Tull e Albaum (1988)). Esta técnica permite estimar aquela relação, em cada amostra, com base nas procuras observadas para um número restrito de combinações entre diferentes valores das três componentes do preço.

Os resultados amostrais obtidos a partir da pesquisa de mercado revelaram que:

- (i) as elasticidades da procura no curto prazo (num horizonte até 2 anos) são praticamente iguais àquelas que se registam no longo prazo;
- (ii) as elasticidades da procura das empresas não são muito distintas das elasticidades da procura dos profissionais liberais.

A extrapolação directa da relação

$$\text{PROCURA} = f(C_1, C_2, C_3)$$

de cada amostra para a população respectiva (à escala do País) poderia ser perigosa, devido à falta de informações detalhadas e seguras sobre as populações nacionais, tanto das empresas, como das profissões liberais. Adicionalmente, tal extrapolação só abrangeria as populações de

empresas e de profissionais liberais, deixando de fora as populações relativas a outros segmentos, designadamente o dos serviços da administração pública e o dos utilizadores particulares (não profissionais).

Pelas razões expostas, preferiu-se adoptar um procedimento baseado nas seguintes hipóteses:

- (i) admitiu-se que as variações relativas da procura (elasticidades) associadas a variações de  $C_1$ ,  $C_2$  e  $C_3$  eram idênticas para os utilizadores situados dentro de cada um dos dois grupos seguintes:
  - GR<sub>1</sub>: empresas e serviços da administração pública
  - GR<sub>2</sub>: profissionais liberais e utilizadores particulares
- (ii) as elasticidades relativas ao grupo GR<sub>1</sub> foram estimadas a partir da amostra de empresas e as relativas ao grupo GR<sub>2</sub> a partir da amostra de profissionais liberais.

Para a população global apenas foram extrapoladas as elasticidades das amostras. Crê-se que, desta forma, não se correram graves riscos de distorção na extrapolação efectuada, pois, além de se tratar de variações relativas da procura (e não de valores absolutos desta), as elasticidades da procura registadas na amostra de empresas e na de profissionais liberais não foram muito distintas, como anteriormente se observou.

Seguidamente, descreve-se em detalhe o procedimento adoptado para definição das curvas de penetração em função das componentes do preço  $C_1$ ,  $C_2$  e  $C_3$ :

- (i) A curva de penetração obtida a partir do modelo de regressão para  $PG/PIB_{pc} = 30\%$ ,

$$PEN_{30}(t) = e^{(-1.4981 + 0.7103 * t - 0.0326 * t^2 + 0.0005743 * t^3)}$$

foi usada como referência, a partir da qual se calcularam todas as curvas de penetração. Adoptou-se como referência a curva correspondente a  $PG/PIB_{pc} = 30\%$ , porque, por um lado, este valor está próximo do limite superior dentro do qual o modelo de regressão tem um ajuste adequado e, por outro, se espera que, em Portugal, os valores do preço global comecem por exceder 30% do  $PIB_{pc}$  e posteriormente desçam abaixo deste valor. No caso português, no qual se admite que a população é constituída por 10 milhões de habitantes, para expressar a penetração em número de assinantes (e não em número de assinantes/1000 habitantes), há apenas que multiplicar o valor de  $PEN_{30}(t)$  dado pela expressão anterior pelo factor 10 000.

- (ii) Para cada combinação ( $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$ ) obtiveram-se, por aplicação da técnica de "conjoint analysis", os valores das procuras amostrais

$PGR_1(C_1, C_2, C_3)$ : procura global na amostra representativa das empresas (e, tal como se admitiu, dos serviços da administração pública), e

$PGR_2(C_1, C_2, C_3)$ : procura global na amostra representativa dos profissionais liberais (e, tal como se admitiu, dos utilizadores particulares).

- (iii) Para a combinação particular ( $C_1^1 = 50, C_2^1 = 2, C_3^1 = 8$ ), que corresponde ao valor  $PG/PIB_{pc} = 14\%$ , admitiu-se que as procuras nas populações nacionais dos grupos  $GR_1$  e  $GR_2$  estavam na proporção 80:20. Ao fazê-lo reproduziu-se, para o nosso País, a situação no Reino Unido (que não se afasta muito de outros países europeus). Para reflectir esta proporção nas amostras, o valor de  $PGR_1(C_1^1, C_2^1, C_3^1)$  foi corrigido de acordo com a expressão seguinte:

$$PGR_1C(C_1^1, C_2^1, C_3^1) = 4 * PGR_2(C_1^1, C_2^1, C_3^1)$$

Para as restantes combinações ( $C_1, C_2, C_3$ ), as procuras relativas à amostra de empresas foram corrigidas para

$$\begin{aligned} PGR_1C(C_1, C_2, C_3) &= \\ &= PGR_1(C_1, C_2, C_3) * [PGR_1C(C_1^1, C_2^1, C_3^1)/PGR_1(C_1^1, C_2^1, C_3^1)] \end{aligned}$$

- (iv) Para todas as combinações ( $C_1, C_2, C_3$ ), a procura global (corrigida) das duas amostras vem dada por

$$PROCURA(C_1, C_2, C_3) = PGR_1C(C_1, C_2, C_3) + PGR_2(C_1, C_2, C_3)$$

Na Tabela 2 apresentam-se os cálculos da procura global (corrigida) das duas amostras para diferentes combinações ( $C_1, C_2, C_3$ ).

De acordo com a Tabela 2 verifica-se que, para variações significativas de  $C_1, C_2$  e  $C_3$ , que implicam variações substanciais da procura, a forma como esta se distribui pelos grupos  $GR_1$  e  $GR_2$  desvia-se pouco dos valores 80:20 correspondentes ao caso  $C_1 = C_1^1 = 50, C_2 = C_2^1 = 2, C_3 = C_3^1 = 8$ .

$C_1$	$C_2$	$C_3$	$PGR_1C$	$PGR_2$	PROCURA = = $PGR_1C + PGR_2$
50	2	8	80.00 (80.0%)	20.00 (20.0%)	100.00 (100.0%)
150	5	44	14.96 (76.7%)	4.55 (23.3%)	19.51 (100.0%)
75	5	44	24.21 (78.2%)	6.73 (21.8%)	30.94 (100.0%)
150	3	44	26.49 (81.9%)	5.87 (18.1%)	32.36 (100.0%)
150	5	24	33.70 (80.7%)	8.05 (19.3%)	41.75 (100.0%)

Tabela 2 – Procura global e sua distribuição pelos grupos  $GR_1$  e  $GR_2$  para diferentes combinações das componentes do preço

- (v) Para todas as combinações ( $C_1, C_2, C_3$ ) foi definido o seguinte índice de penetração relativa:

$$IPR(C_1, C_2, C_3) =$$

$$= PROCURA(C_1, C_2, C_3) / PROCURA(C_1^0 = 100, C_2^0 = 5.055, C_3^0 = 24)$$

onde a combinação ( $C_1^0, C_2^0, C_3^0$ ) corresponde a um valor do PG/PIBpc igual a 30%. Na Tabela 3 apresentam-se valores do índice de penetração relativa para diferentes combinações ( $C_1, C_2, C_3$ ).

- (vi) Finalmente, para cada combinação ( $C_1, C_2, C_3$ ), a penetração vem definida pela expressão

$$PEN_{C_1, C_2, C_3}(t) = PEN_{30}(t) * IPR(C_1, C_2, C_3)$$

A título de ilustração, representa-se na Figura 9 a curva de penetração correspondente à combinação ( $C_1 = 200, C_2 = 6, C_3 = 40$ ), à qual está associado um índice de penetração relativa igual a 0.289.

Por razões anteriormente apresentadas na secção 3.1, as curvas de penetração que resultam da aplicação do modelo global proposto devem ser consideradas pessimistas, no sentido de subestimarem, para cada combinação ( $C_1, C_2, C_3$ ), a evolução do número de assinantes. Crê-se que tal pessimismo será mais acentuado nos primeiros anos após o lançamento do serviço, como resultado de, em Portugal, se verificar uma concentração excepcional da população e da actividade económica. Tal concentração permitirá aos operadores portugueses avançar mais rapidamente na cobertura do serviço do que os congéneres europeus.

C1=50							C1=150						
	C3=24	C3=32	C3=40	C3=48	C3=56	C3=64		C3=24	C3=32	C3=40	C3=48	C3=56	C3=64
C2=3,0	1,533	1,321	1,089	0,904	0,764	0,655	C2=3,0	1,110	0,908	0,704	0,555	0,449	0,373
C2=3,5	1,466	1,248	0,983	0,828	0,689	0,582	C2=3,5	1,028	0,826	0,626	0,487	0,385	0,316
C2=4,0	1,392	1,169	0,932	0,749	0,614	0,513	C2=4,0	0,944	0,746	0,553	0,418	0,327	0,265
C2=4,5	1,317	1,091	0,855	0,677	0,547	0,452	C2=4,5	0,868	0,676	0,491	0,365	0,281	0,225
C2=5,0	1,244	1,018	0,786	0,614	0,492	0,405	C2=5,0	0,803	0,619	0,442	0,324	0,247	0,196
C2=5,5	1,176	0,952	0,726	0,563	0,449	0,368	C2=5,5	0,749	0,573	0,405	0,294	0,222	0,175
C2=6,0	1,115	0,894	0,677	0,522	0,416	0,341	C2=6,0	0,706	0,538	0,377	0,272	0,204	0,160

C1=100							C1=200						
	C3=24	C3=32	C3=40	C3=48	C3=56	C3=64		C3=24	C3=32	C3=40	C3=48	C3=56	C3=64
C2=3,0	1,320	1,104	0,885	0,718	0,594	0,499	C2=3,0	0,924	0,738	0,554	0,427	0,342	0,286
C2=3,5	1,243	1,024	0,804	0,640	0,521	0,432	C2=3,5	0,843	0,662	0,486	0,366	0,289	0,239
C2=4,0	1,160	0,941	0,724	0,565	0,453	0,371	C2=4,0	0,767	0,593	0,424	0,312	0,242	0,197
C2=4,5	1,080	0,863	0,651	0,501	0,396	0,322	C2=4,5	0,701	0,534	0,374	0,270	0,205	0,165
C2=5,0	1,007	0,795	0,591	0,449	0,352	0,284	C2=5,0	0,647	0,488	0,336	0,238	0,179	0,142
C2=5,5	0,943	0,738	0,543	0,410	0,320	0,257	C2=5,5	0,605	0,454	0,309	0,216	0,160	0,127
C2=6,0	0,890	0,692	0,506	0,380	0,296	0,238	C2=6,0	0,572	0,428	0,289	0,201	0,148	0,117

C1: PREÇO DO APARELHO E  
LIGAÇÃO À REDE(contos)  
C2: MENSALIDADE (contos)  
C3: PREÇO UNITÁRIO DA  
CHAMADA (Esc./min.)

Tabela 3 – Índice de penetração relativa para diferentes combinações das componentes do preço

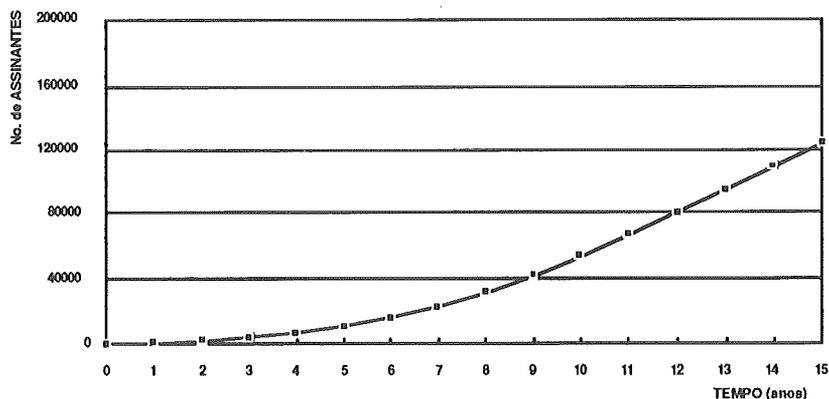


Figura 9 – Curva de penetração correspondente à combinação ( $C_1 = 200$ ,  $C_2 = 6$ ,  $C_3 = 40$ )

### 3.4 Influência do estado inicial na curva de penetração

As curvas de penetração obtidas de acordo com o procedimento global que acabou de ser apresentado presumem que o serviço é lançado a partir de uma base zero. Na Figura 10 esta situação é descrita pela curva assinalada, considerando os eixos de referência correspondentes ao "caso 1".

Considere-se agora a situação na qual, quando o novo serviço é lançado, existem já NA assinantes de um serviço anterior, que vai ser substituído. Nestas circunstâncias (que, de facto, ocorrerão no lançamento do sistema GSM em Portugal), pode considerar-se que antes do lançamento do serviço já foi percorrida a curva de penetração entre os pontos O e O'. A penetração do novo serviço (traduzida em novos assinantes) será dada pela mesma curva, mas expressa num novo referencial, com origem em O' ("caso 2"). Note-se que, agora, a curva de penetração parte com uma pendente muito mais elevada do que aquela que caracterizava o arranque a partir da base zero. O aumento da pendente pode ser atribuído ao facto de o serviço ter já uma divulgação significativa (por partir de uma base de NA assinantes). No entanto, para que a penetração se desenvolva de acordo com a nova curva, será necessário proporcionar condições de cobertura, instalação de aparelhos, assistência aos clientes, etc, correspondentes àquelas que, a partir da base zero, só estariam reunidas ao fim do tempo  $t_{NA}$ . Se não for possível reunir tais condições imediatamente após o arranque do serviço, a penetração será atrasada de  $\Delta t$  em relação ao "caso 2", caindo-se na situação que na Figura 10 é descrita como "caso 3" (referencial com origem em O').

Para a definição da curva de penetração final, é pois crucial definir não só o número de assinantes no momento do lançamento do sistema GSM (que se prevê que será  $NA = 12\ 000$ ) mas também a capacidade de instalação de infraestruturas no arranque (designadamente aquelas que se referem à cobertura). Tal capacidade traduzir-se-á num atraso maior ou menor,  $\Delta t$ .

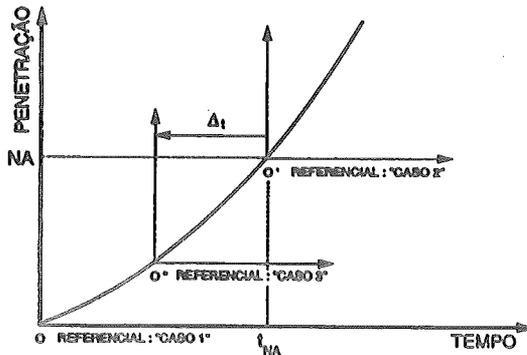


Figura 10 – Influência do estado inicial na curva de penetração

Para ilustrar a importância do estado inicial do serviço na data de lançamento, apresentam-se na Figura 11, sobre um sistema de eixos comum, as curvas de penetração correspondentes à combinação ( $C_1 = 200$ ,  $C_2 = 6$ ,  $C_3 = 40$ ), para os casos em que  $NA = 0$  e  $\Delta t = 0$  ("caso 1"),  $NA = 12\ 000$  e  $\Delta t = 0$  ("caso 2") e, finalmente,  $NA = 12\ 000$  e  $\Delta t = 1$  ano ("caso 3").

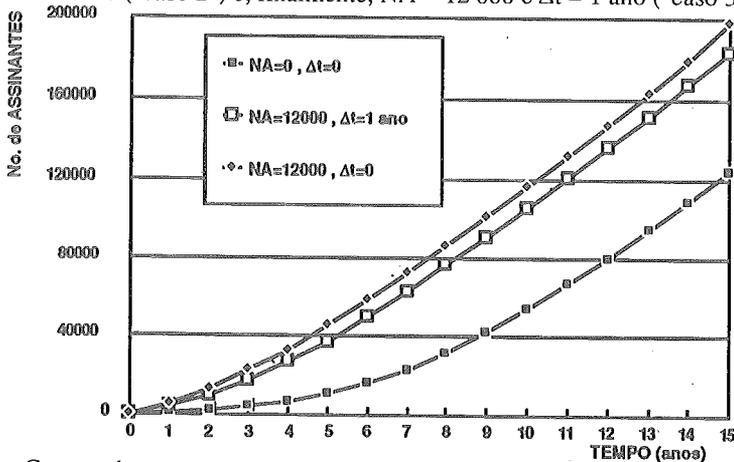


Figura 11 – Curvas de penetração para a combinação ( $C_1 = 200$ ,  $C_2 = 6$ ,  $C_3 = 40$ ), com estados iniciais distintos

Até este momento foi apenas referido o efeito do estado inicial sobre o ritmo de crescimento dos novos assinantes. Admitiu-se que tais assinantes se concentrariam exclusivamente no sistema GSM, com base no pressuposto de que o actual operador não recorreria a uma prática de "dumping" relativamente ao serviço prestado através do sistema analógico.

Resta agora analisar o fenómeno da transferência dos assinantes do serviço actual para o sistema GSM. Ainda com base no pressuposto que acabou de ser enunciado, acredita-se que as vantagens inerentes à nova tecnologia (que será adoptada pelos dois operadores) determinarão que essa transferência se processe num prazo relativamente curto. Neste estudo admitiram-se as seguintes taxas acumuladas de adesão de assinantes do actual serviço ao novo sistema GSM:

- no fim do 1º ano: 10% dos assinantes pré-existentes
- no fim do 2º ano: 25% dos assinantes pré-existentes

no fim do 3º ano:	55% dos assinantes pré-existentes
no fim do 4º ano:	85% dos assinantes pré-existentes
no fim do 5º ano:	100% dos assinantes pré-existentes (isto é, todos os assinantes estarão já no novo sistema).

### 3.5 Efeito de alterações do preço do serviço na curva de penetração

As curvas de penetração foram modelizadas admitindo que as diferentes componentes do preço se mantêm inalteradas. Na realidade, espera-se que o custo (e, portanto, o preço) do serviço de telefone móvel com tecnologia GSM venha a sofrer reduções apreciáveis ao longo da vida do sistema.

Na Figura 12 mostra-se o efeito sobre a curva de penetração (definida a partir da base zero) de uma redução de preço introduzida no instante  $t_0$ , de  $(C'_1, C'_2, C'_3)$  para  $(C''_1, C''_2, C''_3)$ .

Até ao instante  $t_0$ , a penetração evolui segundo a curva  $PN'(t)$ . Nesse momento, devido à alteração do preço, a penetração passa a evoluir segundo a curva  $PN''(t)$ , mas como se partisse do ponto  $P'$ . A curva de penetração final é obtida translacionando a curva  $P''Q''$ , conforme se indica na figura.

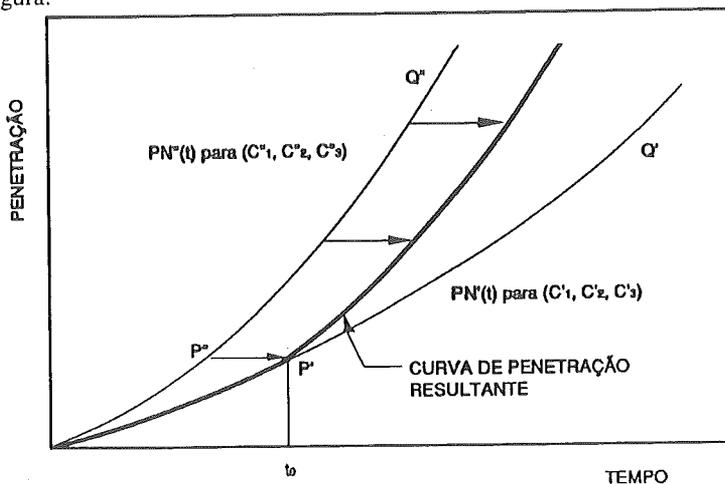


Figura 12 – Efeito de uma redução do preço do serviço na curva de penetração

Na Figura 13 ilustra-se o efeito da mudança de preço sobre a curva de penetração, considerando a alteração de  $(C_1 = 200, C_2 = 6, C_3 = 40)$  para  $(C_1 = 100, C_2 = 6, C_3 = 40)$  dois anos após o lançamento do serviço, admitindo que o estado inicial é  $NA = 12\ 000$  e  $\Delta t = 1$  ano.

As mudanças de preço, além de afectarem a curva de penetração, têm um efeito sobre a forma como a procura se distribui pelos grupos  $GR_1$  (empresas e administração pública) e  $GR_2$  (profissionais liberais e utilizadores particulares).

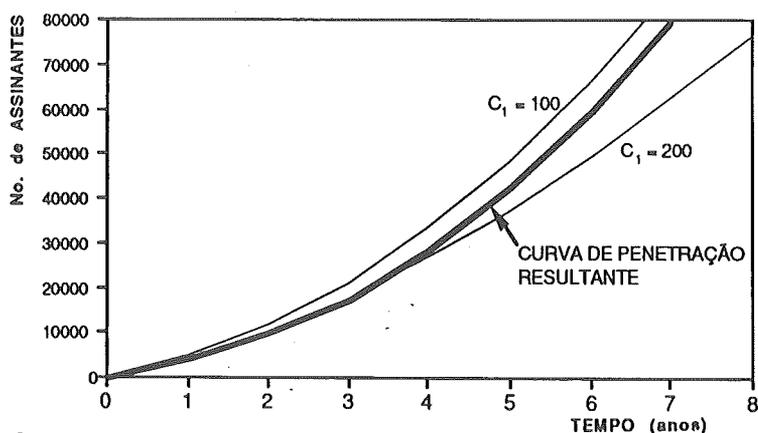


Figura 13 – Curva de penetração resultante da redução de  $C_1$  (de 200 para 100 contos) dois anos após o lançamento do serviço

Tomando o exemplo da Figura 13, admite-se que os assinantes entrados entre o lançamento do serviço e o fim do 2º ano se distribuem pelos grupos  $GR_1$  e  $GR_2$  na proporção correspondente a ( $C_1 = 200$ ,  $C_2 = 6$ ,  $C_3 = 40$ ), isto é, na proporção 75.8/24.2. Os assinantes que entram no serviço depois desse momento passam a seguir a proporção 77.3/22.7, que corresponde aos novos valores ( $C_1 = 100$ ,  $C_2 = 6$ ,  $C_3 = 40$ ). A diferença entre as proporções antes e depois da alteração de preço é mínima, como resultado das elasticidades dos grupos  $GR_1$  e  $GR_2$  serem semelhantes.

#### 4. Modelização do Número de Assinantes por Segmentos Principais e por Área Geográfica

Tal como se referiu na secção 3.3, ao descrever o procedimento adoptado na definição das curvas de penetração, o número de assinantes foi repartido por dois grandes grupos que constituem a base de um processo de segmentação:

$GR_1$ : empresas e serviços da administração pública (assinantes institucionais)

$GR_2$ : profissionais liberais e utilizadores particulares (assinantes individuais)

A distribuição dos assinantes por estes grupos foi efectuada em função dos valores atribuídos às componentes do preço  $C_1$ ,  $C_2$  e  $C_3$ , tendo em conta as elasticidades inferidas a partir das amostras que foram objecto da pesquisa de mercado. Na Tabela 2 foram apresentados valores daquela distribuição correspondentes a algumas combinações particulares de  $C_1$ ,  $C_2$  e  $C_3$ .

A distribuição do número global de assinantes do sistema GSM por área geográfica foi efectuada de acordo com os seguintes critérios:

- (i) admitiu-se que todos os assinantes se localizariam apenas na área coberta pelo sistema GSM;
- (ii) a unidade espacial considerada foi o concelho, uma vez que apresenta um grau de homogeneidade razoável e permite uma precisão considerada suficiente, quer do ponto de vista técnico, quer do comercial;

- (iii) admitiu-se que o número de assinantes por cada concelho seria proporcional ao rendimento que se concentra na área coberta do concelho.

## 5. Modelização do Tráfego Global e sua Repartição por Segmentos Principais e por Área Geográfica

### 5.1 Estimativa do tráfego com origem na rede móvel

O tráfego com origem na rede móvel (com destino tanto à rede fixa como à móvel) foi calculado a partir dos números de assinantes pertencentes aos grupos  $GR_1$  e  $GR_2$  e dos padrões esperados de utilização do serviço de telefone móvel. Tais padrões foram estimados em 160 minutos/mês, para os assinantes do grupo  $GR_1$  (institucionais) e 45 minutos/mês, para os assinantes do grupo  $GR_2$  (individuais).

O tráfego com origem na rede móvel, em minutos/mês, vem assim dado pela soma dos tráfegos associados aos dois grupos, de acordo com a expressão seguinte

$$TM = 160 * NAGR_1 + 45 * NAGR_2$$

onde  $NAGR_1$  e  $NAGR_2$  representam os números de assinantes pertencentes aos grupos  $GR_1$  e  $GR_2$ .

### 5.2 Estimativa do tráfego global e sua repartição pelas componentes móvel-fixa, móvel-móvel e fixa-móvel

O tráfego global (TG) é obtido adicionando ao tráfego que tem origem na rede móvel aquele que se dirige para esta a partir da rede fixa (TFM). Esta componente de tráfego foi estimada admitindo que, em termos médios, para cada 100 minutos de chamadas que cada assinante efectua a partir da rede móvel, recebe 40 minutos de chamadas com origem na rede fixa. O tráfego global vem então dado por

$$\begin{aligned} TG &= (140/100) * (160 * NAGR_1 + 45 * NAGR_2) \\ &= 224 * NAGR_1 + 63 * NAGR_2 \quad (\text{minutos/mês}) \end{aligned}$$

Deste tráfego,  $100/140 = 71.4\%$  corresponderão então à parcela com origem na rede móvel e  $40/140 = 28.6\%$  corresponderão à componente fixa-móvel.

A primeira parcela reparte-se, por sua vez, pelas componentes móvel-fixa e móvel-móvel. Em termos relativos, é de esperar que a segunda componente aumente à medida que o número de assinantes da rede móvel cresça. Neste estudo admitiu-se que, ao longo dos primeiros 15 anos de funcionamento da rede GSM, o valor da componente móvel-móvel, quando expressa em percentagem do tráfego total com origem na rede móvel, crescerá linearmente desde 0% (no arranque do novo sistema) até 7.5% (quinze anos depois).

Denotando por T o tempo de operação (em anos) do sistema GSM desde o seu arranque, as componentes móvel-fixa, móvel-móvel e fixa-móvel, quando expressas em função do tráfego global, vêm dadas por:

- (i) Componente móvel-fixa:

$$\begin{aligned} TMF &= (1.00 - 0.075 * T/15) * TM \\ &= (1.00 - 0.075 * T/15) * (100/140) * TG \end{aligned}$$

(ii) Componente móvel-móvel:

$$\begin{aligned} \text{TMM} &= 0.075 * (T/15) * \text{TM} \\ &= 0.075 * (T/15) * (100/140) * \text{TG} \end{aligned}$$

(iii) Componente fixa-móvel:

$$\text{TFM} = 40/140 * \text{TG}$$

### 5.3 Repartição do tráfego global por segmentos principais

A expressão

$$\begin{aligned} \text{TG} &= (140/100) * (160 * \text{NAGR}_1 + 45 * \text{NAGR}_2) \\ &= 224 * \text{NAGR}_1 + 63 * \text{NAGR}_2 \quad (\text{minutos/mês}) \end{aligned}$$

permite, de forma imediata, repartir o tráfego global pelos grupos  $\text{GR}_1$  (clientes institucionais) e  $\text{GR}_2$  (clientes individuais). Ao primeiro grupo corresponderá a primeira parcela do tráfego e a  $\text{GR}_2$  a segunda.

### 5.4 Repartição do tráfego por área geográfica

Para cada uma das componentes de tráfego, a repartição geográfica foi estimada recorrendo a um modelo gravitacional (Wilson (1967, 1969)). Neste modelo as variáveis de repartição adoptadas foram o consumo anual de gasolina super e sem chumbo (para repartição geográfica do tráfego de e para a rede móvel) e o rendimento (para repartição do tráfego de e para a rede fixa).

A adopção da primeira variável assenta no pressuposto de que a utilização do telefone móvel numa zona geográfica qualquer será tanto mais intensa, tanto no envio como na recepção de chamadas, quanto maior for a concentração de pessoas em movimento nessa área. A segunda variável foi adoptada no pressuposto de que a intensidade de utilização da rede fixa, como origem ou destino da rede móvel, se reparte geograficamente de acordo com a distribuição do rendimento.

A unidade geográfica adoptada neste modelo foi o distrito, uma vez que o consumo anual de gasolina não se encontra disponível por concelho.

Efectuada a repartição através do modelo gravitacional, o tráfego associado a cada distrito foi distribuído pelos concelhos correspondentes, na proporção dos respectivos rendimentos.

Seguidamente ilustra-se o procedimento adoptado considerando o caso particular da distribuição geográfica da componente móvel-fixa do tráfego. O modelo gravitacional utilizado na repartição distrital desta componente do tráfego será descrito recorrendo à seguinte notação:

- $m, n$  : índices denotando distritos do Continente
- $\text{TMF}_{m_0n_0}$  : tráfego (componente móvel-fixa) com origem no distrito  $m_0$  e destino no distrito  $n_0$
- $\text{TMF}_{m_0^*}$  : tráfego (componente móvel-fixa) com origem no distrito  $m_0$  e destino em qualquer distrito do Continente
- $C_{m_0}$  : consumo anual de combustível (gasolina super e sem chumbo) no distrito  $m_0$

- $IR_{m_0}$  : índice de rendimento agregado do distrito  $m_0$  (dado pela soma dos índices dos concelhos nele incluídos)
- $P_{m_0}$  : proporção do rendimento do distrito  $m_0$  que se concentra na área desse distrito que esteja coberta pelo sistema GSM (no modelo admitiu-se que  $P_{m_0}$  representa também, aproximadamente, a proporção do consumo de gasolina do distrito  $m_0$  que se concentra na área do distrito coberta pelo sistema GSM)
- $d_{m_0n_0}$  : distância entre as capitais dos distritos  $m_0$  e  $n_0$  ( $d_{m_0n_0}$  representa o valor médio da distância que separa a capital do distrito  $m_0$  de qualquer ponto incluído nesse distrito).

De acordo com o modelo adoptado, o tráfego com origem no distrito  $m_0$  ( $TMF_{m_0^*}$ ), expresso em função do tráfego total associado à componente móvel-fixa, vem dado por

$$TMF_{m_0^*} = \frac{P_{m_0} * C_{m_0}}{\sum_m P_m * C_m} * TMF$$

Deste tráfego, aquele que se destina ao distrito  $n_0$  (ou seja,  $TMF_{m_0n_0}$ ) é dado pela expressão seguinte:

$$\begin{aligned} TMF_{m_0n_0} &= \frac{P_{n_0} * IR_{n_0}/d_{m_0n_0}^k}{\sum_n P_n * IR_n/d_{m_0n}^k} * TMF_{m_0^*} \\ &= \frac{P_{n_0} * IR_{n_0}/d_{m_0n_0}^k}{\sum_n P_n * IR_n/d_{m_0n}^k} * \frac{P_{m_0} * C_{m_0}}{\sum_m P_m * C_m} * TMF \end{aligned}$$

Nesta expressão, a influência da distância aos destinos na repartição do tráfego por estes é representada pelo termo  $d_{m_0n_0}^k$ . Com base na experiência adquirida no estudo de outras redes de telefone móvel, optou-se por atribuir ao expoente das distâncias o valor  $K = 1.5$ .

A Tabela 4, calculada com base nos tráfegos inter-distritais, ilustra a concentração de tráfego de e para os dois maiores centros urbanos do País.

COMPONENTE	ORIGEM	DESTINO		
		Lisboa/Porto	Outros Distritos	Total
<b>MÓVEL-FIXA</b>	Lisboa/Porto	38.11	5.68	<b>43.79</b>
	Outros Distritos	21.30	34.91	<b>56.21</b>
	<b>Total</b>	<b>59.41</b>	<b>40.59</b>	<b>100.00</b>
<b>MÓVEL-MÓVEL</b>	Lisboa/Porto	35.76	8.03	<b>43.79</b>
	Outros Distritos	16.19	40.02	<b>56.21</b>
	<b>Total</b>	<b>51.95</b>	<b>48.05</b>	<b>100.00</b>
<b>FIXA-MÓVEL</b>	Lisboa/Porto	45.85	9.89	<b>55.74</b>
	Outros Distritos	13.11	31.15	<b>44.26</b>
	<b>Total</b>	<b>58.96</b>	<b>41.04</b>	<b>100.00</b>

Tabela 4 – Distribuição percentual de cada componente do tráfego por Lisboa/Porto e outros distritos

Uma vez definido o tráfego  $TMF_{m_0n_0}$  entre dois quaisquer distritos  $m_0$  e  $n_0$ , a sua repartição posterior entre os concelhos respectivos foi efectuada apenas com base no índice de rendimento. Este procedimento foi adoptado uma vez que a variável consumo de combustível não se encontrava disponível numa base concelhia.

Considerando a seguinte notação,

i: índice denotando os concelhos pertencentes a um distrito  $m_0$  ( $i_0$  representa um concelho particular entre aqueles)

j: índice denotando os concelhos pertencentes a um distrito qualquer  $n_0$  ( $j_0$  representa um concelho particular entre aqueles)

o tráfego com origem na rede móvel do concelho  $i_0$  destinado à rede fixa do concelho  $j_0$  vem dado por

$$TMF_{i_0j_0} = \frac{p_{i_0} * IR_{i_0}}{\sum_i p_i * IR_i} * \frac{p_{j_0} * IR_{j_0}}{\sum_j p_j * IR_j} * TMF_{m_0n_0}$$

### Referências

- [1] Eurofone, *Processo de Candidatura a uma Licença de Operador Nacional do Serviço de Telefone Móvel Digital*, Cap. III A, 1991.
- [2] Green, P.E., Tull, D.S. e Albaum, G., *Research for Marketing Decisions*, Prentice-Hall, 1988.
- [3] Guimarães, R.C., Coutinho, G.S. e Ferreira, J.V., *Estratégia de Marketing da EUROFONE*, Relatório Interno, 1990.
- [4] Johnson, R.M., *Trade-Off Analysis of Consumer Values*, Journal of Marketing Research 11 (1974) 121-127.
- [5] Wilson, A.G., *A Statistical Theory of Spatial Distribution Models*, Transportation Research 1 (1967) 253-269.
- [6] Wilson, A.G., *The Use of Entropy Maximising Methods in the Theory of Trip Distribution*, Journal of Transport Economics and Policy 3 (1969) 108-126.

# CARTA CUSUM PARA OBSERVAÇÕES AUTORRELACIONADAS

M.Pereira-Leite<sup>1</sup>

R.J.Rowlands

Department of Chemical and Process Engineering

Industrial Statistical Research Unit

University of Newcastle-upon-Tyne, England

## Abstract

The need to improve and maintain productivity and product quality has led to the development and application of a set of statistical techniques which are grouped under the term Statistical Process Control (SPC). Statistical control charts, and in particular CuSum charts, are used to monitor the process in real time. Traditionally, independence between successive measurements is assumed but data from process industries are usually autocorrelated, often following autoregressive moving average models. This paper presents a monitoring scheme to cope with ARMA(1,1) data. The technique proposed is an extension of the minimax-optimal cumulative sum procedure based in the likelihood ratio. The performance of the extended scheme is assessed using different data sequences and comparisons with the standard CuSum and Shewhart charts made. The performance of the monitoring procedures was evaluated in terms of the average run length.

## Resumo

O controlo e supervisão efectiva dum processo depende frequentemente de ferramenta estatística para a detecção, identificação e análise das causas significativas da variação não usual. As cartas de controlo, baseadas em somas acumuladas (CuSum), são então de grande utilidade e muito populares. Neste artigo é apresentada uma carta de controlo, denominada Carta CuSum Generalizada (GCuSum), apropriada para detectar desvios na média das observações seguindo modelos do tipo ARMA(1,1). A técnica proposta é uma extensão do procedimento minimax-óptimo, baseado na razão das máximas verosimilhanças. A performance desta carta é estudada e estudos comparativos do comportamento da nova carta em relação às cartas CuSum e Shewhart são apresentados. Tais estudos são baseados na determinação do número de observações processadas, desde que o desvio na média ocorre até que aquele é efectivamente detectado.

## Keywords

ARMA models, likelihood ratio, cumulative sum, average run length.

## 1. Introdução

O Controlo Estatístico de Processos (SPC) desempenha actualmente um papel muito importante na indústria e pode ser visto como uma análise estatística objectiva da variação do processo e das suas causas. No âmbito do controlo de processos os métodos estatísticos podem ser usados em diferentes situações, nomeadamente na obtenção de informação acerca do comportamento actual e futuro do processo, no fornecimento de índices relacionados com os seus níveis de qualidade, na indicação e previsão da ocorrência de variações, na análise do funcionamento do sistema e consequente indicação de possíveis alterações que conduzam a uma melhoria quer no próprio processo quer na qualidade do produto.

---

<sup>1</sup>Apoio da JNICT, Portugal e SERC, Inglaterra

Todos os processos industriais apresentam variações que podem ser originadas por:

1. causas externas ao processo (como temperatura ambiente, humidade, etc);
2. causas inerentes ao processo (como envelhecimento de catalizadores, etc);
3. ruído variacional (esta é a variação observada em produtos manufacturados sob as mesmas condições);
4. causas especiais de variação (como má qualidade de matéria prima, etc).

O procedimento adoptado pelo SPC reside na identificação e separação destes tipos de variação. O conceito de estado de controlo estatístico foi introduzido por Shewhart [1]. Quando uma certa característica do processo está em controlo estatístico, o seu comportamento é previsível no sentido de ser governado apenas pela variação usual que é uma característica intrínseca do sistema produtivo. Se, por outro lado, para além desta existem outros tipos de variações que podem ser descobertas e corrigidas, então o processo não está em controlo estatístico.

As cartas de controlo são possivelmente os meios gráficos mais populares empregues na distinção entre estes dois estados. As cartas de controlo podem ser divididas essencialmente em quatro categorias: as cartas do tipo Shewhart, as cartas baseadas na média móvel, as cartas baseadas na média móvel pesada exponencialmente e as cartas do tipo somas acumuladas (cartas CuSum). O seu grande valor reside no facto delas indicarem a presença de variação não usual e levarem à tomada de diferentes acções podendo mesmo conduzir à paragem do funcionamento do processo.

O objectivo deste artigo é o de apresentar uma carta de controlo denominada Carta CuSum Generalizada (GCuSum) apropriada para lidar com dados provenientes de modelos autoregressivos de média móvel que descrevem processos complexos. A técnica proposta é uma extensão do procedimento minimax-óptimo baseado na razão das máximas verosimilhanças e é usada para detectar desvios na média das observações.

## **2. Modelos Autoregressivos de Média Móvel**

A construção das cartas de controlo é baseada na suposição de que as observações a serem controladas são independentes e distribuídas com média  $\mu$  e variância constante igual a  $\sigma^2$ . Se os dados não são independentes, mas serialmente correlacionados, estes procedimentos não são totalmente invalidados mas as suas "performances" podem ser gravemente degradadas.

Na prática, a suposição da independência entre sucessivos resultados amostrais é frequentemente violada. A "variação natural" observada em muitos processos industriais não consiste apenas em puro ruído, mas inclui uma componente dinâmica inerente. A dinâmica do processo leva a que observações sucessivas estejam correlacionados. Nestes casos o comportamento do processo, quando em estado de controlo estatístico, pode ser descrito por um modelo de uma série temporal que inclua a dinâmica do processo. Os

modelos autoregressivos de média móvel (ARMA) constituem a classe de modelos estocásticos lineares mais frequentemente utilizada para tal fim.

Os modelos ARMA foram introduzidos por Box and Jenkins [2]. A forma geral dum modelo ARMA de ordem (p,q), com média zero, é dada por

$$x_t - \phi_1 x_{t-1} - \dots - \phi_p x_{t-p} = a_t - \theta_1 a_{t-1} - \dots - \theta_q a_{t-q}$$

onde  $\phi_1, \dots, \phi_p, \theta_1, \dots, \theta_q$  são os parâmetros do modelo e  $a_t$  é uma sequência de perturbações aleatórias independentes com média zero e variância  $\sigma_a^2$ . Usando o operador B definido por

$$Bz_t = z_{t-1} \quad B^j z_t = z_{t-j}$$

esta expressão reduz-se a

$$\Phi(B)x_t = \Theta(B)a_t$$

onde  $\Phi(B) = 1 - \phi_1 B - \dots - \phi_p B^p$  é designado por operador autoregressivo AR(p) e  $\Theta(B) = 1 + \theta_1 B + \dots + \theta_q B^q$  é o operador média móvel MA(q).

Neste artigo é investigado o problema da detecção dum desvio na média  $\mu$  dum modelo ARMA de ordem (1,1) com  $a_t$  distribuídos normalmente:

$$(x_t - \mu) = \phi_1(x_{t-1} - \mu) + a_t - \theta_1 a_{t-1}$$

Uma representação equivalente do tipo "state space" é dada por<sup>2</sup>

$$\begin{cases} x_t = \mu + b_t + \xi_t & (\text{equação da mediação}) \\ b_t = \phi_1 b_{t-1} + \eta_t & (\text{equação da transição}) \end{cases}$$

onde  $\xi_t \sim N(0, \sigma_\xi^2)$  e  $\eta_t \sim N(0, \sigma_\eta^2)$  são duas sequências independentes de perturbações mutuamente normalmente independentes. No modelo de estado o comportamento temporal da variável  $b_t$  é descrito pela equação da transição. Esta variável não é directamente observável mas está relacionada com a variável  $x_t$  através da equação da mediação. A média geral da série é  $\mu$  e mantém-se constante até que é mudada num certo instante desconhecido por uma causa especial. O problema agora abordado consiste na investigação dum procedimento que detecte essa mudança no mais curto intervalo de tempo.

Em 1954 Page [3] introduziu um método para detectar desvios nos parâmetros de diferentes distribuições baseado em somas acumuladas de observações independentes. Supondo que  $x_1, \dots, x_{m-1}$  tem função de distribuição  $F_0$  e  $x_m, x_{m+1}, \dots$  tem função de distribuição  $F_1 \neq F_0$ , Page mostrou que o seu procedimento é equivalente à realização duma sequência de testes da razão de probabilidades em observações sucessivas até que se obtenha uma decisão em favor de  $F_1$ . Moustakides [4] provou que este método é minimax óptimo no sentido de ser o que mais rapidamente detecta um desvio na média das observações.

<sup>2</sup> As duas representações são equivalentes desde que

$$(1 - \phi_1^2) \sigma_\xi^2 + \sigma_\eta^2 = (1 - 2\theta_1\phi_1 + \theta_1^2) \sigma_a^2 \quad \text{e} \quad \sigma_\eta^2 = (\phi_1 - \theta_1)(1 - \theta_1\phi_1) \sigma_a^2$$

**3. Construção da Carta CuSum Generalizada**

O procedimento CuSum minimax-óptimo para dados independentes assinala um desvio na média das observações, que passa de  $\mu_0$  a  $\mu_1$ , na primeira ocasião em que  $Q_n \geq h \geq 1$ , onde

$$Q_n = \max \left\{ 1, Q_{n-1} \frac{f(x_n; \mu_1)}{f(x_n; \mu_0)} \right\}$$

$$= \max \left\{ 1, \max_{1 \leq r \leq n} \prod_{j=r}^n \frac{f(x_j; \mu_1)}{f(x_j; \mu_0)} \right\} \quad (n=1, 2, \dots; Q_0 = 1)$$

e  $f(x; \mu)$  é a função densidade de probabilidade (fdp) das observações para o estado  $\mu$ . O valor da constante  $h$  é escolhido em função da percentagem de falsos alarmes desejada.

Uma generalização natural de  $Q_n$  para dados dependentes é

$$Q_0 = 1$$

$$Q_n = \max \left\{ 1, \max_{1 \leq r \leq n} \frac{f(x_n, \dots, x_r | x_{r-1}, \dots, x_0; \mu_1)}{f(x_n, \dots, x_r | x_{r-1}, \dots, x_0; \mu_0)} \right\} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

onde  $f(x_n, \dots, x_r | x_{r-1}, \dots, x_0; \mu)$  representa a fdp condicionada de  $x_n, \dots, x_r$  dados  $x_{r-1}, \dots, x_0$  para o estado  $\mu$ . Como se pretende implementar este procedimento on-line e o cálculo destas probabilidades condicionadas é muito moroso, quer em termos computacionais quer em termos reais, torna-se necessário utilizar um método aproximativo.

Para o modelo ARMA(1,1) definido no parágrafo anterior, a fdp conjunta de  $x_n, \dots, x_r$  e  $\xi_n, \dots, \xi_r$  dados  $x_{r-1}, \dots, x_0$  e  $\xi_{r-1}, \dots, \xi_0$  para o estado  $\mu$  foi aproximada por

$$\prod_{j=r}^n f_\gamma(x_j - \theta_1 x_{j-1} - \xi_j + \theta_1 \xi_{j-1})$$

onde  $f_\gamma(x)$  representa a fdp de  $\gamma_j = (1 - \theta_1)\mu + \eta_j$ . Isto sugere a substituição de  $Q_n$  por  $Q'_n$ , onde

$$Q'_n = \max \left\{ 1, \max_{1 \leq r \leq n} \prod_{j=r}^n \frac{f_\gamma(x_j - \theta_1 x_{j-1} - \hat{\xi}_j + \theta_1 \hat{\xi}_{j-1}; \mu_1)}{f_\gamma(x_j - \theta_1 x_{j-1} - \hat{\xi}_j + \theta_1 \hat{\xi}_{j-1}; \mu_0)} \right\}$$

e  $\hat{\xi}_j$  é uma estimativa da perturbação não observável  $\xi_j$ . A estimativa usada neste estudo é dada por

$$\hat{\xi}_j = X_j - \hat{X}_j \quad \hat{X}_j = pX_j + (1 - p) \hat{X}_{j-1}$$

com  $\hat{X}_0 = \mu_0$  e  $p = 0.1$ . À carta de controlo em  $Q'_n$  deu-se a designação de Carta de CuSum Generalizada (GCuSum).

**3.1. Avaliação da Performance através de Simulações**

A performance das cartas de controlo é usualmente avaliada através do número médio de observações que são processadas desde que o desvio na média ocorre até que ele é efectivamente detectado. Esse coeficiente é designado por average run length (ARL). A run length  $T$  é definida pelo tempo de reacção, quando um desvio na média ocorre, ou pelo tempo que decorre até um falso alarme no caso de nenhum desvio ocorrer, isto é:

$$T = \begin{cases} N - m + 1 & \text{se } m < \infty \\ N & \text{se } m = \infty \end{cases},$$

com  $N$  representando o instante em que o alarme ocorre. Consequentemente  $ARL = E(T)$  e o seu valor deve ser grande quando o processo está em controlo estatístico e pequeno quando um desvio na média ocorre.

As ARLs da GCuSum foram calculadas através de simulações computacionais. A linguagem de programação usada foi FORTRAN77. Começou-se por escrever um programa que gera as observações seguindo o modelo ARMA(1,1) e implementa  $Q_h^1$  com  $\mu_0 = 0$  e  $\mu_1 = 1$ . Os valores das perturbações  $\xi_s$  e  $\eta_s$  foram obtidos usando as rotinas G05DDF e G05CBF da biblioteca NAG. Após gerarem-se 30 observações com média zero, um desvio  $\delta(= .5, (.5), 5)\sigma_x$  foi adicionado a essa média, tendo a GCuSum começado a operar antes desse desvio ocorrer. Os valores escolhidos para os desvios padrões dos  $\eta_s$  e  $x_s$  foram .4 e 1 respectivamente. Cada simulação foi corrida 10000 vezes.

Foram efectuadas várias simulações para diferentes valores do coeficiente  $\phi_1$ , com  $|\phi_1| < 1$ . Os seguintes valores de  $h$  foram usados de modo a obter-se sempre aproximadamente  $ARL = 300$  quando o processo está em controlo estatístico:

$\phi_1$	0	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8
$h$	4.564	1.022	1.046	1.081	1.140	1.215	1.318	1.477	1.667

Alguns dos resultados obtidos encontram-se na tabela seguinte. Note-se que estes valores foram encontrados usando  $\mu_0 = 0$  e  $\mu_1 = 1$  o que significa que esta GCuSum é especialmente apropriada para detectar desvios na média de amplitude igual a um desvio padrão.

$\phi_1$	$\delta$			
$\delta$	0.1	0.3	0.5	0.7
0.0	299.86	300.05	300.05	300.04
0.5	26.07	28.36	33.31	49.25
1.0	8.72	9.34	10.81	15.95
1.5	4.98	5.25	6.07	8.74
2.0	3.36	3.57	4.08	5.95
2.5	2.50	2.64	3.05	4.50
3.0	1.95	2.07	2.41	3.67
3.5	1.53	1.66	2.06	3.08
4.0	1.26	1.37	1.79	2.67
4.5	1.08	1.15	1.54	2.36
5.0	1.02	1.04	1.30	2.14

Tabela 1: ARLs das cartas GCuSum para modelos ARMA(1,1)

Usando sempre o mesmo valor de  $h = 2$  e considerando  $-0.7 \leq \phi_1 \leq 0.7$  com saltos de amplitude 0.1, os valores obtidos para as ARLs supondo que o processo está em controlo estatístico encontram-se resumidos no gráfico da figura 1.

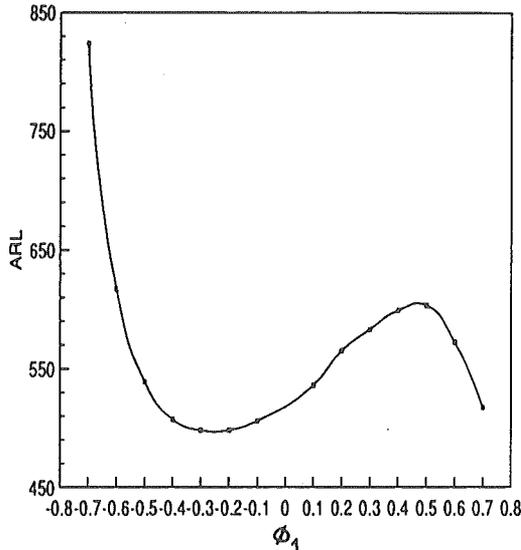


Figura 1: ARLs para  $h = 0.2$

### 3.2. Análise de Sensibilidade ao Parâmetro $\phi_1$

Como se depreende através da construção da GCuSum, a carta aqui apresentada assume que se conhecem, com uma certa margem de segurança, os parâmetros do modelo ARMA(1,1) que se ajusta aos dados. Contudo, na prática e embora existam presentemente diversos métodos bastante eficazes para a identificação de processos contínuos, essa tarefa pode ser dificultada por diversas razões. Seguindo essa linha de raciocínio, um estudo da análise de sensibilidade aos erros de estimação do parâmetro  $\phi_1$  foi efectuado. Esta análise debruçou-se sobre erros de amplitude inferior a 0.06. A tabela que se segue resume, numa forma sucinta, alguns dos resultados a que se chegou para os mesmos modelos referidos na secção 3.1. Nesta tabela podem ler-se os valores estimados para as ARLs quando  $\delta = 0$  (o processo está sob controlo estatístico) e  $\delta = 1\sigma_x$ . Neste estudo considerou-se que a carta GCuSum começou a operar ao mesmo tempo que o desvio na média das observações ocorreu. Neste caso os valores obtidos para as arls são ligeiramente superiores aos mencionados em 3.1., que correspondem ao caso da carta estar já em operação quando tal desvio se verifica.

$\emptyset_1$ erro	0.1	0.3	0.5	0.7
-0.06	(286.92,9.60)	(275.74,10.08)	(262.88,11.29)	(210.05,15.16)
-0.04	(290.69,9.60)	(283.27,10.09)	(271.88,11.35)	(234.62,15.65)
-0.02	(294.52,9.66)	(291.29,10.15)	(284.98,11.50)	(263.98,16.04)
0	(299.84,9.67)	(299.84,10.23)	(300.46,11.62)	(299.59,16.80)
0.02	(306.21,9.75)	(311.65,10.28)	(317.69,11.89)	(343.45,17.63)
0.04	(310.78,9.79)	(319.18,10.41)	(342.44,12.07)	(413.87,18.22)
0.06	(314.79,9.81)	(326.44,10.52)	(367.09,12.25)	(521.33,19.48)

Tabela 2:  $(ARL_{\delta=0}, ARL_{\delta=1})$  para a análise de sensibilidade a  $\emptyset_1$ 

Analisando esta tabela constata-se que a GCuSum se torna cada vez mais sensível a erros na estimação de  $\emptyset_1$  à medida que o coeficiente de correlação  $\emptyset_1$  aumenta. Essa sensibilidade é traduzida por um aumento dos valores das ARLs, especialmente para as situações em que o processo está em controlo estatístico. Verifica-se também que, quanto maior é o erro cometido na estimação de  $\emptyset_1$ , maiores são "os erros" nos valores esperados das ARLs. Subestimação de  $\emptyset_1$  (isto é, erro  $< 0$ ) conduz a menores valores das ARLs e sobreestimação (erro  $> 0$ ) a maiores valores. Contudo o número de observações necessárias para a detecção dum desvio de tamanho  $\delta = 1$  só começa a ser diferente do esperado quando  $\emptyset_1$  é superior a 0.5. Compreensivelmente, quanto menores são as  $ARL_{\delta=0}$ s menores as  $ARL_{\delta=1}$ s. Note-se ainda que os valores dos erros em  $\emptyset_1$  aqui considerados são bastante grandes tendo em consideração grandes tendo em consideração a existência de métodos capazes de fornecer com relativa precisão os valores de tal coeficiente.

### 3.2. Comparações com Outras Cartas

Foram efectuados vários estudos comparativos com outras cartas de controlo frequentemente usadas em processos contínuos, nomeadamente cartas do tipo Shewhart e cartas padrão baseadas em somas acumuladas (CuSum). Os parâmetros destas cartas foram escolhidos de modo a obter-se uma  $ARL = 300$  quando o processo está em controlo estatístico. Para os valores de  $\emptyset_1 = 0.1, 0.3, 0.5$  e  $0.7$  as linhas de acção das cartas do tipo Shewhart foram colocadas a uma distância de 2.930 desvios padrão. No que respeita à escolha dos parâmetros a usar nas cartas CuSum padrão, da leitura dos monogramas de Goel e Wu [5] e após se ter realizado um estudo preliminar à "performance" desta carta, constatou-se que, para dados independentes e normalmente distribuídos, o valor de  $h = 4.564$  conduz a uma  $ARL = 300$  quando o processo está em controlo estatístico (a carta CuSum padrão aqui considerada é o procedimento óptimo para detectar um desvio de tamanho  $1\sigma_x$  quando  $\emptyset_1 = 0$ ). Decidiu-se pois usar este valor

como critério de paragem nas cartas CuSum. Relativamente às simulações realizadas considerou-se uma vez mais que as cartas começam a operar ao mesmo tempo que o desvio na média ocorre. Os gráficos das figuras 2, 3, 4 e 5 representam os resultados obtidos para estes quatro valores de  $\phi_1$ .

Figura 2: ARLs para  $\phi_1 = 0.1$

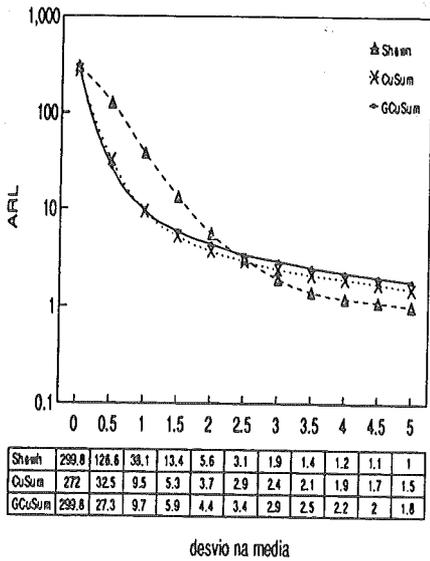


Figura 3: ARLs para  $\phi_1 = 0.3$

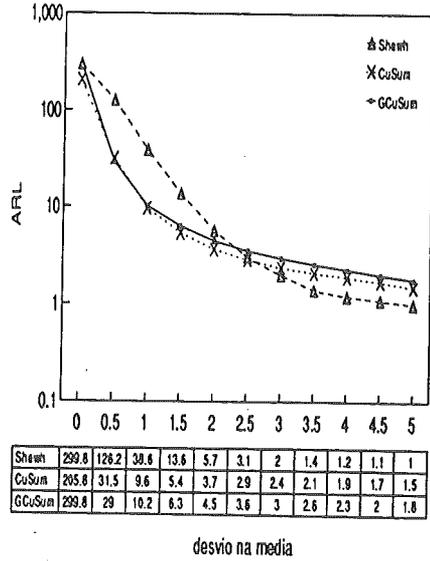


Figura 4: ARLs para  $\phi_1 = 0.5$

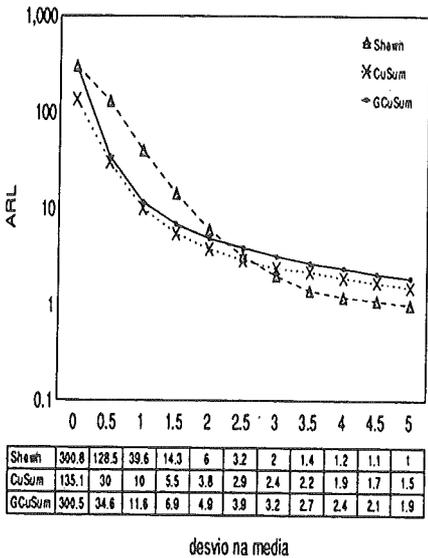
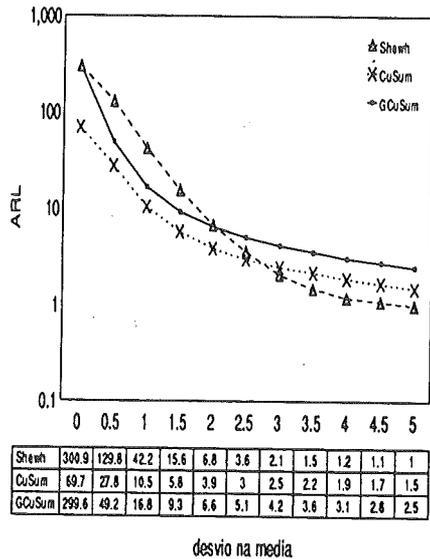


Figura 5: ARLs para  $\phi_1 = 0.7$



Analisando estes gráficos constata-se que a GCuSum detecta mais rapidamente do que qualquer uma das outras cartas um desvio na média de amplitude inferior a 1, independentemente do valor de  $\delta_1$ . As figuras 2-5 mostram ainda que a detecção de desvios superiores a 3 é sempre feita mais rapidamente pela carta Shewhart. Este resultado era esperado uma vez que é sobejamente conhecido que uma das características da carta Shewhart reside precisamente na rápida detecção de grandes desvios na média das observações. Para desvios na média  $\geq 1$  as "performances" das cartas GCuSum e CuSum são muito semelhantes. Contudo convem notar que à medida que  $\delta_1$  aumenta os valores das ARLs, quando o processo está em controlo estatístico, obtidos para a carta CuSum padrão decrescem enormemente. Estes dois últimos factos levam-nos a concluir que a carta GCuSum é preferível à carta CuSum padrão.

Pareceu-nos ainda ser de interesse a comparação das ARLs das GCuSum com os valores das ARLs obtidos para as cartas CuSum quando os seus critérios de paragem são ajustados de modo a obter-se sempre uma  $ARL_{\delta=0} \approx 300$ . Neste caso o uso dos valores  $h = 4.677, 4.990, 5.653$  e  $7.727$  para  $\delta_1 = 0.1, 0.3, 0.5$  e  $0.7$  respectivamente forneceram as seguintes ARLs:

$\delta$	$\delta_1$	0.1	0.3	0.5	0.7
0.0		299.97	299.99	300.05	299.99
0.5		33.82	35.95	40.39	55.19
1.0		9.72	10.45	12.01	17.09
1.5		5.44	5.82	6.58	9.07
2.0		3.79	4.02	4.52	6.11
2.5		2.95	3.12	3.49	4.61
3.0		2.45	2.58	2.85	3.75
3.5		2.13	2.23	2.45	3.18
4.0		1.92	2.02	2.18	2.77
4.5		1.76	1.85	2.01	2.46
5.0		1.57	1.68	1.89	2.21

Tabela 3: ARLs das cartas CuSum para modelos ARMA(1,1)

Através deste estudo constata-se uma vez mais que os desvios de amplitude inferior a um desvio padrão são mais rapidamente detectados pela carta GCuSum do que pela carta CuSum. Para valores de  $\delta \geq 1$  as "performances" destas duas cartas são muito semelhantes.

#### 4. Conclusões

O procedimento proposto aqui para detectar desvios na média numa sequência de observações autocorrelacionadas é de fácil implementação, mas não é baseado na razão exacta das máximas verosimilhanças. Apesar disso comporta-se melhor do que as cartas do tipo Shewhart e do que as cartas CuSum padrão, independentemente do valor do coeficiente de correlação, na detecção de desvios na média das observações inferiores a um desvio padrão. Este facto é perfeitamente compreensível uma vez que a GCuSum aqui referenciada é especialmente apropriada para detectar desvios na média de amplitude igual a  $1\sigma_x$ .

#### 5. Referências

- [1] Shewhart, W.A., Economic control for manufactured product, Van Nostrand, New York, 1931 (republished in 1981 by the American Society for Quality Control, Milwaukee, W.I.)
- [2] Box, G.E.P. e Jenkins, G.B., Time series analysis: forecasting and control, Holden-Day, USA, 1976.
- [3] Page, E.S., Continuous inspection schemes, *Biometrika* 41 (1954) 100-14.
- [4] Moustakides, G.V., Optimal stopping rules for detecting changes in distributions, *Annals of Statistics* 14 (1986) 1379-87.
- [5] Goel, A.L. e Wu, S.M., Determination of ARL and a contour nomogram for cusum charts to control normal mean, *Technometrics* 13 (1971) 221-30.

# ANÁLISE DE ÍNDICES DA PRODUÇÃO INDUSTRIAL NO BRASIL VIA MODELOS LINEARES DINÂMICOS MULTIVARIADOS

**Emanuel Pimentel Barbosa**  
Universidade Federal São Carlos  
UFScar - Dep.de Estatística  
Caixa Postal 676  
13.565-905 - São Carlos-SP/Brasil

**Gutemberg Hespanha Brasil**  
Universidade Federal do Espírito Santo  
UFES - Dep.de Estatística  
Av. Fernando Ferrari, s/n  
29.060-900 - Vitória-ES/Brasil

## Abstract

Monthly IPI (Industrial Production Indexes) in Brazil, published by the Brazilian Statistical Institute in the last decade, in the categories of capital, intermediary and consumption goods, are analysed in relation to their evolution, including specifically their expected growth rate. It is considered a structure for these data based on Multivariate Dynamic Linear Models - DLM's, under a bayesian approach, where non-informative Jeffreys priors are used. In these models, besides the usual time series components such as trend and seasonality, it is also considered regressor variables. Aspects related to modeling forms, its practical implementation and predictive performance are also considered.

## Resumo

Os índices mensais de produção industrial no Brasil, divulgados pelo IBGE (Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística) na última década, nas categorias de bens de capital, intermediários e de consumo são analisados quanto à sua evolução, inclusive em termos da taxa de crescimento esperada. É considerada uma estrutura para esses dados baseada em Modelos Lineares Dinâmicos (DLM's) Multivariados, sob um enfoque Bayesiano, onde se utiliza Priori não-informativa de Jeffreys. Nestes modelos, além das componentes usuais de séries temporais, tendência e sazonalidade, são também consideradas variáveis explicativas. Aspectos relativos a formas de modelagem, sua implementação prática e "performance" preditiva, também são discutidos.

## Keywords

Dynamic Linear Models, Multivariate Time Series, Industrial Production Indexes, Non-Informative Priors.

## 1. Introdução

A modelagem Bayesiana para séries temporais, desde sua formulação original por Harrison & Stevens (1976), vem sendo cada vez mais utilizada na prática, nomeadamente na análise e previsão de séries económicas univariadas, devido às facilidades apresentadas pela metodologia (ver West & Harrison, 1989).

Séries mensais de índices da produção industrial no Brasil - índices de quantum de Laspeyres - divulgados pelo IBGE nas categorias de bens de capital, intermediários e de

consumo (classificação por categoria de uso) são aqui estudados conjuntamente no período de 1981 a 1990. Tais indicadores são índices de base fixa mensal e refletem a variação da produção industrial do mês em relação ao período base (média de 1981 = 100), para cada uma das categorias de uso. As ponderações são baseadas nas informações do Censo Industrial Brasileiro de 1980, referentes a um painel de produtos e informantes composto de aproximadamente 736 produtos industrializados e cerca de 5.000 empresas. Observe-se que a classificação por categorias de uso abrange todos os produtos pesquisados para a indústria, inclusive os produtos da indústria extrativa mineral, alocados integralmente à categoria bens intermediários. Para uma descrição mais detalhada da metodologia envolvida no cômputo desses indicadores económicos, ver "Índices da Produção Industrial - Séries Revistas", 1975-90, IBGE, Rio de Janeiro.

Uma análise Bayesiana individual dessas séries, para o período de 1975 a 1988, adotando modelos com componentes multiplicativos de tendência e sazonalidade, além do uso sistemático de intervenções, é encontrada em Costa, Brasil & Migon (1988); ver também Migon & Brasil (1986), para uma descrição de diversos aspectos de modelagem de índices da produção industrial. No presente trabalho, estas mesmas séries, agora para o período de 1981 a 1990, são analisadas, não individualmente, mas conjuntamente via modelos de regressão dinâmica multivariada, onde não somente componentes de tendência e sazonalidade (aditiva) são consideradas, mas também componentes regressivas formadas por variáveis defasadas.

A metodologia multivariada aqui adotada é apresentada detalhadamente em Barbosa (1989). Devido ao fato do modelo ser multivariado, utilizando-se portanto muitos parâmetros, torna-se conveniente o uso de priori não-informativa de Jeffreys ou priori de referência, apresentadas em Barbosa (1989, 1992) para o caso de modelos dinâmicos (ver, por exemplo, Box & Tiao, 1973).

A organização do trabalho é a seguinte: na seção 2 apresentamos uma análise preliminar das séries, o que nos conduz à identificação de possíveis modelos. Na seção 3 os Modelos Dinâmicos Multivariados são formalmente apresentados, acompanhados de uma breve análise dos mesmos. Na seção 4 alguns pontos julgados importantes são discutidos. A seção 5 contém o algoritmo para estimação do modelo da seção 3.2. Finalmente, na seção 6 são listadas as referências bibliográficas.

## **2. Análise dos Dados**

Uma inspeção nos gráficos de cada uma das séries de índices para o período de 1981 a 1990 (as séries são denotadas por: INDCAP - Bens de Capital, INDINT - Bens intermediários e INDON - Bens de Consumo) - Figuras 1, 2 e 3, sugere a presença de um componente de crescimento linear nos dados, sobrepondo-se uma variação sazonal com período de 12 meses, o que é confirmado através de uma análise harmónica das mesmas via periodograma. Na

estimação do periodograma utilizou-se o "software" BATS 1.3, desenvolvido por West et al (1987).

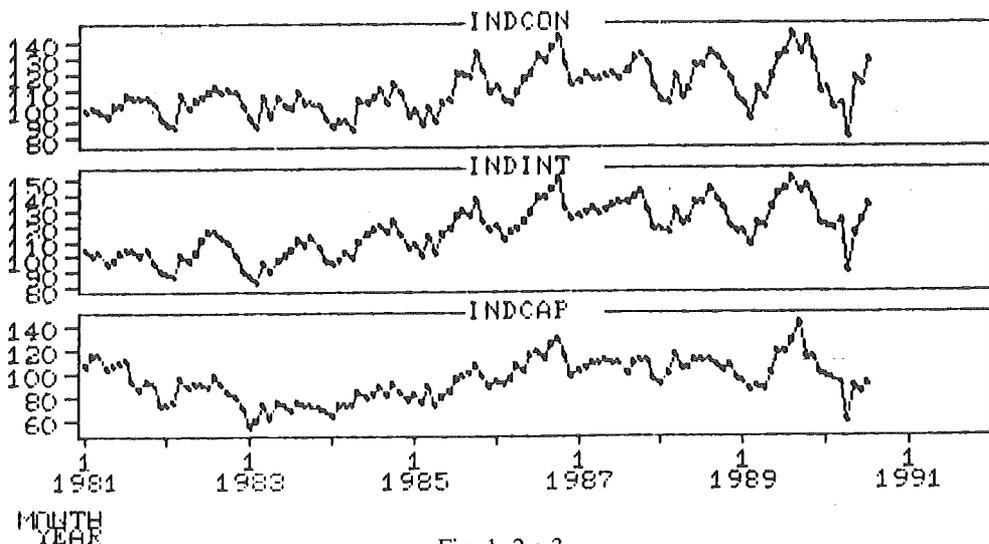


Fig. 1, 2 e 3

Por outro lado, a existência de forte correlação linear entre a séries, nomeadamente entre INDCON & INDINT e INDCAP & INDINT, é claramente verificada através de Diagramas de Dispersão, os quais nos sugerem ainda a variável INDINT defasada de um período (representada por LAGINT1) como uma variável explicativa (regressor) para cada uma das séries; ver as Figuras 4, 5, 6a e 6b. (Optou-se por utilizar modelos envolvendo apenas essas três variáveis, no intuito de exemplificar a metodologia adotada. Diversas defasagens dessas variáveis foram verificadas como regressores).

INDCON

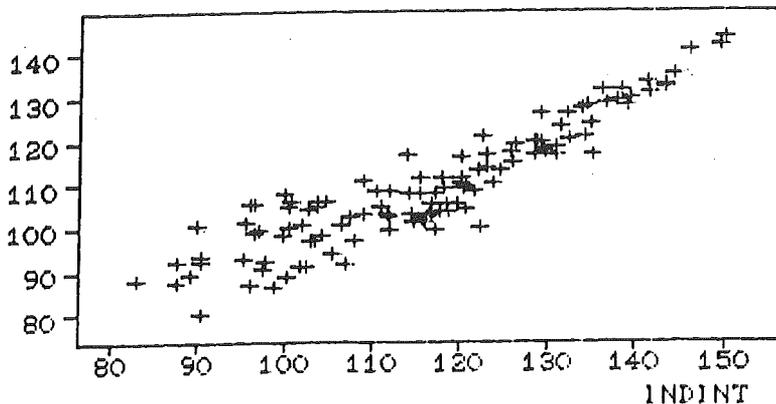


Fig. 4

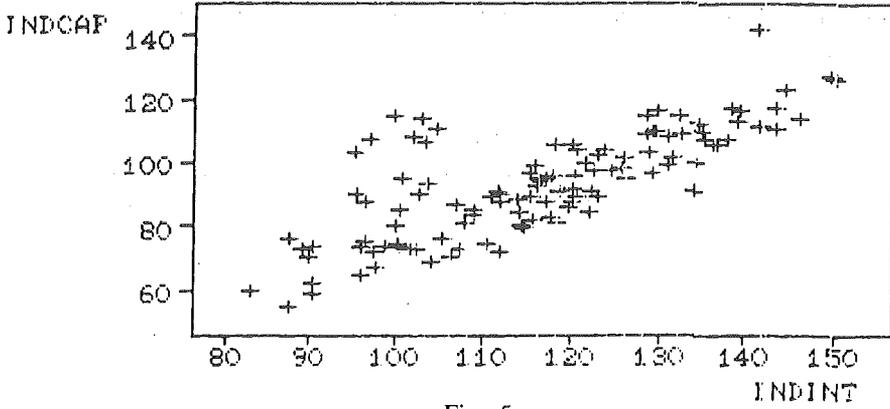


Fig. 5

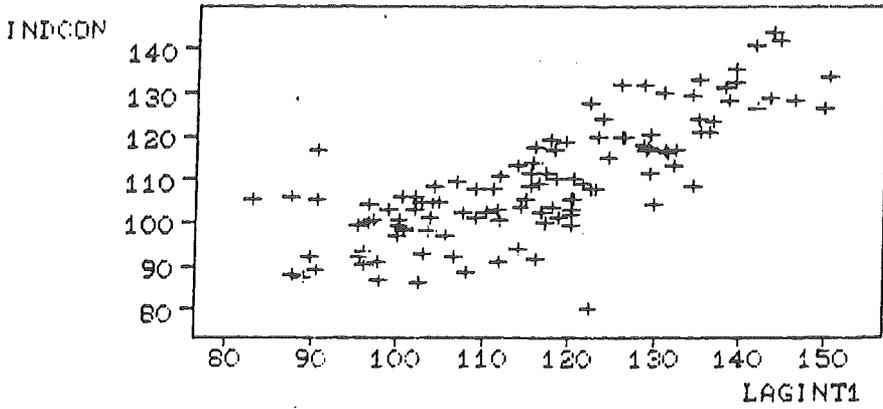


Fig. 6a

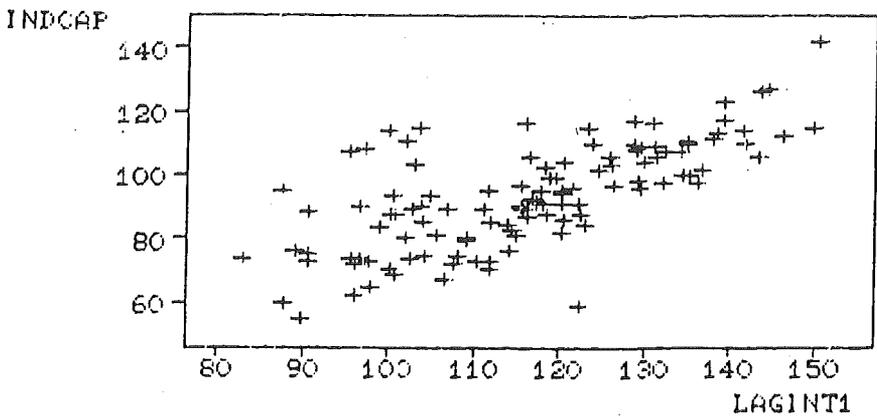


Fig. 6b

Observe-se que, quando se analisa o período 1975-90, constata-se uma forte tendência de crescimento linear nos dados, refletindo não-estacionariedade na média e na variância (indicando sazonalidade multiplicativa). De outro lado, o padrão comportamental é bem mais suave no período 81-90, aqui analisado (observa-se nesse caso, um padrão sazonal aproximadamente aditivo). De facto, os modelos sugeridos em Costa, Brasil & Migon (1988), que estudaram o período 75-88, são de natureza multiplicativa (Modelo de Crescimento Linear com Sazonalidade Multiplicativa), enquanto que no presente estudo modelos aditivos bastante simples foram adequados.

Desse modo, modelos de crescimento linear com sazonalidade aditiva via harmônicas podem ser satisfatoriamente utilizados. Uma análise do periodograma para cada uma das séries mostra que apenas a primeira harmônica "explica" aproximadamente de 75% a 80% da variabilidade. Assim, por razões de parcimônia, optamos por trabalhar apenas com esta, embora outras pudessem ser incluídas, eventualmente aprimorando o ajustamento dos modelos.

De acordo com a análise preliminar descrita acima, e em virtude de cada uma das séries apresentarem em princípio os mesmos tipos de componentes - tendência linear, sazonalidade com período de 12 meses (1ª harmônica) e uma variável explicativa comum a todas as séries, uma possível parametrização (modelo) para esses dados é o Modelo Linear Dinâmico Multivariado de Componentes Comuns; Quintana (1985), Barbosa (1989) e West & Harrison (1989). Entretanto, de modo a se implementar esse modelo Bayesiano, é necessária a especificação de uma distribuição a priori para um grande número de parâmetros, o que pode vir a ser uma tarefa tediosa. Alternativamente, é considerada uma outra versão do modelo de componentes comuns, que utiliza uma priori não-informativa de Jeffreys como inicialização para o algoritmo de estimação; vide Barbosa (1989, 1992). Tal modelo é apresentado na próxima seção, seguido dos resultados obtidos na modelagem.

Finalizamos esta seção apresentando uma análise realizada através dos parâmetros da série de bens de capital (INDCAP), especificamente os parâmetros nível e sazonalidade, que são obtidos no processo de estimação via filtro de Kalman, quando confrontados com fatos da economia brasileira. A análise é feita para o período 1975-1988, seguindo Costa, Brasil e Migon (1988). Tal tipo de análise também pode ser realizada na presente modelagem.

O nível de INCAP arrefece um pouco durante os anos de 77 e 78, fase final do processo de investimento pesado realizado pelo país depois do primeiro choque do petróleo. Ao longo de 79 e 80, em função do segundo choque, o setor de bens de capital é intensamente solicitado pelos grandes investimentos na prospecção e produção de petróleo fazendo com que o nível de INCAP tenha um ritmo firmemente ascendente. Em 81 porém, mais intensamente do que o restante da produção, o nível de INCAP mergulha na recessão atingindo o "fundo do poço" em 82, apesar do efeito contra-cíclico das eleições daquele ano. Em 83, antecedendo o restante da produção, o setor inicia o processo de retoma que se mantém durante 84, arrefece no início de 85, para logo depois recuperar o mesmo ritmo até atingir um pico em 86 quando da euforia

do chamado "Plano Cruzado" sem entretanto atingir a mesma magnitude de 80. O ano de 87, pós "Plano Cruzado" retrata o atual quadro de arrefecimento da economia brasileira sem, até agora a ruptura de 1981.

O padrão sazonal de INDCAP apresenta notável regularidade: arrefecimento nos meses de Dezembro, Janeiro e Fevereiro (eventualmente Abril), aquecimento no restante do ano com um pico em Setembro, nos últimos anos. O período de desaceleração concentrado no final/início do ano, período de férias coletivas, traduz bem o caráter intensivo em mão de obra do setor de bens de capital, o qual por trabalhar basicamente sob encomenda, uma vez elaborado seus planos de produção, executa-os ao longo do ano, perturbado apenas pelas flutuações da mão de obra.

### 3. Formulação do Modelo Multivariado

#### 3.1. Modelos Lineares Dinâmicos (DLM's) Multivariados

O Modelo Linear Dinâmico (DLM) foi introduzido para a comunidade estatística por Harrison & Stevens (1976) e desde então é bastante utilizado na prática para o caso univariado; ver West & Harrison (1989). Uma definição usual do DLM para uma sequência de observações  $d$ -dimensionais  $\underline{Y}_t$ ,  $t = 1, 2, \dots$  (série temporal multivariada) e parametrizada por um vetor de estados  $\underline{\theta}_t$  de dimensão  $p$ , é dada pelos três elementos seguintes:

(i) Equação das Observações:  $\underline{Y}_t = F_t^T \cdot \underline{\theta}_t + \underline{v}_t$ ;  $\underline{v}_t \approx N[\underline{0}, V_t]$   
(Verossimilhança)

(ii) Equação do Sistema:  $\underline{\theta}_t = G_t \cdot \underline{\theta}_{t-1} + \underline{\omega}_t$ ;  $\underline{\omega}_t \approx N[\underline{0}, W_t]$   
(Evolução Markoviana)

(iii) Informação Inicial:  $(\underline{\theta}_0 | D_0) \approx N[\underline{m}_0, C_0]$ ,

onde os elementos  $\{F_t, G_t, W_t\}$  são conhecidos, (ver por exemplo, West & Harrison (1989) ou Barbosa (1991)), e as seqüências de erros observacionais  $\underline{v}_t$  e do sistema,  $\underline{\omega}_t$ , são independentes entre si e temporalmente, além de independentes das condições iniciais. Em geral,  $D$  é a notação utilizada para os dados:  $D_t = \{\underline{Y}_1, \underline{Y}_2, \dots, \underline{Y}_t\}$ .

O vetor de estados  $\underline{\theta}_t$  e a matriz de variância-covariância dos erros observacionais,  $V_t$  (de dimensão  $d \times d$ ), são estimados sequencialmente para o caso de modelos com componentes comuns.

#### 3.2. DLM's de Componentes Comuns

Este modelo foi apresentado na literatura inicialmente por Quintana (1985, 1987), e Quintana & West (1988). Também uma versão não-Bayesiana deste modelo é apresentada em Harvey (1986), e uma análise utilizando-se priori não-informativa de Jeffreys encontra-se em Barbosa (1989, 1992). Este modelo é um caso particular do DLM geral da seção anterior e sua característica essencial é que todas as suas distribuições marginais univariadas, que são também DLM's, apresentam os mesmos elementos  $\{F, G, W\}$ .

O DLM Multivariado de Componentes Comuns para uma sequência de observações d-dimensionais  $\underline{Y}_t$ ,  $t = 1, 2, \dots$  e parametrizado pelo vetor de estados  $\underline{\theta}_t$  de dimensão p é definido pelas seguintes equações:

- (i) Eq. Observação  $\underline{Y}_t = (\underline{I}_d \otimes \underline{F}_t^T) \cdot \underline{\theta}_t + \underline{v}_t$ ;  $\underline{v}_t \equiv \mathcal{N}[\underline{0}, \underline{V}_t]$   
(ii) Eq. Sistema  $\underline{\theta}_t = (\underline{I}_d \otimes \underline{G}_t) \cdot \underline{\theta}_{t-1} + \underline{\omega}_t$ ;  $\underline{\omega}_t \equiv \mathcal{N}[\underline{0}, \underline{V} \otimes \underline{W}_t]$   
(iii) Informação a priori:  $(\underline{\theta}_0 | \underline{V}, D_0) \approx \mathcal{N}[\underline{m}_0, \underline{V} \otimes \underline{C}_0]$   
 $(\underline{V} | D_0) \approx \mathcal{W}^{-1} [d_0, n_0]$

onde  $\mathcal{W}^{-1}$  é a notação para a distribuição matricial Wishart inversa e  $\otimes$  é o símbolo para o produto de Kronecker. A matriz  $\underline{W}$  é especificada através de fatores de desconto, como no caso de modelos univariados. Para especificar cada um desses fatores utilizamos as recomendações apresentadas em Harrison & Johnston (1984), Brasil (1987) ou West & Harrison (1989).

De modo a se evitar a inconveniência de se ter de especificar todas as quantidades envolvidas nas distribuições a priori iniciais, é apresentado em Apêndice um algoritmo de estimação sequencial, proposto por Barbosa (1989, 1992), que se utiliza de priori não-informativa de Jeffreys (Análise de Referência).

### 3.3. Aplicação às Séries de Produção Industrial

Para o caso concreto de um modelo com as componentes descritas na seção 2, uma representação para cada série é dada por:

- (i)  $\underline{F}_t = \text{diag}\{(1, 0); (1, 0); \text{INDINT}_{t-1}\}$ ;  
(ii)  $\underline{G}_t = \text{diag}\left\{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} .866 & .5 \\ -.5 & .866 \end{bmatrix}; 1\right\}$ ;  
(iii) Os fatores de desconto apropriados para as três séries foram:  
 $\delta_1 = 0.89$  para a tendência,  $\delta_2 = 0.97$  para a sazonalidade e  $\delta_3 = 0.98$  para o regressor.

Como vimos, o vetor de parâmetros,  $\underline{\theta}_t$ , para cada uma das três séries ficou assim especificado:

$$\underline{\theta}_t = [\mu_t, \beta_t, \gamma_t, \gamma_t^*, \alpha_t]$$

onde:  $\mu_t$  e  $\beta_t$  representam a tendência sendo,  $\mu_t$ , o nível e  $\beta_t$ , o fator de crescimento ("slope");  $\gamma_t$  e  $\gamma_t^*$  representam a componente harmônica, sendo que a cada período t essa componente é transformada nos 12 fatores sazonais referentes a cada mês do ano;

$\alpha_t$  é o coeficiente do regressor, da variável  $\text{INDINT}_{t-1}$ , o qual é estimado sequencialmente através do algoritmo.

As três séries foram estimadas para o período de Janeiro de 1981 a Julho de 1990. Os ajustes dos modelos foram considerados satisfatórios em termos do Erro Quadrático Médio (MSE) e Desvio Médio Absoluto (MAD). Nas Figuras 7a, 7b, 8a, 8b, 9a e 9b, encontram-se os valores reais e as previsões para todo o período estudado. A metodologia também permite que a evolução de cada parâmetro do modelo seja verificada ao longo do período analisado.

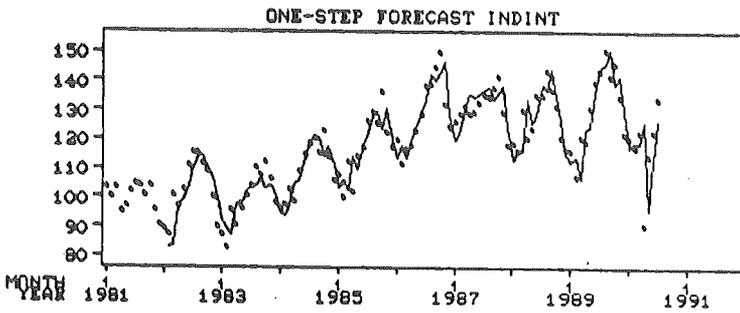


Fig. 7a

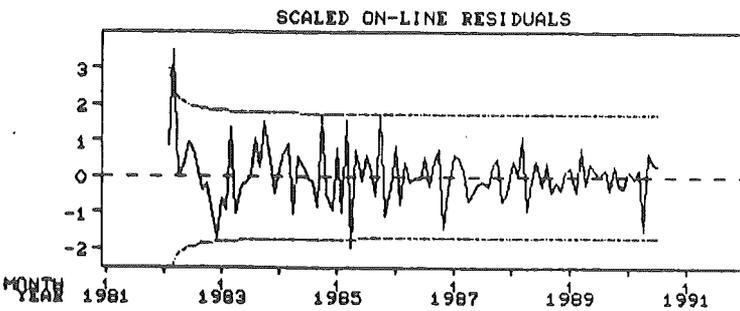


Fig. 7b

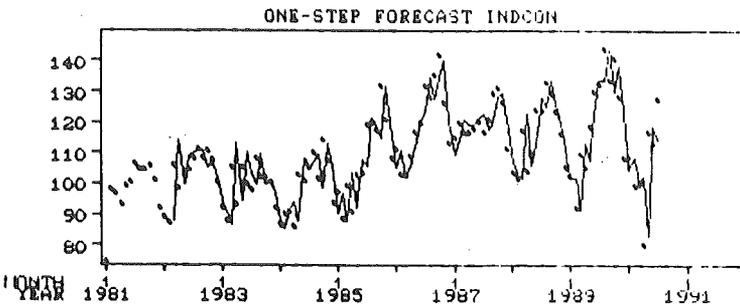


Fig. 8a

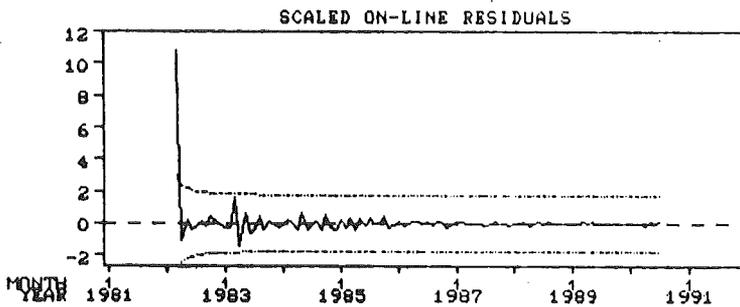


Fig. 8b

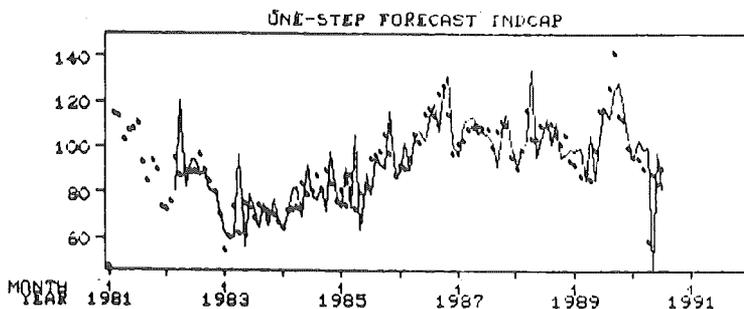


Fig. 9a

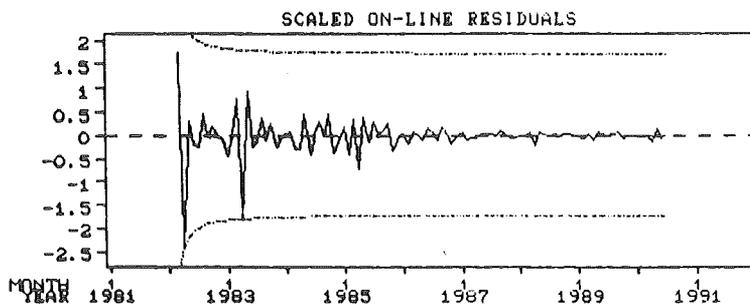


Fig. 9b

Para verificação da "performance" preditiva do modelo, adotamos o seguinte procedimento. Com o modelo estimado até Dezembro de 1982, realizamos previsões para os quatro trimestres de 1983; a seguir calculamos a taxa acumulada de três meses, para cada trimestre, definida como a soma dos índices previstos para o trimestre dividida pela soma dos índices do respectivo trimestre do ano anterior. O mesmo procedimento foi feito para os anos subsequentes até 1990. Esses resultados constituem a taxa de crescimento esperada para cada trimestre, no início de cada ano. Esses valores previstos foram então confrontados, via Erro Quadrático Médio, com os valores dos crescimentos reais em cada trimestre. Os resultados encontram-se nas Tabelas 1a, 1b, 2a, 2b, 3a e 3b. Para a variável INDINT defasada de um período, utilizamos a sua previsão, quando necessário.

As taxas de crescimento reais não encontram-se nas Tabelas. Observe-se que as taxas menores que a unidade são, na realidade, negativas. Usualmente dados dessa natureza são apresentados em percentagens. Por exemplo, para a série INDCAP (Tabela 1a), primeiro trimestre de 1983, o crescimento previsto foi de  $(0.783 - 1.0) \cdot 100\% = -21,7\%$ . Analisando-se os MSE's, Tabelas 1b, 2b e 3b, constata-se o bom "performance" preditivo dos modelos.

	1º Trimestre	2º Trimestre	3º Trimestre	4º Trimestre
1982	0.652	0.818	1.315	0.963
1983	0.783	0.815	0.757	0.846
1984	1.079	1.129	1.130	1.167
1985	1.117	1.055	1.091	1.167
1986	1.114	1.327	1.195	1.229
1987	1.092	1.048	0.892	0.942
1988	0.918	1.021	1.049	0.958
1989	0.895	0.893	1.107	1.187
1990	1.075	0.817	—	—

Tabela 1A: Taxa de Crescimento Prevista (INDCAP)

	1º Trimestre	2º Trimestre	3º Trimestre	4º Trimestre
1982	0.006	0.0004	0.009	0.003
1983	0.00008	0.0006	0.001	0.002
1984	0.001	0.00006	0.0008	0.001
1985	0.002	0.003	0.005	0.00005
1986	0.001	0.002	0.001	0.004
1987	0.001	0.001	0.00001	0.00005
1988	0.004	0.003	0.0001	0.00003
1989	0.002	0.003	0.006	0.012
1990	0.051	0.003	—	—

Tabela 1B: Erro Quadrático

	1º Trimestre	2º Trimestre	3º Trimestre	4º Trimestre
1982	0.848	1.013	1.087	1.083
1983	0.959	0.968	0.917	1.033
1984	1.080	1.130	1.112	1.074
1985	1.049	1.061	1.070	1.087
1986	1.077	1.117	1.084	1.104
1987	1.076	1.093	0.968	0.978
1988	0.900	0.995	1.031	0.966
1989	0.918	1.017	1.059	1.110
1990	1.031	0.874	—	—

Tabela 2A: Taxa de Crescimento Prevista (INDINT)

	1º Trimestre	2º Trimestre	3º Trimestre	4º Trimestre
1982	0.002	0.002	0.0004	0.003
1983	0.000007	0.002	0.001	0.001
1984	0.001	0.00006	0.0001	0.00007
1985	0.001	0.001	0.00005	0.00009
1986	0.0001	0.00006	0.001	0.0004
1987	0.001	0.001	0.00001	0.0004
1988	0.002	0.001	0.0001	0.0003
1989	0.001	0.0001	0.0001	0.0003
1990	0.0002	0.001	—	—

Tabela 2B: Erro Quadrático

	1º Trimestre	2º Trimestre	3º Trimestre	4º Trimestre
1982	0.926	1.064	1.020	1.064
1983	1.005	1.021	0.947	0.933
1984	0.934	0.965	1.034	1.061
1985	1.032	1.043	1.096	1.143
1986	1.112	1.146	1.088	1.090
1987	1.079	1.056	0.923	0.989
1988	0.882	0.968	1.059	0.967
1989	0.906	1.022	1.071	1.133
1990	1.021	0.879	—	—

Tabela 3A: Taxa de Crescimento Prevista (INDCON)

	1º Trimestre	2º Trimestre	3º Trimestre	4º Trimestre
1982	0.002	0.002	0.0003	0.000001
1983	0.000009	0.002	0.00001	0.00005
1984	0.00001	0.00004	0.00008	0.00006
1985	0.001	0.0003	0.001	0.000002
1986	0.000001	0.0003	0.001	0.001
1987	0.001	0.001	0.0001	0.0004
1988	0.001	0.0002	0.00006	0.001
1989	0.001	0.0004	0.0001	0.001
1990	0.00001	0.000009	—	—

Tabela 3B: Erro Quadrático

#### 4. Discussão

Inicialmente, vale notar que o modelo descrito nas seções anteriores é parcimonioso e simples, não sendo utilizadas intervenções, estruturas não-lineares ou mesmo especificação de priori inicial para os parâmetros, como em Costa, Brasil e Migon (1988), ainda assim, obtendo-se uma boa "performance" preditiva (vide Gráficos e Tabelas da seção 3.3). Na verdade, a metodologia proposta reconhece a natureza multivariada do problema em questão, de modo que as previsões de valores futuros de uma dada série não utilizam somente os valores passados daquela série, mas também a informação relativa a outras séries. Esta informação extra suprida, em princípio, dispensa o uso de intervenções no modelo, ao passo que a não necessidade de estruturas não-lineares (modelo sazonal multiplicativo) se deve tão somente ao período de tempo ser agora diferente. Esse fato reflete o padrão comportamental da produção industrial brasileira na década de 80.

Finalmente, de modo a exemplificar os resultados obtidos em termos do "performance" preditivo, os Gráficos da seção 3.3 e as Tabelas dos MSE's, confirmam ser a modelagem bastante adequada. A "performance" preditiva dos modelos quando avaliada pela taxa (acumulada) esperada de três meses mostra que o modelo é confiável para previsões de curto prazo; entretanto, nunca é demais lembrar que é sempre recomendável a utilização de mecanismos de monitorização ao longo do horizonte de previsão.

#### 5. Apêndice

Algoritmo de Estimação Sequencial para o Modelo de Componentes Comuns com Priori Não-Informativa de Jeffreys.

Um algoritmo prático para Análise de Referência do DLM de Componentes Comuns é dado por (ver Barbosa, 1989):

I) Para  $t = 0, 1, \dots, t_{p-1}$ , onde  $t_p = p + d.(d+1).1/2$ , use as seguintes equações sequenciais:

(i) Equações Temporais

$$H_t = (G_t^T)^{-1} \cdot K_{t-1} \cdot G_t^{-1}$$

$$H_t = (G_t^T)^{-1} \cdot U_{t-1}$$

$$L_t = E_{t-1}$$

(ii) Equações Sequenciais

$$K_t = H_t + F_t \cdot F_t^T$$

$$U_t = T_t + F_t \cdot Y_t$$

$$E_t = L_t + Y_t \cdot Y_t^T$$

$$a_t = a_{t-1} + 1$$

(iii) Inicialização:  $H_1 = 0$ ,  $T_1 = 0$ ,  $L_1 = 0$ ,  $a_1 = 0$

II) Para  $t = t_p$ , tem-se:

$$M_t = K_t^{-1} \cdot U_t$$

$$C_t = K_t^{-1}$$

$$S_t = E_t - U_t^T \cdot M_t$$

$$n_t = a_t - d$$

e, a partir daí ( $t = t_{p+1}, t_{p+2}, \dots$ ), usa-se o algoritmo padrão (Análise Conjugada) de estimação sequencial como apresentado em Quintana (1987), Barbosa (1989), West & Harrison (1989) e outros.

### Agradecimentos

Os autores gostariam de agradecer as valiosas sugestões apresentadas por um dos revisores. Os autores também são muito gratos ao aluno José Luís Borrás pela sua participação no desenvolvimento de programas de computador.

### 6. Referências

- [1] Barbosa, Emanuel P., Dynamic Bayesian Models for Vector Time Series Analysis & Forecasting, Ph.D.Thesis, Department of Statistics, University of Warwick, U.K., 1989.
- [2] Barbosa, Emanuel P. and Harrison, J.P., Variance Estimation for Multivariate Dynamic Linear Models, To appear in the Journal of Forecasting, 1992.
- [3] Barbosa, Emanuel P., Brasil, G.H. e Borrás, J.L., Análise de Índices da Produção Industrial via Regressão Dinâmica Multivariada, Atas da 2ª Escola de Modelos de Regressão, UFRJ, Rio de Janeiro, 1991.
- [4] Barbosa, Emanuel P., Séries Temporais Multivariadas: Uma Análise via Modelos Lineares Dinâmicos, Minicurso apresentado na 4ª Escola de Séries Temporais e Econometria, IMPA, Rio de Janeiro, 1991.
- [5] Barbosa, Emanuel P., Reference Analysis of Common Components DLM's, Paper Submitted for Publication, 1992.
- [6] Box, G. & Tiao, G.C., Bayesian Inference in Statistical Analysis, Addison-Wesley, Massachussets, 1973.
- [7] Brasil, Gutemberg H., Fatores de Desconto e Previsão Bayesiana, Anais do IX Congresso Brasileiro de Econometria, Salvador/BA, 179-213, 1987.
- [8] Costa, E., Brasil, G.H. e Migon, H.S., Modelos Bayesianos para as Séries de Produção Industrial: Análise Univariada e Regressão Dinâmica, Anais do 8ª SINAPE, Rio de Janeiro, 1988.
- [9] Harrison, P.J. and Stevens, C.F., Bayesian Forecasting, J. Roy. Statist. Soc., B, 38 (1976) 205-247.
- [10] Harrison, P.J. and Johnston, F.R., Discount Weighted Regression, J. Opl. Res. Soc., 35 (1984) 923-932.
- [11] Harvey, A., Analysis and Generalization of a Multivariate Exponential Smoothing Model, Management Science, 32 (1986) 374-380.
- [12] Índices da Produção Industrial - Séries Revistas - 1975-85 (1986), FIBGE, Rio de Janeiro.
- [13] Migon, H.S. e Brasil, G.H., Modelos Bayesianos de Previsão: Uma Aplicação e Comparação com Modelos ARIMA, Anais do VIII Congresso Brasileiro de Econometria, Brasília, Vol II, 413-440, 1986.
- [14] Quintana, J., A Dynamic Linear Matrix-Variate Regression Model, Warwick Report N° 83, Univ. Warwick, U.K., 1985.
- [15] Quintana, J., Multivariate Bayesian Forecasting Models, Ph.D. Thesis, University of Warwick, U.K., 1987.
- [16] Quintana, J. & West, M., Multivariate Time Series Analysis, The Statistician, 36 (1988) 175-181.
- [17] West, M. and Harrison, Jeff, Bayesian Forecasting and Dynamic Models, Springer-Verlag, 1989.
- [18] West, M.; Harrison, P.J. and Pole, A., BATS, a User Guide, University of Warwick, 1987.



**Correcção ao Editorial, Vol. 11 – nº 2**

**Política de Transportes Urbanos e Novas Tecnologias de Informação**

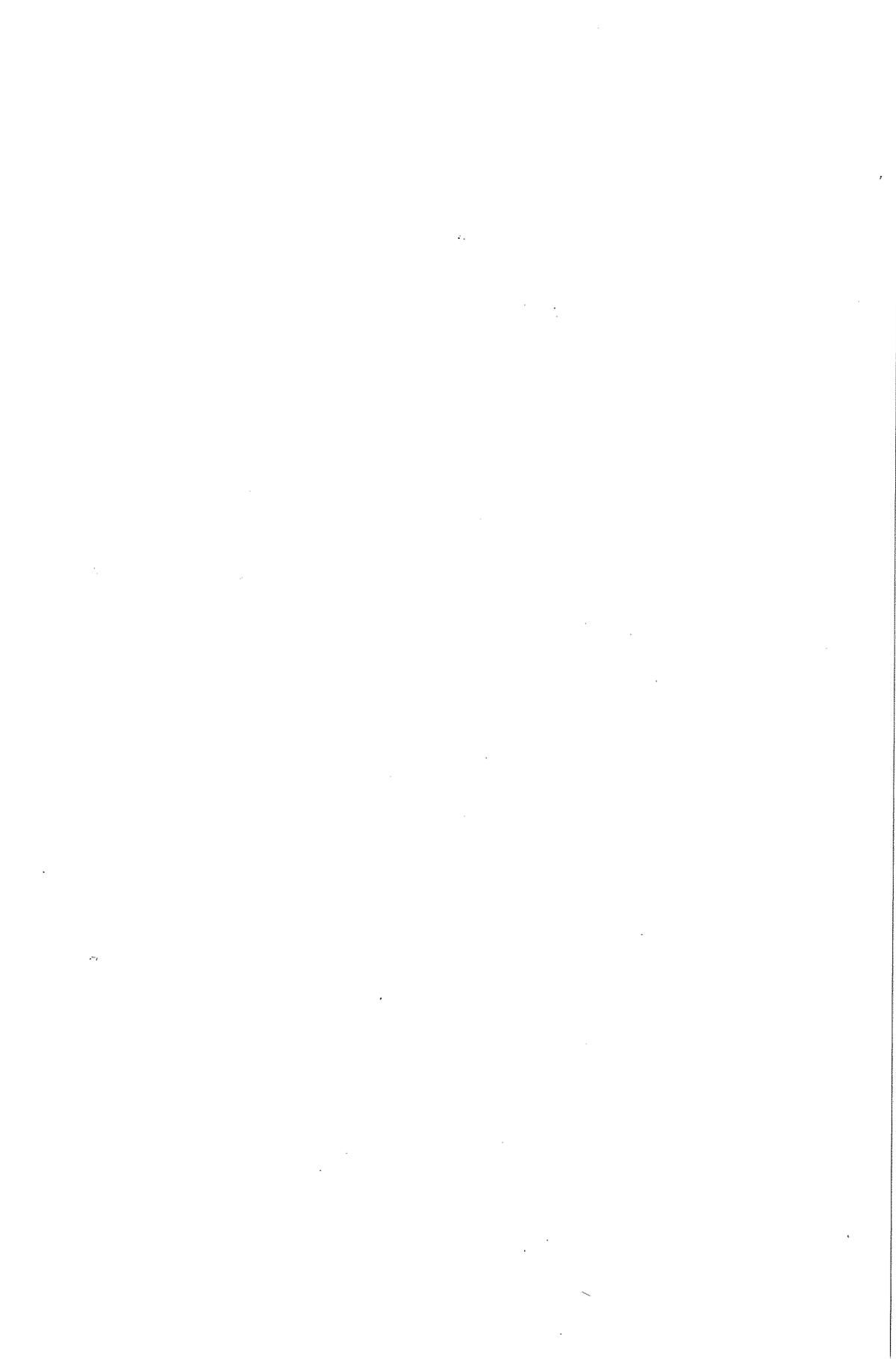
Lamentavelmente o Editorial do Vol. 11, nº 2 da Revista de Investigação Operacional, dedicado à "Política de Transportes Urbanos e Novas Tecnologias de Informação", que constituía o tema do Seminário da Boega (20-22 Outubro, 1991), omitiu o parágrafo referente à contribuição de António Arnaud.

O referido parágrafo é o seguinte:

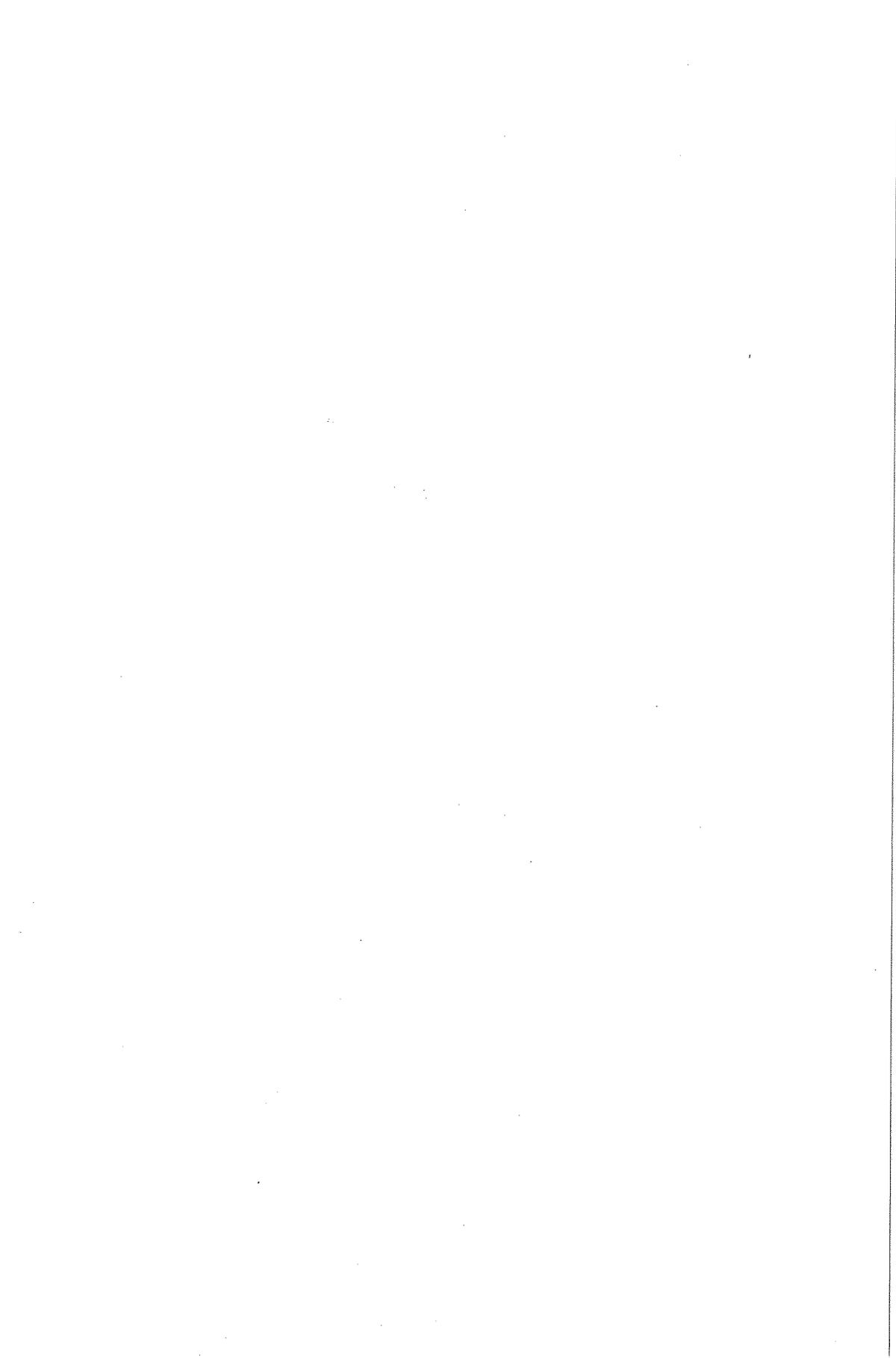
António Arnaud debruça-se sobre o contributo dos sistemas de informação geográfica para o planeamento de transportes. Após sublinhar a importância da informação desagregada sobre a procura para a exploração de modelos de planeamento de transportes, refere que a simbiose entre os SIG e aqueles modelos conduziu ao desenvolvimento de numerosos programas para o apoio no planeamento de transportes que se podem considerar Sistemas de Informação Geográfica para Transportes (SIG - T). São mencionados alguns dos instrumentos que esta nova tecnologia permite disponibilizar e descritos diversos projectos de âmbito nacional e internacional nesse domínio.

As estatísticas desagregadas relativas a pequenas áreas, que são objecto do projecto do Instituto Nacional de Estatística MUNISTAT, exemplificam as potencialidades desta abordagem no planeamento e demonstram a vantagem de definir essas pequenas áreas de acordo com critérios locais e de manter a actualização ao nível local para garantir adequabilidade aos fins de planeamento e assegurar fiabilidade de actualização.

José Dias Coelho  
Tomaz Ponce Dentinho  
Editores



**Fotografia, Montagem**  
**Impressão e Acabamentos**  
Tip. Nocamil  
COIMBRA





## ÍNDICE

<i>F. J. Bastos e J. Paixão</i> , Interior – Point approaches to the transportation and assignment problems on microcomputers.....	3
<i>J. C. Branco e R. C. Oliveira</i> , Um modelo de simulação de estações ferroviárias.....	17
<i>A. A. Rosa e A. M. Porta Nova</i> , Abordagem ao problema da localização de um centro de tratamento de correio e sua rede de transporte.....	31
<i>G. S. Coutinho, J. V. Ferreira e R. C. Guimarães</i> , Previsão da procura de um novo serviço de telefone móvel: metodologia e modelização.....	51
<i>M. Pereira-Leite e R. J. Rowlands</i> , Carta CUSUM para observações autorrelacionadas .....	73
<i>E. P. Barbosa e G. H. Brasil</i> , Análise de índices da produção industrial no Brasil via modelos lineares dinâmicos multivariados.....	83
Correcção ao Editorial, vol. 11, n.º 2.....	97



Associação Portuguesa para o Desenvolvimento  
da Investigação Operacional

CÉSUR - Instituto Superior Técnico - Avenida Rovisco Pais  
1000 Lisboa - Telef. 80 74 55