

# INVESTIGAÇÃO OPERACIONAL

Dezembro 1998

Número 2

Volume 10

Publicação Científica da



Associação Portuguesa para o Desenvolvimento  
da Investigação Operacional

# INVESTIGAÇÃO OPERACIONAL

Propriedade:

APDIO — Associação Portuguesa para o Desenvolvimento  
da Investigação Operacional

## ESTATUTO EDITORIAL

*«Investigação Operacional», órgão oficial da APDIO cobre uma larga gama de assuntos reflectindo assim a grande diversidade de profissões e interesses dos sócios da Associação, bem como as muitas áreas de aplicação da I. O. O seu objectivo primordial é promover a aplicação do método e técnicas da I. O. aos problemas da Sociedade Portuguesa.*

*A publicação acolhe contribuições nos campos da metodologia, técnicas, e áreas de aplicação e software de I. O. sendo no entanto dada prioridade a bons casos de estudo de carácter eminentemente prático.*

---

**Distribuição gratuita aos sócios da APDIO**

# INVESTIGAÇÃO OPERACIONAL

volume 10 - nº 2 - Dezembro 1990

Publicação semestral

Direcção : J.M. Pinto Paixão  
(Fac. Ciências - Universidade de Lisboa)  
J.J. Júdice  
(Fac. Ciências e Tecnologia - Univ. de Coimbra)

## Comissão Editorial

Mordecai Avriel	(Israel)	A. Simões Monteiro	(NORMA)
João A. Branco	(IST - Univ. Técn. Lisboa)	Mohamed Najim	(ENSIAS - Argélia)
Josep Casanovas	(UPC - Espanha)	J. Manuel Oliveira	(EFACEC)
J. Dias Coelho	(FE - Univ. Nova Lisboa)	Fernando Pacheco	(Univ. Católica)
Nuno Crato	(NORMA - Açores)	A. Gouvêa Portela	(IST-Univ.Técn.Lisboa)
J.A. Romão Eusébio	(CIMPOR)	M. Baptista Rodrigues	(Partex - CPS)
A. Sousa Ferraria	(Petrogal)	A. Guimarães Rodrigues	(Univ. Minho)
D. V. Gokhale	(Estados Unidos)	Bernard Roy	(LAMSADE- França)
J. Borges Gouveia	(FE - Univ. Porto)	C. Moreira da Silva	(FE - Univ. Porto)
R. Campos Guimarães	(FE - Univ. Porto)	L. Valadares Tavares	(IST-Univ.Técn.Lisboa)
Masao Iri	(TU - Japão)	Isabel H. Themido	(IST-Univ.Técn.Lisboa)
Joaquim J. Júdice	(FC - Univ. Coimbra)	B. Calafate Vasconcelos	(FE - Univ. Porto)
A. Rinnoy Kan	(EU - Holanda)	José M. Viegas	(IST-Univ.Técn.Lisboa)
Nelson Maculan	(UFRJ - Brasil)	Andres Weintraub	(UC - Chile)

A Revista "INVESTIGAÇÃO OPERACIONAL" está registada na Secretaria de Estado da Comunicação Social sob o nº108335.

Esta Revista é distribuída gratuitamente aos sócios da APDIO. As informações sobre inscrições na Associação, assim como a correspondência para a Revista devem ser enviadas para a sede da APDIO - Associação Portuguesa para o Desenvolvimento da Investigação Operacional - CESUR, Instituto Superior Técnico, Av. Rovisco Pais, 1000 Lisboa.

Este Volume foi subsidiado por :

**Instituto Nacional de Investigação Científica (INIC)**

**Junta Nacional de Investigação Científica e Tecnológica (JNICT)**

**Fundação Calouste Gulbenkian**

Para efeitos de dactilografia e composição, foram utilizados equipamentos gentilmente postos à disposição pelo CEAUL (DEIOC- Faculdade de Ciências de Lisboa).

Assinatura : 3000\$00

# SISTEMA COMPUTACIONAL PARA PLANIFICAÇÃO DO MOVIMENTO DE VAGÕES DA QUIMIGAL

J. Pinto Paixão  
M. Teresa Melo  
D.E.I.O.C.  
Faculdade de Ciências  
Av. 24 de Julho, 134-5º  
1300 Lisboa

Anabela S. Almeida  
Quimigal – Química de Portugal, EP  
Av. Infante Santo, 2  
1300 Lisboa

## Resumo

No presente trabalho descreve-se um sistema computacional para apoio à decisão na distribuição de adubos de unidades fabris para entrepostos e armazéns da Quimigal. O transporte dos adubos efectua-se por ferrovia através de um número limitado de vagões de carga que podem ser agrupados de diversas formas estando associados a cada uma delas custos de transporte diferentes. Assim, estabelecendo os níveis de procura nos entrepostos e armazéns, para um determinado horizonte temporal, pretende-se determinar a rotação dos vagões que minimiza os custos variáveis de transporte. Desenvolveu-se um sistema de apoio à decisão contendo um modelo matemático de fluxo de custo mínimo numa rede com restrições adicionais. Aplica-se a técnica da relaxação lagrangeana para obter um limite inferior do valor óptimo e durante a resolução do dual lagrangeano é utilizado um método heurístico, baseado em técnicas de optimização do subgradiente, para encontrar soluções admissíveis. Apresentam-se alguns resultados computacionais relativos a problemas reais.

**Keywords:** sistema de apoio à decisão, fluxos em redes, relaxação lagrangeana, heurística lagrangeana, subgradiente.

## Abstract

In this paper we present a decision support system for the distribution of fertilizers from factories to warehouses belonging to the portuguese firm Quimigal. The fertilizers are transported in a limited number of waggons that, on their side, can be grouped into three different ways each one of these having different travel costs. Hence, once fixed the demand for each warehouse over a certain period of time, one aims to route the waggons in order to minimize the variable transportation costs. For helping the planners at Quimigal, we developed a decision support system incorporating a minimal cost network flow model with side constraints. A lagrangian relaxation is applied in order to obtain lower bounds on the optimum and while solving the dual lagrangian problem, a heuristic method based on subgradient optimization techniques is applied to find feasible solutions. Some computational results from real-life problems are presented.

**Keywords:** decision support system, network flows, lagrangian relaxation, lagrangian heuristic, subgradient.

## 1. Introdução

A Quimigal, Química de Portugal EP, dispõe de um certo número de vagões de carga (Hikks) para efectuar o transporte de adubos desde as suas unidades fabris até aos seus entrepostos e armazéns. Definindo os níveis de procura nos entrepostos e armazéns, para um determinado horizonte temporal, que não pode exceder 4 semanas, o modelo encontra a forma mais económica de satisfazer a procura, minimizando os custos variáveis de transporte.

O transporte das mercadorias é da responsabilidade da CP, Caminhos de Ferro Portugueses EP, que aplica a cada tonelada de adubo uma taxa dependente da distância kilométrica percorrida e do tipo de transporte utilizado. Existem três modalidades diferentes de transporte : vagão isolado, grupo vagões e comboio bloco, sendo a primeira a mais dispendiosa e a última de menor custo.

## 2. Especificação do problema

Para definir o movimento óptimo dos vagões de carga e a planificação das saídas diárias de cada unidade fabril, é necessário ter em conta as seguintes restrições :

Relativamente a cada unidade fabril exige-se que :

- (R1) não se exceda o número máximo de dias possíveis para realizar a expedição dos adubos;
- (R2) não se exceda a sua capacidade de expedição total diária;
- (R3) não se exceda a sua capacidade de expedição diária referente a cada tipo de adubo;
- (R4) após o carregamento de um vagão permitir que este possa ser expedido no próprio dia ou no próximo dia em que a unidade fabril esteja em actividade;
- (R5) para os centros fabris geograficamente muito próximos uns dos outros, garantir que as suas saídas diárias coincidam para todas as encomendas que possuam o mesmo destino.

Relativamente a cada armazém e entreposto existe igualmente um certo conjunto de limitações que não podem ser ultrapassadas. Sabendo que um entreposto pode receber diariamente até 400 toneladas de adubo e um

armazém apenas admite no mesmo período quantidades não superiores a 300 toneladas, impõe-se que :

- (R6) se respeite o número máximo de dias possíveis para efectuar a recepção dos adubos;
- (R7) se satisfaça a procura de cada tipo de adubo;
- (R8) não se exceda a sua capacidade de recepção diária;
- (R9) não se viole a afectação existente entre tipo de adubo e unidade fabril.

Cada armazém e entreposto encontra-se afecto a uma unidade fabril relativamente a cada variedade de adubo, sendo a matriz de afectações (entreposto/armazém - tipo de adubo - unidade fabril) estabelecida pela Quimigal.

No que se refere ao transporte dos vagões exige-se que :

- (R10) não se exceda a capacidade de carga de um vagão que é de 16,8 toneladas;
- (R11) se respeitem as tonelagens associadas a cada tipo de transporte;
  - Tipo 1 - vagão isolado: de 0 a 100 toneladas (exclusive)
  - Tipo 2 - grupo vagões: de 100 a 400 toneladas (exclusive)
  - Tipo 3 - comboio bloco: a partir de 400 toneladas (inclusive)
- (R12) apenas se possam transportar vagões das unidades fabris para os entrepostos e armazéns no seu limite máximo de carga;  
Nas ligações centros fabris → entrepostos/armazéns não é permitido utilizar um vagão contendo menos de 16,8 toneladas de adubo. Assim, se o nível de procura no armazém A consistir em 100 toneladas de adubo do tipo B, serão necessários 6 vagões para satisfazer o pedido, o que corresponde a 100,8 toneladas. O armazém receberá mais 800 kg relativamente ao que necessita para que se aproveite, totalmente, a capacidade de cada vagão.
- (R13) um vagão só transporte um tipo de adubo;  
É necessário garantir que não se misturem, num mesmo vagão, diversas variedades de adubo. No entanto, qualquer

conjunto de vagões pode transportar diferentes tipos de adubo desde que estes sigam em vagões separados.

- (R14) cada vagão tenha um único destino;

Um vagão não pode abastecer na mesma viagem vários entrepostos e/ou armazéns.

- (R15) não se efectue circulação de vagões, carregados, durante o fim-de-semana;

Por imposição da CP, não é possível transportar vagões carregados de adubo ao sábado e ao domingo. Contudo, um vagão vazio pode circular ao fim-de-semana vindo de qualquer entreposto ou armazém e dirigindo-se para qualquer centro fabril.

- (R16) se respeitem os tempos de deslocação entre as unidades fabris e os entrepostos/ armazéns;

O percurso realizado por cada vagão (ou conjunto de vagões) desde uma unidade fabril (UF) até um entreposto ou armazém (E), é contabilizado em termos de dias e resulta do somatório do tempo necessário para efectuar o carregamento do vagão ( $tc(UF)$ ), do tempo de viagem entre a origem e o destino ( $d(UF,E)$ ), do tempo de descarga ( $td(E)$ ) e ainda de um parâmetro  $\xi$ . A duração da viagem é definida pela CP. Quanto aos tempos de carga e de descarga, estes são da responsabilidade da Quimigal, fixando-se normalmente 1 dia para cada um deles. Relativamente a  $\xi$ , trata-se de uma quantidade valendo 2 ou 0 consoante seja ou não necessário interromper a viagem devido à restrição (R15). Assim, um vagão que no dia  $D$  sai de uma unidade fabril (UF) com destino a um entreposto (E), só pode lá chegar no dia  $D + (tc(UF) + d(UF,E) + td(E) + \xi)$ . Se, por exemplo,  $D$  corresponder a uma 2ª feira,  $tc(UF) = 1$ ,  $d(UF,E) = 2$  e  $td(E) = 1$ , a chegada ocorrerá na 6ª feira. Mas se  $D$  coincidir com 3ª feira, o vagão chegará apenas na 2ª feira da semana seguinte. No 1º caso,  $\xi = 0$  e no 2º,  $\xi = 2$ .



(R17) se respeitem os tempos de deslocação entre os entrepostos/armazéns e as unidades fabris;

O percurso desde um entreposto, ou armazém, até um centro fabril permite que os vagões possam ser recarregados. A sua duração exprime-se em dias e é definida pela CP, não sendo necessário incluir tempos de carga e de descarga pois os vagões circulam vazios. Supondo que no dia  $\bar{D}$  inicia-se a viagem de um vagão de um entreposto (E) para uma unidade fabril (UF), que não tem de ser necessariamente a de origem, então este vagão só poderá chegar no dia  $\bar{D} + d(E,UF)$ . Caso nesse dia a unidade fabril esteja fechada, deve-se dar a possibilidade de utilizar o vagão no próximo dia de actividade da fábrica. Por exemplo, se  $\bar{D} = 6^{\text{a}}$  feira e  $d(E,UF) = 1$ , o dia de chegada coincidirá com sábado. No caso da unidade fabril não funcionar durante o fim-de-semana, considera-se que o vagão estará disponível a partir da 2<sup>a</sup> feira da semana seguinte.

(R18) não se exceda diariamente o número máximo de vagões que a Quimigal dispõe para efectuar o transporte dos adubos.

### 3. Modelo Matemático

O modelo desenvolvido para o planeamento da movimentação de vagões de carga da Quimigal baseia-se na técnica matemática de fluxos em redes, à qual se aplica uma relaxação lagrangeana. Descreve-se, em seguida, a estrutura da rede que acompanha de perto o modelo.

#### 3.1 Construção de uma rede para o modelo

O processo de geração da rede subjacente ao modelo realiza-se por etapas num total de doze, considerando-se como unidade de fluxo, um vagão de carga.

Na primeira etapa representa-se a disponibilidade total de vagões (restrição (R18)) da seguinte forma :

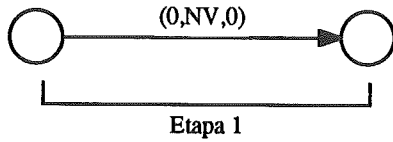


Figura 3.1.1

O fluxo mínimo que atravessa o arco é nulo, o fluxo máximo corresponde ao número de vagões que é possível utilizar (NV) e o custo por unidade de fluxo é zero.

Na segunda etapa, cada unidade fabril activa,  $UF_1, UF_2, \dots, UF_k$ , é representada por um nodo, obtendo-se o seguinte diagrama :

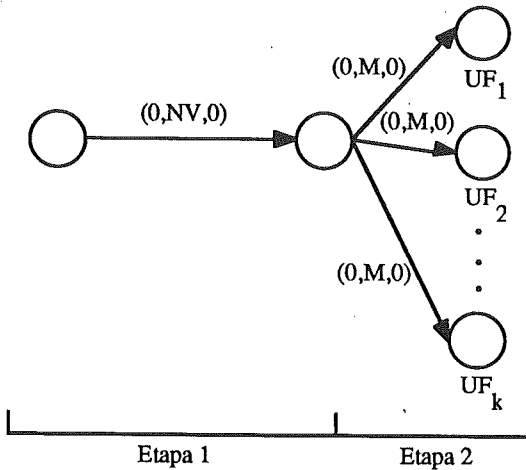
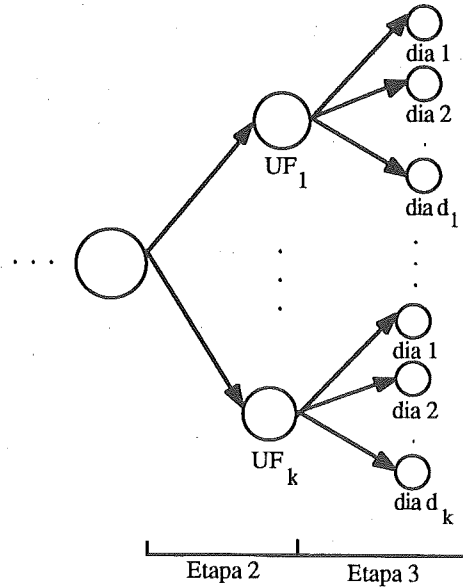


Figura 3.1.2

Para cada arco construído nesta etapa, fixam-se o fluxo mínimo e o custo por unidade de fluxo a zero e toma-se como fluxo máximo um valor  $M$  suficientemente grande.

Na terceira etapa gera-se em cada nodo relativo a um centro fabril, uma sequência de arcos para um conjunto de nodos representando os respectivos dias de actividade tal como mostra a figura 3.1.3.

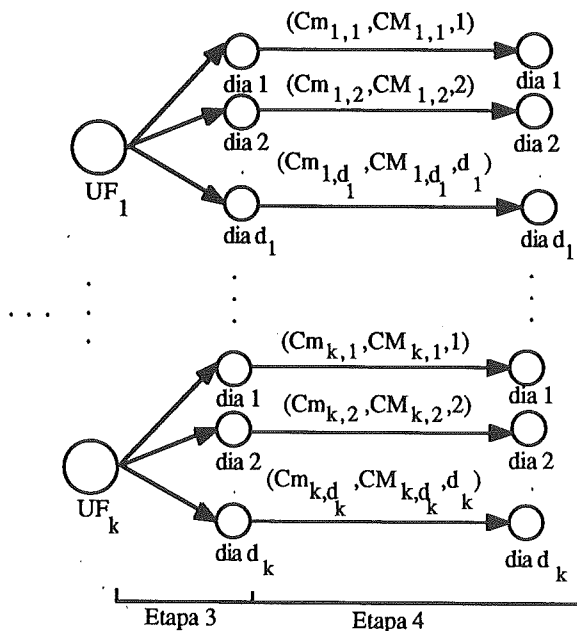


Tem-se, em cada arco, de ambas as etapas,  $(0, M, 0)$ .

Figura 3.1.3

A cada arco desta etapa associam-se um fluxo mínimo nulo, um fluxo máximo de  $M$  vagões (sendo  $M$  um valor suficientemente grande) e um custo igualmente nulo por unidade de fluxo.

Em seguida repetem-se os dias possíveis para expedição de adubo em cada centro fabril activo, criando-se tantos arcos e nodos quanto o número de dias. Define-se o fluxo máximo de cada arco como sendo a capacidade de expedição total do dia e da unidade fabril a que corresponde o arco, de modo a não violar a restrição (R2). O fluxo mínimo será naturalmente nulo a menos que se queira impor um nível mínimo de expedição. Em relação ao custo por unidade de fluxo, toma-se o número do dia que se está a analisar. A figura 3.1.4 mostra a estrutura da rede após esta etapa.



$Cm_{k,d_k}$  : capacidade mínima de expedição da unidade fabril k, no dia  $d_k$ .  
 $CM_{k,d_k}$  : capacidade máxima de expedição da unidade fabril k, no dia  $d_k$ .

Figura 3.1.4

Dado que o custo de transporte de uma tonelada de adubo, de uma origem para um destino, não depende do dia em que a expedição ocorre, fixar um custo por cada dia de actividade tem como objectivo penalizar a saída dos adubos, de modo a que esta se realize o mais cedo possível.

Na quinta etapa representam-se os diferentes tipos de adubo que são expedidos diariamente em cada unidade fabril activa tal como se pode ver na figura 3.1.5. Para cada arco desta etapa toma-se como fluxo máximo a capacidade de expedição da fábrica relativamente ao tipo de adubo a que se refere esse mesmo arco, garantindo-se assim o respeito pela restrição (R3). Tal como na etapa anterior, também aqui é possível forçar um nível mínimo de expedição para um, ou mais, tipos de adubo de modo que o fluxo mínimo não tem de ser obrigatoriamente nulo. O custo por unidade de fluxo é fixo a zero.

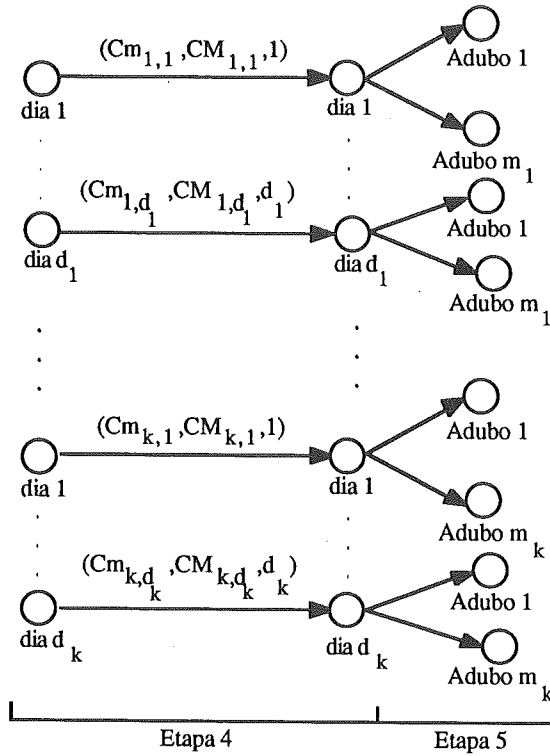


Figura 3.1.5

Em cada arco da 5ª etapa tem-se  $(Cm_{k,d_k,m}, CM_{k,d_k,m}, 0)$ , sendo  $Cm_{k,d_k,m}$  e  $CM_{k,d_k,m}$  respectivamente, as capacidades mínima e máxima de expedição na unidade fabril  $k$ , no dia  $d_k$ , para o adubo do tipo  $m$ .

A sexta etapa ocupa-se da representação dos possíveis dias de chegada das diversas encomendas de adubo, a cada entreposto e armazém. Os dias de chegada, identificados por nodos, são agrupados segundo a unidade fabril de onde é expedido cada tipo de adubo. Para cada arco estabelece-se um fluxo mínimo nulo, um fluxo máximo igual ao nível de procura do adubo a que se refere o arco e um custo por unidade de fluxo também nulo. A estrutura desta etapa tem em conta a satisfação das restrições (R4) (carregamento e expedição no mesmo dia e em dias sucessivos), (R6) (não se pode exceder o horizonte temporal para recepção dos adubos nos entrepostos e armazéns), (R9) (afectação entreposto/armazém - tipo de adubo - unidade fabril), (R13) (um vagão só pode transportar um tipo de adubo), (R14) (um vagão possui um

único destino), (R15) (não existe circulação de vagões carregados ao fim-de-semana) e (R16) (respeito pelo tempo de deslocação desde a unidade fabril até ao entreposto/armazém). A figura 3.1.6 apresenta, esquematicamente, as operações que se efectuam nesta etapa.

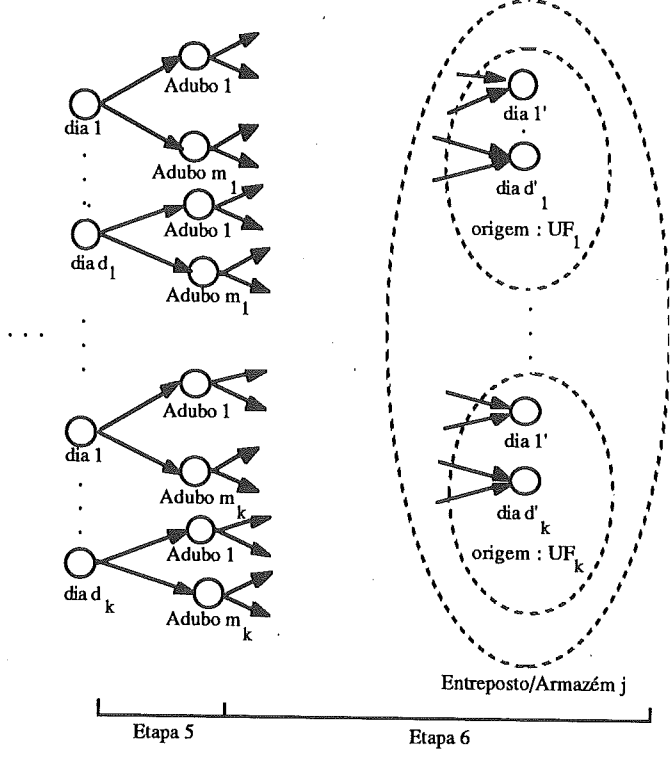
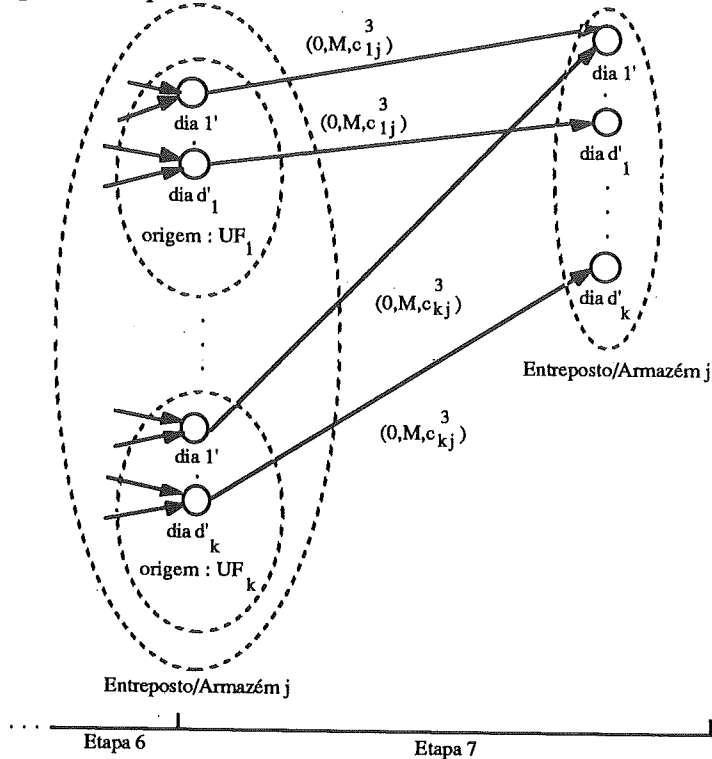


Figura 3.1.6

A etapa seguinte (a sétima) consiste em representar, com nodos, os dias de chegada das diversas encomendas, independentemente das unidades fabris de onde são expedidos tal como se observa na figura 3.1.7. A cada nodo criado em cada entreposto/armazém ficam ligados todos os nodos da etapa anterior correspondentes ao mesmo dia de chegada. Relativamente aos arcos, fixa-se o seu fluxo mínimo a zero, toma-se para fluxo máximo um valor  $M$  suficientemente grande e atribui-se ao custo por unidade de fluxo o custo associado ao tipo de transporte menos dispendioso, ou seja, ao tipo 3 (comboio bloco).

Na estrutura que até ao momento se estabeleceu para representar o problema não é possível incluir simultaneamente os diferentes tipos de

transporte e os respectivos custos. As penalizações que são levadas a cabo nos dias de carregamento dos adubos nos vagões (quarta etapa) e nos dias de recepção dos mesmos nos entrepostos e armazéns, como se verá adiante, obrigam a saturar diariamente a capacidade de expedição das unidades fabris, bem como a capacidade de recepção dos entrepostos e armazéns. No entanto, este processo não garante necessariamente que cada encomenda seja transportada em comboio bloco. De facto, como a capacidade de recepção de qualquer armazém é inferior a 400 toneladas, não é possível utilizar, neste caso, o tipo de transporte 3.

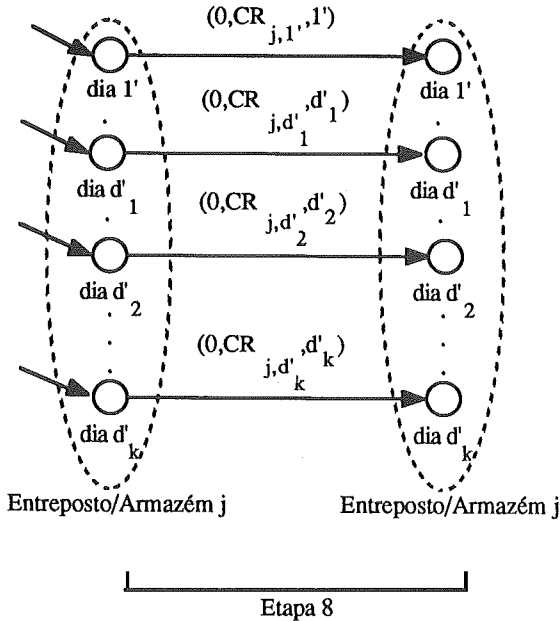


$c^3_{kj}$  : custo de transportar um vagão de adubo entre a unidade fabril k e o entreposto/armazém j utilizando o tipo de transporte 3 (comboio bloco).

Figura 3.1.7

Na oitava etapa repetem-se os dias possíveis para recepção dos adubos em cada entreposto e armazém activos, criando-se tantos arcos e nodos quanto o número de dias. Estabelecem-se para cada arco um fluxo mínimo nulo e um fluxo máximo igual à capacidade de recepção do entreposto/armazém no dia a

que corresponde o arco, garantindo-se assim a satisfação da restrição (R8). Quanto ao custo por unidade de fluxo, fixa-se um valor igual ao respectivo número do dia. Na figura 3.1.8 pode-se observar a estrutura da rede após esta etapa.



$CR_{j,d'_k}$ : capacidade máxima de recepção do entreposto/armazém j, no dia  $d'_k$

Figura 3.1.8

Após o abastecimento diário de um entreposto ou armazém, os vagões podem regressar a qualquer unidade fabril para serem novamente carregados. Contudo, se a totalidade da procura for inferior ao número máximo de vagões disponíveis, é natural que não seja necessário efectuar viagens no sentido entreposto/armazém  $\rightarrow$  unidade fabril e nesse caso considera-se que os vagões são conduzidos para um "depósito". A nona etapa ocupa-se da representação deste tipo de situações. Na figura 3.1.9 apresentam-se de forma esquemática todas as operações realizadas. Observa-se que os arcos gerados são da forma  $(0,M,0)$ .



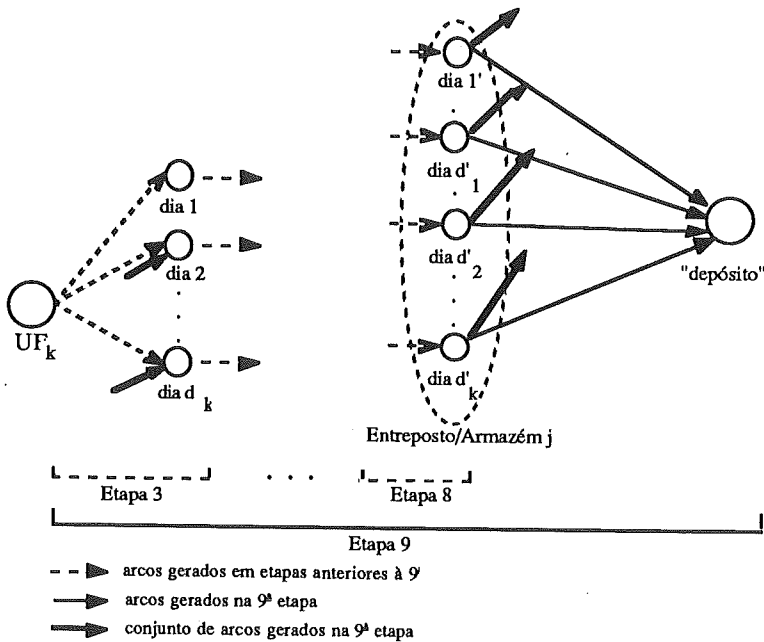


Figura 3.1.9

Ao fixar um determinado horizonte temporal para actividade nas unidades fabris, é provável que os últimos dias de expedição conduzam à recepção dos adubos em dias em que as fábricas já se encontram fechadas. Assim, quando se volta a utilizar o modelo, não se dispõe, à partida, da totalidade dos vagões livres, pois uma parte fica em circulação. A décima etapa destina-se a incluir na rede a informação correspondente à última utilização do modelo e que tem consequências no planeamento que se pretende obter.

Na décima primeira etapa dá-se a possibilidade de que parte ou todo dos vagões que regressa a uma unidade fabril, num determinado dia, seja utilizada numa data posterior. Para isso geram-se arcos ligando os nodos da terceira etapa que representam dias sucessivos de actividade em cada unidade fabril.

Finalmente, a rede fica completa através da ligação do nodo final, designado por "depósito" (e proveniente da nona etapa), ao primeiro nodo, tal como mostra a figura 3.1.10. O fluxo mínimo e o custo por unidade de fluxo do arco gerado são fixos a zero. Toma-se para fluxo máximo um valor  $M$  suficientemente grande. Este arco representa o regresso dos vagões ao "depósito de partida".

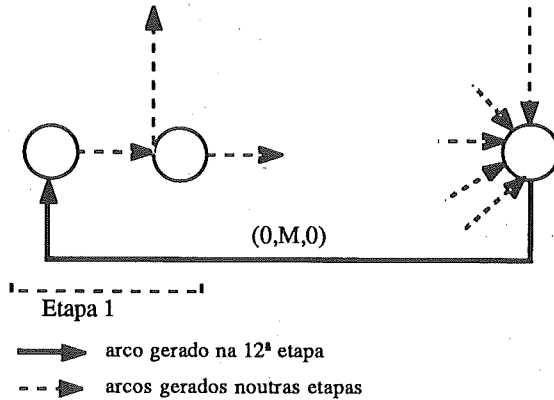


Figura 3.1.10

A figura 3.1.11 apresenta uma rede completa relativa a um pequeno exemplo. Como se pode observar, existem 350 vagões disponíveis no início do planeamento e encontram-se em actividade duas unidades fabris. A primeira pode expedir até 400 toneladas de adubo A na 2ª e 3ª feiras, enquanto que a segunda apenas está aberta na 2ª feira podendo expedir nesse dia 100 toneladas de adubo B e 300 toneladas de adubo C. Com este mapa de expedições é necessário abastecer um determinado entreposto com 500 toneladas de adubo A, 100 toneladas de adubo B e 200 toneladas de adubo C. Os custos de transporte em comboio bloco variam com a distância percorrida sendo de 600 unidades monetárias quando a expedição é efectuada a partir da unidade fabril 1 e de 540 unidades monetárias quando a mesma se faz a partir da unidade fabril 2. Observe-se que devido à reduzida dimensão deste exemplo não se geram na rede os arcos e nodos respeitantes às etapas 10 e 11.

### 3.2 Formulação Matemática

Tendo em conta a estrutura da rede e sabendo que não existe nenhum arco possuindo ao mesmo tempo fluxo mínimo e custo por unidade de fluxo positivos, deduz-se facilmente que o fluxo mais económico que pode atravessar a rede não satisfaz a restrição (R7), ou seja, os entrepostos e armazéns não recebem as suas encomendas. Assim, não se tem apenas um problema de determinação do fluxo de custo mínimo numa rede, sendo necessário juntar restrições que garantam a execução de todos os pedidos. Por

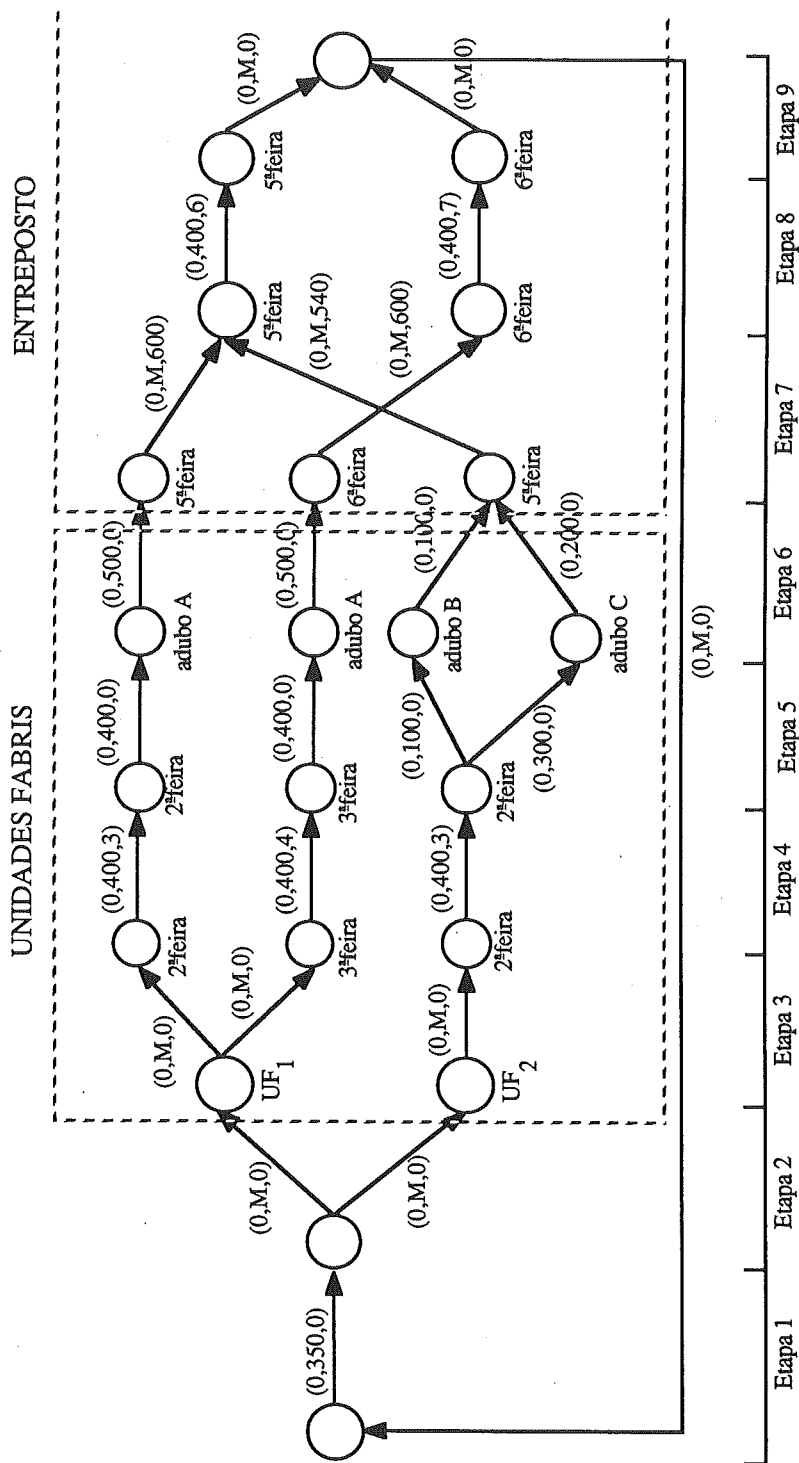


Figura 3.1.11

razões de simplicidade representa-se por (P) este problema de fluxo de custo mínimo com restrições adicionais.

Seja então  $\mathcal{R} = (\mathcal{V}, \mathcal{A}, c)$  a rede cuja geração se descreveu na secção anterior, e em que  $(\mathcal{V}, \mathcal{A})$  designa um grafo  $\mathcal{G}$  e  $c$  representa as capacidades associadas aos arcos de  $\mathcal{A}$ . O conjunto  $\mathcal{A}$  resulta da união de conjuntos  $\mathcal{A}_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, 12$ , sendo  $\mathcal{A}_i \equiv$  conjunto dos arcos gerados na  $i$ ésima etapa.  $\mathcal{V}$  é constituído pelos nodos de  $\mathcal{G}$ .

Considere-se, também, um conjunto de  $n$  pedidos indexados em  $P = \{1, 2, \dots, n\}$ . Cada elemento de  $P$  corresponde a um tipo de adubo que é encomendado por um entreposto ou armazém e expedido a partir de uma unidade fabril. Designa-se por  $b_p$  ( $b_p > 0, \forall p \in P$ ) a procura, em número de vagões, do pedido  $p$ . Para cada  $p \in P$  define-se  $\mathcal{A}'_p$  como sendo o conjunto de todos os arcos da 6ª etapa ( $\mathcal{A}_6$ ) relativos aos possíveis dias de chegada do pedido ao seu destino. Verifica-se que  $\mathcal{A}'_p \subset \mathcal{A}_6, \forall p \in P$ .

Tomando  $i$  pertencendo a  $\mathcal{V}$ ,  $\Gamma^+(i)$  representa o conjunto dos seus sucessores enquanto que  $\Gamma^-(i)$  define o conjunto dos seus antecessores. Para cada elemento  $(i,j) \in \mathcal{A}$  tem-se ainda:

- $\xi_{ij} \equiv$  fluxo que atravessa o arco;
- $\ell_{ij} \equiv$  limite inferior no fluxo sobre o arco;
- $u_{ij} \equiv$  limite superior no fluxo sobre o arco;
- $c_{ij} \equiv$  custo unitário de transporte no arco.

Além disso, considera-se que  $\ell_{ij}$  e  $u_{ij}$  são inteiros tais que  $0 \leq \ell_{ij} \leq u_{ij}$  e  $c_{ij} \geq 0 \forall (i,j) \in \mathcal{A}$ .

(P) consiste então em determinar :

$$\text{Min} \quad \sum_{(i,j) \in \mathcal{A}_4 \cup \mathcal{A}_7 \cup \mathcal{A}_8} c_{ij} \xi_{ij} \tag{1}$$

sujeito a :

$$\sum_{j \in \Gamma^+(i)} \xi_{ij} - \sum_{j \in \Gamma^-(i)} \xi_{ji} = 0 \quad \forall i \in \mathcal{V} \tag{2}$$

$$\sum_{(i,j) \in \mathcal{A}'_p} \xi_{ij} = b_p \quad \forall p \in P \tag{3}$$

$$\ell_{ij} \leq \xi_{ij} \leq u_{ij} \quad \forall (i,j) \in \mathcal{A} \tag{4}$$

$$\xi_{ij} \geq 0 \quad \forall (i,j) \in \mathcal{A} \tag{5}$$

Relativamente à formulação apresentada observa-se que :

- a expressão (1) traduz o nosso objectivo, ou seja, encontrar a melhor forma de servir os entrepostos e armazéns minimizando o custo total de transporte;
- as restrições (2) asseguram que o fluxo numa rede não pode ser criado nem destruído;
- as restrições (3) impõem a satisfação do nível de procura estabelecido para cada pedido;
- as restrições (4) obrigam o fluxo em cada arco a ser compatível, isto é, não pode ultrapassar os limites inferior e superior fixados;
- as restrições (5) garantem que o fluxo em cada arco é positivo ou nulo.

Tal como se referiu na 7ª etapa de geração da rede, (P) não descreve o problema real visto não incluir todos os tipos de transporte. Sejam  $\{\xi_{ij}^*\}$  uma solução óptima para (P) e  $v(P)$  o correspondente valor óptimo. Então :

$$v(P) = \sum_{(i,j) \in \mathcal{A}_4 \cup \mathcal{A}_7 \cup \mathcal{A}_8} c_{ij} \xi_{ij}^*$$

e por conseguinte  $\bar{v}(P) = \sum_{(i,j) \in \mathcal{A}_7} c_{ij} \xi_{ij}^*$  constitui um limite inferior para o

valor óptimo do problema real pois na prática os custos de  $\mathcal{A}_4$  e  $\mathcal{A}_8$  não existem .

Embora possuindo uma estrutura complexa, (P) pode ser encarado como um problema de fácil resolução ao qual se juntou um certo número de restrições complicadas. Com efeito, se retirarmos de (P) as restrições (3) obtemos um problema de fluxo de custo mínimo, existindo diversas formas de o resolver [2]. Aproveitando então a estrutura de (P), vai-se criar um novo problema em que as restrições (3) são penalizadas na função objectivo.

### 3.3 Relaxação Lagrangeana

Seja  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$  um vector de multiplicadores de Lagrange associados às restrições (3). Aumentando a função (1) com estas restrições obtém-se uma relaxação de (P) dada pelo seguinte problema :

$$(PR\lambda) \quad \text{Min} \quad \sum_{(i,j) \in \mathcal{A}_4 \cup \mathcal{A}_7 \cup \mathcal{A}_8} c_{ij} \xi_{ij} - \sum_{p \in P} \sum_{(i,j) \in \mathcal{A}_p} \lambda_p \xi_{ij} + \sum_{p \in P} \lambda_p b_p \quad (1')$$

sujeito a :

$$\sum_{j \in \Gamma(i)} \xi_{ij} - \sum_{j \in \Gamma^-(i)} \xi_{ji} = 0 \quad \forall i \in \mathcal{V} \quad (2)$$

$$l_{ij} \leq \xi_{ij} \leq u_{ij} \quad \forall (i,j) \in \mathcal{A} \quad (4)$$

$$\xi_{ij} \geq 0 \quad \forall (i,j) \in \mathcal{A} \quad (5)$$

Verifica-se que a dualização das restrições (3), à maneira lagrangeana, dá origem a um problema que se resolve facilmente através de um algoritmo standard de fluxo de custo mínimo [2] tal como já foi referido.

Sabendo que  $c_{ij} > 0, \forall (i,j) \in \mathcal{A}_4 \cup \mathcal{A}_7 \cup \mathcal{A}_8, b_p > 0, \forall p \in P, \xi_{ij} \geq 0, \forall (i,j) \in \mathcal{A}$  e examinando a função objectivo de  $(PR\lambda)$ , verifica-se que cada  $\lambda_p, p \in P$ , deve ser positivo ou nulo. Consequentemente, o valor óptimo do problema relaxado,  $\nu(PR\lambda)$ , é um limite inferior para  $\nu(P) : \nu(PR\lambda) \leq \nu(P)$ . Para encontrar o "melhor" (i.e. maior) limite inferior resolve-se o problema dual Lagrangeano de (P) :

$$(D) \quad L_D = \text{Max } \nu(PR\lambda)$$

sujeito a :

$$\lambda \geq 0$$

A escolha do vector de multiplicadores  $\lambda$  que maximiza  $\nu(PR\lambda)$  é dada pelo método do subgradiente proposto por Held *et al.* [1]. Supondo que se resolveu  $(PR\lambda)$  para um determinado vector  $\lambda$ , toma-se

$$g_p = b_p - \sum_{(i,j) \in \mathcal{A}_p} \xi_{ij}, \quad \forall p \in P$$

e define-se o vector  $g = (g_1, g_2, \dots, g_n)$  como um subgradiente. Este é utilizado para gerar uma sequência  $\{\lambda^k\}, k = 1, 2, \dots$  de soluções não negativas para o dual Lagrangeano.

Descrição do Método do Subgradiente

1. Inicializar o vector de multiplicadores de Lagrange.
2. Dado  $\lambda$ , resolver o problema relaxado (PR $\lambda$ ) para obter uma solução  $\{\bar{\xi}_{ij}\}$  e o correspondente  $\nu(\text{PR}\lambda)$ ; calcular o valor de cada componente  $g_p, p \in P$ , do vector subgradiente.
3. Se se verificar algum critério de paragem do método STOP, caso contrário ir para 4.
4. Actualizar os multiplicadores de Lagrange através da expressão :
 
$$\lambda_p = \text{Max} \{ c_p, \lambda_p + Q_p g_p \}, \quad \forall p \in P$$
 onde  $c_p$  e  $Q_p$  designam constantes positivas. Voltar a 2.

O estudo do comportamento de vários problemas teste [3] mostrou que se obtêm bons resultados inicializando cada multiplicador com o custo de transporte de um vagão em comboio bloco para o pedido p. Relativamente ao passo 2, resolve-se (PR $\lambda$ ), para  $\lambda \in \mathbb{R}^n$  fixo, aplicando um algoritmo standard de fluxo de custo mínimo. Quanto à terminação do método, adoptaram-se os seguintes critérios :

- a)  $\forall p \in P, g_p \equiv 0$  (o vector subgradiente é identicamente nulo);
- b) Designando por  $\overline{\nu(P)}$  um limite superior para o valor óptimo de (P), o método termina se  $\frac{\overline{\nu(P)} - \nu(\text{PR}\lambda)}{\overline{\nu(P)}} < \delta$ , sendo  $\delta \in \mathbb{R}$  um valor muito pequeno;
- c) Atingiu-se o número máximo de iterações pré-estabelecido.

Em relação à constante  $Q_p, p \in P$ , Held *et al.* [1] propõem a seguinte expressão :

$$Q_p = \frac{\alpha (\overline{\nu(P)} - \nu(\text{PR}\lambda))}{\sum_{p \in P} g_p^2}, \quad \forall p \in P$$

onde  $\overline{\nu(P)}$  é um limite superior para  $\nu(P)$  e  $\alpha$  uma constante entre 0 e 2. Inicializa-se frequentemente  $\alpha$  a 2 e sempre que o limite inferior não aumenta durante k iterações sucessivas do método, divide-se  $\alpha$  ao meio.  $\alpha$  é reinicializado quando se torna inferior a  $\epsilon$ , sendo habitual fixar  $\epsilon = 0.0005$ .

Finalmente, para  $c_p, p \in P$ , obtiveram-se bons resultados utilizando os valores com que se inicializam as componentes de  $\lambda$  no passo 1 [3], ou seja, os custos associados ao transporte em comboio bloco.

Durante a optimização do dual Lagrangeano (D) não existe a garantia de encontrar uma solução admissível para (P). Todavia, se tal suceder, como as restrições relaxadas são igualdades, sabe-se que essa solução é óptima. No entanto, à custa de uma solução de  $(PR_\lambda)$ , não admissível para (P), é possível construir uma solução que satisfaça a procura em todos os entrepostos e armazéns. Tal técnica denomina-se heurística Lagrangeana.

### 3.4 Heurística Lagrangeana

O método de geração de soluções admissíveis para (P) a partir de soluções de  $(PR_\lambda)$  baseia-se em técnicas de optimização do subgradiente e explora a estrutura específica de (P) permitindo obter um limite superior para  $v(P)$ . O processo consiste em obrigar que determinadas quantidades de fluxo atravessem os arcos de cada restrição (3) de modo a garantir a satisfação da respectiva procura. Utiliza-se para isso um método "reduzido" do subgradiente e em cada iteração do algoritmo toma-se para subgradiente o

vector de componentes  $\bar{g}_p = b_p - \sum_{(i,j) \in \mathcal{A}_p} \xi_{ij}$  tal que  $\sum_{(i,j) \in \mathcal{A}_p} \xi_{ij} \neq b_p, p \in P$ .

A cada restrição (3) que não seja verificada associa-se um multiplicador  $\bar{\lambda}_p$ ,  $\bar{\lambda}_p \geq 0$ , que é inicializado com o correspondente  $\lambda_p$  e actualizado de forma semelhante à indicada na descrição do método do subgradiente. Para cada  $\bar{\lambda}$  de componentes  $\bar{\lambda}_p, p \in P$ , resolve-se o respectivo problema de fluxo de custo mínimo.

Se mediante a aplicação da heurística se obtiver um limite superior melhor que o que se dispõe até ao momento, segue-se para o método do subgradiente com o vector de multiplicadores  $\bar{\lambda}_p$ , sendo  $\bar{\lambda}_p$  o multiplicador que originou a satisfação da restrição  $p$ . Nesse caso não se efectua o passo 4 seguindo-se directamente para o passo 2. A aplicação da heurística pode ser feita em qualquer iteração do método geral do subgradiente.



#### 4. Resultados Computacionais

O modelo descrito foi implementado em computador pessoal (sistema operativo MS/DOS), codificado em Pro Fortran-77, podendo ser utilizado com facilidade por indivíduos não especializados quer no campo da informática, quer no campo da matemática. Não existe qualquer limitação no número a considerar de unidades fabris, armazéns, entrepostos e variedades de adubo. Possibilita-se também a existência de unidades fabris fechadas, procura não envolvendo a totalidade dos entrepostos e armazéns, produção de um número restrito de tipos de adubo, prioridade no abastecimento de algum entreposto ou armazém e prioridade de saída de tipos de adubo.

Efectuaram-se testes num total de 8 problemas correspondentes a casos reais ocorridos na Quimigal apresentando-se na tabela da página seguinte os resultados obtidos mediante a utilização de um microcomputador pessoal Unisys PW/300.

$|V|$  e  $|A|$  designam, respectivamente, o número de nodos e de arcos que constituem cada rede gerada, enquanto que GAP representa a distância percentual do melhor limite inferior (ZL) ao melhor limite superior (ZUB), determinada através da expressão :

$$GAP = \frac{ZUB - ZL}{ZL} * 100$$

Da observação da tabela resulta que:

- a utilização do passo  $\alpha = 2.0$  permite encontrar em 75% dos casos maior número de soluções admissíveis que com o passo  $\alpha = 1.5$  e leva inclusivamente a que em 3 de 6 exemplos, o limite superior seja melhor que o produzido por  $\alpha = 1.5$ . Nos restantes 15% obtém-se igual número de soluções admissíveis, tanto com  $\alpha = 1.5$  como com  $\alpha = 2.0$ ;
- para  $\alpha = 2.0$ , em 7 dos problemas testados, o melhor limite inferior conseguido é menor que o alcançado com o passo 1.5, sendo o correspondente GAP maior;
- a sucessão de limites inferiores gerados a partir do Método do Subgradiente é um pouco irregular e, em média, o passo  $\alpha$  foi reinicializado por duas vezes. No entanto, os GAP's obtidos são bastante bons, tendo-se fixado a distância máxima ao limite superior

em 2.261% (exemplo 5;  $\alpha = 2.0$ ) e a mínima em 0.161% (exemplo 2;  $\alpha = 1.5$ );

- em 87.5% dos casos obtém-se um GAP menor com  $\alpha = 1.5$ . No exemplo 6 a situação inverte-se, correspondendo a  $ZL_2 > ZL_1$  e  $ZUB_2 < ZUB_1$ , onde  $ZL_k$  e  $ZUB_k$ ,  $k = 1, 2$ , designam os melhores limites inferior e superior, respectivamente;
- em relação ao tempo de CPU gasto, verifica-se que quando  $\alpha = 2.0$  este aumenta comparando com  $\alpha = 1.5$ , devido a ter-se encontrado um maior número de soluções admissíveis. De um modo geral, o tempo de execução do algoritmo cresce rapidamente com a dimensão da rede subjacente ao problema.

Ex.	$ V $	$ A $	$\alpha$	Nº total de sol.admis.	Melhor limite inferior	Melhor limite superior	GAP (%)	Tempo CPU (minutos)
1	95	153	1.5	9	86 203.8368	87 654.0	1.682	14.789
			2.0	9	86 601.7478	87 654.0	1.215	15.241
2	107	221	1.5	5	119 907.1940	120 100.0	0.161	31.427
			2.0	10	119 619.9605	120 100.0	0.401	32.458
3	145	247	1.5	4	102 667.8650	103 359.0	0.673	31.792
			2.0	8	102 602.6030	103 359.0	0.737	36.503
4	199	339	1.5	10	108 745.3801	109 410.0	0.611	58.694
			2.0	10	107 616.0000	109 410.0	1.667	57.149
5	219	416	1.5	9	244 666.2548	249 774.0	2.088	80.947
			2.0	12	244 210.5728	249 732.0	2.261	82.618
6	245	474	1.5	4	145 323.5630	147 942.0	1.802	113.689
			2.0	10	146 554.1588	147 936.0	0.943	127.393
7	259	465	1.5	7	204 445.2054	205 027.0	0.285	137.958
			2.0	8	201 727.0000	205 027.0	1.636	157.136
8	378	645	1.5	4	242 307.7312	244 688.0	0.982	222.325
			2.0	6	241 079.0000	244 736.0	1.517	242.552

Apesar do método não produzir maus resultados, o tempo de CPU gasto é considerável o que constitui um sério óbice para a Quimigal que desejará

obter, de cada vez que o modelo é utilizado, um leque de soluções no menor espaço de tempo possível.

### **5. Referências Bibliográficas**

- [1] Held, M.: Wolfe, P. and Crowder, H. P. 1974, *Validation of subgradient optimization*, Mathematical Programming, Vol. 6, No. 1, pp. 62-88.
- [2] Kennington, J. L. and Helgason, R. V. 1980, *Algorithms for network programming*, John Wiley & Sons, pp. 244-277.
- [3] Melo, M. T. 1989, *Modelo matemático para planificação do movimento de vagões da Quimigal*, Relatório de Estágio, DEIOC Faculdade de Ciências de Lisboa.

# A MULTICRITERIA APPLICATION ON THE PLANNING OF EDUCATIONAL FACILITIES

**J.D.Coelho**

Faculdade de Economia  
Universidade Nova de Lisboa  
Tv. Estevão Pinto, Campolide  
1000 Lisboa, Portugal

## **Abstract**

A multicriteria approach has been used to build a composite index of 'lack' of educational facilities for every municipality in Portugal. The data has been extracted from a relational database containing a wide range of information on educational facilities, students and teachers.

In the paper the structure of the index, the aggregation method and the application on the planning of educational facilities in Portugal are presented.

## **1. Introduction**

A developing country as Portugal has always some sort of lack of educational facilities. The demand for schools resulting from the pressure of economic development cannot be fully satisfied with the available budget, either through the building of new facilities or through the upgrading of existing ones. Thus, the problem naturally arises of allocating resources for those areas of the most urgent need.

The Planning Bureau of the Ministry of Education (GEPME) that is in charge of making recommendations regarding the development of educational facilities, has given the author the task of evaluating the lack of educational facilities in each of the over three hundred municipalities that make up the country. A relational database including very rich disaggregated data was available (Coelho, 1989).

As a first step towards the goal mentioned above, a number of variables resident in the GEPME database denoting lack of adequate educational facilities have been identified. This has produced one hundred and twenty five diverse variables, such as the number of primary schools with two classes and one class-room and the percentage of secondary schools without a gymnasium.

The second step was to cluster those variables and aggregate them in order to produce a set of indices denoting specific needs and, finally, an

overall index associated with each municipality (see Fig.1). This procedure will be explained in the next section.

## 2. The Index of Lack of Educational Facilities

The index is evaluated by combining a procedure that operates over the database and a module for weights evaluation developed through the analytical hierarchy method (Saaty, 1986).

In this last method, the set of criteria, objectives or, in this case, elementary and aggregated indices is structured and hierarchized as a tree. The weights associated with the criteria in the higher levels of the hierarchy are obtained from the levels below by weighted averages. In accordance with the simple additive weighting approach, a value is associated with each alternative (municipality).

$$\sum_j w_j x_{ij}$$

where  $x_{ij}$  is the evaluation of alternative  $i$  by criterion  $j$  and  $w_j$  is a normalized weight for that criterion.

By noting that criteria often have different levels of importance and that comparing criteria in those circumstances may be very difficult and that it becomes even more cumbersome if the number of criteria increases, Saaty (1986) has proposed a hierarchical tree structure for the set of criteria (see figure 2).

The weights are evaluated through comparisons done in each level of the hierarchical tree structure. The aggregation is accomplished by sequential aggregations along the tree. With the notation of figure 2, we have

$$W = B_1 B_2 \dots B_p X$$

where  $w$  is the vector of global weights and  $B_k$  is a diagonal matrix with the local weights at level  $k$  and  $X = [x_{ij}]$  is the evaluation matrix. The weights  $B_k (k = 1, \dots, p)$  and  $W$  are easily determined using the software Expert Choice, which implements the Saaty method.

In this case,  $x_{ij}$  is the elementary index  $j$  for municipality  $i$ . This information is drawn from the education database following the selection of variables denoting lack of adequate educational facilities that have been identified.

Taking into account the size of this application, we have developed a number of computer modules that perform the following steps:

- IC-WEIGHTS – for loading the weight determined through Expert Choice into the database.
- IC-RETRIEVE – for retrieving from GEPME database the information identified, making any required processing according with the definition of the elementary index and transferring the output into a new table in the database.
- IC-NORMALIZE – for normalizing the elementary indices.
- IC-EVALUATE – for evaluating the aggregate indices of the hierarchical tree structure. The aggregate indices at all levels of the tree are an output of this procedure. They are loaded into the table mentioned above.
- IC-LIST – for listing the indices, both elementary and aggregate, following options selected by the user.

A parallel structure has been developed to allow for focusing the index evaluation on any pre-specified region. This was quite relevant for our customer, since its planning activities are often confined to particular regions (see, for example, [2]).

Thus, we have developed the following additional procedures

- IC-INPUT-ZONES for defining the region and transferring to another table the information already processed by IC-RETRIEVE, referring to that particular region.
- IC-NORMALIZE-ZONES for normalizing that information within the specified region.
- IC-EVALUATE-ZONES for evaluating local indices.
- IC-LIST-ZONES the same function of IC-LIST for the region.

This set of procedures allows us to obtain the set of indices of lack of educational facilities with any pre-specified regional disaggregation.

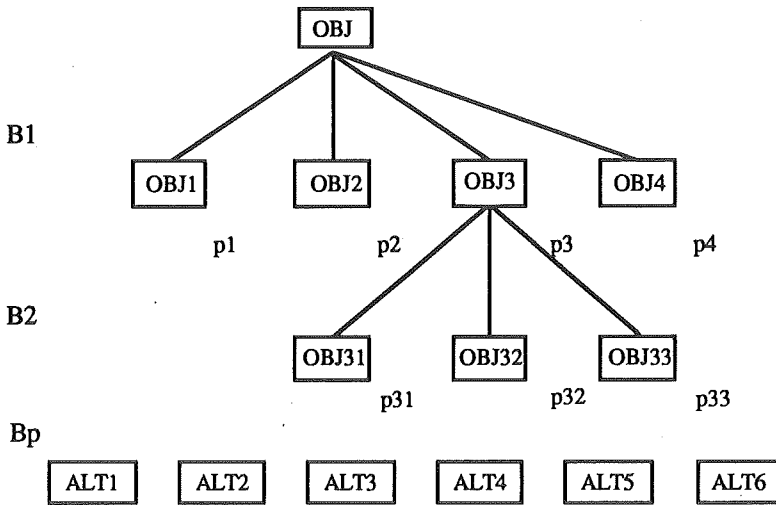


Fig. 2 – Hierarchical Tree Structure

**3. Structure of the Index and Outputs**

The first level of the structure of the index of lack of educational facilities is depicted in Fig. 3 (the meaning of the variables represented in this and subsequent figures is given in the glossary of terms, Annex 1).

The components BASIC01, BASIC02, BASIC03 and SECUND are themselves indices of lack of educational facilities, in primary, elementary, junior high school and senior high school, respectively (see figures 4 to 7). The future demand for educational facilities is taken into account through DEMOGRAF. A more detailed structure including local and global weights is provided elsewhere (Coelho, 1990).

These indices have been used in a study for the Algarve region. The overall values for the index of lack of educational facilities are shown in Figure 8. Some specified outputs are presented in Figures 9 and 10. In Figure 9, the overall index, denoted 00000, and the first level indices, represented by 10000, 20000, 30000, 40000 and 50000 are given, with the municipalities listed, by ascending order of the overall index. In Figure 10, we have again the overall index, the index associated with elementary schools (20000), and four indices in the level immediately below this last one. It is now clear that for the purpose of output a lexicographic ordering has been adopted, with the digits from left to right denoting the position of the variable

in the hierarchical tree structure. In this ordering, the symbol 00000 denotes the root of the tree, the first digit provides the position in the first level, the second digit in the second level and so on.

The user specifies the variables for each output table and selects the column for ascending or descending ordering of the municipalities, having no limitations in the configuration of variables selected for print out, besides the root 00000 that is always included.

#### 4. Concluding Comments

It has been briefly described in this paper a multicriteria evaluation of lack of educational infrastructures for the region of Algarve, with the particularity that the software of interface between the database and the multicriteria evaluation approach has been developed to fit any pre-defined region of the country.

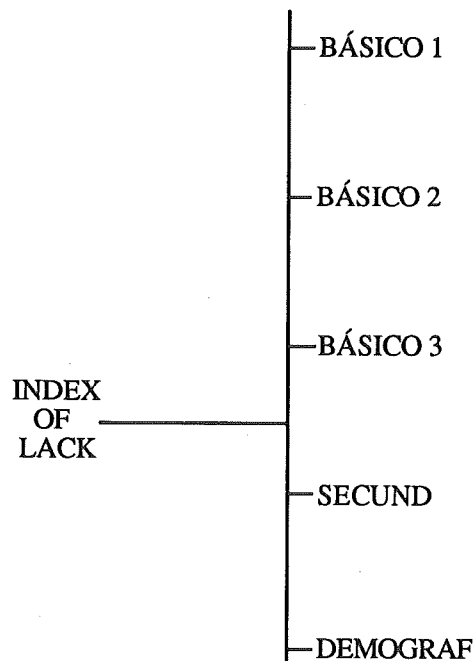


Fig. 3 – First level of the index structure



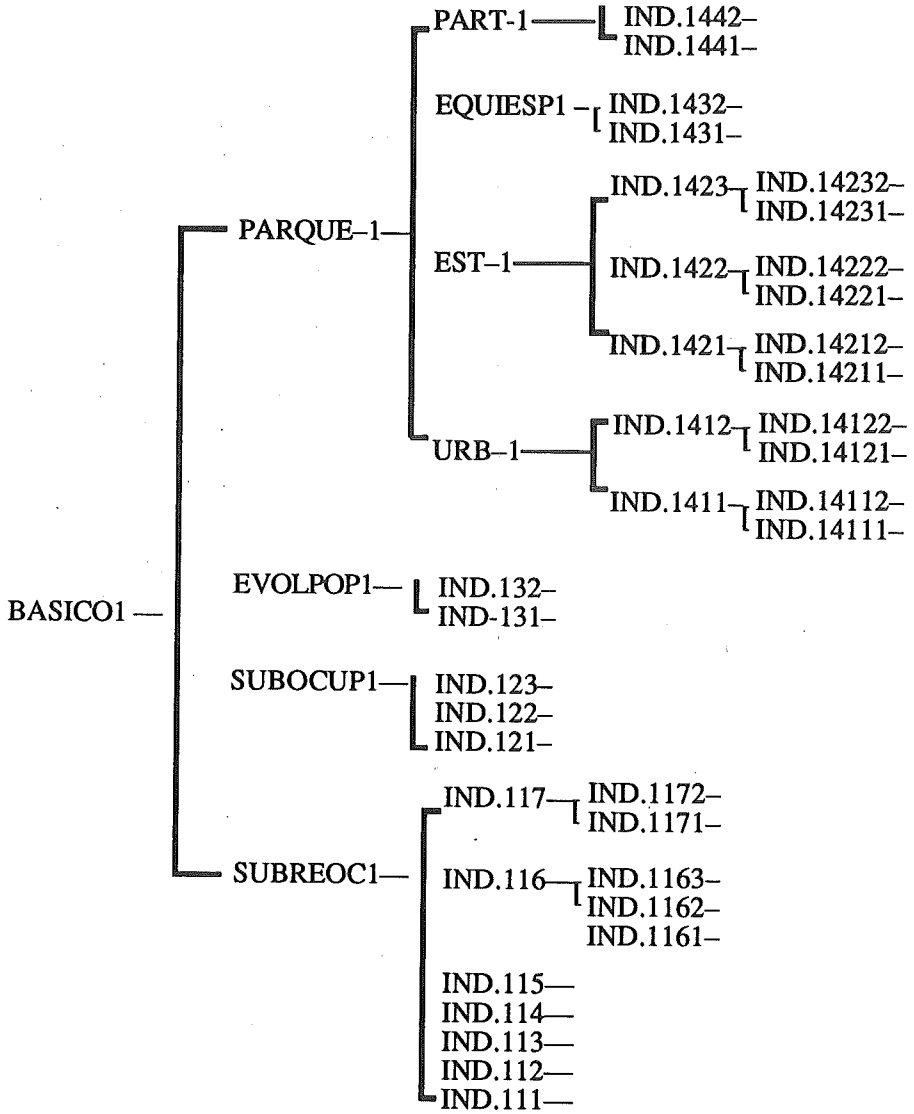


Fig. 4 – Index Structure for BASICO1

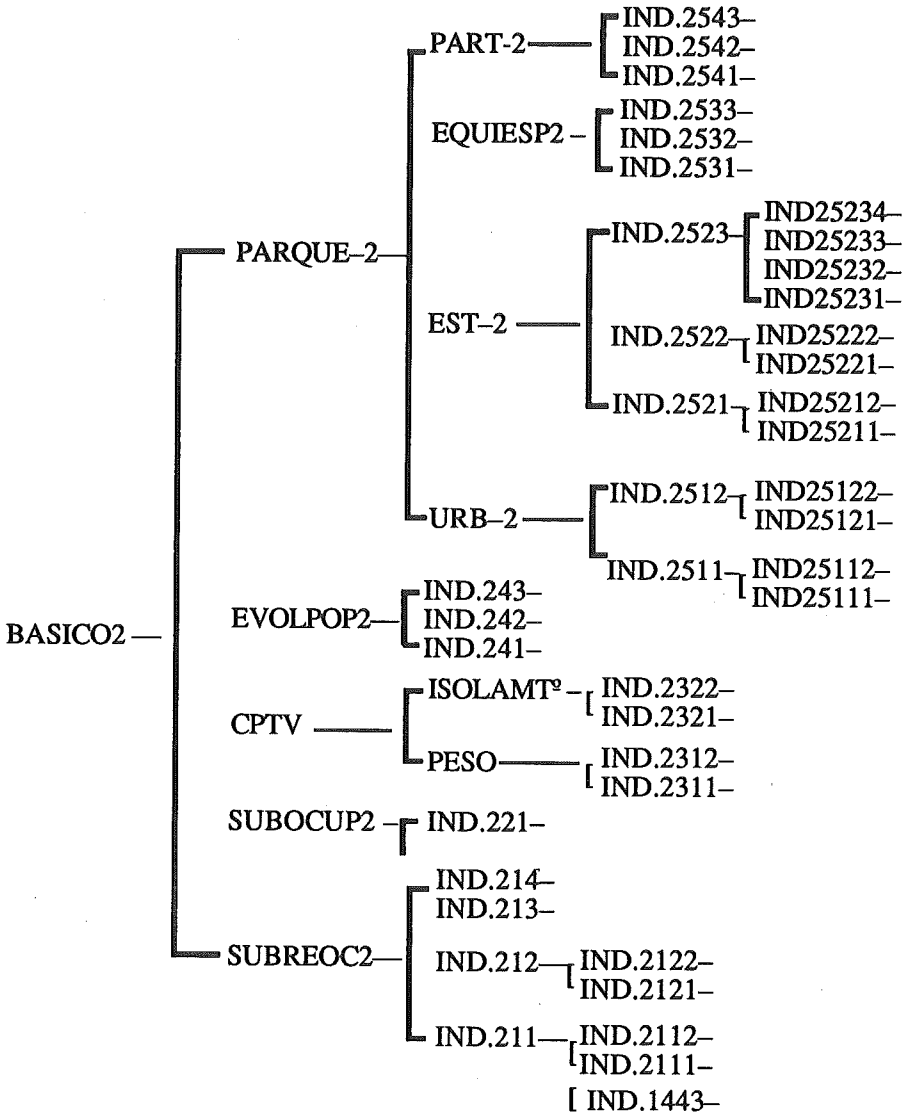


Fig.5 – Index Structure for BASICO2

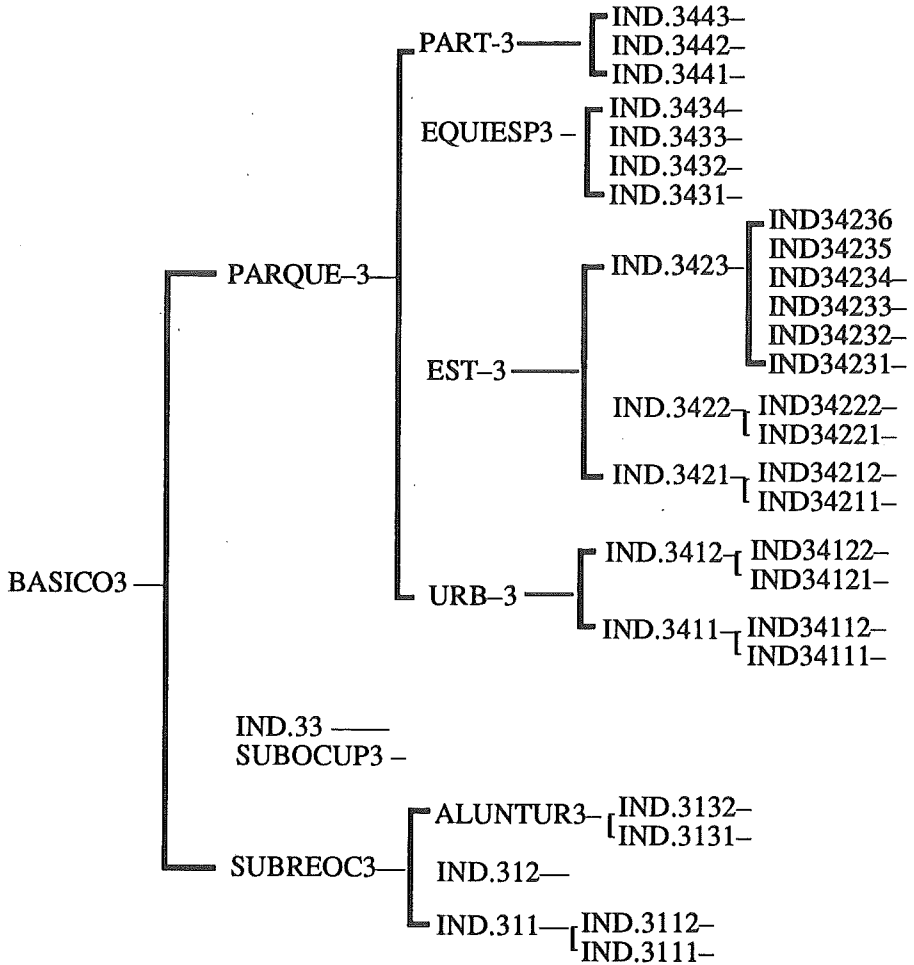


Fig. 6 – Index Structure for BASICO3

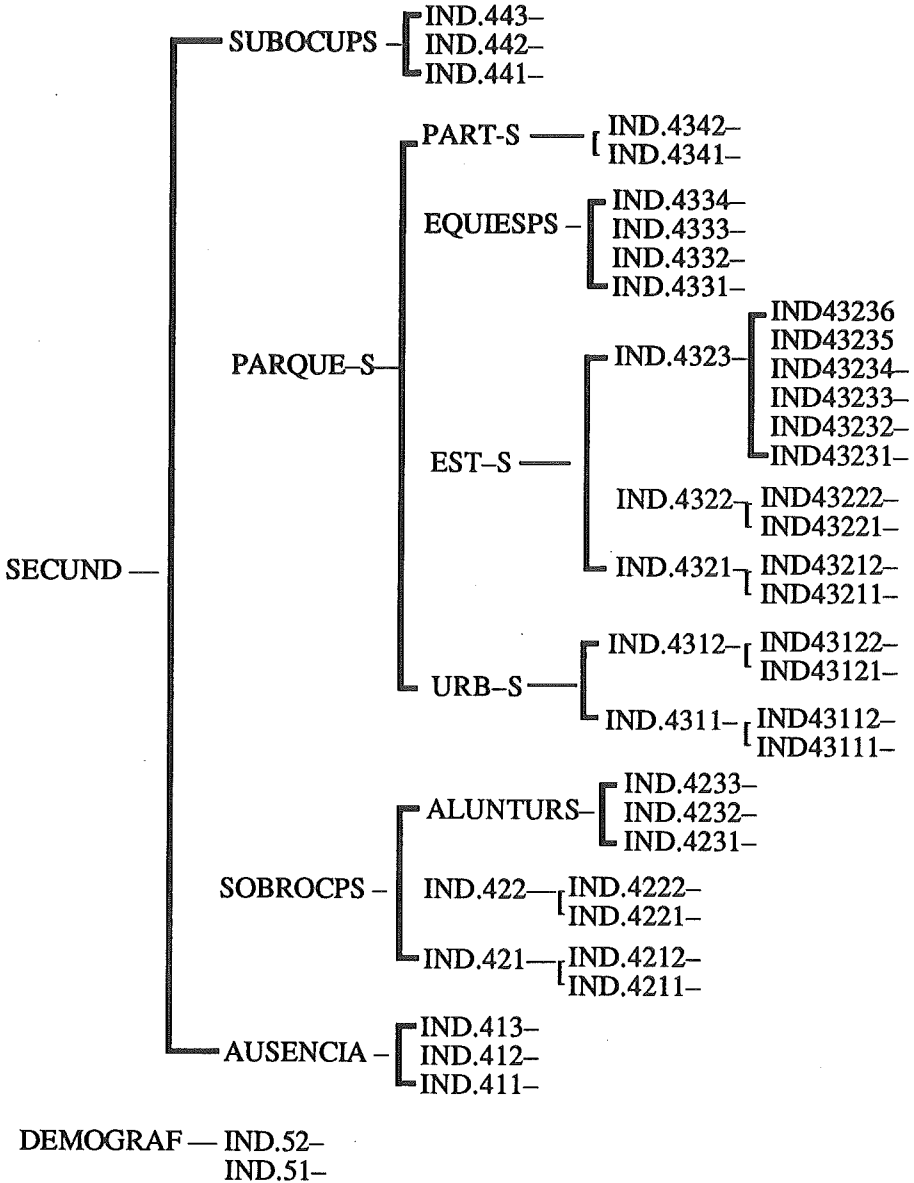


Fig. 7 – Index Structure for SECUND and DEMOGRAF

Indicadores de Carência do Sistema Educativo  
 Gabinete de Estudos e Planeamento do Ministério da Educação  
 Base de Dados da Educação  
 Faculdade de Economia da Universidade Nova de Lisboa

		Índice Global de Carência						
	(valor normalizado)	00000	10000	20000	30000	40000	50000	
São Brás de Alportel	0.296754	0.275434	0.291667	0.416667	0.500000	0.000000	0.000000	
Alcoutim	0.422917	0.390612	0.428289	0.571521	0.000000	0.301245	0.429876	
Silves	0.433906	0.382416	0.452564	0.550505	0.354167	0.429876	0.561826	
Lagoa	0.438036	0.354648	0.269329	0.504377	0.500000	0.500000	0.280083	
Portimão	0.443008	0.377567	0.446980	0.480203	0.630208	0.623346	0.402905	
Vila Real de Sto. António	0.451309	0.330641	0.371048	0.528607	0.625000	0.265245	0.407469	
Faro	0.458595	0.422237	0.457320	0.523272	0.625000	0.639215	0.378838	
Olhão	0.466200	0.356972	0.616176	0.311170	0.531250	0.587129	0.395651	
Albufeira	0.473154	0.403492	0.533916	0.660238	0.587129	0.580976	0.382988	
Lagos	0.491835	0.456521	0.359436	0.518272	0.518162	0.677083	0.392531	
Tavira	0.504133	0.415225	0.623316	0.556378	0.500000	0.500000	0.587967	
Loulé	0.535908	0.435181	0.618366	0.000000	0.500000	0.500000	0.896266	
Castro Marim	0.553391	0.469941	0.655656	0.502330	0.500000	0.500000	0.854440	
Monchique	0.562659	0.321927	0.592770	0.000000	0.500000	0.500000	1.000000	
Vila do Bispo	0.594574	0.253156	0.790699	0.000000	0.500000	0.500000		
Aljezur	0.625307	0.521210	0.480017	0.000000	0.500000	0.500000		
		Índice Global de Carência						
00000								
10000								
20000								
30000								
40000								
50000								
		Crescimento Demográfico						
		Carência de Infra-estruturas do Ensino Básico-1º Ciclo						
		Carência de Infra-estruturas do Ensino Básico-2º Ciclo						
		Carência de Infra-estruturas do Ensino Básico-3º Ciclo						
		Carência de Infra-estruturas do Ensino Secundário						
		Crescimento Demográfico						

(lista ordenada pelo indicador 00000)

Fig. 9

Indicadores de Carência do Sistema Educativo  
 Gabinete de Estudos e Planeamento do Ministério da Educação  
 Base de Dados da Educação  
 Faculdade de Economia da Universidade Nova de Lisboa

	00000 (valor normalizado)	20000	21000	23000	24000	25000
	20000 (valor normalizado)	0.269329	0.500000	0.000000	0.000000	0.577317
	21000 (valor normalizado)	0.291667	0.000000	0.000000	0.000000	0.583333
	23000 (valor normalizado)	0.359436	0.333333	0.000000	0.562765	0.541648
	24000 (valor normalizado)	0.451309	0.000000	0.666667	0.265440	0.552083
	25000 (valor normalizado)	0.422917	0.000000	0.888889	0.230516	0.593750
		0.443008	0.833333	0.000000	0.417319	0.537268
		0.433906	0.151345	0.666667	0.388214	0.604029
		0.458595	0.505175	0.266667	0.557440	0.500000
		0.625307	0.000000	0.000000	0.240779	0.719256
		0.473154	0.500000	0.666667	0.444215	0.524731
		0.562659	0.166667	0.666667	1.000000	0.537747
		0.466200	1.000000	0.666667	0.256378	0.541660
		0.535908	0.833333	0.761905	0.345666	0.532560
		0.504133	0.333333	1.000000	0.648350	0.511582
		0.533391	0.000000	0.000000	0.692345	0.618967
		0.594574	0.000000	0.000000	0.832487	0.748911

(lista ordenada pelo indicador 20000)

00000 Índice Global de Carência  
 20000 Carência de Infra-estruturas do Ensino Básico - 2º Ciclo  
 21000 Sobre-ocupação de Infra-estruturas do Ensino Básico - 2º Ciclo  
 23000 Ensino Preparatório Indirecto  
 24000 Evolução da População Escolar do Ensino Básico - 2º Ciclo  
 25000 Estado do Parque Escolar do Ensino Básico - 2º Ciclo

Fig. 10

### Acknowledgements

The author is grateful to Carmo Matos, Lisete Frias, Lurdes Parente, Luís Nunes and Rui Monteiro for their help in setting up this project. Special thanks are due to the Gabinete de Estudos e Planeamento do Ministério da Educação and the Junta Nacional de Investigação Científica e Tecnológica (Project 87 23) for financial support.

### References

- [1] Coelho, J.D. (1989) – *Optimal Location of School Facilities*, in "Operational Research and the Social Sciences", M.C.Jackson, P.Keys and S.A.Cropper (eds.), Plenum Press, pp.275-284.
- [2] Coelho, J.D. (1990) – *A Multicriteria Application on the Planning of Educational Facilities*, FEUNL, W.P. nº 153.
- [3] FEUNL (1989) – *Base de Dados de Educação-Estudo de Microplaneamento: Região do Algarve*, Vol.XXVIII, Faculdade de Economia, Universidade Nova de Lisboa.
- [4] Saaty, T. (1986) – *Decision Making for Leaders-The Analytical Hierarchy Process for Decisions in a Complex World*, University of Pittsburgh.

## ANNEX I

## GOAL: Index of Lack

## Glossary of Terms Used in Model

- GOAL – Index of Lack
- ALUNTUR3 – Percentage Students Junior High School Primary School, average n° pupils/Class>25
- ALUNTURS – Percentage Students Elementary School, average n°pupil/Class>25
- ABSENCE – Absence of Elementary School
- BASICO1 – Lack of Infrastructures in Primary Schools
- BASICO2 – Lack of Infrastructures in Elementary Schools
- BASICO3 – Lack of Infrastructures in Junior High Schools
- CPTV – Indirect Elementary School
- DEMOGRAF – Demographic growth
- EQUIESP1 – Index of Lack of Specific Facilities in Primary Schools
- EQUIESP2 – Index of Lack of Specific Facilities in Elementary Schools
- EQUIESP3 – Index of Lack of Specific Facilities in Junior High Schools
- EQUIESPS – Index of Lack of Specific Facilities in Senior High Schools
- EST-1 – Index of Building Stock Quality in Primary Schools
- EST-2 – Index of Building Stock Quality in Elementary Schools
- EST-3 – Index of Building Stock Quality in Junior High Schools
- EST-S – Index of Building Stock Quality in Senior High Schools
- EVOLPOP1 – Evolution of School Population in Primary Schools
- EVOLPOP2 – Evolution of School Population in Elementary Schools
- IND.111 – Proportion of Primary Schools with 2 Classes and 1 Room
- IND.112 – Proportion of Primary Schools with 3 Classes and 1 Room
- IND.113 – Proportion of Primary Schools with 3 Classes and 2 Rooms
- IND.114 – Proportion of Primary Schools with 4 Classes and 2 Rooms
- IND.115 – Proportion of Primary Schools with 4 Classes and 3 Rooms



- IND.116 – Proportion of Primary Schools with  $n^{\circ}$  Classes  $> n^{\circ}$  Rooms and  $> 4$
- IND.1161 – Classes/Rooms  $< 2$
- IND.1162 – Classes/Rooms = 2
- IND.1163 – Classes/Rooms  $> 2$
- IND.117 – Proportion Primary Schools with (School Population/ $N^{\circ}$  Rooms)  $> 24$
- IND.1171 – Proportion Primary Schools with (School Population/ $N^{\circ}$  Rooms)  $> 24$  and  $< 31$
- IND.1172 – Proportion Primary Schools with (School Population/ $N^{\circ}$  Rooms)  $> 30$
- IND.121 – Proportion Primary Schools with 10 or less pupils
- IND.122 – Proportion Primary Schools having between 11 and 15 pupils
- IND.123 – Proportion Primary Schools with School Pop./ $N^{\circ}$  Rooms  $< 18$
- IND.131 – Growth Rate of School Population in Primary School between 1982-97
- IND.132 – Projection of the Growth Rate of Primary Schools 1987-1995
- IND.1411 – Index of Lack of Location adequacy in Primary School
- IND.1412 – Index of Lack of Salubrity in Primary School
- IND.1421 – Percentage of Covered Area of Primary Schools in Bad Condition
- IND.1422 – Index of Scarcity of uncovered Area in Primary School
- IND.1423 – Percentage of inadequate Classrooms in Primary School
- IND.1431 – Percentage of Buildings with no canteen in Primary School
- IND.1432 – Percentage of Buildings without playfields in Primary School
- IND.1441 – Percentage of School Facilities whose Buildings are shared with pre-school
- IND.1442 – Percentage of School Buildings whose Buildings are shared with the Elementary School

- IND.1443 – Percentage of School Buildings whose Buildings are shared with the pre-school and Elementary School
- IND.211 – Percentage of Elementary School Facilities with an Enrolment Rate over 100% (Tip.)
- IND.2111 – Percentage of Elementary School Facilities with an Enrolment Rate > 100% and > 151% (Tip.)
- IND.2112 – Percentage of Elementary School Facilities with an Enrolment Rate > 150% (Tip.)
- IND.212 – Percentage of Elementary School Facilities with an Enrolment Rate over 100% (Cap.F)
- IND.2121 – Percentage of Elementary School Facilities with an Enrolment Rate > 100% and < 151% (Cap.F)
- IND.2122 – Percentage of Elementary School Facilities with an Enrolment Rate > 150% (Cap.F)
- IND.213 – Percentage of Elementary School Population, 1st year, with average number Pupil/Class over 25
- IND.214 – Percentage of Elementary School Population, 2nd year, with average number Pupil/Class over 25
- IND.221 – Index of under-enrolment of elementary Schools Facilities
- IND.2311 – Percentage of Elementary School Pupils in CPTV
- IND.2312 – Percentage of CPTV School Facilities in Elementary School
- IND.2321 – Percentage of CPTV School Facilities farther than 5km from nearest Elementary School Facility
- IND.241 – Growth Rate of Elementary School Population in 1983-1987
- IND.242 – Projection of Elementary School Population Growth in 1987-95
- IND.243 – Ratio of Entries in Primary Schools 1987 Cap.Tipol. Direct Elementary Schools
- IND.2511 – Index of Lack of Location adequacy in Elementary Schools
- IND.2512 – Index of Lack of Salubrity in Elementary Schools
- IND.2521 – Percentage of Elementary School Covered Area in Bad Condition
- IND.2522 – Index of Scarcity of Elementary School uncovered Area

- IND.2523 – Percentage of Elementary School Inadequate Classrooms
- IND.2531 – Percentage of Buildings without Canteen in Elementary Schools
- IND.2532 – Percentage of Buildings without Gymnasium in Elementary Schools
- IND.2533 – Percentage of Buildings without Playfields in Elementary Schools
- IND.2541 – Percentage of School Facilities whose Buildings are shared with Junior High School
- IND.2542 – Percentage of School Facilities whose Buildings are shared with High School
- IND.2543 – Percentage of School Facilities whose Buildings are shared with Junior High School and High School
- IND.311 – Percentage of Junior High School Population with Enrolment Rate over 100% (Tip.)
- IND.3111 – Enrolment Rate between 100 and 150
- IND.3112 – Enrolment Rate over 150
- IND.312 – Growth Rate of Junior High School Population in 1983-87
- IND.3131 – between 25 and 30
- IND.3132 – over 30
- IND.33 – Projection of Junior High School Population, 1987-1995
- IND.3411 – Index of Lack of Location adeq. in Junior High School
- IND.3412 – Index of Lack of Salubrity in Junior High School
- IND.3421 – Percentage of Junior High School Covered Area in Bad Condition
- IND.3422 – Index of Scarcity of Junior High School Uncovered Area
- IND.3423 – Percentage of Junior High School Inadequate Classrooms
- IND.3431 – Percentage of Buildings without Canteen in Junior High Schools
- IND.3432 – Percentage of Buildings without Gymnasium in Junior High School
- IND.3433 – Percentage of Buildings without Playfields in Junior High Schools

- IND.3434 – Percentage of Primary School without workshops and similar in Junior High Schools
- IND.3441 – Percentage of Primary Schools whose Buildings are shared with Elementary Schools
- IND.3442 – Percentage of Primary Schools whose Buildings are shared with Senior High Schools
- IND.3443 – Percentage of Primary Schools whose Buildings are shared with Elementary and Junior High School
- IND.411 – Absence of Infrastructures still teaching in Senior High Schools
- IND.412 – Absence of Infrastructures and no teaching in Senior High Schools
- IND.413 – Functioning in Senior High School without last grade
- IND.421 – Percentage of Senior High School with Enrolment Rate over 100% (Tip.)
  - IND.4211 – between 100 and 150
  - IND.4212 – over 150
- IND.422 – Percentage of Senior School Population in School Facilities with Enrolment Rate over 100% (Tip.)
  - IND.4221 – between 100 and 150
  - IND.4222 – over 150
- IND.4231 – Percentage of High School Population 1st Grade, with Pupils/Class > 25
- IND.4232 – Percentage of Senior High School 2nd Grade with Pupils/Class > 25
- IND.4233 – Percentage of Senior High School Population 3rd Grade with Pupils/Class > 25
- IND.4311 – Index of Lack of Location adequacy in Senior High School
- IND.4312 – Index of Lack of Salubrity in Senior High School
- IND.4321 – Percentage of Senior High School covered Area in Bad Condition
- IND.4322 – Index of Scarcity of Senior High School uncovered Area
- IND.4323 – Percentage of Senior High School Inadequate Classrooms

- IND.4331 – Percentage of Senior High School Buildings without Canteen
- IND.4332 – Percentage of Senior High School Buildings without Gymnasium
- IND.4333 – Percentage of Senior High School Buildings without Playfields
- IND.4334 – Percentage of Senior High School Facilities without workshops and similar
- IND.4341 – Percentage of Primary Schools whose Buildings are shared with Junior High Schools
- IND.4341 – Percentage of Primary Schools whose Buildings are shared with Junior High Schools and Elementary Schools
- IND.441 – Under-Enrolment in Junior High School - 1st Grade
- IND.442 – Under-Enrolment in Junior High School - 2nd Grade
- IND.443 – Under-Enrolment in Junior High School - 3rd Grade
- IND.51 – Population Growth Rate 1981-1985
- IND.52 – Growth Rate of New Electors 1979-1986
- IND14111 – Primary School Location: Bad/Very Bad
- IND14112 – Primary School Location: fair
- IND14211 – Percentage of Primary School covered Area in ruins/irrecoverable
- IND14212 – Percentage of Primary School covered Area in Bad Condition
- IND14221 – Percentage of School Facilities with uncovered Area/Pupils < 1
- IND14222 – Percentage of School Facilities with uncovered Area/Pupils between 1 and 5
- IND14231 – Classrooms with an area smaller than 30 M<sup>2</sup>
- IND14232 – Classrooms with an area between 30 and 47 M<sup>2</sup>
- IND25111 – Elementary School Location: Bad/Very Bad
- IND25112 – Elementary School Location: fair
- IND25121 – Elementary School Salubrity: Bad/Very Bad
- IND25122 – Elementary School Salubrity: fair

- IND25211 – Percentage of Elementary School covered Area in Ruins/irrecoverable
- IND25212 – Percentage of Elementary School covered Area in Bad Condition
- IND25221 – Percentage of Elementary School with uncovered area/pupils < 1
- IND25222 – Percentage of Elementary School with uncovered area/between 1 and 5 pupils
- IND25231 – Normal Classrooms with area < 30 M2
- IND25232 – Special Classrooms with area < 35 M2
- IND25233 – Normal Classrooms with area between 30 and 47 M2
- IND25234 – Special Classrooms with area between 35 and 54 M2
- IND34111 – Location of Junior High School: Bad/Very Bad
- IND34112 – Location of Junior High School: Fair
- IND34121 – Salubrity in Junior High School: Bad/Very Bad
- IND34122 – Salubrity in Junior High School: fair
- IND34211 – Percentage of Junior High School covered area in Ruins/irrecoverable
- IND34212 – Percentage of Junior High School covered area in Bad Condition
- IND34221 – Percentage of Junior High School with uncovered area/pupils < 1
- IND34222 – Percentage of Junior High School with uncovered area/between 1 and 5 pupils
- IND34231 – Normal Classrooms with area < 30 M2
- IND34232 – Special Classrooms with area < 35 M2
- IND34233 – Workshop Classrooms and similar with area < 70 M2
- IND34234 – Normal Classrooms with area between 30 and 47 M2
- IND34235 – Special Classrooms with area between 35 and 54 M2
- IND34236 – Workshop Classrooms and similar with area between 70 and 99 M2
- IND43111 – Location of Senior High School: Bad/Very Bad
- IND43112 – Location of Senior High School: fair
- IND43121 – Salubrity in Senior High School: Bad/Very Bad

- IND43122 – Salubrity in Senior High School: fair
- IND43211 – Percentage of Senior High School covered area in ruins/irrecoverable
- IND43212 – Percentage of Senior High School covered area in Bad Condition
- IND43221 – Percentage of School Facilities with uncovered area/pupils < 1
- IND43222 – Percentage of School Facilities with uncovered area/between 1 and 5 pupils
- IND43231 – Normal Classrooms with area < 30 M2
- IND43232 – Special Classrooms with area < 35 M2
- IND43233 – Workshop Classrooms and similar with area < 70 M2
- IND43234 – Normal Classrooms with area between 30 and 47 M2
- IND43235 – Special Classrooms with area between 35 and 54 M2
- IND43236 – Workshop Classrooms and similar with area between 70 and 99 M2
  
- ISOLAMT<sup>2</sup> – Isolation of CPTV School Facilities
- PARQUE-1 – Condition of Primary School Building Stock
- PARQUE-2 – Condition of Elementary School Building Stock
- PARQUE-3 – Condition of Junior School Building Stock
- PARQUE-S – Condition of Senior High School Building Stock
- PART-1 – Index of share of buildings with other school grades
- PART-2 – Index of share of buildings with other school grades
- PART-3 – Index of share of buildings with other school grades
- PART-S – Index of share of buildings with other school grades
- PESO – Proportion of CPTV teaching in Elementary School
- SECUND – Lack of Infrastructures in Elementary School
- SOBREOC1 – Over-enrolment of Infrastructures in Primary School
- SOBREOC2 – Over-enrolment of Infrastructures in Elementary School
- SOBREOC3 – Over-enrolment of Infrastructures in Junior High School
- SOBREOCS – Over-enrolment of Infrastructures in Senior High School
- SOBOCP1 – Under-enrolment of Infrastructures in Primary School
- SOBOCP2 – Under-enrolment of Infrastructures in Elementary School
- SOBOCP3 – Under-enrolment of Infrastructures

- SOBOCUPS** – Index of under-enrolment in Senior High School -  
Percentage of classes with less than 15 pupils
- URB-1** – Index of Lack of Urbanization Quality in Primary School
- URB-2** – Index of Lack of Urbanization Quality in Elementary  
School
- URB-3** – Index of Lack of Urbanization Quality in Junior High  
School
- URB-S** – Index of Lack of Urbanization Quality in Senior High  
School



# UTILIZAÇÃO EFICIENTE DE VEÍCULOS NA RECOLHA DE RESÍDUOS SÓLIDOS URBANOS

**Luis N. Vicente**

Departamento de Matemática  
Universidade de Coimbra

## **Resumo**

Este trabalho descreve a utilização eficiente de veículos na recolha de resíduos sólidos urbanos rurais.

Após uma descrição dos processos de formulação e modelação, é feita uma abordagem sumária dos principais métodos existentes. Enquadrada no conhecido "Vehicle Routing Problem" surge a heurística de Fisher e Jaikumar, exposta com maior detalhe. Referem-se também os métodos de resolução do caixeiro viajante que complementam as referidas heurísticas.

São apresentados resultados computacionais para problemas com dados reais. É abordado o enquadramento informático do trabalho.

## **1. Descrição do Problema**

A determinação de percursos adequados na recolha de resíduos sólidos urbanos constitui, como em todos os problemas de distribuição e recolha, um aspecto importante numa política integrada de redução de custos de transporte. Assim o entendeu também a Direcção Regional do Ambiente da Região Centro, instituição que colaborou no desenvolvimento deste projecto e à qual se destinam os seus primeiros resultados.

O problema com que nos deparámos foi o de estabelecer os percursos de veículos em redes viárias de recolha de resíduos sólidos de carácter não cidadão. É suposto haver um pequeno grupo de concelhos para o qual existe um único aterro ou estação de tratamento. Este local é também o da saída e chegada dos veículos. O objectivo do estudo é minimizar a distância total percorrida pelos veículos sujeitos a restrições de capacidade e de tempo.

Usualmente designaremos por nós todos os pontos de recolha, cruzamentos (1) e também o aterro ou estação de tratamento.

(1) poderá haver pontos de recolha que também sejam cruzamentos. Quando nos referirmos somente a cruzamentos estaremos a considerar os cruzamentos que não são locais de recolha.

Assim como dados do problema considerámos:

- o número de pontos de recolha;
- o número de cruzamentos;
- as possíveis ligações entre qualquer par de nós (existentes no caso de haver uma estrada de comunicação) e correspondentes distâncias;
- as quantidades de lixo a recolher em cada ponto de recolha;
- os tempos gastos a recolher em cada ponto de recolha;
- os tempos máximos disponíveis de cada veículo;
- as capacidades dos veículos.

O número de veículos poderá ser um dado do problema ou um seu resultado.

É ainda usual considerar-se como um dado do problema o conjunto dos tempos gastos a percorrer os caminhos entre dois quaisquer nós. No nosso estudo estes valores não foram tidos em consideração, pois tal facto levaria a uma desnecessária complicação do problema. Não se pense porém que esta omissão é demasiado grosseira. A grande concentração do tempo gasto por cada veículo é realizada na recolha. Além disso o factor tempo é apenas limitativo; somente a distância total percorrida pelos veículos determina a qualidade das soluções.

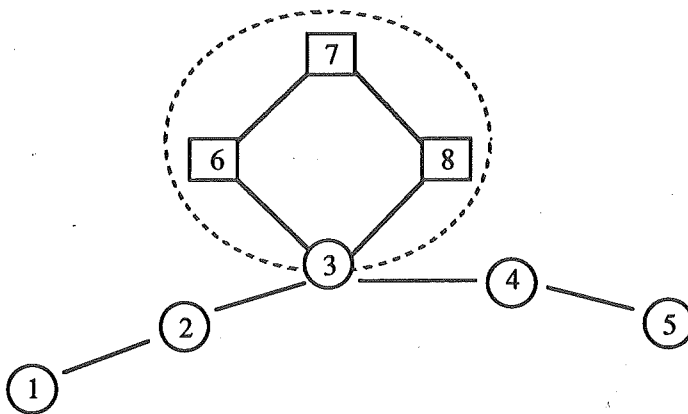
Este problema aparece na literatura, nas suas diversas versões, sob o nome "**Vehicle Routing Problem**". Referir-nos-emos a ele pelas iniciais VRP. Alguns dos seus métodos de resolução baseiam-se em técnicas de resolução do problema do caixeiro viajante (TSP-"**Traveling Salesman Problem**").

A dimensão do problema, isto é, o número de nós existentes, é um factor na sua modelação. Os métodos que o abordam são muito sensíveis ao aumento desmesurado da sua dimensão. No entanto a dimensão pode ser reduzida ao agrupar um pequeno número de pontos de recolha vizinhos, criando um único novo ponto de recolha (que será um nó). O total de lixo a recolher neste novo ponto é a soma das quantidades a recolher nos vários pontos agrupados.

A distância percorrida por um veículo ao despachar um pequeno conjunto de pontos de recolha que foram agrupados é de capital importância, não em si

para o nosso problema, mas para, uma vez dividida pela velocidade média de recolha do veículo, dar origem ao tempo de recolha no nó respectivo.

Ao considerarmos que cada novo ponto de recolha tem de ser despachado de uma só vez e por um só veículo, estas distâncias associadas aos novos pontos de recolha, são, como já dissemos, irrelevantes para a escolha das soluções. À soma destas distâncias terá de ser adicionada, na solução final, a soma das distâncias percorridas pelos veículos entre os diversos nós (ver figura 1).



**Figura 1** – 1, 2, 3, 4 e 5 nós; 6, 7 e 8 pontos de recolha que agrupados deram origem ao novo ponto de recolha 3. Depois de despachado o nó 3, um novo veículo que por aí passe já não terá de realizar a recolha e como tal de efectuar o percurso 3-6-7-8-3.

Esse novo veículo já não percorre a distância associada ao nó 3.

As velocidades médias dos veículos foram classificadas em três tipos: rural, semi-urbana e urbana, consoante a localidade em causa.

## 2. Formulação do Problema

Antes de nos debruçarmos sobre a formulação propriamente dita convém esclarecer como se construiu a matriz das distâncias  $[c_{ij}]$  entre dois quaisquer nós. O elemento  $c_{ij}$  desta matriz irá corresponder à distância mais curta entre os nós  $i$  e  $j$ (1).

(1) O algoritmo que utilizámos para determinar o caminho mais curto entre qualquer par de nós, bem como a sua distância, encontra-se em [14, pág. 82].

O conjunto de nós, inicialmente constituído por pontos de recolha, cruzamentos e pelo aterro, passará no decorrer da nossa abordagem teórica a ser formado somente pelos pontos de recolha e pelo aterro. As linhas e colunas da matriz  $[c_{ij}]$  referentes a nós do tipo cruzamento deixarão de ser tidas em conta. No final, depois de estabelecidos os percursos entre os pontos de recolha, a passagem de um ponto ao seguinte num dado percurso é efectuada segundo o caminho mais curto. Aqui voltaremos a usar a informação relativa aos cruzamentos.

A formulação do problema exposto apresenta várias versões na literatura. Quase sempre são equivalentes e diferem entre elas no tipo de restrições a infringir ao percurso dos veículos. Das estudadas pensamos que a de Christofides et al [4] é bem elucidativa. Nessa formulação consideramos que:

- $N$  é o número de pontos de recolha;
- $x_{ij}^k = \begin{cases} 1 & \text{se o veículo visita } j \text{ após visitar } i \\ 0 & \text{senão} \end{cases}$
- $[c_{ij}]$  é a matriz das distâncias/custos entre os vários nós usualmente simétrica(1). Notar que  $\{0, 1, 2, \dots, N\}$  é o conjunto de nós e que 0 é o aterro/estação de tratamento;
- $[t_{ij}]$  é a matriz dos tempos – também simétrica em princípio;
- $M$  é o número de veículos;
- $r_i$  é o requerimento (quantidade de lixo) em cada nó;
- $t_i$  é o tempo perdido a despachar  $i$ ;
- $U_k$  é a capacidade do veículo  $k$ ;
- $T_k$  é o tempo máximo disponível do veículo  $k$ .

A formulação é então:

$$\text{Min} \sum_{i=0}^N \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^N \left( c_{ij} \sum_{k=1}^M x_{ij}^k \right) \quad (1)$$

$$\text{s. a.} \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^N \sum_{k=1}^M x_{ij}^k = 1, \quad j = 1, \dots, N \quad (2)$$

(1) No nosso problema as distâncias são as mais curtas e como as redes concelhias são não orientadas a matriz é simétrica.

$$\sum_{\substack{i=0 \\ i \neq p}}^N x_{ip}^k - \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq p}}^N x_{pj}^k = 0, \quad k = 1, \dots, M; \quad p = 0, \dots, N \quad (3)$$

$$\sum_{i=1}^N r_i \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^N x_{ij}^k \leq U_k, \quad k = 1, \dots, M \quad (4)$$

$$\sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^N t_{ij} x_{ij}^k + \sum_{i=1}^N t_i \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^N x_{ij}^k \leq T_k, \quad k = 1, \dots, M \quad (5)$$

$$\sum_{j=1}^N x_{0j}^k = 1, \quad k = 1, \dots, M \quad (6)$$

Deste modo (2) obriga a que um nó seja atendido uma única vez e (3) a que todo o veículo saia do mesmo nó a que chegou. (4) e (5) representam as restrições de capacidade e de tempo dos veículos respectivamente. Que todo o veículo seja usado uma e uma só vez é traduzido pelas restrições (6). A função objectivo (1) traduz a soma das distâncias percorridas pelos  $M$  veículos.

Em Golden et al [12] encontra-se uma formulação semelhante à exposta. A diferença mais significativa é em (6) onde a igualdade passa a desigualdade do tipo  $\leq$ . Nestas circunstâncias um veículo pode eventualmente não ser usado. Refira-se que em ambas as formulações aparecem as restrições proibitivas dos subpercurso do VRP. Golden et al [12] apresenta inclusivamente uma gama deste tipo de restrições.

O problema da escolha da formulação a adoptar, à partida irrelevante, assume um carácter importante na resolução do VRP. Fisher e Jaikumar [8] apresentam uma heurística parcialmente induzida pela formulação que escolheram. A formulação é a seguinte:

$$\text{Min} \sum_{i=0}^N \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^N c_{ij} \left( \sum_{k=1}^M x_{ij}^k \right) \quad (7)$$

$$\text{s.a.} \sum_{i=1}^N t_i y_{ik} \leq T_k, \quad k = 1, \dots, M \quad (8)$$

$$\sum_{i=1}^N r_i y_{ik} \leq U_k, \quad k = 1, \dots, M$$

$$\sum_{k=1}^M y_{ik} = \begin{cases} M, & i = 0 \\ 1, & i = 1, \dots, N \end{cases} \quad (9)$$

$$y_{ik} = 0 \vee y_{ik} = 1 \quad i = 0, \dots, N; \quad k = 1, \dots, M \quad (10)$$

$$\left. \begin{aligned} \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^N x_{ij}^k &= y_{jk}, \quad j = 0, \dots, N \\ \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^N x_{ij}^k &= y_{ik}, \quad i = 0, \dots, N \\ x_{ij}^k &\in \{0, 1\}, \quad i, j = 0, \dots, N \\ & \quad i \neq j \end{aligned} \right\} \quad k = 1, \dots, M \quad (11)$$

em que  $y_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{se o veículo } k \text{ recolheu em } i, \\ 0 & \text{senão} \end{cases} \quad i=0, \dots, N \text{ e } k=1, \dots, M.$

Assim as restrições (8), (9) e (10) estabelecem as restrições de capacidade dos veículos – restrições (8) e asseguram que cada nó é visitado por um só veículo e que todos eles passam pelo nó 0 – restrições (9). O grupo de restrições (11) define um TSP para os clientes servidos para cada veículo  $k$ ,  $k = 1, \dots, M$ . Dever-se-ão incluir as restrições impeditivas dos subpercurso.

Para finalizar esta secção vamos apresentar uma formulação um pouco diferentes das já expostas. Assim, cada percurso de um veículo é representado por um vector binário  $a_j$  de dimensão  $N$ . A posição  $i$  de cada vector  $a_j \in \{0, 1\}$  conforme o veículo não visita ou visita o nó  $i$ . A cada coluna  $a_j$  associa-se um custo  $c_j$ , fruto da resolução de um TSP sobre o conjunto  $\{0\} \cup \{i : a_j(i) = 1\}$ . Esta formulação apresentada em Agarwal et al [1] reveste a seguinte forma:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & \sum_j c_j \cdot x_j \\ \text{s. a.} \quad & \sum_j a_j \cdot x_j = e, \quad e = [1, \dots, 1]^T \in \mathbb{R}^N \\ & x_j \in \{0, 1\} \end{aligned} \quad (12)$$

com  $j$  a percorrer todos os possíveis percursos. (12) assegura que cada nó é visitado por um só veículo. Ao considerar cada coluna  $a_j$ , ter-se-á de ter em conta as várias possíveis restrições, como por exemplo as de capacidade:

$$r^T \cdot a_j \leq U$$

com  $r = [r_1, \dots, r_n]^T$  e  $U$  a capacidade dos veículos. Esta formulação será designada por PC (partição de conjuntos). Refira-se que  $x_j$  é 1 ou 0 consoante o "percurso"  $a_j$  é ou não incluído na solução.

### 3. Métodos de Resolução

#### 3.1 – Resolução do VRP

A natureza combinatoria explosiva deste problema, isto é, o aumento desmesurado do número de soluções com a dimensão do problema, levou a um esforço na criação de heurísticas. Das heurísticas mais conhecidas salientamos:

- i) Clarke e Wright [5];
- ii) Gillet e Miller [11];
- iii) Foster e Ryan [9];
- iv) Fisher e Jaikumar [8].

A primeira baseia-se na construção sucessiva dos percursos [2, 3, 10, 12, 16, 21]. As segunda e quarta encontram-se, assim como a de Tyagi [19], na família dos métodos de duas fases. Na primeira fase os nós são indexados aos percursos dos veículos para depois, numa segunda fase, ser determinada a ordem pela qual cada sequência de nós é percorrida usando uma heurística do TSP. Gillet e Miller usaram um sistema de coordenadas polares. A heurística de Fisher e Jaikumar será abordada mais adiante.

Existem também heurísticas de melhoramento de percursos. Começando com uma determinada solução alteram-se ligações a fim de obter melhores resultados. Christofides e Eilon [3] e Russel [17], modificaram neste sentido, a heurística do TSP proposto por Lin e Kernighan [15].

Como métodos de otimização mais conhecidos temos:

- i) Christofides et al [4];
- ii) Laporte et al [13];
- iii) Agarwal et al [1].

O primeiro enquadra-se no tipo Branch and Bound clássico. Os limites são obtidos por relaxações resolvidas por Programação Dinâmica. O método utiliza também caminhos mais curtos. O segundo baseia-se na formulação do TSP. O terceiro é talvez o mais robusto dos três, no sentido em que restrições de qualquer ordem sobre os percursos dos veículos são mais facilmente adaptáveis. Assenta na formulação PC, já utilizada com sucesso por Desrosiers et al [7] ao estudo do VRP com restrições sobre a tripulação dos veículos.

Convém não esquecer o papel que os métodos interactivos podem desempenhar na resolução deste tipo de problemas. A heurística de Fisher e Jaikumar pode incluir uma fase interactiva. Cullen et al [6] apresentam uma heurística interactiva também baseada na formulação PC.

Em [20] apresentámos um estudo computacional da eficiência destas técnicas. Este estudo indicou que a heurística de Fisher e Jaikumar é normalmente o processo mais recomendável para a resolução do VRP. Por isso apresentamos seguidamente uma descrição sumária desse processo.

A heurística Fisher e Jaikumar procura resolver o VRP usando a formulação (7) – (11) em 2. A ideia subjacente ao método é reformular inicialmente esse problema nos seguintes termos:

$$\begin{aligned}
 & \text{Min} \quad \sum_{k=1}^M f(y_k) \\
 & \text{s.a.} \quad \sum_{i=1}^N r_i y_{ik} \leq U_k, \quad k = 1, \dots, M \\
 & \quad \quad \sum_{i=1}^N t_i y_{ik} \leq T_k, \quad k = 1, \dots, M \\
 & \quad \quad \sum_{k=1}^M y_{ik} = 1, \quad i = 1, \dots, N \\
 & \quad \quad \sum_{i=1}^N y_{ik} \geq 1, \quad k = 1, \dots, M
 \end{aligned} \tag{1}$$



em que  $f(y_k)$  é o custo óptimo de um TSP para os nós do conjunto  $N(y_k) = \{0\} \cup \{i : y_{ik} = 1\}$ ,  $k = 1, \dots, M$ . O último grupo de restrições obriga a que cada veículo seja utilizado.

Seguidamente substitui-se  $f(y_k)$  por  $\sum_{i=1}^N h_{ik} \cdot y_{ik}$  e resolve-se (1). Assim se obtém uma solução admissível ao distribuir os nós por cada veículo.

Para cada conjunto de nós a resolução de um TSP fornecerá o percurso definitivo de cada veículo.

Resta saber como determinar os " $h_{ik}$ ". Para isso o seguinte processo sugerido em [8] é particularmente eficiente:

- i) começar com um conjunto inicial  $\{i_1, \dots, i_M\}$  de nós indexados a cada veículo;
- ii) o coeficiente  $h_{ik}$  é o custo de introduzir o cliente  $i$  no percurso  $0 \rightarrow i_k$ . Assim:

$$h_{ik} = c_{oi} - c_{oi_k} + c_{ii_k}.$$

O último grupo de restrições em (1) poderá ser substituído por:

$$y_{i_k k} = 1, \quad k = 1, \dots, M,$$

o que determina que, cada veículo (suponhamos  $k$ ) seja utilizado e, mais do que isso, a visitar o seu respectivo nó  $i_k$ .

O conjunto inicial pode ser introduzido automaticamente ou pelo analista. Esta última maneira poderá ser a mais aconselhada pelo conhecimento prévio da rede. Os nós mais importantes, i.e., com maiores requerimentos são geralmente escolhidos. Os próprios " $h_{ik}$ " podem ser parametrizados como acontece, por exemplo, na heurística Clarke e Wright. A face interactiva surge assim com naturalidade. Em Fisher e Jaikumar [8] encontram-se ainda outras sugestões.

### 3.2 - Métodos de Resolução do TSP

Dado um conjunto de nós  $\{1, \dots, n\}$  e a respectiva matriz das distâncias  $[c_{ij}]$ , aqui sempre considerada simétrica, o TSP consiste em estabelecer um único percurso de distancia mínima através de todos os nós passando uma e uma só vez por cada um.

Dos vários processos de resolução do TSP distinguimos três métodos a saber:

- (i) um método tipo Branch and Bound [18].
- (ii) um algoritmo heurístico que consiste somente em tentar obter uma primeira solução razoável. Reside em agrupar os nós por intermédio de uma regra de inserção. Lembre-se que a heurística Clarke e Wright se baseia no mesmo tipo de regra.
- (iii) uma segunda técnica heurística conhecida por 3-OPT e que se baseia na realização de três trocas de arcos, numa solução já obtida, por três novos arcos, a fim de melhorar o mais possível. Três trocas é considerando um compromisso adequado, pois a escolha de duas peças por obtenção de más soluções e de quatro origina normalmente tempos computacionais muito grandes. Estas considerações bem como mais detalhes sobre os dois métodos heurísticos apontados encontram-se em [18].

Em [15] é exposto uma heurística de trocas mais flexível em que o seu número não é fixo à priori.

Sugerimos [20] para um estudo computacional de todos estes métodos.

#### 4. Resultados Computacionais

A título ainda que experimental obtivemos resultados práticos para o Concelho de Penela, Distrito de Coimbra.

Antes de os apresentarmos, refira-se que enquadrámos o projecto em termos informáticos, num versátil programa, tipo "interface", que além de possibilitar um fácil contacto com o utilizador permite armazenar, aceder e alterar toda a informação existente de forma eficiente. Assim é possível, por exemplo, criar uma nova ligação entre dois dados nós (correspondente a uma nova estrada) sem ter de introduzir de novo toda a rede ou alterar simplesmente a capacidade de um veículo, podendo assim de imediato obter novos resultados.

Este programa funciona com as heurísticas Fisher & Jaikumar e Clarke & Wright, permitindo assim fixar ou não à priori o número de veículos. No caso do utilizador querer à partida fixar o número de veículos, o output é sempre o obtido pela heurística Fisher e Jaikumar. Caso contrário o output corresponderá à heurística que melhores resultados obtiver.

Para a resolução dos TSP's implementámos a heurística 3-OPT e o algoritmo do tipo Branch and Bound possibilitando, respectivamente, tempos de execução mais rápidos ou resultados mais precisos.

Apresentamos então os resultados relativos ao concelho referido. Destacámos 33 nós (cinco do tipo cruzamento). Os dados datam de 1987. Obtivemos os seguintes resultados:

Número de Percursos	Total de Distância Percorrida (Kms)	Total de Lixo Recolhido (toneladas)	Capacidade Desperdiçada Pelos Veículos (Toneladas)	Total de Tempo Gasto Pelos Veículos (Horas)
1	119.35	2.054	0.946	7.569
2	119.95	2.054	3.946	7.569
3	123.55	2.054	6.946	7.569

Os resultados foram sempre obtidos pela heurística Fisher e Jaikumar com a heurística 3-OPT. A capacidade dos veículos foi considerada de 3 toneladas. As diversas velocidades médias foram por nós atribuídas consoante a importância de cada localidade; o rigor, não é neste caso, absoluto.

Do que ficou por fazer neste projecto, e a fim de o tornar mais completo, ou seja, mais perto da realidade, destacamos:

- diferenciar o local de saída e entrada dos veículos do aterro ou estação de tratamento;
- modelar o tempo de recolha, não pela velocidade média dos veículos, mas pelo tempo gasto a recolher a recolher cada contentor. Aqui é importante considerar os vários tamanhos dos contentores bem como o facto de o serviço ser ou não à tarefa;
- a generalização de todos os métodos abordados ao caso de redes orientadas, ou seja a matrizes não simétricas. Isto é particularmente importante nas cidades onde a presença de sentidos proibidos é uma constante.

**Bibliografia**

- [1] Agarwal, Y.; Mathur, K. e Salkin, H.M. (1989) – A Set-Partitioning-Based Exact Algorithm for the Vehicle Routing Problem, *Networks* 19, 731-749.
- [2] Beltrami, E. e Bodin, L.D. (1974) – Networks and Vehicle Routing for Municipal Waste Collection, *Networks* 4, 65-94.
- [3] Christofides, N. e Eilon, S. (1969) – An Algorithm for the Vehicle Dispatching Problems, *O.Q.R.* 20, 309.
- [4] Christofides, N. Mingozzi, A. and Toth, P. (1981) – Exact Algorithms for the Vehicle Routing Problem, based on Spanning Tree and Shortest Path Relaxations, *Mathematical Programming* 20, 255-282.
- [5] Clarke, C. e Wright, J.Q. (1964) – Scheduling of Vehicles from a Central Depot to a Number of Delivery Points, *O.R.* 12, 568.
- [6] Cullen, F.; Jarvis, J. e Ratliff, H. (1984) – Set Partitioning Based Heuristics for Interactive Routing, *Networks* 14, 125-144.
- [7] Desrosiers, J.; Soumis, F. e Desrochers, M. (1984) – Routing with Time Windows by Column Generation, *Networks* 14, 545-565.
- [8] Fisher, M. e Jaikumar, R. (1981) – A Generalized Assignment Heuristic for Vehicle Routing, *Networks* 11, 109-124.
- [9] Foster, B.A. e Ryan, D.M. (1976) – An Integer Programming Approach to the Vehicle Scheduling Problem, *O.R.Q.* 27, 367-384.
- [10] Gaskell, T.J. (1967) – Basis for Vehicle Fleet Scheduling, *O.R.Q.* 18, 281.
- [11] Gillet, B. e Miller, L. (1974) – A Heuristic Algorithm for the Vehicle Dispatch Problem, *Operations Research* 22, 340-349.
- [12] Golden, B.L.; Magnanti, T.L. e Nguyen, H.Q. (1977) – Implementing Vehicle Routing Algorithms, *Networks* 7, 113-148.
- [13] Laporte, G.; Norbert, Y. e Desrochers, M. (1985) – Optimal Routing under Capacity and Distance Restriction, *R.Operational* 33, 1050-1073.
- [14] Lawler, E. (1976) – Combinatorial Optimization, *Networks and Matroids*, H., R. and Winston.
- [15] Lin, S. e Kernighan, B. (1971) – An Effective Heuristic Algorithm for the Traveling-Salesman Problem, *Operations R.* 21, 498-516.
- [16] Paessens, H. (1988) – The Savings Algorithm for the Vehicle Routing Problem, *E.J.O.R.* 34, 336-344.
- [17] Russell, R.A. (1977) – An Effective Heuristic for the M-Tour Traveling Salesman Problem with some Side Conditions, *O.R.* 25, 517-524.
- [18] Syslo, M.; Deo, N. e Kowalik, J. (1983) – *Discrete Optimization Algorithms*, Prentice-Hall.
- [19] Tyagi, M. (1968) – A Practical Method for the Dispatching Problem, *J.O.R.Soc. of Japan* 10, 76-92.
- [20] Vicente, L. (1990) – Utilização Eficiente de Veículos na Recolha de Resíduos Sólidos Urbanos, Relatório Final de Licenciatura, Departamento de Matemática, Universidade de Coimbra.
- [21] Yellow, P. (1970) – A Computational Modification to the Savings Method of Vehicle Scheduling, *O.R.Q.* 21, 281.

# CICLOS E TENDÊNCIA EM SÉRIES ECONÓMICAS: O PIB PORTUGUÊS DE 1913 A 1986

**João A.O. Soares**  
Secção Autónoma de Economia e Gestão  
Instituto Superior Técnico  
Universidade Técnica de Lisboa

**J.A. Assis Lopes**  
Secção Autónoma de Economia e Gestão  
Instituto Superior Técnico  
Universidade Técnica de Lisboa

## **Resumo**

É discutido neste artigo o problema da mensuração dos ciclos económicos, e nomeadamente dos ciclos de crescimento, enquanto dependente da caracterização da tendência de longo prazo como determinística ou estocástica - modelos 'TS' ('Trend-Stationary') ou 'DS' ('Difference-Stationary'). Referem-se os instrumentos estatísticos associados a ambos - ajuste de uma função determinística do tempo e análise espectral versus modelização ARIMA ou Estrutural.

Os mesmos são utilizados para exame do PIB português 1913-86, concluindo-se pela caracterização 'DS'.

## **Abstract**

This paper discusses the problem of measuring business cycles, namely the growth cycles, as depending on the characterization of the trend as deterministic or stochastic - 'TS' ('Trend-Stationary') or 'DS' ('Difference-Stationary'). Statistical tools associated with both are mentioned - deterministic function of time and spectral analysis versus ARIMA or structural models. Tools are used to examine the portuguese GDP 1913-86, the conclusion being to prefer the 'DS' characterization.

## **1 - Ciclicidade e Tendência em Séries Económicas**

O problema da existência e mensuração dos ciclos económicos ou ciclos de negócios ('business cycles'), usando a tradução literal da designação encontrada na literatura anglo-saxónica, é um problema com mais de cem anos na Teoria Económica, tendo dado origem a vasta literatura teórica e empírica.

Querendo encontrar uma definição de ciclo económico amplamente difundida e suficientemente abrangente para merecer um amplo consenso, pode-se referenciar Arthur Burns e Wesley Mitchell ("Measuring Business Cycles", National Bureau of Economic Research, N.York, 1947). Estes, sinteticamente, caracterizam os ciclos como flutuações da actividade

económica, compostos por expansões e recessões que se sucedem ininterruptamente, de duração entre 1 e 10 a 12 anos, sem periodicidade definida.

Esta definição, por sua vez, fica incompleta se não destrinçarmos entre o que se convencionou designar por 'ciclos clássicos' e os 'ciclos de crescimento'.

Os primeiros correspondem à delimitação das fases de expansão e contracção a verificar nas séries brutas representativas da actividade económica. Do ponto de vista estatístico, esse trabalho não oferece particular dificuldade, havendo só que, cuidadosamente, distinguir pequenas flutuações conjunturais, de fases do ciclo propriamente ditas.

Quanto aos 'ciclos de crescimento', a sua referência aparece nos anos 60, quando a economia dos principais países desenvolvidos conhece uma grande fase de desenvolvimento, parecendo então afastadas as contracções da actividade económica, enquanto diminuição absoluta do produto real e aumento do desemprego dos factores produtivos. Em contrapartida, registam-se fases de atenuação das taxas de crescimento, desacelerações da actividade, que não recessões no sentido actual. Os 'ciclos de crescimento' pretendem então exprimir fases de desvio, flutuações, face à tendência de longo prazo. Implícitamente introduziu-se como cerne do problema a questão da decomposição daquelas componentes nas séries económicas.

Ora, isolar, determinar, a componente cíclica manifesta nas séries relevantes da actividade económica, nomeadamente no Produto, implica a assunção de uma decisão quanto à modelização da tendência - assume esta um carácter determinístico ou estocástico.

A opção pela modelização detrmínstica dá tendência traduz-se no ajustamento de uma função do tempo - tipicamente a exponencial ou um polinómio de grau baixo-, procedendo-se de seguida à substracção da mesma relativamente à série original. A ciclicidade dos resíduos é então objecto de análise através do uso do periodograma ou, pondo a tónica no seu carácter estocástico, através do ajustamento de um modelo ARMA, nomeadamente um AR(2) com raízes complexas.

Mas esta caracterização das séries económicas, que é consagrada na literatura com a designação de modelos 'Trend-Stationary' (TS), sofre vasta

contestação. Pode-se citar, a propósito, o artigo de Nelson e Kang (1981) que mostra como o facto de se retirar uma tendência determinística a um processo tipo passeio aleatório pode introduzir falsa periodicidade nos correspondentes resíduos. Também noutro artigo do mesmo ano, Beveridge e Nelson propõem mais explicitamente uma forma de decomposição de séries económicas baseada em modelos ARIMA. Finalmente, Nelson e Plosser (1982) consagram a designação de 'DIFFERENCE-STATIONARY' (DS) para processos em que as 1<sup>as</sup> (ou outras) diferenças da série original ou do seu logaritmo, são um processo estacionário modelizável por um modelo ARMA.

Nesse mesmo artigo, os autores analisam diversas séries da economia norte-americana, com destaque para a do PIB, e concluem favoravelmente pela sua caracterização como enquadrando-se nos modelos 'DS', i.e., pela tendência estocástica.

Harvey (1984), por sua vez, embora criticando alguns aspectos do artigo acima referido, chega a conclusões concordantes com este, socorrendo-se da modelização estrutural em espaço de estados.

No presente trabalho utilizar-se-ão as diferentes ferramentas estatísticas referidas para análise do caso da economia portuguesa.

A série utilizada - PIB de 1913 a 1986, a preços de 1977 - resulta da compatibilização das estimativas referentes ao período 1913-47 (N.Valério, 1983), com os dados de 1948-57 do INE (INE, 1959), de 1958-1978 do Banco de Portugal ( B.Portugal, Doc.Trabalho, nº15), e por fim com aqueles publicados pelo INE de 1979 até 1986. Uma explicação mais detalhada sobre a mesma pode ser encontrada em Soares (1989).

## **2 - Análise Estatística do PIB Português 1913-86**

### **2.1. - Análise Gráfica e dos Valores Brutos**

Comece-se a análise pelo gráfico da série - Fig.1.

Ele revela essencialmente 3 fases:

- Até finais dos anos 20: Zona de declive quase nulo, com marcada flutuação conjuntural;

- até 1974: Zona de crescimento, primeiro mais lento e depois mais vivo (a partir sobretudo do fim da 2ª Guerra Mundial). Aqui os únicos anos de decréscimo do Produto real são: 1936, 1942, 1944 e 1945.
- de 1974 a 1986: novamente maior pronunciamento cíclico acompanhado de uma tendência crescente. Dois vales acentuados: 1975 e 1983/84.

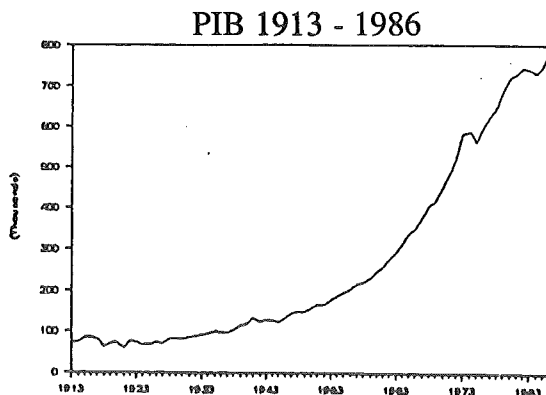


Fig. 1

Nesta evolução, que aliás apresenta similitudes com a da economia internacional, é possível estabelecerem-se os picos e vales delimitadores das fases de expansão e recessão, sem levar em conta os desvios à tendência - ciclos clássicos. Podem-se, então, calcular os

Intervalo médio entre máximos: 7.44 anos (D.P. = 9.11 anos)

Intervalo médio entre mínimos: 7.33 anos (D.P. = 8.8 anos)

As medidas dos intervalos entre extremos, consonantes com as diferenças das fases já referidas e em que sobressai um período de crescimento contínuo de 1945 a 1974, não indiciam a existência de regularidade estatística para todo o período em análise.

## 2.2. - Ajustamento de uma Tendência Determinística

Procedendo de seguida ao ajustamento de uma tendência determinística, ensaiou-se a utilização de exponencial e de polinómios de grau 2 a 4. Aquela fornece um valor de  $\bar{R}^2$  ( $R^2$  ajustado) de 0.952, enquanto para este obtiveram-se valores de 0.985, 0.988 e 0.991. Refira-se, relativamente ao ajuste da exponencial, que o valor obtido do parâmetro da tendência foi de 3.7. Este pode ser interpretado, como é sabido, como a taxa anual de crescimento percentual de tendência, ao longo de todo o período.



A primeira conclusão que se pode extrair dos valores obtidos é que, embora se saiba que para séries económicas suficientemente longas a tendência de longo prazo é largamente dominante, é de sublinhar que o ajustamento polinomial deixa por explicar somente cerca de 1% da variância total - isto para a componente cíclica mais a irregular. Tal valor pode ser contraposto aos 5% da exponencial. Mas neste caso, a mera análise gráfica parece demonstrar ser irrealista a assunção de taxa de crescimento anual constante para todo o período que lhe é implícita.

Passemos agora à análise dos resíduos:

A visão geral da série residual pode ser obtida, no que concerne à exponencial, se referirmos que a curva ajustada vai cortar a série original em meados dos anos 20 e 60. Marca então 3 grandes fases, acima, abaixo, e novamente acima da tendência. Quanto aos ajustamentos polinomiais, a aderência nas extremidades é superior (daí o maior  $\bar{R}^2$ ), verificando-se ainda a elevação do pico de 1941 e anos adjacentes.

Com este padrão é óbvio que os periodogramas dos resíduos, enquanto estimadores do espectro teórico, são largamente dominados por ciclos correspondentes a 1 ciclo para a exponencial e 2 ciclos para os ajustamentos polinomiais - períodos de 74 e 37 anos. Para se dar uma ideia mais precisa refira-se que, para a exponencial, esse pico corresponde a cerca de 74% da variância total, sendo p.ex., de 42% para o polinómio de 3º grau. Na generalidade não deparámos com mais nenhum pico correspondendo a uma explicação de variância superior a 10%.

Mas qual é a principal ideia a extrair da análise ?

Pensamos que é a existência de um pico no periodograma para baixas frequências, correspondendo a valores para o período entre 100 e 50% da dimensão da série. Tal parece exemplificar o "característico espectro das séries económicas", correspondente ao que Nelson e Kang apontaram como resultado de inapropriada extracção de tendência. No artigo já referido, de 1981, eles mostram como uma passeio aleatório a que se retire uma tendência determinística, apresenta uma função de densidade espectral com um pico dominante correspondente a um período de cerca de 80% da dimensão da amostra.

Interessante também é comparar os valores das 1<sup>as</sup> seis autocorrelações dos resíduos referentes à regressão do logaritmo do PIB (i.e., resíduos do ajuste da exponencial), de um passeio aleatório (dimensão = 100) e do PNB real norte-americano entre 1909 e 1970. As duas últimas séries foram extraídas de Nelson e Plosser (1982, pág.150, tabela 4).

Quadro 1  
Autocorrelação Amostrais dos Resíduos

Série	r1	r2	r3	r4	r5	r6
PIB português	0,88	0,81	0,73	0,61	0,52	0,49
passeio aleatório	0,91	0,82	0,74	0,66	0,58	0,51
PNB EUA	0,87	0,66	0,46	0,26	0,19	0,07

Por fim, quanto à análise dos resíduos resultantes da extracção de uma tendência determinística, duas ordens de questões nos merecem reparo:

- A primeira refere-se à possibilidade de ajustar funções polinomiais ao logaritmo do PIB, e não directamente a este. É a via prosseguida por Pinto Barbosa (1985) numa análise do PIB, entre 1953 e 1980, tendo por fonte o FMI.

O autor ensaia o ajustamento de uma recta e de um polinómio de 2<sup>o</sup> grau para o referido log (PIB). Ambos os ajustamentos apresentam  $\bar{R}^2$  de 0.991, sendo escolhido o modelo menos parcimonioso para ajustamento de um modelo ARIMA, apesar do reduzido número de observações. É então identificado um AR(2), indicativo de ciclicidade estocástica, com período de 4.16 anos.

No entanto, com os parâmetros apresentados e a fórmula para o período 'd' corrigida (V.Box e Jenkins, Holden Day, ed. 1970, pág. 60 ou Gottman, C.U.P., 1981, pág. 233),

$$d = \frac{2\pi}{\arcsin [|\theta_1|/(2(-\theta_2)^{1/2})]}$$

o valor obtido foi de 17.34 anos.

De qualquer maneira, o que é interessante referir é que não parece existir justificação teórica para o ajuste do logaritmo que não da série original. Do ponto de vista prático tentou-se comprovar essa ideia usando os nossos dados. Os  $\bar{R}^2$  encontrados foram muito idênticos aos dos ajustamento directo e a estrutura dos correlogramas e correlogramas parciais mostrou-se também semelhante, embora com valores mais atenuados apontando para processos

autoregressivos de 1ª ordem. A análise do periodograma confirmou o domínio referente a baixas frequências.

- A segunda questão que faltava focar prende-se com a análise directa dos resíduos dos ajustamentos. Embora ela não distinga a componente cíclica da irregular, corresponde à concepção lata de flutuações do Produto, interessante na comparação com os resultados encontrados para a série bruta. Aí é de notar, sobretudo, as novas divisões introduzidas pelo corte efectuado pela linha de tendência à grande fase intermédia de crescimento - 1945 a 1974. O resultado é a diminuição do intervalo médio entre máximos relativos que passa para valores próximos de 4 anos, com D.P. de cerca de 1.7 anos, para a generalidade dos ajustamentos.

### 2.3. - Tendência Estocástica - Modelos ARIMA

Neste ponto procedeu-se à logaritmização e diferenciação de série, por forma a torná-la estacionária quanto às suas média e variância. Na Fig.2 observa-se que se corrigiu no essencial o problema da estacionaridade em torno da média, mas é nítida a maior variância na fase inicial.

$\Delta \text{LOG (PIB 1913 - 86)}$

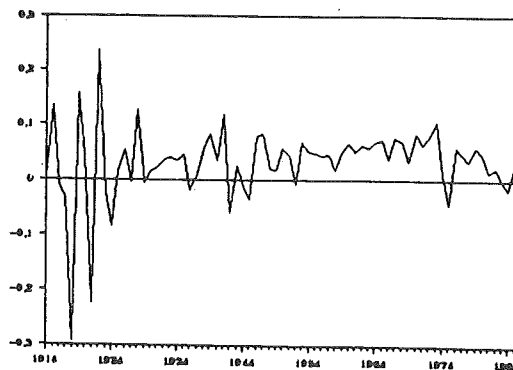


Fig. 2

As funções estimadas de autocorrelação amostral (V.Quadro 2), apresentam, por seu turno, uma estrutura oscilante de valores positivos e negativos, não significativos a 2 D.P., a qual aponta para um processo aleatório, exceptuando-se ligeiramente as 1ª e 3ª autocorrelações. A primeira assume um valor negativo ao contrário da 3ª. Este comportamento decorre do carácter muito oscilante da série diferenciada, onde se denota uma ciclicidade muito curta, com distância média entre picos de cerca de 3 anos.

Avançando na análise, entendemos proceder ao seccionamento da série no ano de 1925, correspondendo às fases distintas que tínhamos detectado. A primeira secção fica com um número de pontos demasiado pequeno para prosseguir o estudo. A fase mais recente vem revelar um padrão de ruído branco. Tal se evidencia no correlograma, correlograma parcial e ainda no periodograma integrado que se calculou.

Este último, embora já na série completa ficasse dentro das bandas de 95%, correspondentes ao teste de Kolmogorov - Smirnov, é agora mais nitidamente uniforme.

Por sua vez refira-se que o  $\bar{R}^2$  do  $\log(\text{PIB})$  sobe, no período de 1925-1985, para 0.984.

A conclusão que se extrai daqui aponta para a presença de um modelo 'DS', no caso, um passeio aleatório do  $\log(\text{PIB})$ . Tal merece ser confrontado com os modelos estruturais de Harvey.

Quadro 2

Desfasamento	$\Delta \text{LOG}(\text{PIB } 1913-86)$				$\Delta \text{LOG}(\text{PIB } 1925-86)$			
	Autoc. Amost.	DP	Autocor. Parciais Amostras	DP	Autoc. Amostras	DP	Autoc. Parciais Amostras	DP
1	-.22701	.11704	-.22701	.11704	-.00014	.12804	-.00014	.12804
2	-.11174	.12292	-.17215	.11704	.02026	.12804	.02026	.12804
3	.31259	.12431	.26688	.11704	.06462	.12809	.06465	.12804
4	-.12653	.13465	-.01356	.11704	-.14030	.12862	-.14126	.12804
5	-.04496	.13627	-.02008	.11704	-.06349	.13111	-.06687	.12804
6	.17441	.13647	.08273	.11704	.22058	.13161	.22945	.12804
7	.08920	.13949	.19919	.11704	.13875	.13754	.17096	.12804
8	-.00239	.14027	.10308	.11704	.05619	.13981	.03066	.12804
9	.07786	.14027	.05963	.11704	.12133	.14018	.06665	.12804
10	-.08999	.14086	-.13295	.11704	-.06165	.14189	-.02539	.12804
11	.00828	.14164	-.02387	.11704	-.12771	.14233	-.08168	.12804
12	.00793	.14165	-.04653	.11704	-.05232	.14420	-.09126	.12804
13	.11643	.14166	.15941	.11704	.13794	.14451	.13347	.12804
14	-.08033	.14296	-.09302	.11704	-.13566	.14665	-.17073	.12804
15	.01501	.14358	-.02542	.11704	.04137	.14870	-.06226	.12804

#### 2.4. - Modelos Estruturais

Procedeu-se ao ajustamento de 3 modelos para o logaritmo do produto:

- a) tendência estocástica (nível + crescimento + componente irregular);
- b) tendência cíclica (tendência estocástica com ciclo incorporado + comp.irregular);
- c) tendência + ciclo (tendência estocástica + ciclo estocástico + componente irregular).

Os modelos a) e b) fornecem ambos um valor de  $R^2 = 0,9937$ ,  $R_D^2 = 0,09$  (i.e. 9 pontos percentuais acima do passeio aleatório + taxa de impulso) e os correlogramas dos resíduos apontam para ruído branco. Por sua vez as variâncias associadas à tendência, muito próximas de zero, parecem reflectir a grande supremacia da persistência na evolução da série, considerada neste período longo.

No que concerne ao modelo b) é de salientar também que o período estimado de ciclicidade é de 6.57 anos, sendo muito elevado (1.80) o valor desvio-padrão do parâmetro da frequência.

Por sua vez quanto ao modelo c), e em face daquele valor estimado de periodicidade, começou-se por impôr o valor de 6 e de 7 anos para o ciclo aditivo. Em ambos os casos os valores de  $R^2$  e  $R_D^2$  foram idênticos aos dos modelos anteriores. No entanto, os correlogramas dos resíduos não apresentaram agora o aspecto de ruído branco, já que se destacou um valor significativo a 95% de confiança, correspondente ao desfasamento 3. Procedeu-se, então, à imposição de período igual a 3, tendo-se ultrapassado aquele problema e elevado ligeiramente o  $R^2$  para 0,944 e o  $R_D^2$  para 0,1. No entanto, tal como anteriormente, a ciclicidade encontrada explica valores muitíssimo reduzido da variação do Produto, em escala semelhante à componente irregular.

#### O PERÍODO 1925-86

Já referimos anteriormente a diferença encontrada antes e depois dos meados dos anos 20. De facto, e embora sublinhemos que os valores encontrados para as 1<sup>as</sup> décadas são estimados, é de realçar na 1<sup>a</sup> fase, p.ex., as seguintes taxas de enorme variação do Produto:

1918 : -25%; 1921 : -20%; 1922 : +26%.

Ignorando o 1º período, tinha-se concluído o acentuar da caracterização da série como a de um passeio aleatório + taxa de impulso. A utilização da modelização estrutural veio obviamente confirmar esta perspectiva. Assim obteve-se agora um  $R^2 = 0.9978$  e sobretudo um  $R_D^2 = 0.0015$ , i.e., praticamente nulo.

### **3 - Conclusões**

- O Produto real tem 3 fase distintas quanto à instabilidade do seu crescimento. As mesmas, coincidindo aproximadamente com a 1ª República, Estado Novo e Pós - 25 de Abril, não devem levar a sobrevalorizar-se o papel explicativo das mutações do regime, já que há a considerar importantes mudanças também ocorridas na economia internacional.
- Não havendo razão para considerar que o padrão da última fase é o único relevante na extrapolação dos anos vindouros, uma análise a mais prazo (mais de 30 anos) revela que as flutuações cíclicas são responsáveis pela explicação da variância do Produto num montante inferior a cerca de 1%. Esta conclusão é válida para os diferentes modelos ajustados, com excepção da exponencial para todo o período (1913-86), mas parecendo este abusivo, pelo que atrás referimos.
- Quer na tentativa, para os 'ciclos clássicos', de isolar a flutuação cíclica de inflexões da tendência ou da componente irregular, quer mais nitidamente na definição dos 'ciclos de crescimento', a questão primordial da análise estatística parece ser a de como modelizar a tendência-determinística ou estocástica.
- Ainda que a existirem razões da Teoria Económica que perfilhem a 1ª alternativa, a nós parece-nos que a adopção, neste caso, de funções polinomiais no tempo, se ganha em aderência relativamente a funções lineares ou exponenciais, carece de interpretação económica que as imponham face a tendências estocásticas.

Por seu lado, confirma-se que, embora perante valores elevados de aderência ( $R^2$ ), se podem estar a introduzir nos resíduos, sem aparente

significado, grandes fases acima e abaixo da tendência, as quais vêm deturpar a posterior utilização da análise frequencista.

Confirma-se, nesse sentido, as análises de autores como Nelson e Kang (1981), que sublinharam o aparecimento, neste caso, de um pico dominante nas baixas frequências.

- No quadro não determinístico, a análise efectuada com modelos ARIMA e estruturais conclui pela na caracterização do PIB como "Difference-Stationary" e nomeadamente como passeio aleatório + impulso, que se acentua a partir de meados dos anos 20.
- Ainda assim é possível notar-se uma ciclicidade residual, de reduzida amplitude, de período médio igual a 3 anos - flutuação estável que se torna também evidente na taxa de crescimento do PIB. Por sua vez, na série bruta, os valores entre picos ('ciclos clássicos'), apresentam médias de 7-8 anos, mas com uma enorme variabilidade que lhe retira significado.

## Referências

- [1] Barbosa, António Pinto [1985], *Inflação e Produção em Portugal 1953-80*, "Ecónomia", U.Católica Portuguesa, Vol.I, nº1.
- [2] Beveridge, SE. e Nelson, C.R. (1981), *A New Approach to Decomposition of Economic Time Series into Permanent and Transitory Components with Particular Attention to Measurement of the Business Cycle*, J.of Monetary Economics, Vol.7, nº2, March, North-Holland and P.C.
- [3] Cartaxo, R.J. e Rosa, N.E.S. [1986], *Séries longas para as contas Nacionais Portuguesas 1958-1985*, Doc.Trabalho nº15, Banco de Portugal
- [4] Harvey, A.C. [1984], *Trends and Cycles in Macroeconomic Time Series*, London School of Economics
- [5] Nelson, C.R. e Kang, H. [1981], *Spurious Periodicity in Inappropriately Detrended Time Series*, Econometrica, Vol.49, nº3, pp.741-751.
- [6] Nelson, C.R. e Plosser, C.I. [1982], *Trends and Random Walks in Macroeconomic Time Series - Some Evidences and Implications*, Journal of Monetary Economics, 10, pp.139-162
- [7] Perron, P. [1987], *Trends and Random Walks in Macroeconomic Time Series - Further Evidence from a New Approach*, Journal of Economic Dynamics and Control, 12 (1988), pp.297-332, NORTH-HOLLAND
- [8] Soares, João A.O. [1989], *Métodos Estatísticos de Análise da Ciclicidade em Séries Económicas*, IST-U.T.L.
- [9] Valério, N. [1983], *O Produto Nacional de Portugal entre 1913 e 1947 - Uma Primeira Aproximação*, Separata da Revista de História Económica e Social, Março

# REFORÇO DA DECOMPOSIÇÃO LAGRANGEANA : TEORIA E APLICAÇÕES

**Lígia Amado**

Universidade Técnica de Lisboa  
Instituto Superior de Economia e Gestão  
1200 Lisboa

**Paulo Barcia**

Universidade Nova de Lisboa  
Faculdade de Economia  
1000 Lisboa

## Resumo

O Reforço do Dual e a Decomposição Lagrangeana são duas formas distintas de obter minorantes do valor óptimo de um problema de minimização que dominam os obtidos com a Relaxação Lagrangeana usual.

A combinação dos dois métodos, Reforço da Decomposição Lagrangeana, produz um minorante que domina os resultantes de usar qualquer dos métodos separadamente.

Nesta nota é feito um "survey" dos principais resultados teóricos referentes a estes métodos fazendo-se, a finalizar, uma aplicação do Reforço da Decomposição Lagrangeana a três problemas específicos: O Problema da Afectação Generalizada, o Problema de Matching com Limites Superiores Generalizados e o Problema do Caixeiro Viajante Assimétrico.

## Abstract

Recently several Lagrangean techniques yielding stronger bounds than the usual Lagrangean bounds appeared on the literature: Bound Improving Sequences, Lagrangean Decomposition and Improved Lagrangean Decomposition.

In this note we survey the theory on which these techniques rely upon and discuss applications of the Improved Lagrangean Decomposition technique to the Generalized Assignment Problem, to the Matching Problem with GUB side constraints and to the Assymetric Travelling Salesman Problem.

**Keywords:** Lagrangean Relaxation, Integer Programming.

## 1. Introdução

O propósito desta nota é o de fazer um "survey" sobre alguns avanços recentes na determinação de limites inferiores, baseados na técnica da Dualidade Lagrangeana, para problemas de Optimização Combinatória.

Na secção 2, e seguindo as ideias de Barcia (1985) (1985a) e (1987), apresentaremos um método de Reforço do Dual, que consiste na construção de problemas duais cujos valores óptimos formam uma sequência crescente de minorantes do valor óptimo do problema inicial. Estudaremos também em que condições é que esta sequência de minorantes é estritamente crescente, atingindo-se então o valor óptimo do problema primal.



Quando no problema primal temos dois grupos distintos de restrições "manobráveis", a Decomposição Lagrangeana, sugerida separadamente por Guinard & Kim (1987) e Jörnsten & Näsberg (1986), permite-nos duplicar as variáveis de forma a que no problema dual estejam presentes ambas as subestruturas do problema original, obtendo-se assim um minorante melhor do que o da relaxação usual, como veremos na secção 3. Aí estudaremos também em que condições é que a Decomposição Lagrangeana é estritamente melhor do que a Relaxação Lagrangeana usual.

Na secção 4, seguindo as ideias de Barcia (1988) Amado (1989) e Barcia & Jörnsten (1990), veremos como combinar o Reforço do Dual e a Decomposição Lagrangeana, de forma a obtermos um minorante que domine os resultantes de aplicar qualquer dos métodos separadamente. Veremos ainda em que condições a dominância é estrita.

Na secção 5 desta nota aplicaremos o Reforço da Decomposição Lagrangeana a três problemas específicos: ao problema da Afectação Generalizada, Barcia & Jörnsten (1990), ao Problema de Matching com Limites Superiores Generalizados, Amado & Barcia (1988) e Amado (1989), e finalmente ao Problema do Caixeiro Viajante Assimétrico, Barros & Barcia (1990).

Terminaremos com apresentação das principais conclusões.

## **2. Reforço do Dual**

Da teoria geral da Dualidade Lagrangeana, veja-se por exemplo Rockafeller (1970) Geoffrion (1974) Fisher (1978) Shapiro (1979) Shapiro (1979a) Bazaraa & Shetty (1979) Minoux (1983) Fisher (1985) Nemhauser & Wolsey (1988) Parker & Rardin (1988), sabe-se que uma das formas de obter minorantes do valor óptimo de um problema de minimização é relaxar (à Lagrange) um conjunto de restrições. No entanto, este processo pode tornar o problema dual num problema "demasiado" fácil (por exemplo, se o dual verificar a propriedade da integralidade) e então o minorante obtido (que designamos por  $\lambda$ ) poderá ser muito menor do que o valor óptimo do problema.

Assim, uma técnica que tem resultado em muitas aplicações, consiste em acrescentar ao problema primal restrições redundantes (isto é, que não alterem

o valor óptimo do problema), mas que reduzam significativamente o conjunto de soluções admissíveis do dual (se relaxarmos o mesmo conjunto de restrições). Usando esta técnica de reforço do dual, vamos criar uma sequência de problemas duais cujos valores óptimos formam uma sequência crescente (em sentido lato) de minorantes do valor óptimo do problema original. Estudaremos ainda em que condições é que esta sequência é estritamente crescente, conseguindo-se assim ultrapassar o "gap" de dualidade.

Consideremos então o seguinte problema de Programação Linear Inteira

$$(P) \quad \begin{aligned} z &= \min cx \\ Ax &\leq b \\ x &\in X \end{aligned}$$

onde  $c \in \mathbb{N}_0^n$ ,  $b \in \mathbb{Z}^m$  e  $A$  é uma matriz de inteiros de dimensões apropriadas. Admitimos que  $X$  é um subconjunto limitado de  $\mathbb{N}_0^n$  e que o problema (P) tem óptimo finito.

Suponhamos que conhecemos um minorante  $\ell_k$  do valor óptimo de (P),  $\ell_k \leq z$ , e designemos por  $X_k$  o conjunto  $X_k = \{x \in X : cx \geq \ell_k\}$ .

Então, se trocarmos em (P) a restrição  $x \in X$  por  $x \in X_k$ , é óbvio que o valor óptimo de (P) se mantém. É com esse sentido que dizemos que (P) pode ser equivalentemente reformulado por

$$(P_k) \quad \begin{aligned} z &= \min cx \\ Ax &\leq b \\ x &\in X_k. \end{aligned}$$

Seja  $u \in \mathbb{R}^m$  um vector de multiplicadores não negativos. Então, o dual Lagrangeano obtido de  $(P_k)$  relaxando as restrições  $Ax \leq b$  é:

$$(DL_k) \quad \begin{aligned} \ell_{k+1} &= \max \min [cx + u(Ax-b)] \\ u &\geq 0 \quad x \in X_k \end{aligned}$$

A expressão acima define um processo iterativo que suporemos inicializado com o limite inferior da relaxação Lagrangeana usual  $\ell_0 = \ell$ , dando origem a uma sequência de limites inferiores cuja dificuldade de cálculo depende do conjunto das restrições implícitas,  $X$ , escolhido inicialmente. Existem, felizmente, alguns casos em que o seu cálculo não é exageradamente difícil. Eis dois casos em que tal acontece:

Caso 1: Vejamos o que acontece se  $\mathbf{X} = \{0, 1\}^n$ . Repare-se que, em  $(DL_k)$ , o problema interno de minimização é um problema de mochila binária (0-1 knapsack problem) que é um problema fácil de entre os difíceis, isto é, embora esteja em  $NP$  é pseudo-polinomial [veja-se Walukiewicz & Dudzinsky (1987) e Martello & Toth (1990)]. Note-se ainda que o dual que obtivemos não verifica a propriedade da integralidade, contrariamente ao que aconteceria se não tivéssemos substituído  $\mathbf{X}$  por  $\mathbf{X}_k$ , podendo assim concluir-se que reduzimos o problema inicial (P) a uma problema mais fácil, mas não "demasiado" fácil.

Caso 2: Suponhamos agora que o conjunto  $\mathbf{X}$  é um pouco mais complicado do que o do exemplo anterior:  $x \in \mathbf{X}_k$  se e só se  $x \in \{0, 1\}^n$  e  $x$  verifica um conjunto de restrições de semi-afectação. Neste caso, o problema de minimização presente em  $(DL_k)$  é um problema de mochila binária de escolha múltipla (multiple choice knapsack problem) que é do mesmo grau de dificuldade do que o de mochila simples [veja-se ainda Walukiewicz & Dudzinsky (1987) e Martello & Toth (1990)].

É fácil de verificar que a sequência de problemas duais  $(DL_k)$  dá origem a minorantes  $\lambda_k$  que formam uma sucessão de limites inferiores crescente (em sentido lato). Com efeito vale o seguinte

**Teorema 2.1:**  $\lambda_{k+1} \geq \lambda_k$ . ♦

$$\begin{aligned} \text{Prova: } \lambda_{k+1} &= \max_{u \geq 0} \min_{x \in \mathbf{X}_k} [cx + u(Ax - b)] \\ &\geq \min_{x \in \mathbf{X}_k} cx = \min_{x \in \mathbf{X}} cx \geq \lambda_k. \end{aligned}$$

♦

Naturalmente que o mais interessante seria obter condições que nos digam quando é que esta sucessão de minorantes é estritamente crescente. Na verdade, prova-se facilmente que

**Teorema 2.2:** Se  $\lambda_{k+1} = \lambda_k$  então  $u = 0$  é um vector óptimo de multiplicadores.  $\diamond$

**Prova:** Se  $\lambda_{k+1} = \lambda_k$  a cadeia de desigualdades estabelecida na demonstração do teorema 2.1. transforma-se numa cadeia de igualdades, isto é

$$\lambda_k = \max_{u \geq 0} \min_{x \in \mathcal{X}_k} [cx + u(Ax-b)] = \min_{x \in \mathcal{X}_k} cx = \lambda_k$$

onde, pela segunda igualdade concluímos que  $u = 0$  é um vector óptimo de multiplicadores.  $\diamond$

Por outras palavras, o que o teorema 2.2. nos diz é que se  $u = 0$  não for um vector óptimo de multiplicadores (e note-se que para isso basta encontrar outro vector que aumente a função dual), então  $\lambda_{k+1}$  é estritamente maior do que  $\lambda_k$ . Assim, já conhecemos uma condição suficiente para que a sucessão de minorantes seja estritamente crescente.

Relembremos agora que resolver um dual Lagrangeano dum problema de Programação Linear Inteira é o mesmo do que resolver um primal modificado, em que se convexificaram as restrições não relaxadas. Assim, é imediato que

**Teorema 2.3:**

$$(P_k C) \quad \begin{aligned} \lambda_{k+1} &= \min cx \\ Ax &\leq b \\ x &\in \text{Conv} \{x \in \mathcal{X} : cx \geq \lambda_k\}. \end{aligned} \quad \diamond$$

Estamos agora em condições de procurar uma condição necessária e suficiente para o problema que vimos a estudar.

**Teorema 2.4:** Consideremos os conjuntos de nível da função objectivo, isto é, os conjuntos  $\mathcal{L}(y) = \{x \in \mathcal{X} : cx=y\}$ .  $\lambda_{k+1} > \lambda_k$  se e só se  $\text{Conv} \mathcal{L}(\lambda_k) \cap \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\} = \emptyset$ .  $\diamond$

**Prova:** Se  $\text{Conv} \mathcal{L}(\lambda_k) \cap \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$  fosse não vazio, existia pelo menos um ponto  $x^*$  tal que  $x^* \in \text{Conv} \{x \in \mathcal{X} : cx = \lambda_k\} \cap \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$ .

Nestas condições, é óbvio que

$$cx^* = \lambda_k \quad (1)$$

e que  $(A \subset B \Rightarrow \text{Conv} A \subset \text{Conv} B)$

$$x^* \in \text{Conv} \{x \in \mathcal{X} : cx \geq \ell_k\} \cap \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\} \quad (2)$$

isto é, pelo teorema 2.3, a condição (2) implica que  $x^*$  é solução admissível de  $(P_k C)$ . Como o valor óptimo do problema  $(P_k C)$  é maior ou igual a  $\ell_k$ , pela condição (1) concluímos que  $x^*$  é uma solução óptima de  $(P_k C)$  e  $\ell_{k+1} > \ell_k$ .

Reciprocamente, como os problemas  $(P_k C)$  e  $(P_{k-1} C)$  têm a mesma função objectivo, o conjunto das soluções admissíveis de  $(P_k C)$  está contido no das soluções admissíveis de  $(P_{k-1} C)$  se  $\ell_{k+1} > \ell_k$ . Então, não existe em  $\text{Conv } \mathcal{X}_k \cap \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$  nenhuma solução óptima de  $(P_{k-1} C)$ , isto é:

$$\text{Conv } \mathcal{X}_k \cap \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\} \cap \{x \in \text{Conv } \mathcal{X}_{k-1} : Ax \leq b, cx = \ell_k\} = \emptyset.$$

Então, como  $\mathcal{X}_k \subset \mathcal{X}_{k-1}$ ,

$\text{Conv } \mathcal{X}_k \cap \{x \in \mathbb{R}^n : cx = \ell_k\} \cap \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\} = \emptyset$  isto é, usando a definição de  $\mathcal{X}_k$ ,

$$\text{Conv} \{x \in \mathcal{X} : cx \geq \ell_k\} \cap \{x \in \mathbb{R}^n : cx = \ell_k\} \cap \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\} = \emptyset.$$

Relembrando que  $\text{Conv} (A \cap B) \subset (\text{Conv } A \cap \text{Conv } B)$ , tem-se a seguinte inclusão:

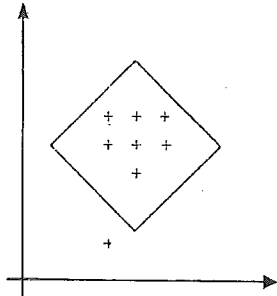
$$\begin{aligned} & \text{Conv} \{x \in \mathcal{X} : cx \geq \ell_k\} \cap \{x \in \mathbb{R}^n : cx = \ell_k\} \supset \\ & \supset \text{Conv} \{x \in \mathcal{X} : cx \geq \ell_k, x \in \mathbb{R}^n, cx = \ell_k\} = \\ & = \text{Conv} \{x \in \mathcal{X} : cx = \ell_k\}, \text{ pelo que} \\ & \text{Conv} \{x \in \mathcal{X} : cx = \ell_k\} \cap \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\} = \emptyset. \end{aligned} \quad \blacklozenge$$

Estabelecemos assim um resultado que nos dá uma condição necessária e suficiente para que se tenha  $\ell_{k+1} > \ell_k$ .

Daremos agora um exemplo geométrico para ilustrar os teoremas 2.3 e 2.4.

### Exemplo 2.5:

Na figura, o interior do rectângulo corresponde ao domínio  $Ax \leq b$  e os pontos assinalados com + são os elementos de  $\mathcal{X}$ . Admitimos ainda que a função objectivo é representada por uma recta horizontal:



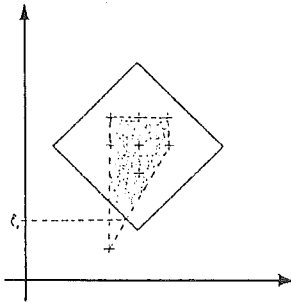
Usando a interpretação primal do capítulo anterior,  $\lambda_0$  é dado por:

$$\lambda_0 = \min cx$$

$$Ax \leq b$$

$$x \in \text{Conv } \mathbf{X}$$

como se pode ver na figura seguinte:



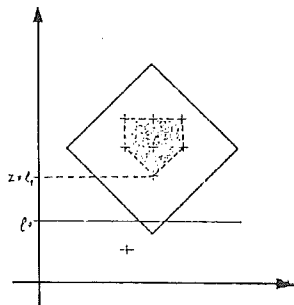
Então, pelo teorema 2.3,

$$\lambda_1 = \min cx$$

$$Ax \leq b$$

$$x \in \text{Conv } \{x \in \mathbf{X} : cx \geq \lambda_0\}$$

isto é,



Note-se que, pelo teorema 2.4, já sabíamos previamente que  $\lambda_1 > \lambda_0$ , uma vez que  $\text{Conv } \{x \in \mathbf{X} : cx = \lambda_0\} \cap \{x : Ax \leq b\} = \emptyset$ . ♦

### 3. Decomposição Lagrangeana

Consideremos agora um problema de Programação Linear Inteira

$$(P) \quad \begin{aligned} z &= \min cx \\ Ax &\leq b \\ Bx &\leq d \\ x &\in X \end{aligned}$$

onde  $X$  é um subconjunto limitado de  $\mathbb{N}_0^n$ .

Suponhamos que a matriz  $A$  é tal que

$$\begin{aligned} \min cx \\ Ax &\leq b \\ x &\in X \end{aligned}$$

é um problema "fácil" de resolver, e que a matriz  $B$  é tal que

$$\begin{aligned} \min cx \\ Bx &\leq d \\ x &\in X \end{aligned}$$

é também um problema "fácil" (isto é, para qualquer um destes problemas existe um método eficiente de resolução).

Admitimos ainda que o problema (P), em que ambas as restrições estão presentes, é muito mais difícil.

Uma abordagem usual para este tipo de problemas costuma ser a relaxação (à Lagrange) das restrições  $Ax \leq b$ :

$$(R_A) \quad \begin{aligned} \mathcal{L}_A = \max \quad \min [cx + v(Ax - b)] \\ v \geq 0 \quad Bx \leq d \\ x \in X \end{aligned}$$

ou a relaxação das restrições  $Bx \leq d$ :

$$(R_B) \quad \begin{aligned} \mathcal{L}_B = \max \quad \min [cx + v(Bx - d)] \\ v \geq 0 \quad Ax \leq b \\ x \in X \end{aligned}$$

No entanto, em qualquer das relaxações ( $R_A$ ) ou ( $R_B$ ) apenas aparecem explicitamente as restrições  $Bx \leq d$  ou  $Ax \leq b$ , mas não ambas. O propósito da técnica conhecida por Decomposição Lagrangeana é o de ter presente no problema dual os dois tipos de restrições. Isso pode ser obtido facilmente desde que se reformule o problema (P) com uma cópia das variáveis iniciais para cada estrutura:

$$\begin{aligned}
 \text{(PR)} \quad z &= \min (\alpha cx + \beta cy) \\
 &Bx \leq d \\
 &Ay \leq b \\
 &x = y \\
 &x \in X, y \in Y, Y \supset X, \alpha + \beta = 1
 \end{aligned}$$

Relaxando agora as restrições de igualdade obtem-se o seguinte dual:

$$\begin{aligned}
 \text{(D)} \quad d &= \max_{u \in \mathbb{R}^n} [ \min_{\substack{Bx \leq d \\ x \in X, \\ y \in Y, Y \supset X, \alpha + \beta = 1}} c(\alpha x + \beta y) + u(x-y) ] \\
 &= \max_{u \in \mathbb{R}^n} [ \min_{x \in X} (\alpha c + u)x + \min_{y \in Y} (\beta c - u)y ] \\
 & \quad Bx \leq d \quad Ay \leq b \\
 & \quad x \in X \quad y \in Y, Y \supset X, \alpha + \beta = 1.
 \end{aligned}$$

Temos agora um dual em que estão presentes ambos os conjuntos de restrições e que, por isso, nos parece mais forte. Com efeito, provaremos seguidamente que o minorante do valor óptimo de (P) usando a Decomposição Lagrangeana nunca é pior do que o melhor dos dois minorantes  $\ell_A$  e  $\ell_B$ .

No que se segue, sem perda de generalidade e para simplificação da escrita, tomaremos para  $\alpha$  e  $\beta$  os valores  $\alpha = 1$  e  $\beta = 0$ . Como notação usaremos ainda:

- $v(\cdot)$  e  $SO(\cdot)$  para representar, respectivamente, o valor óptimo e o conjunto de soluções óptimas do problema  $(\cdot)$ .
- $(\cdot, u_0)$ , quando nos quizermos referir ao problema de minimização presente no problema dual  $(\cdot)$ , quando o multiplicador vale  $u_0$ .

Podemos agora começar a examinar a qualidade do novo limite inferior.

**Teorema 3.1:** Sejam  $v_0 \in SO(R_A)$ ,  $u_0 = v_0 A$  e  $(x_0, y_0) \in SO(D u_0)$ . Então,

- (i)  $v(R_A v_0) - v(D u_0) = v_0 (A y_0 - b)$
- (ii)  $d \geq \ell_A$ . ♦



**Prova:**

$$\begin{aligned}
 v(R_A v_0) &= \min_{x \in X} cx + v_0 (Ax - b) \\
 &\quad Bx \leq d \\
 &\quad x \in X \\
 &= -v_0 b + \min_{x \in X} (c + v_0 A)x \\
 &\quad Bx \leq d \\
 &\quad x \in X \\
 &= -v_0 b + \min_{x \in X} (c + u_0)x \quad (v_0 A = u_0) \\
 &\quad Bx \leq d \\
 &\quad x \in X \\
 &= -v_0 b + v(D u_0) - (-u_0 y_0) \quad ((x_0, y_0) \in SO(D u_0)) \\
 &= v_0 (A y_0 - b) + v(D u_0) \quad (v_0 A = u_0)
 \end{aligned}$$

então, como  $v_0 \in SO(R_A)$ , pelo que

$$\lambda_A = v(R_A) = v(R_A v_0) = v_0(A y_0 - b) + v(D u_0)$$

e, além disso,  $(x_0, y_0) \in SO(D u_0)$  e  $v_0 \geq 0$ , pelo que

$$\lambda_A \leq v(D u_0) \leq v(D) (=d). \quad \blacklozenge$$

Provamos assim que  $d \geq \lambda_A$ . Da mesma forma se prova que  $d \geq \lambda_B$ . Assim:

**Corolário 3.2:**  $d \geq \max \{ \lambda_A, \lambda_B \}$ . \blacklozenge

Analogamente ao que fizemos para o Reforço do Dual vamos agora estudar uma interpretação primal da Decomposição Lagrangeana. Para tal precisamos do seguinte lema:

**Lema 3.3:** Sejam  $S$  e  $T$  subconjuntos de  $U$  e  $S \times T$  o produto cartesiano de  $S$  por  $T$ . Então:

(i)  $\text{Conv } S \times T = \text{Conv } S \times \text{Conv } T$

(ii)  $(u, v) \in \text{Conv } S \times T$  se e só se  $u \in \text{Conv } S \cap \text{Conv } T$  \blacklozenge

**Prova:** Seja  $(u, v) \in \text{Conv } S \times T$ . Então, existem pontos  $(s_k, t_k)$  em  $S \times T$  e escalares  $\lambda_k$  não negativos, tais que:

$$(u, v) = \sum_k \lambda_k (s_k, t_k) = \left( \sum_k \lambda_k s_k, \sum_k \lambda_k t_k \right), \text{ com } \sum_k \lambda_k = 1.$$

Assim,

$$u = \sum_k \lambda_k s_k, v = \sum_k \lambda_k t_k, \text{ com } \sum_k \lambda_k = 1$$

e portanto  $u \in \text{Conv } \mathcal{S}$ ,  $v \in \text{Conv } \mathcal{T}$ , isto é,  $(u, v) \in \text{Conv } \mathcal{S} \times \text{Conv } \mathcal{T}$ .

Reciprocamente, seja  $(u, v) \in \text{Conv } \mathcal{S} \times \text{Conv } \mathcal{T}$ . De  $u \in \text{Conv } \mathcal{S}$  concluímos que existem escalares  $\lambda_i \geq 0$  e pontos  $s_i \in \mathcal{S}$  tais que  $u = \sum \lambda_i s_i$  e  $\sum \lambda_i = 1$ .

Dado que  $v \in \text{Conv } \mathcal{T}$ , existem escalares  $\mu_j \geq 0$  e pontos  $t_j \in \mathcal{T}$  tais que  $v = \sum \mu_j t_j$  e  $\sum \mu_j = 1$ .

Então,

$$\begin{aligned} (u, v) &= \left( \sum \lambda_i s_i, \sum \mu_j t_j \right) = \left( \sum \lambda_i \left( \sum \mu_j \right) s_i, \sum \mu_j \left( \sum \lambda_i \right) t_j \right) = \\ &= \left( \sum_{i,j} \lambda_i \mu_j s_i, \sum_{i,j} \mu_j \lambda_i t_j \right) = \sum_{i,j} \lambda_i \mu_j (s_i, t_j). \end{aligned}$$

Além disso,  $\sum_{i,j} \lambda_i \mu_j = \sum_i \lambda_i \left( \sum_j \mu_j \right) = \sum_i \lambda_i = 1$ , donde se conclui que  $(u, v) \in \text{Conv } \mathcal{S} \times \mathcal{T}$ , ficando assim provada a condição (i), a partir da qual (ii) se torna imediata. ♦

Passemos então à interpretação primal da Decomposição Lagrangeana. Da teoria geral da Dualidade Lagrangeana sabemos que resolver o problema (D) é o mesmo do que resolver o seguinte primal convexificado:

$$(Q') \quad d = \min cx$$

$$x = y$$

$$(x, y) \in \text{Conv} \{ (x, y) : Ay \leq b, y \in \mathcal{Y}, Bx \leq d, x \in \mathcal{X} \}.$$

No entanto, há outro primal modificado, expresso apenas nas variáveis originais  $x$ , cuja resolução é equivalente a (D). Consideremos então o problema:

$$(Q) \quad \begin{aligned} &\min cx \\ &x \in \text{Conv} \{ x \in \mathcal{Y} : Ax \leq b \} \\ &x \in \text{Conv} \{ x \in \mathcal{X} : Bx \leq d \}. \end{aligned}$$

O teorema seguinte garante que (Q) é equivalente a (D), isto é, que os dois problemas têm o mesmo valor ótimo.

**Teorema 3.4:**  $d = v(Q)$ , isto é, resolver o dual (D) é o mesmo do que minimizar  $cx$  na intersecção dos envolventes convexos das duas subestruturas. ♦

**Prova:** Vamos mostrar que  $v(Q) = v(Q')$ , porque já sabemos que  $v(Q') = d$ .  
Pela condição (i) do lema 3.3,

$$\begin{aligned} v(Q') &= \min_{\substack{cx \\ x=y \\ (x,y) \in \text{Conv}\{x \in X: Bx \leq d\} \times \text{Conv}\{y \in Y, Ay \leq b\}}} \\ &= \min_{\substack{cx \\ (x,x) \in \text{Conv}\{x \in X: Bx \leq d\} \times \text{Conv}\{y \in Y, Ay \leq b\}}} \end{aligned}$$

e pela condição (ii),

$$\begin{aligned} &= \min_{x \in \text{Conv}\{x \in X: Bx \leq d\} \cap \text{Conv}\{y \in Y, Ay \leq b\}} cx \\ &= v(Q). \end{aligned}$$

Repare-se que estes resultados implicam as seguintes desigualdades

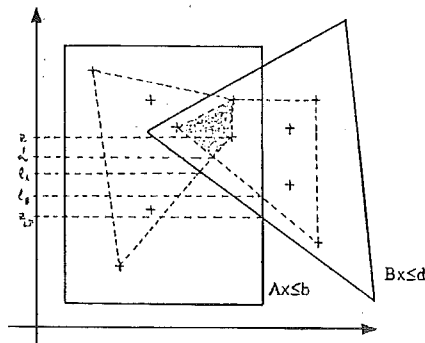
$$v(P) \geq v(D) \geq v(R) \geq v(LP)$$

sendo (LP) a relaxação linear de (P) e  $v(R) = \max\{v(R_A), v(R_B)\}$ .

Tal facto é ilustrado pelo exemplo seguinte.

**Exemplo 3.5:** Na figura, o rectângulo representa  $Ax \leq b$ , o triângulo representa  $Bx \leq d$ , os pontos assinalados com + são os elementos de  $X$  e a função objectivo é uma recta horizontal.

Usando as interpretações primais dos duais Lagrangeanos  $(R_A)$ ,  $(R_B)$  e (D), é fácil de ver que os valores  $\lambda_A$ ,  $\lambda_B$  e  $d$  são os assinalados na figura.



A Decomposição Lagrangeana conduz-nos a um dual (D), em que temos um multiplicador por variável. Se, em vez de usarmos a duplicação de variáveis, relaxássemos (P) como em (R<sub>A</sub>) ou (R<sub>B</sub>), certamente que teríamos muito menos multiplicadores (um por restrição).

Assim, resolver (R<sub>A</sub>) ou (R<sub>B</sub>) pode ser mais fácil do que resolver (D) mas, por outro lado,  $v(D) \geq \max \{ \lambda_A, \lambda_B \}$ . Para discutirmos as condições suficientes para que  $v(Q) = \lambda_A$ , precisamos da seguinte definição:

**Definição 3.6:** Sejam **A** e **B** dois subconjuntos do mesmo conjunto  $\mathbb{T}$ .

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \text{ diz-se } \mathbf{B}\text{-convexo} & \text{ se e só se } \text{Conv} \{ \mathbf{A} \cap \mathbf{B} \} = \\ & = \text{Conv } \mathbf{A} \cap \text{Conv } \mathbf{B}. \end{aligned} \quad \blacklozenge$$

Por exemplo,  $\{x: Ax \leq b\}$  é  $\{0, 1\}^n$ -convexo se e só se  $\text{Conv}\{x \in \{0, 1\}^n: Ax \leq b\} = \{x \in \{0, 1\}^n: Ax \leq b\} = \{x \in [0, 1]^n: Ax \leq b\}$ .

**Teorema 3.7:** Se  $\{x: Ax \leq b\}$  é  $\mathbf{Y}$ -convexo e  $\{x \in \mathbf{X}: Bx \leq d\}$  compacto, então  $d = \lambda_A$ .  $\blacklozenge$

**Prova:**

$$\begin{aligned} d = v(Q) &= \min_{\substack{x \in \text{Conv}\{x \in \mathbf{Y}: Ax \leq b\} \\ x \in \text{Conv}\{x \in \mathbf{X}: Bx \leq d\}}} cx \\ &= \min_{\substack{x \in \text{Conv } \mathbf{Y}, Ax \leq b \\ x \in \text{Conv} \{x \in \mathbf{X}: Bx \leq d\}}} cx \end{aligned}$$

Como  $\mathbf{Y} \supset \mathbf{X} \supset \{x \in \mathbf{X}: Bx \leq d\}$ ,  $\text{Conv } \mathbf{Y} \supset \text{Conv}\{x \in \mathbf{X}: Bx \leq d\}$  e

$$\begin{aligned} d &= \min_{\substack{Ax \leq b \\ x \in \text{Conv} \{x \in \mathbf{X}: Bx \leq d\}}} cx \end{aligned}$$

Por outro lado, pela equivalência entre dualizar e convexizar, sabemos que

$$\begin{aligned} \lambda_A &= \min_{\substack{Ax \leq b \\ x \in \text{Conv} \{x \in \mathbf{X}: Bx \leq d\}}} cx \end{aligned}$$

pelo que  $d = \lambda_A$ .  $\blacklozenge$

Não apresentaremos explicitamente condições suficientes para que  $d = \ell_B$  pois para as obter basta para isso trocar os papéis das restrições  $Ax \leq b$  e  $Bx \leq d$ .

#### 4. Reforço da Decomposição Lagrangeana

Estudámos até agora duas formas distintas de obter minorantes do valor óptimo de um problema: os Métodos de Reforço do Dual e a Decomposição Lagrangeana. Veremos em seguida como poderemos combinar estas duas ideias de forma a termos um minorante melhor do que qualquer um dos obtidos anteriormente.

Consideremos novamente um problema de programação inteira, (P), com a estrutura especial de que falámos anteriormente:

$$\begin{aligned} \text{(P)} \quad & z = \min cx \\ & Ax \leq b \\ & Bx \leq d \\ & x \in X \end{aligned}$$

Suponhamos que conhecemos um minorante  $d_k$  do valor óptimo do problema (P),  $d_k \leq z$ , e seja  $X_k = \{x \in X: cx \geq d_k\}$ .

Então o valor óptimo de (P) não se altera se substituirmos o conjunto  $X$  por  $X_k$  (como fizemos no estudo do Reforço do Dual) e duplicarmos as variáveis (como fizemos no estudo da Decomposição Lagrangeana). Assim, (P) pode ser reformulado da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \text{(P } R_k) \quad & z = \min cx \\ & Ax \leq b \\ & By \leq d \\ & x = y, \\ & x \in X_k, y \in Y, Y \supseteq X_k. \end{aligned}$$

Para criar esta sequência de problemas (P  $R_k$ ),  $k = 0, 1, \dots$ , precisamos de um minorante inicial  $d_0$ . Tomaremos para esse valor, como é natural, o do minorante obtido pela Decomposição Lagrangeana, isto é,  $d_0 = d$ . Consideremos agora o dual lagrangeano (DL  $R_k$ ), obtido de (P  $R_k$ ) relaxando as restrições de igualdade (no que se segue, admitiremos que o conjunto  $Y$  é tal que  $\{y \in Y: By \leq d\}$  é um subconjunto compacto e não vazio de  $\mathbb{R}^n$ ):

$$\begin{aligned}
 \text{(DL } R_k) \quad d_{k+1} = \max_{v \in \mathbb{R}^n} \quad & \min ((c+v)x + (-v)y) \\
 & Ax \leq b \quad By \leq d \\
 & x \in X_k \quad y \in Y
 \end{aligned}$$

Note-se que a dificuldade de calcular este novo minorante  $d_{k+1}$  depende da estrutura das restrições  $Ax \leq b$  e do conjunto  $X$ : Se as restrições forem de semi-afectação, por exemplo, e  $X = \{0, 1\}^n$ , o subproblema nas variáveis  $x$  é um problema de mochila binária de escolha múltipla, que já vimos ser um problema "fácil" de entre os "difíceis", conseguindo-se assim calcular  $d_k$  com um esforço moderado. Com a construção desta sequência de problemas duais (DL  $R_k$ ), para  $k = 0, 1, \dots$ , obtivemos uma sucessão de minorantes do valor óptimo do problema inicial (P). Estes minorantes são sempre melhores do que se tivéssemos apenas usado o Método de Reforço do Dual. De facto,

**Teorema 4.1:**  $d_{k+1} \geq \ell_{k+1}$ . ♦

**Prova:** Pelo teorema 3.1, tem-se sempre  $d \geq \ell$ . ♦

Tendo em conta que usámos o Método de Reforço do Dual para obter esta sucessão de minorantes  $d_k$ , é de suspeitar que a sucessão seja crescente. Se assim for, como  $d_0 = d$ , poderemos ainda concluir que estes minorantes são melhores do que os obtidos quando usámos apenas a duplicação de variáveis. Vejamos então o seguinte resultado:

**Teorema 4.2:**  $d_{k+1} \geq d_k \geq d$ . ♦

**Prova :**

$$\begin{aligned}
 d_{k+1} = \max_{v \in \mathbb{R}^n} \quad & \min ((c+v)x + (-v)y) \\
 & Ax \leq b \quad By \leq d \\
 & cx \geq d_k \quad y \in Y \\
 & x \in X
 \end{aligned}$$

Seja  $v = 0$ . Então

$$\begin{aligned}
 d_{k+1} & \geq \min cx \geq d_k. \\
 & Ax \leq b \\
 & cx \geq d_k \\
 & x \in X.
 \end{aligned}$$
♦

Seria interessante saber em que condições é que há vantagem em construir esta sequência de duais, isto é, quando é que a sequência de minorantes é estritamente crescente.

**Teorema 4.3:**  $d_{k+1} > d_k$  se e só se:

$$\text{Conv} \{x \in \mathbb{X} : cx = d_k, Ax \leq b\} \cap \text{Conv} \{y \in \mathbb{Y} : By \leq d\} = \emptyset. \quad \diamond$$

**Prova :** Sejam

$\mathfrak{X} = \{x \in \mathbb{X}, y \in \mathbb{Y} : Ax \leq b, By \leq d\}$  e  $\mathfrak{X}_k = \{(x, y) \in \mathfrak{X} : cx = d_k\}$  subconjuntos de  $\mathbb{X} \times \mathbb{Y}$ ; então (P R<sub>k</sub>) pode ser equivalentemente reformulado por

$$\begin{aligned} \min \quad & cx \\ \text{s.t.} \quad & x = y \\ & cx \geq d_k \\ & (x, y) \in \mathfrak{X} \end{aligned}$$

Consideremos agora o dual obtido por relaxar as restrições de igualdade:

$$\begin{aligned} d_{k+1} = \max_{v \in \mathbb{R}^n} \quad & \min_{\substack{(x, y) \in \mathfrak{X} \\ cx \geq d_k}} \quad cx + v(x-y) \end{aligned}$$

Então, pelo teorema 2.4,

$$d_{k+1} > d_k \text{ se e só se } \text{Conv} \mathfrak{X}_k \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^{2n} : x = y\} = \emptyset$$

o que é equivalente a dizer que não existem pontos  $(x, x)$  no conjunto

$$\text{Conv} \{x \in \mathbb{X} : Ax \leq b, cx = d_k\} \times \text{Conv} \{y \in \mathbb{Y} : By \leq d\}$$

isto é, pelo lema 3.3,

$$\text{Conv} \{x \in \mathbb{X} : Ax \leq b, cx = d_k\} \cap \text{Conv} \{y \in \mathbb{Y} : By \leq d\} = \emptyset. \quad \diamond$$

O exemplo 4.5 ilustra, geometricamente, uma situação em que  $d_1 > d$ . Antes, porém, veremos uma interpretação primal do problema dual.

**Teorema 4.4:** O valor óptimo de  $(DL R_k)$  é o mesmo do que o valor óptimo de qualquer um dos seguintes primais modificados

$$d_{k+1} = \min_{x=y} cx = \min_{x \in \text{Conv } \mathcal{A}_k \cap \text{Conv } \mathcal{B}} cx$$

$(x, y) \in \text{Conv } \mathfrak{X}_k$

onde

$$\mathfrak{X}_k = \{x \in \mathfrak{X}, y \in \mathfrak{Y} : cx \geq d_k, Ax \leq b, By \leq d\},$$

$$\mathcal{A}_k = \{x \in \mathfrak{X} : cx \geq d_k, Ax \leq b\} \text{ e } \mathcal{B} = \{x \in \mathfrak{Y} : By \leq d\}. \quad \blacklozenge$$

**Prova:** Se usarmos a interpretação primal referida no teorema 2.3 (reforço do dual), temos que

$$d_{k+1} = \min_{\substack{x=y \\ (x, y) \in \text{Conv } \mathfrak{X}_k}} cx$$

Por outro lado, uma vez que também duplicámos as variáveis, podemos fazer a interpretação primal usando o teorema 3.4. Assim,

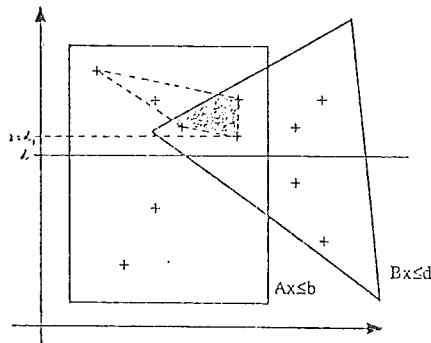
$$d_{k+1} = \min_{x \in \text{Conv } \mathcal{A}_k \cap \text{Conv } \mathcal{B}} cx.$$

Note-se que esta segunda igualdade poderia ter sido obtida da primeira usando o lema 3.3. \blacklozenge

**Exemplo 4.5:** A representação geométrica de  $Ax \leq b$  e de  $\mathfrak{X}$  é a explicada no exemplo 3.5. Nesse exemplo, vimos também como foi obtido o valor de  $d$ . Usando a interpretação primal do teorema 4.4, poderemos determinar  $d_1$  por

$$d_1 = \min_{x \in \text{Conv } \{x \in \mathfrak{X} : cx \geq d, Ax \leq b\} \cap \{x : Bx \leq d\}} cx$$

como se pode ver na figura abaixo.





## 5. Aplicações

Aplicaremos agora o Reforço da Decomposição Lagrangeana a três problemas específicos: ao problema da Afectação Generalizada, Barcia & Jörnsten (1990), ao Problema de Matching com Limites Superiores Generalizados, Amado & Barcia (1988) e Amado (1989), e finalmente ao Problema do Caixeiro Viajante Assimétrico, Barros & Barcia (1990) e Barros (1990).

### 5.1. Afectação Generalizada

O Problema da Afectação Generalizada, (PAG), que é um dos problemas ao qual a relaxação Lagrangeana tem sido aplicada com sucesso, pode ser formalizado como segue:

$$\begin{aligned}
 z = \min \quad & \sum_{i,j} c_{ij} x_{ij} \\
 & \sum_j a_{ij} x_{ij} \leq b_i \quad \forall i \\
 & \sum_i x_{ij} = 1 \quad \forall j \\
 & x_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall i, j
 \end{aligned}$$

Uma abordagem ao (PAG) baseada na Decomposição Lagrangeana foi testada por Jörnsten & Nasberg (1986) com resultados de qualidade semelhante aos que se obtém quando se relaxam as restrições de semi-afectação no processo Lagrangeano clássico. Sabemos hoje, Guignard & Kim (1987), que isso é devido ao facto de as restrições de semi-afectação terem a propriedade de  $\{0, 1\}^{mn}$ -convexidade.

Com a utilização do Reforço da Decomposição Lagrangeana este problema fica resolvido, uma vez que acrescentamos uma restrição de mochila ao problema de semi-afectação.

Seja então  $d_k$  um limite inferior para  $z$ . Uma reformulação válida para o (PAG), permitindo a aplicação do Reforço da Decomposição Lagrangeana, é a seguinte:

$$\begin{aligned}
 z = \min \quad & \sum_{i,j} c_{ij} x_{ij} \\
 & \sum_j a_{ij} y_{ij} \leq b_i \quad \forall i
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_i x_{ij} &= 1 & \forall j \\ \sum_{i,j} c_{ij} x_{ij} &\geq d_k \\ x_{ij} &= y_{ij} \quad \forall i \in j; x_{ij}, y_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall i \in j \end{aligned}$$

Relaxando agora as restrições  $x_{ij} = y_{ij}$  obteremos os seguintes sub-problemas:

$$\begin{aligned} \min \sum_{i,j} (c_{ij} - v_{ij})x_{ij} &+ \min \sum_{i,j} v_{ij} y_{ij} \\ \sum_{i,j} c_{ij} x_{ij} &\geq d_k & \sum_j a_{ij} y_{ij} \leq b_i \quad \forall i \\ \sum_i x_{ij} &= 1 \quad \forall j & y_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall i \in j \\ x_{ij} &\in \{0, 1\} \quad \forall i \in j \end{aligned}$$

Verificamos então que o subproblema em  $x$  é uma mochila binária de escolha múltipla enquanto que o sub-problema em  $y$  se separa num conjunto de mochilas binárias usuais. Note-se que estes problemas não são demasiado difíceis, veja-se Dudzinsky & Walukiewicz (1987) e Martello & Toth (1990), sendo o dual assim formalizado um dual forte pois nenhum dos sub-problemas goza da propriedade de  $\{0, 1\}^{mn}$ -convexidade.

Experiência computacional com esta abordagem do problema encontra-se descrita em Barcia & Jornsten (1990).

## 5.2. Matching com Limites Superiores Generalizados

Veremos agora uma aplicação das técnicas anteriormente descritas ao Problema de determinação do Matching Perfeito de custo mínimo com restrições do tipo Limite Superior Generalizado (matching problem with generalized upper bounds).

Seja  $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{A}, C)$  um grafo com um conjunto de vértices  $\mathcal{V}$  um conjunto de arestas  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{V} \times \mathcal{V}$ ,  $\mathcal{A} = \{1, \dots, n\}$ , e uma função de custo  $C: \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}_+$ , ou seja  $C(j) = c_j \geq 0 \quad \forall j \in \mathcal{A}$ .  $X \subseteq \mathcal{A}$  diz-se um matching perfeito em  $\mathcal{G}$  se e só se qualquer que seja o vértice de  $\mathcal{V}$  existe uma única aresta de  $X$  nele incidente. Representamos por  $\mathcal{M}$ , o conjunto de todos os matchings perfeitos em  $\mathcal{G}$ .

A cada matching perfeito  $X$  associamos um vector  $x \in \{0, 1\}^n$ , onde  $n = |\mathcal{A}|$ , tal que,  $\forall j \in \mathcal{A}$ ,  $x_j = 1$  se a aresta  $j$  pertence a  $X$  e  $x_j = 0$  no caso

contrário, e representaremos indiferentemente por  $X$  ou por  $x$  o matching em questão. Seja agora  $c \in \mathbb{N}_0^n$  um vector cujas componentes são os custos  $c_j$ ,  $\forall j \in \mathbf{A}$ , de cada aresta.

Nestas condições, o Problema de Matching (PM) consiste em

$$(PM) \quad \begin{array}{l} \min cx \\ X \in \mathbf{M} \end{array}$$

Seja  $\{K_1, \dots, K_m\}$  uma partição do conjunto das arestas em  $m$  cores e seja  $t \in \mathbb{N}^m$ ,  $1 \leq t_j \leq |\mathbf{V}|/2$ ,  $j = 1, \dots, m$ . Resolver o Problema de Matching com Limites Superiores Generalizados (PM LSG) é determinar o matching perfeito de custo mínimo que tenha no máximo  $t_i$  arestas da cor  $i$ ,  $i=1, \dots, m$ , isto é

$$(PM LSG) \quad \begin{array}{l} \min cx \\ X \in \mathbf{M} \\ |X \cap K_i| \leq t_i, i=1, \dots, m. \end{array}$$

Note-se que, se em (PM LSG) aparecessem apenas um dos tipos de restrições  $X \in \mathbf{M}$  ou  $|X \cap K_i| \leq t_i$ ,  $i=1, \dots, m$ , mas não ambos, o problema seria um problema fácil. Este facto poderia levar-nos a duplicar as variáveis. No entanto, uma vez que  $\{X: X \in \mathbf{M}\}$  é um conjunto compacto e  $\text{Conv}\{x \in \{0, 1\}^n: |X \cap K_i| \leq t_i, i=1, \dots, m\} = \{x \in [0, 1]^n: |X \cap K_i| \leq t_i, i=1, \dots, m\}$ , o Problema de Matching com Limites Superiores Generalizados verifica as condições suficientes para que o limite da Decomposição Lagrangeana não seja melhor do que o obtido relaxando apenas  $x \in \mathbf{M}$  ou  $|X \cap K_i| \leq t_i$ ,  $i=1, \dots, m$ .

Vamos, por isso, utilizar o Método de Reforço da Decomposição Lagrangeana para determinar um minorante do valor óptimo de (PM LSG). Suponhamos que dispomos dum minorante  $d_k$  do valor óptimo de (PM LSG).

Então, aplicando o Reforço da Decomposição Lagrangeana podemos reformular o problema da seguinte maneira:

$$(PM LSG R_k)_1 \quad \begin{array}{l} \min cx \\ X \in \mathbf{M} \\ |Y \cap K_i| \leq t_i, i=1, \dots, m \\ x = y \\ cy \geq d_k \\ x \in \{0, 1\}^n, y \in \mathbf{Y}, \mathbf{Y} \supset \{0, 1\}^n. \end{array}$$

O dual Lagrangeano obtido por relaxar as restrições  $x = y$  é

$$\begin{aligned}
 (\text{DL } R_k)_1 \quad d_{k+1} = \max & \quad [ \min (c+v)x + \min (-v)y ] \\
 v \in \mathbb{R}^n \quad X \in \mathbb{M} & \quad cy \geq d_k \\
 x \in \{0, 1\}^n & \quad |Y \cap K_i| \leq t_i, i=1, \dots, m \\
 & \quad y \in Y
 \end{aligned}$$

Note-se que, desta forma, obtivemos dois problemas mais fáceis de resolver do que o problema inicial. Nas variáveis- $x$  temos o conhecido problema de matching, para a resolução do qual existem algoritmos muito eficientes, veja-se Burkard & Derigs (1980) e Derigs (1988). Se  $Y = \{0, 1\}^n$ , o subproblema- $y$  é tão fácil de resolver como o problema de mochila de escolha múltipla que é um problema fácil de entre os difíceis. Se  $Y = \{0, 1\}^n$  temos um problema simples de programação linear.

Obviamente, se ao reformularmos (PM LSG) tivéssemos incluído a restrição  $cx \geq d_k$  em vez de  $cy \geq d_k$ , o que seria equivalente em termos de problema primal, o dual Lagrangeano obtido originava subproblemas diferentes. Assim, com esta segunda reformulação:

$$\begin{aligned}
 (\text{PM LSG } R_k)_2 \quad \min & \quad cx \\
 & \quad X \in \mathbb{M} \\
 & \quad |Y \cap K_i| \leq t_i, i=1, \dots, m \\
 & \quad x = y \\
 & \quad cx \geq d_k \\
 & \quad x \in \{0, 1\}^n, y \in Y, Y \supset \{0, 1\}^n.
 \end{aligned}$$

o dual obtido por relaxar  $x=y$  é

$$\begin{aligned}
 (\text{DL } R_k)_2 \quad d_{k+1} = \max & \quad [ \min (c+v)x + \min (-v)y ] \\
 v \in \mathbb{R}^n \quad X \in \mathbb{M} & \quad |Y \cap K_i| \leq t_i, i=1, \dots, m \\
 cx \geq d_k & \quad y \in Y, Y \supset \{0, 1\}^n \\
 x \in \{0, 1\}^n &
 \end{aligned}$$

Deste modo, passámos a ter dois subproblemas para resolver. O subproblema- $y$  consiste em resolver  $m$  problemas de mochila (disjuntos) com restrições de cardinalidade. O subproblema- $x$  é um problema de matching com uma restrição adicional, que é difícil de resolver exactamente, veja-se Ball et al. (1987).

Opta-se naturalmente pela primeira reformulação do problema visto que, com esta segunda reformulação, não reduzimos significativamente a dificuldade do problema original.

Experiência computacional com esta abordagem do problema está descrita em Amado (1989).

### 5.3. Caixeiro Viajante Assimétrico

O Problema do Caixeiro Viajante Assimétrico (PCVA) consiste em encontrar um percurso de custo mínimo para visitar  $n$  cidades sendo cada cidade visitada exactamente uma vez, sem hipóteses de simetria sobre a matriz dos custos.

Uma das formulações mais conhecidas para o problema do caixeiro viajante assimétrico é a de Dantzig et al. (1954).

Considere-se então um grafo orientado  $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{A}, C)$ , com um conjunto de vértices  $\mathcal{V} = \{1, \dots, n\}$ , um conjunto de arcos  $\mathcal{A} = \mathcal{V} \times \mathcal{V} - \{(i, i) : i \in \mathcal{V}\}$  e uma função de custo  $C: \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}_+$ , ou seja  $C((i, j)) = c_{ij} \geq 0 \forall (i, j) \in \mathcal{A}$ . Seja  $x_{ij} \in \{0, 1\}$ ,  $(i, j) \in \mathcal{A}$ , uma variável binária valendo 1 se  $(i, j)$  pertence à solução e valendo 0 no caso contrário. O (PCVA) pode então escrever-se como segue:

$$\begin{aligned}
 \text{(PCVA)} \quad z = \min \quad & \sum_{(i,j) \in \mathcal{A}} c_{ij} x_{ij} \\
 & \sum_{i \in \mathcal{V}} x_{ij} = 1 \quad \forall j \in \mathcal{V} \quad (1) \\
 & \sum_{j \in \mathcal{V}} x_{ij} = 1 \quad \forall i \in \mathcal{V} \quad (2) \\
 & \sum_{i \in \mathcal{S}} \sum_{j \notin \mathcal{S}} x_{ij} \geq 1 \quad \forall \mathcal{S} \subseteq \mathcal{V} \text{ e } 1 \leq |\mathcal{S}| < n \quad (3) \\
 & x_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall (i, j) \in \mathcal{A} \quad (4)
 \end{aligned}$$

As restrições de afectação (1) e (2) possibilitam que a solução tenha sub-percursos disjuntos destinando-se as restrições (3) a evitar que tal aconteça. No entanto esta formulação é redundante. Se impusermos apenas a reconectividade, isto é, que todo o vértice possa ser atingido a partir de um vértice fixo  $r$ , obtemos uma formulação válida com menor número de restrições do tipo (3), ou seja:

$$\text{(PCVA)}_r \quad z = \min \quad \sum_{(i,j) \in \mathcal{A}} c_{ij} x_{ij}$$

$$\sum_{i \in \mathbf{V}} x_{ij} = 1 \quad \forall j \in \mathbf{V} \quad (1)$$

$$\sum_{j \in \mathbf{V}} x_{ij} = 1 \quad \forall i \in \mathbf{V} \quad (2)$$

$$\sum_{i \in \mathbf{S}} \sum_{j \notin \mathbf{S}} x_{ij} \geq 1 \quad \forall \mathbf{S} \subseteq \mathbf{V}, r \in \mathbf{S}, |\mathbf{S}| < n \quad (3')$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall (i, j) \in \mathbf{A} \quad (4)$$

Prova-se que as relaxações lineares destas duas formulações têm o mesmo conjunto de soluções admissíveis, veja-se Barros & Barcia (1990), logo não há inconveniente algum em trabalhar com a segunda, que se presta a ser utilizada no contexto do Reforço da Decomposição Lagrangeana. Com efeito se  $d_k$  for um limite inferior válido para  $z$  podemos escrever:

$$\begin{aligned}
 z = \min \quad & \sum_{(i,j) \in \mathbf{A}} c_{ij} x_{ij} \\
 & \sum_{(i,j) \in \mathbf{A}} c_{ij} x_{ij} \geq d_k \\
 & \sum_{i \in \mathbf{V}} x_{ij} = 1 \quad \forall j \in \mathbf{V} \\
 & x_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall (i,j) \in \mathbf{A} \\
 & x_{ij} = y_{ij} \quad \forall (i,j) \in \mathbf{A} \\
 & \sum_{j \in \mathbf{V}} y_{ij} = 1 \quad \forall i \in \mathbf{V} \\
 & \sum_{i \in \mathbf{S}} \sum_{j \notin \mathbf{S}} y_{ij} \geq 1 \quad \forall \mathbf{S} \subseteq \mathbf{V}, r \in \mathbf{S}, |\mathbf{S}| < n \\
 & y_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall (i,j) \in \mathbf{A}
 \end{aligned}$$

Então, relaxando as restrições de igualdade  $x_{ij} = y_{ij}$  com multiplicadores  $u_{ij}$  obteremos o seguinte dual:

$$d_{k+1} = \max_{u_{ij}} [ \min \sum_{(i,j) \in \mathbf{A}} (c_{ij} - u_{ij}) x_{ij} + \min \sum_{(i,j) \in \mathbf{A}} u_{ij} y_{ij} ]$$

$$\sum_{(i,j) \in \mathbf{A}} c_{ij} x_{ij} \geq d_k \quad \sum_{j \in \mathbf{V}} y_{ij} = 1 \quad \forall i \in \mathbf{V}$$

$$\sum_{i \in \mathbf{V}} x_{ij} = 1 \quad \forall j \in \mathbf{V} \quad \sum_{i \in \mathbf{S}} \sum_{j \notin \mathbf{S}} y_{ij} \geq 1 \quad \forall \mathbf{S} \subseteq \mathbf{V}, r \in \mathbf{S}, |\mathbf{S}| < n$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall (i, j) \in \mathbf{A} \quad y_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall (i, j) \in \mathbf{A}$$

onde o subproblema em  $x$  não tem a propriedade de  $\{0, 1\}^{n(n-1)}$ -convexidade permitindo assim um dual mais forte do que se obteria relaxando apenas as restrições de semi-afecção.

Experiência computacional com esta abordagem para o (PCVA), bem como outros resultados interessantes sobre o problema, podem ser encontrados em Barros & Barcia (1990) e Barros (1990).

## 6. Conclusões

Nesta nota apresentaram-se o Reforço do Dual e a Decomposição Lagrangeana como duas formas distintas de obter minorantes do valor óptimo de um problema de minimização que dominam os obtidos com a Relaxação Lagrangeana usual. A combinação dos dois métodos, Reforço da Decomposição Lagrangeana estudado em seguida, produz um minorante que domina os resultantes de usar qualquer dos métodos separadamente, tendo sido caracterizados os casos de dominância estrita.

A finalizar, esta técnica combinada foi aplicada a três problemas específicos - o Problema da Afecção Generalizada, o Problema de Matching com Limites Superiores Generalizados e o Problema do Caixeiro Viajante Assimétrico - para os quais se mostra ser possível melhorar os limites usuais.

## Agradecimentos

Grande parte desta nota expõe ideias desenvolvidas em co-autoria.

Assim, queremos agradecer ao Kurt Jornsten (Universidade de Bergen) e à Ana Isabel Barros (Universidade Erasmus de Roterdão) a sua contribuição decisiva para o trabalho descrito neste "survey".

Desejamos ainda expressar a nossa gratidão ao Danish Research Council (Network on Mathematical Programming) e à Junta Nacional de Investigação Científica e Tecnológica (Projecto 8768MIC) por terem financiado parcialmente o trabalho de investigação aqui apresentado.

## Referências

- [1] Amado, L. (1989), "Reforço da Decomposição Lagrangeana: uma aplicação ao problema de Matching com limites superiores generalizados", Tese de Mestrado em Estatística e Investigação Operacional, Faculdade de Ciências, Universidade de Lisboa.
- [2] Amado, L., Barcia, P. (1988), "Improved Lagrangean Decomposition: the case for the matching problem with GUB side constraints", Proc. da 17 conferência da Sociedade Alemã de Investigação Operacional (DGOR), Springer-Verlag, Berlin.
- [3] Baal, M., Derigs, U. e Hilbrand, C. (1987), "Optimal Matchings with Generalized Upper Bounds", Universitäts Bayreuth, working paper.

- [4] Barcia, P. (1985), "Métodos de Reforço do Dual em Programação Inteira", tese de doutoramento em Engenharia de Sistemas, Instituto Superior Técnico de Lisboa.
- [5] Barcia, P. (1985a), "The Bound Improving Sequence Algorithm", *Operations Research Letters* 4, pp.27-30.
- [6] Barcia, P. (1987), "Constructive Dual Methods for Discrete Programming", *Discrete Applied Mathematics* 18, pp.107-117.
- [7] Barcia, P., Holm, S. (1988), "A Revised Bound Improving Sequence Algorithm", *European Journal of Operational Research* 36 (2), pp. 202-206.
- [8] Barcia, P. (1988a), "Improved Lagrangean Decomposition: Some theoretical results", Working Paper 94, Faculdade de Economia, Universidade Nova de Lisboa.
- [9] Barcia, P., Jörnsten, K. (1990), "Improved Lagrangean Decomposition: an application to the Generalized Assignment Problem", *European Journal of Operational Research* 46 (1), pp.84-92.
- [10] Barros, A.I. (1990), "Novos limites para o problema do caixeiro viajante assimétrico", Tese de Mestrado em Estatística e Investigação Operacional, Faculdade de Ciências, Universidade de Lisboa.
- [11] Barros, A.I., Barcia, P. (1990), "New bounds for the asymmetric Travelling Salesman Problem", Working Paper 158, Faculdade de Economia, Universidade Nova de Lisboa, submetido a *Discrete Applied Mathematics*.
- [12] Bazaraa, M., Shetty, C. (1979), "Nonlinear Programming", Wiley, New York.
- [13] Burkard, E., Derigs, U (1980), "Assignment and Matching Problems: Solution Methods with Fortran Programs", *Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems* 184, Springer-Verlag, Berlin.
- [14] Dantzig, G., Fulkerson, D., Johnson, S. (1954), "Solution of a large-scale travelling salesman problem", *Operations Research* 37, 2, pp.393-410.
- [15] Derigs, U. (1980), "Programming in Networks and Graphs", *Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems* 300, Springer-Verlag, Berlin.
- [16] Fisher, M. (1978), "Lagrangean Relaxation Methods for Combinatorial Optimization", University of Pennsylvania, Wharton working paper.
- [17] Fisher, M. (1985), "An Applications Oriented Guide to Lagrangean Relaxation", *Interfaces* 15, pp.10-21.
- [18] Geoffrion, A. (1974), "Lagrangean Relaxation for Integer Programming", *Mathematical Programming* 13, pp.329-347.
- [19] Guignard, M., Kim, S. (1987), "Lagrangean Decomposition: a model yielding stronger Lagrangean bounds", *Mathematical Programming* 39, pp.215-228.
- [20] Jörnsten, K., Näsberg, M. (1986), "A New Lagrangean Approach to the Generalized Assignment Problem", *European Journal of Operational Research* 27, pp.313-323
- [21] Martello, S., Toth, P. (1990), "Knapsack problems: Algorithms and computer implementations", Wiley, New York.
- [22] Minoux, M. (1983), "Programation Mathématique: théorie et algorithmes", Dunod, Paris.
- [23] Nemhauser, G., Wolsey, L. (1988), "Integer and Combinatorial Optimization", Wiley, New York.
- [24] Parker, R., Rardin, R. (1988), "Discrete Optimization", Academic Press, San Diego.
- [25] Rockafeller, T. (1970), "Convex Analysis", Princeton University Press, Princeton, New Jersey.
- [26] Shapiro, J. (1979), "Mathematical Programming: Structures and Algorithms", Wiley, New York.
- [27] Shapiro, J. (1979a), "A survey of Lagrangean Techniques for Discrete Optimization", *Annals of Discrete Mathematics*, vol. 5, pp.113-138.
- [28] Walukiewicz, S., Dudzinsky, K. (1987), "Exact Methods for the Knapsack Problem and its Generalizations", *European Journal of Operational Research* 28, pp.3-21.



# AN IMPLEMENTATION OF KELLER'S METHOD FOR TWO CONCAVE OPTIMIZATION PROBLEMS

**J.J. Júdice\***

Departamento de Matemática  
Universidade de Coimbra  
3000 Coimbra - Portugal

**A.M. Faustino\***

Departamento de Engenharia Civil  
Universidade do Porto  
4000 Porto - Portugal

## Resumo

Neste artigo é apresentada uma implementação do método de Keller para a determinação de um mínimo local dum problema de programação quadrática côncava. O processo é recomendável para problemas de grandes dimensões, pois a matriz da forma quadrática não necessita de ser fatorizada. A extensão do método de Keller para a resolução de programas quadráticos com limites superiores e a sua implementação são descritos neste artigo. Finalmente o uso destes processos para a resolução do Problema de Desigualdades Variacionais Côncavo é ainda investigado.

## Abstract

In this paper an implementation of Keller's method for finding a local minimum of a Concave Quadratic Programming Problem is presented. The procedure is quite suitable for large-scale problems, since it does not require the decomposition of the matrix of the quadratic form. The extension of Keller's method to deal with Concave Quadratic Programs with upper-bounds and its implementation are described. The use of these procedures for solving the Concave Linear Variational Inequality Problem is also investigated.

## 1. Introduction

A Quadratic Programming Problem (QP) can be defined as

$$\text{Minimize } f(x) = p^T x + \frac{1}{2} x^T H x \tag{1}$$

$$\text{subject to } Ax = b, x \geq 0$$

where  $x, p \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}^m, A$  is a real  $m$  by  $n$  matrix and  $H$  is a symmetric matrix of order  $n$ . This problem has been studied during the past years and many applications of this problem have been proposed [6, 22, 26]. Furthermore nonlinear programming problems can be solved as a sequence of quadratic programs [10]. The program (1) is concave if its matrix  $H$  is negative semi-definite (NSD), that is, it satisfies

$$x^T H x \leq 0 \text{ for all } x \in \mathbb{R}^n \tag{2}$$

\* Apoiado parcialmente pelo INIC, projecto 89IEXA15

If a quadratic program is concave, then a local minimum is not necessarily global and the main direct methods for solving this problem only find a local minimum. The problem of finding a global minimum of a Concave QP is much more complex. Branch-and-bound and cutting-plane methods have been proposed for this problem [26], but their efficiency for large-scale problems is questionable. Recently [15], we have been investigating the use of a sequential algorithm that searches a global minimum by solving a finite number of Linear Complementarity Problems (LCP), that is, problems of the form

$$w = q + Mz, \quad z \geq 0, \quad w \geq 0 \quad (3)$$

$$z_i w_i = 0 \quad i \in S$$

where  $w \in \mathbb{R}^m$ ,  $z \in \mathbb{R}^n$ ,  $S$  is a set of cardinality  $|S| \leq \min\{m, n\}$  and  $M_{SS} \in \text{NSD}$ . Concave LCPs with  $S = \{1, \dots, n\}$  and  $n \leq m$  are usually solved by hybrid enumerative methods which incorporate a procedure to find a local minimum of a concave quadratic function [1, 16].

There exist several direct methods for finding a local minimum of a Concave Quadratic Program. These algorithms are more or less equivalent [2] and find the local minimum by solving the following LCP

$$\begin{aligned} \text{(KT)} \quad & y = p + Hx - A^T \lambda \\ & 0 = -b + Ax \\ & x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad x^T y = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

which represents the Kuhn-Tucker conditions [20, 17] of the QP(1). For large-scale problems, these algorithms are usually implemented by using in each iteration  $k$  the LU decomposition of a matrix  $V_k$  associated with the linear constraints of the problem (KT) [28]. The LU decomposition of  $V_k$  is updated from the LU decomposition of the matrix  $V_{k-1}$  corresponding to the previous iteration. To do this, there exist schemes which preserve the stability and sparsity of the LU decomposition [28]. The dimensions of the matrices  $V_k$  are usually larger than the number  $m$  of equality constraints of the QP and this is a drawback for using direct methods to the solution of QPs with large number of variables.

Keller's method [18] is one of the most important methods for finding a local minimum of a QP. If  $H \in \text{NSD}$ , then this algorithm moves through extreme points of the QP constraint set

$$K = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b, x \geq 0\} \quad (5)$$

in a way similar to the simplex method for linear programming. It is then possible to implement Keller's method by only using LU decompositions of the Basis matrices associated to the system  $Ax=b$ . The matrix  $H$  is not decomposed, whence it is possible to solve Concave QPs with large number of variables. In this paper we propose such an implementation for the QP (1) and its extension for QPs with inequality constraints and bounds.

A related problem with the QP is the Linear Variational Inequality Problem (LVI) which consists of

$$\begin{aligned} \text{Find } \bar{x} \in K \text{ such that} \\ (x - \bar{x})^T (p + H\bar{x}) \geq 0 \text{ for all } x \in K \end{aligned} \quad (6)$$

where  $K$  is the set defined by (5) and  $H$  is a symmetric or an unsymmetric matrix. This problem has a large number of applications, primarily in engineering and economics [25, 12]. Furthermore, it is possible to solve nonlinear variational inequality problems as a sequence of LVIs [12, 21]. The LVI (6) is equivalent to (KT) [17], whereby it can be solved by any quadratic programming method such as Keller's if the matrix  $H$  is symmetric. However, in most of its applications the matrix  $H$  is unsymmetric and QP algorithms cannot be used. The LVI can always be solved by a modification of Lemke's method [8, 9], but this procedure becomes inefficient for large-scale problems. In this paper we investigate the use of Keller's method to solve LVIs when  $H$  is unsymmetric NSD. Despite not being able to theoretically prove convergence, we present some arguments that lead to the conjecture that the method always converges to a solution of the LVI if  $K$  is bounded and  $H \in \text{NSD}$ . The computational experience with the algorithm confirms this assertion and it is also included.

The organization of this paper is as follows. In Section 2, we briefly describe Keller's method for the Concave QP (1). The implementation of this algorithm is presented in Section 3, together with the process of dealing with inequality constraints. The use of this implementation to solve LVIs with

$H \in \text{NSD}$  is discussed in Section 4. The extension of Keller's method to solve Concave QPs and LVIs with upper-bounds is described in Section 5. Finally some computational experience with the algorithm for medium and large scale QPs and LVIs is presented in Section 6.

### 2. Keller's method for Concave Quadratic Programs

Keller's method finds a local minimum of QP (1) by solving the associated (KT) problem. To apply the algorithm it is necessary to find an initial basic feasible solution  $\bar{x}$  of the constraint set  $K$ , which is done by using Phase 1 of the simplex method. Let  $A = [B : C]$ , where  $B$  is the Basis matrix associated with the basic solution  $\bar{x}$  and  $F$  and  $T$  be the sets of indices corresponding to the columns of  $A$  that belong to  $B$  and  $C$  respectively ( $F \cup T = \{1, \dots, n\}$ ). Then we can write the linear equality constraints of (KT) in the following form

$$\begin{array}{l}
 y_F = \\
 y_T = \\
 \gamma =
 \end{array}
 \begin{array}{c|ccc}
 & 1 & x_F & x_T & \lambda \\
 \hline
 & p_F & H_{FF} & H_{FT} & -B^T \\
 & p_T & H_{TF} & H_{TT} & -C^T \\
 & q & B & C & 0
 \end{array} \tag{7}$$

where  $q = -b$  and  $\gamma$  is a vector of artificial variables. Furthermore we can associate to  $\bar{x}$  a tableau of the form

$$\begin{array}{l}
 y_T = \\
 \lambda = \\
 x_F =
 \end{array}
 \begin{array}{c|ccc}
 & 1 & x_T & \gamma & y_F \\
 \hline
 & \bar{p}_T & \bar{H}_{TT} & \bar{H}_{TF} & -\bar{C}^T \\
 & \bar{p}_F & \bar{H}_{FT} & \bar{H}_{FF} & -\bar{B}^T \\
 & \bar{q} & \bar{C} & \bar{B} & 0
 \end{array} \tag{8}$$

Since  $B$  is nonsingular, then the matrix

$$\begin{bmatrix} H_{FF} & -B^T \\ B & 0 \end{bmatrix} \tag{9}$$

is also nonsingular and it is easy to see that the tableau (8) is obtained from (7) by a principal pivot operation [5] whose pivot is the matrix (9).

Since  $\lambda$  is a vector of unrestricted variables and  $\bar{x}$  is a feasible solution of  $K$ , then  $\bar{q} \geq 0$  and

$$y_T = \bar{p}_T, \lambda = \bar{p}_F, x_F = \bar{q}, y_F = x_T = 0$$

is a solution of (KT) (and  $\bar{x}$  is a local minimum of QP (1)) provided  $\bar{p}_T \geq 0$ .

If the vector  $\bar{p}_T$  has at least a negative component, then the entering variable  $x_r$  is chosen by the criterion

$$\bar{p}_r = \min \{ \bar{p}_i : i \in T \text{ and } \bar{p}_i < 0 \} \tag{10}$$

The value of the entering variable  $x_r$  is increased from zero. Since  $H \in \text{NSD}$ , then also  $\bar{H} \in \text{NSD}$  [5] and the increase of  $x_r$  can only be blocked by a variable  $x_s$  with  $s \in F$  that turns to be negative. Hence the maximum value that  $x_r$  can take is given by

$$\frac{\bar{q}_s}{-\bar{c}_{sr}} = \min \left\{ \frac{\bar{q}_i}{-\bar{c}_{ir}} : i \in F \text{ and } \bar{c}_{ir} < 0 \right\} \tag{11}$$

If no blocking variable exists, then the quadratic function is unbounded from below on  $K$ . Otherwise the matrix

$$\begin{bmatrix} \bar{h}_{rr} & -\bar{c}_{sr} \\ \bar{c}_{sr} & 0 \end{bmatrix} \tag{12}$$

is nonsingular and the method performs a principal pivot operation whose pivot is the matrix (12). Another tableau of the same form (8) with  $\bar{H} \in \text{NSD}$  is then obtained and the process is repeated.

Since  $\bar{H} \in \text{NSD}$  in each iteration, then  $\bar{h}_{rr} \leq 0$  and it is easy to see [18] that the value of the quadratic function reduces when a nondegenerate pivot operation (that is  $\bar{q}_s > 0$ ) is performed. The termination of the method in a finite number of iterations follows from this property. In case a degenerate pivot takes place, then criteria (10) and (11) are replaced by Bland's rule [3] until a nondegenerate pivot occurs. This is sufficient to guarantee the convergence of the algorithm in a finite number of steps [4].

### 3. Implementation of Keller's method

As discussed in Section 2, each iteration of Keller's method has associated a tableau of the form (8) with  $\bar{H} \in \text{NSD}$  and  $\bar{q} \geq 0$ . Furthermore, it is only necessary to know the vectors  $\bar{q}$  and  $\bar{p}_T$  and the column  $\bar{C}_r$  of the matrix  $\bar{C}$ , where  $r$  satisfies the criterion (10).

Since all elements of the tableau (8) can be obtained from tableau (7) by a principal pivot operation whose pivot is the matrix (9), then

$$\begin{bmatrix} \bar{q} \\ \bar{p}_F \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} H_{FF} & -B^T \\ B & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} p_F \\ q \end{bmatrix}$$

Hence the vectors  $\bar{q}$  and  $\bar{p}_F$  are computed by solving the linear system

$$\begin{bmatrix} H_{FF} & -B^T \\ B & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{q} \\ \bar{p}_F \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} p_F \\ q \end{bmatrix}$$

which is equivalent to solving

$$\begin{cases} B\bar{q} = -q & (13) \end{cases}$$

$$\begin{cases} B^T \bar{p}_F = p_F + H_{FF} \bar{q} & (14) \end{cases}$$

We note that the second system is only necessary to compute the vector  $\bar{p}_T$ , since

$$\bar{p}_T = p_T - \begin{bmatrix} H_{FF} & -C^T \\ B & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} p_F \\ q \end{bmatrix}$$

or

$$\bar{p}_T = p_T + H_{TF} \bar{q} - C^T \bar{p}_F \quad (15)$$

Finally the column  $\bar{C}_r$  is given by  $\bar{C}_r = -B^{-1} C_r$ , that is, it is the solution of the following linear system

$$B \bar{C}_r = -C_r \quad (16)$$

The implementation to be proposed in this paper considers in each iteration the LU decomposition of the matrix B, where L is stored in product form and U is stored by rows in a collection of vectors storage scheme [28], [7, chapter 2].

Each principal pivot operation simply amounts to an interchange of a column of B with a column of C. Hence the updating procedure for the LU decomposition described in [28] is used to compute the matrices L and U in each iteration. The matrices A and H are stored by columns in a collection of vectors storage scheme. The matrix H is stored as an unsymmetric matrix in order to facilitate the products (14) and (15). As it is usual in this kind of implementation, reinversions [13] are performed periodically. These reinversions consist of computing the LU decomposition of a Basis matrix directly by using a technique that combines  $P^4$  algorithm [13, 14] with threshold pivoting and Markowitz techniques [7] in a way similar to [28].

This implementation can also be used if inequalities exist in the constraint set of QP (1). Suppose that  $Ex \geq g$  ( $E \in \mathbb{R}^{t \times n}$ ,  $g \in \mathbb{R}^t$ ) represent the  $t$  inequalities of  $K$ . By introducing  $t$  slack variables  $z_i$  we can transform the program into the form

$$\begin{aligned} \text{Minimize } & \begin{bmatrix} q \\ 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} H & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} \\ \text{Subject to } & \begin{bmatrix} A & 0 \\ E & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ g \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} \geq 0 \end{aligned} \tag{17}$$

which is similar to (1). This transformation implies an increase of the dimension of the matrix of the quadratic form. However, the storage of this matrix by a collection of vectors scheme only requires  $t$  more integers. Furthermore it is possible to perform the products (14) and (15) by exploiting the null blocks of the matrix of the quadratic form.

The most relevant feature of this implementation is that the matrix  $H$  is not decomposed. This makes possible the solution of Concave QPs with large number of variables and reasonable number of constraints.

#### 4. Solution of the Concave Linear Variational Inequality Problem

If the constraint set  $K$  is bounded, then the LVI (6) has at least a solution [19, chapter 1], which can be obtained by solving the problem (KT) presented in Section 1. If  $H$  is symmetric NSD, then Keller's method can be used to solve this problem and terminates with a solution of the LVI. If we call infeasibility to each row  $i$  such that  $\bar{p}_i < 0$ , then Keller's method can be seen as a Bard-type method [24] such that in each iteration the infeasibility  $r$  is removed, where  $r$  is given by the criterion (10). This property only follows from  $H \in \text{NSD}$  and does not need symmetry to hold. Since in the implementation proposed in Section 2 the matrix  $H$  is stored as an unsymmetric matrix, then it can be used to solve LVIs if  $H$  is an unsymmetric NSD matrix and  $K$  is bounded.

The arguments presented in the last paragraph do not establish the theoretical convergence of Keller's method to a solution of the LVI. The proof of the finite termination of Keller's method for solving LVIs with  $H$  symmetric NSD relies on the decrease in each iteration of the value of the

quadratic function  $f$  given by (1). If  $H$  is unsymmetric NSD this does not necessarily hold and a possible proof for finite termination must rely on other property. However, in all the computational tests performed so far, Keller's method has always converged to a solution of the LVI. This fact and the arguments presented above lead to our conjecture that Keller's method always converges to a solution of the LVI, when  $H \in \text{NSD}$  and  $K$  is bounded.

### 5. Solution of Concave QPs and LVIs with upper-bounds

Consider the quadratic program with upper-bounds

$$\begin{aligned} \text{Minimize} \quad & q^T x + \frac{1}{2} x^T H x \\ \text{subject} \quad & Ax = b, \quad 0 \leq x \leq d \end{aligned} \tag{18}$$

A local minimum of QP (18) is found by solving the following problem, which represents the Kuhn-Tucker conditions of the QP (18) [17, 20]

$$\begin{aligned} y &= p + Hx - A^T \lambda \\ 0 &= -b + Ax \\ 0 &\leq x \leq d \\ x_i = 0 &\Rightarrow y_i \geq 0 \\ x_i = d_i &\Rightarrow y_i \leq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \\ 0 < x_i < d_i &\Rightarrow y_i = 0 \end{aligned} \tag{19}$$

The extension of Keller's method to be proposed in this section starts by finding a feasible solution of the constraint set of QP (18). This is achieved by using the procedure Phase 1 with Working Bases described in [23, chapter 11]. Let  $B$ ,  $C^2$  and  $C^1$  be the submatrices of  $A$  associated to the basic variables, nonbasic variables at zero level and nonbasic variables at the upper-bound level respectively. Then  $A = [B : C]$  and  $C = [C^1 : C^2]$ . If  $F$ ,  $T_1$  and  $T_2$  ( $T = T_1 \cup T_2 = \{1, \dots, n\} - F$ ) are the sets of column indices associated to  $B$ ,  $C^1$  and  $C^2$  respectively, then the feasible solution obtained by the Phase 1 algorithm has the form

$$\bar{x}_F = \bar{q}, \quad \bar{x}_{T_1} = d^1, \quad \bar{x}_{T_2} = 0 \tag{20}$$



As in Section 2 we can associate to this solution a tableau of the form

	$x_{T_1}$	$x_{T_2}$	$\mathcal{J}$	$y_F$	
$y_{T_1} =$	$\bar{p}_{T_1}$	$\bar{H}_{T_1 T_1}$	$\bar{H}_{T_1 T_2}$	$\bar{H}_{T_1 F}$	$-(\bar{C}^1)^T$
$y_{T_2} =$	$\bar{p}_{T_2}$	$\bar{H}_{T_2 T_1}$	$\bar{H}_{T_2 T_2}$	$\bar{H}_{T_2 F}$	$-(\bar{C}^2)^T$
$\lambda =$	$\bar{p}_F$	$\bar{H}_{F T_1}$	$\bar{H}_{F T_2}$	$\bar{H}_{F F}$	$-\bar{B}^T$
$x_F =$	$\bar{q}$	$\bar{C}^1$	$\bar{C}^2$	$\bar{B}$	$0$

(21)

which is obtained from (7) by a principal pivot operation with pivot (9).

Since  $x_{T_1} = d^1$ , then the values of the basic variables  $\bar{p}_{T_1}$ ,  $\bar{p}_{T_2}$ ,  $\bar{p}_F$  and  $\bar{q}$  are computed in a slightly different way by

$$\begin{bmatrix} \bar{q} \\ \bar{p}_F \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} H_{FF} & -B^T \\ \bar{B} & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} p_F + H_{F T_1} d^1 \\ q + C^1 d^1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \bar{p}_{T_1} \\ \bar{p}_{T_2} \end{bmatrix} = \bar{p}_T = (p_T + H_{T T_1} d^1) + \begin{bmatrix} H_{FF} & -C^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{q} \\ \bar{p}_F \end{bmatrix}$$

Hence these vectors are computed by the following process

Solve  $B\bar{q} = -(q + C^1 d^1)$   
 Solve  $B^T \bar{p}_F = (p_F + H_{F T_1} d^1) + H_{F F} \bar{q}$   
 Compute  $\bar{p}_T = p_T + H_{T T_1} d^1 + H_{T F} \bar{q} - C^T \bar{p}_F$  (22)

which is quite similar to formulas (13) - (15).

The extension of Keller's method to the solution of problem (19) is quite similar to the simplex method with upper-bounds [23, chapter 11]. If for the solution  $\bar{x}$  given by (20) we have  $\bar{p}_{T_1} \leq 0$  and  $\bar{p}_{T_2} \geq 0$ , then a solution of (19) has been found and  $\bar{x}$  is a local minimum of QP(18). Otherwise we find the entering variable  $x_r$  by the following criterion

$$|\bar{p}_r| = \max \{ |\bar{p}_i| : (i \in T_1 \text{ and } \bar{p}_i > 0), (i \in T_2 \text{ and } \bar{p}_i < 0) \} \quad (23)$$

The value of the entering variable  $x_r$  is then increased from zero ( $r \in T_2$ ) or decreased from  $d_r$  ( $r \in T_1$ ). Since  $H \in \text{NSD}$ , then also  $\bar{H} \in \text{NSD}$  and this increase or decrease can only be blocked by a variable  $x_s$  that attains one of the bounds. The criterion (11) to find this variable has to be modified and it is presented below.

(I) Case of  $r \in T_1$  - Compute

$$\theta_1 = \begin{cases} \frac{\bar{q}_s - \bar{c}_{sr} d_r}{-\bar{c}_{sr}} = \max \left\{ \frac{\bar{q}_i - \bar{c}_{ir} d_r}{-\bar{c}_{ir}} : i \in F \text{ and } \bar{c}_{ir} > 0 \right\} \\ -\infty \text{ if } \bar{c}_{ir} \leq 0 \text{ for all } i \in F \end{cases}$$

$$\theta_2 = \begin{cases} \frac{(\bar{q}_s - \bar{c}_{sr} d_r) - d_s}{-\bar{c}_{sr}} \\ = \max \left\{ \frac{(\bar{q}_i - \bar{c}_{ir} d_r) - d_i}{-\bar{c}_{ir}} : i \in F \text{ and } \bar{c}_{ir} < 0 \right\} \\ -\infty \text{ if } \bar{c}_{ir} \geq 0 \text{ for all } i \in F \end{cases}$$

and let  $\theta = \max \{0, \theta_1, \theta_2\}$ . Then three possible cases may occur:

- (i) If  $\theta = 0$ , then  $x_r$  takes the value zero. Hence no pivot operation is performed and we simply have  $T_1 = T_1 - \{r\}$  and  $T_2 = T_2 \cup \{r\}$ .
- (ii) If  $\theta = \theta_1$ , then  $x_r$  is blocked by the variable  $x_s$  that attains the value zero. Hence a pivot operation with pivot (12) is performed and  $x_s$  becomes a nonbasic variable at zero level. Then  $F = F - \{s\} \cup \{r\}$  and  $T_1 = T_1 - \{r\}$  and  $T_2 = T_2 \cup \{s\}$ .
- (iii) If  $\theta = \theta_2$ , then  $x_r$  is blocked by the variable  $x_s$  that attains the upperbound  $d_s$ . Then a pivot operation with pivot (12) is performed and  $x_s$  becomes a nonbasic variable with value  $d_s$ . Hence

$$F = F - \{s\} \cup \{r\} \text{ and } T_1 = T_1 - \{r\} \cup \{s\}.$$

(II) Case of  $r \in T_2$  - Compute

$$\theta_1 = \begin{cases} \frac{\bar{q}_s}{-\bar{c}_{sr}} = \min \left\{ \frac{\bar{q}_i}{-\bar{c}_{ir}} : i \in F \text{ and } \bar{c}_{ir} < 0 \right\} \\ +\infty \text{ if } \bar{c}_{ir} \geq 0 \text{ for all } i \in F \end{cases}$$

$$\theta_2 = \begin{cases} \frac{d_s - \bar{q}_s}{-\bar{c}_{sr}} = \min \left\{ \frac{d_i - \bar{q}_i}{-\bar{c}_{ir}} : i \in F \text{ and } \bar{c}_{ir} > 0 \right\} \\ +\infty \text{ if } \bar{c}_{ir} \leq 0 \text{ for all } i \in F \end{cases}$$

and let  $\theta = \min \{\theta_1, \theta_2, d_r\}$ . Then three possible cases may occur:

- (i) If  $\theta = d_r$ , then  $x_r$  takes the value  $d_r$  and we have  $T_2 = T_2 - \{r\}$  and  $T_1 = T_1 \cup \{r\}$ .

(ii) If  $\theta = \theta_1$ , then a pivotal operation with pivot (12) is performed and  $x_s$  becomes a nonbasic variable at zero level. Then

$$F = F - \{s\} \cup \{r\} \text{ and } T_2 = T_2 - \{r\} \cup \{s\}.$$

(iii) If  $\theta = \theta_2$ , then a pivot operation with pivot (12) is performed and  $x_s$  becomes a nonbasic variable with value  $d_s$ . Hence

$$F = F - \{s\} \cup \{r\}, T_1 = T_1 \cup \{s\} \text{ and } T_2 = T_2 - \{r\}.$$

After this iteration has been performed a new tableau of the same form (21) is obtained and the process is repeated. If we call nondegenerate pivots to all the cases in which the entering variable changes value, then it is easy to see that the value of the quadratic function  $f$  is reduced for nondegenerate pivots. Then the method terminates in a finite number of iterations if only nondegenerate pivots are used. In case of degenerate pivots the lexico-rule described in [23, chapter 11] or a modification of the Bland's rule [11] is sufficient to guarantee convergence.

To apply the criteria presented in this section, it is only necessary to compute the transformed  $\bar{C}_r$  of the column  $r$  of the matrix  $C$ . As before this vector is obtained by solving the system (16). Hence the computational work in each iteration for QPs with or without upper-bounds is similar. As before, the LU decomposition of the Basis matrix  $B$  is updated whenever a pivot operation is performed. If only a change of the status of a nonbasic variable occurs, then no updating is needed, since the Basis matrix does not change in this case.

As before,  $H$  is stored as an unsymmetric matrix in the implementation of the extended Keller's method. Hence the procedure can be used to solve problem (19) when  $H$  is an unsymmetric NSD matrix. Since problem (19) is equivalent to LVI (6) where

$$K = \{x \in R^n : Ax = b, 0 \leq x \leq d\}$$

then the extended Keller's method can be used to find a solution for the LVI. As before no theoretical proof for the convergence of the algorithm is known. By using similar arguments to those used in Section 4, we make the conjecture that the algorithm always converges to a solution of the LVI.

**6. Computational Experience**

In this section we present some computational experience with the implementation of Keller's method in solving Concave QPs and LVIs with and without upper-bounds. Two types of test problems have been considered. The first set of test problems (TP1, TP2, TP3) were taken from [11]. All the elements of the matrices of the quadratic forms of these QPs have been multiplied by  $-1$  for H to become NSD. All these QPs have upper-bounds on the values of the variables. In order to have some experience with Keller's method for Concave QPs without upper-bounds, all these bounds have been removed and the constraint  $e^T x = \alpha_0$ , with  $e = (1, \dots, 1)^T$  and  $\alpha_0 > 0$ , has been added to make bounded the set K. The other test problems TP4, TP5, TP6 and TP7 have been constructed by using the technique described in [29] to generate the matrix H and an adaptive process for sparse matrices of the technique presented in [27] to generate the constraints of the set K. To construct LVIs with unsymmetric NSD matrices we have modified some elements of the matrices H of the problems TP1-TP7 in order to make them unsymmetric.

The computational tests were performed in a CDC CYBER 180-830 of University of Porto and their results are presented in tables 1 and 2. In these tables m and n represent the numbers of constraints and variables of the QPs and LVIs respectively and

$$r(A) = \frac{\text{number of nonzeros of } A}{n}, \quad r(H) = \frac{\text{number of nonzeros of } H}{n}$$

NI = number of iterations, TS = CPU time in seconds

TP	m	n	r(A)	Phase 1		Keller's Method					
						Symmetric H			Unsymmetric H		
				NI	TS	r(H)	NI	TS	r(H)	NI	TS
1	300	599	2.5	310	20.9	3.	44	4.6	3.	29	3.1
2	400	799	2.5	414	37.4	3.	49	6.2	3.	41	5.7
3	500	999	2.5	516	58.	3.	54	9.6	3.	46	8.
4	89	500	7.8	135	22.1	6.2	723	210.	4.9	428	124.
5	100	500	7.1	184	40.5	6.2	642	245.	4.9	653	245.
6	80	600	7.7	180	36.9	9.3	486	162.	7.2	434	139.
7	100	600	7.0	191	46.7	9.3	792	348.	7.2	994	383.

Table 1 - QPs and LVIs without upper-bounds

TP	m	n	r(A)	Phase 1		Keller's Method					
				NI	TS	Symmetric H			Unsymmetric H		
						r(H)	NI	TS	r(H)	NI	TS
1	299	599	1.5	299	15.2	3.	300	20.2	3.	594	51.4
2	399	799	1.5	399	27.2	3.	398	36.5	3.	794	90.
3	499	999	1.5	499	42.	3.	498	56.	3.	994	142.
4	50	500	6.6	455	49.4	6.2	630	120.	4.9	644	119.
5	80	500	4.9	637	90.	6.2	877	216.	4.9	850	210.
6	50	600	6.6	602	77.4	9.3	1102	244.	7.2	1076	230.
7	80	600	4.9	786	122.	9.3	1348	393.	7.2	1284	357.

Table 2 - QPs and LVIs with upper-bounds

The results presented in tables 1 and 2 show the efficiency of the implementation for solving Concave QPs and LVIs with symmetric or unsymmetric matrices. It also follows that the dimension and density of the matrix A have a much stronger influence on the behavior of the method than those of the matrix H. This confirms the ability of this implementation for solving QPs and LVIs with large number of variables and reasonable number of constraints.

An important contribution of this paper is to show that it is possible to solve Concave QPs and LVIs without modifying the matrix H of these problems. We think that another efficient implementations can be developed to solve Concave QPs and LVIs whose constraint sets have special structures, like generalized upper bounds or even Concave QP and LVI transportation problems [23].

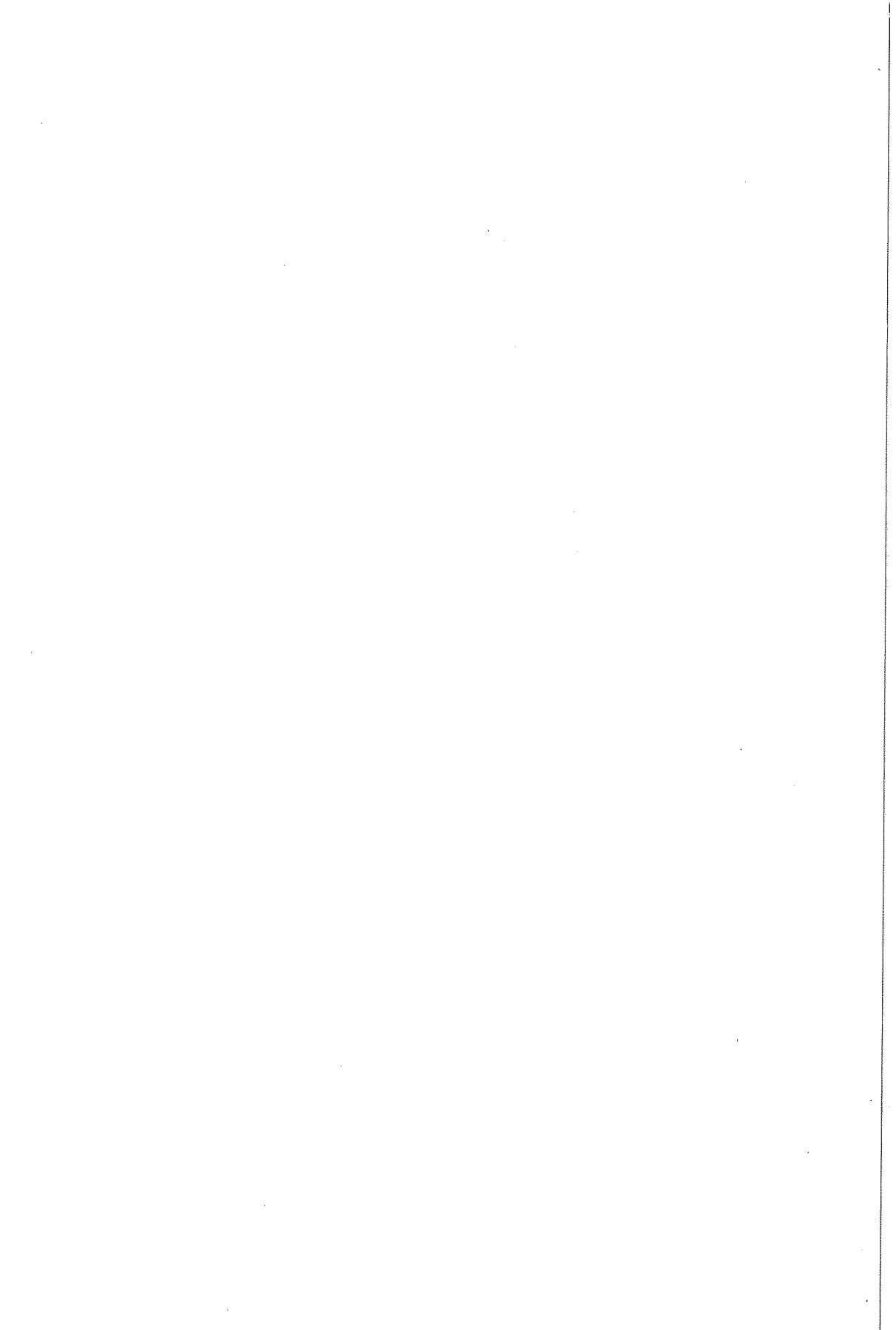
It is known that finding local minima of Concave Nonlinear Programs and solving Nonlinear Concave Variational Inequality Problems can be done by using sequential algorithms which in each iteration find a local minimum of a Concave QP or solve a LVI [10, 21]. If all the constraints of these nonlinear problems are linear, then all these QPs and LVIs have the same constraint set. Therefore the Basis matrix corresponding to a local minimum of a QP or to a solution of a LVI can be used as the initial Basis for the next QP or LVI to be solved. Since the implementation proposed in this paper only requires the

decomposition of the Basis matrices associated with the constraints, then it is quite recommendable for these sequential algorithms.

### References

- [1] F.A.Al-Khayyal, An Implicit enumeration procedure for the general complementarity problem, *Mathematical Programming Study* 31 (1987) 1-20.
- [2] M.J.Best, Equivalence of some quadratic programming algorithms, *Mathematical Programming* 30 (1984) 71-87.
- [3] R.G.Bland, New finite pivoting rules for the simplex method, *Mathematics of Operations Research* 2 (1977) 103-107.
- [4] Y.Y.Chang and R.W.Cottle, Least-index resolution of degeneracy in quadratic programming, *Mathematical Programming* 18 (1980) 127-137.
- [5] R.W.Cottle, The principal pivoting method of quadratic programming, in "Mathematics of Decision Sciences", edited by G.B.Dantzig and A.F.Veinott Jr., American Mathematical Society, Providence, 1968, pp.144-162.
- [6] A.A.Cyras, Analysis and optimization of elastoplastic systems, John Wiley and Sons, New York, 1983.
- [7] I.S.Duff, A.M.Erisman and J.K.Reid, *Direct Methods for Sparse Matrices*, Clarendon Press, Oxford, 1986.
- [8] B.C.Eaves, Computing stationary points, *Mathematical Programming Study* 7 (1978) 1-14.
- [9] B.C.Eaves, Computing stationary points, again, in "Nonlinear Programming 3", edited by O.L.Mangasarian, R.R.Meyer and S.M. Robinson, Academic Press, New York, 1978, pp.395-405.
- [10] P.E.Gill, W.Murray and M.H.Wright, *Practical Optimization*, Academic Press, 1981.
- [11] N.I.M.Gould, An algorithm for large scale quadratic programming, to appear in *IMA Journal of Numerical Analysis*.
- [12] P.T.Harker, *Predicting Intercity Freight Flows*, VNU Science Press, Utrecht, 1987.
- [13] E.Hellerman and D.Rarick, Reinsversion with the preassigned pivot procedure, *Mathematical Programming* 1 (1971) 195-216.
- [14] E.Hellerman and D.Rarick, The partitioned preassigned pivot procedure ( $p^4$ ), in "Sparse Matrices and their Applications", edited by D.J.Rose and R.A.Willoughby, Plenum Press, New York, 1972, pp.67-76.
- [15] J.J.Júdice and A.M.Faustino, A sequential LCP algorithm for Bilinear and Concave Quadratic Programming, *Investigação Operacional* 8 (2) (1988) 67-87.
- [16] J.J.Júdice and A.M.Faustino, An experimental investigation of enumerative methods for the linear complementarity problem, *Computers and Operations Research* 15 (1988) 417-426.
- [17] J.J.Júdice and G.Mitra, Reformulations of mathematical programming problems as linear complementarity problems and an investigation of their solution methods, *Journal of Optimization Theory and Applications* 57 (1988) 123-149.
- [18] E.L.Keller, The general quadratic optimization problem, *Mathematical Programming* 5 (1973) 311-337.
- [19] D.Kinderlehrer and G.Stampachia, *An Introduction to Variational Inequalities and their Applications*, Academic Press, New York, 1980.
- [20] H.Kuhn and W.Tucker, Nonlinear programming in "Second Berkeley Symposium in Mathematical Statistics and Probability", edited by J.Neyman, University of California Press, California, 1951, pp.80-90.
- [21] L.Mathiesen, Computation of economic equilibria by a sequence of linear complementarity problems, *Mathematical Programming Study* 23 (1985) 144-162.
- [22] B.A.McCarl, H.Moskowitz and H.Furtran, *Quadratic Optimization Applications*, *Omega* 5 (1977) 43-55.

- [23] K.G.Murty, *Linear Programming*, John Wiley & Sons, New York 1983.
- [24] K.G.Murty, Note on a Bard-type scheme for solving the complementarity problem, *Opsearch* 11 (1974) 123-130.
- [25] J.T.Oden and N.Nikuchi, Theory of variational inequalities with applications to problems of flow through porous media, *International Journal Engineering Science* 18 (1980) 1173-1284.
- [26] P.M.Pardalos and J.B.Rosen, *Constrained Global Optimization: Algorithms and Applications*, Lecture Notes in Computer Science 268, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1987.
- [27] B.Ramarao and C.M.Shetty, Application of disjunctive programming to the linear complementarity problem, *Naval Research Logistics Quarterly* 31 (1984) 589-600.
- [28] J.K.Reid, A sparsity - exploiting variant of the Bartels-Golub decomposition for linear programming bases, *Mathematical Programming* 24 (1982) 55-69.
- [29] G.W.Stewart, The efficient generation of random orthogonal matrices with an application to condition estimators, *SIAM Journal Numerical Analysis* 17 (1980) 403-409.





**Fotografia, Montagem  
Impressão e Acabamentos**  
Tip.Nocamil  
COIMBRA



## ÍNDICE

<i>J.P.Paixão, M.T.Melo, A.S.Almeida, Sistema Computacional para Planificação do Movimento de Vagões da Quimigal.....</i>	3
<i>J.D.Coelho, A Multicriteria Application on the Planning of Educational Facilities .....</i>	26
<i>L.N.Vicente, Utilização eficiente de veículos na recolha de resíduos sólidos urbanos .....</i>	47
<i>J.A.O.Soaes, J.A.Assis Lopes, Ciclos e Tendências em Séries Económicas: O PIB Português de 1913 a 1986 .....</i>	59
<i>L.Amado, P.Bárcia, Reforço da Decomposição Lagrangeana: Teoria e Aplicações.....</i>	70
<i>J.J.Júdice, A.M.Faustino, An implementation of Keller's method for two concave optimization problems .....</i>	95



Associação Portuguesa para o Desenvolvimento  
da Investigação Operacional

CÉSUR - Instituto Superior Técnico - Avenida Rovisco Pais  
1000 Lisboa - Telef. 80 74 55